دنباله‌ها

تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ را یک دنباله گویند و با $\{a_n\}$ نمایش می‌دهند.

دنباله‌ها جزو توابع گسسته هستند و برای آنها حد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim a_n = L \qquad ; \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

نکات:

- دنبالهٔ یکنوا و کراندار، همگراست.
- دنبالهٔ همگرا، کراندار است.
- اگر a_n به L همگرا باشد، آنگاه a_{mn+k} نیز همگرا به L است که در آن $m\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}$
- اگر a_n به L همگرا باشد، آنگاه حد آن یکتاست.
- اگر a_n همگرا باشد آنگاه $a_{n+1}-a_n$ همگرا به صفر است.

دنباله‌های خاص:

۱- دنبالهٔ حسابی: $a_{n+1}-a_n=d \quad ; \quad d:$ مقدار ثابت و قدر نسبت

اگر $d>0$ دنباله صعودی اکید و اگر $d<0$ دنباله، نزولی اکید است. در حالت $d=0$ دنباله ثابت است. $\Rightarrow \quad a_n = a_1 + (n-1)d$

۲- دنبالهٔ توانی (هندسی) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q \quad ; \quad q:$ مقدار ثابت و قدر نسبت

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

اگر $q>1$، دنباله صعودی اکید و اگر $0<q<1$ باشد نزولی اکید است و اگر $q<0$، دنبالهٔ نوسانی است.

اگر $|q|<1$ باشد $\lim q^n = 0$ و اگر $|q|>1$ باشد دنبالهٔ q^n واگراست.

اگر $q=1$ باشد q^n همگرا به یک و اگر $q=-1$ باشد q^n واگراست.

۳- دنبالهٔ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

این دنباله صعودی اکید و کراندار است (همگراست) و حد آن e است.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

توجه: دنبالهٔ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ دنباله‌ای نزولی اکید و همگرا به e است.

۴- دنبالهٔ $\dfrac{n!}{n^n}$

این دنباله، دنباله‌ای نزولی اکید و همگرا به صفر است.

اگر $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ باشد آنگاه دنبالهٔ $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ دنباله‌ای همگرا به e است.

نکته: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ به گونه‌ای باشد که $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجود باشد آنگاه داریم:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n}$$

مثال: حد دنبالهٔ $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ را تعیین کنید.

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

سری‌ها

اگر مجموع n جملهٔ اول دنباله $\{a_n\}$ را با S_n نمایش دهیم داریم:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

از آنجا دنبالهٔ $\{S_n\}$ تعریف می‌شود که اگر همگرا به S باشد می‌نویسیم $\lim S_n = S$ و یا $\lim \sum_{i=1}^{n} a_i = S$ و به اختصار می‌نویسیم

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ و می‌گوئیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا به S است. در غیر این صورت می‌گوئیم واگراست.

نکات:

- شرط لازم همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ آن است که دنبالهٔ a_n همگرا به صفر باشد.

- اگر a_n همگرا به L باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ همگرا به $L - a_1$ است.

- اگر $a_n > 0$, $\lim n a_n \neq 0$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

- اگر $q = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n}$ باشد آنگاه به ازای $|q|<1$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست و به ازای $|q|>1$ سری واگراست و به ازای $|q|=1$ چیزی نمی‌توان گفت.

- اگر $0 < a_n < b_n$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا خواهد بود و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگرا خواهد بود.

- اگر $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S_n$ باشد خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1 \quad , \quad S_n - S_{n-1} = a_n$$

مثال: حاصل $A = \sum_{n=1}^{m} \sin nx$ را محاسبه کنید.

حل: طرفین را در $2\sin\frac{x}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{m} 2\sin\frac{x}{2}\sin nx = \sum_{n=1}^{m} \cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x = 2\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{(n+1)}{2}x \Rightarrow A = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

سری توانی: سری $S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ را سری توانی گویند. هرگاه $|a|<1$، سری همگراست.

$$S_n=\frac{a^{n+1}-a}{a-1} \quad \Rightarrow \quad \lim S_n=\frac{a}{1-a}$$

مثال: حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}$ را حساب کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^x+(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

سری همساز یا هارمونیک: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ را گویند که واگراست.

- سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$: همانطور که گفته شد $\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{e}$ و چون $\left|\frac{1}{e}\right|<1$ پس سری فوق همگراست.

انتگرال

دیفرانسیل یک تابع:

در مسایل تخمین یک تابع از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\Delta x$$

مثال: مقدار تقریبی $\sin 31^\circ$ کدام است؟

$$f(x)=\sin x \quad ; x=\pi/6 ; \Delta x=\pi/180.$$

$$\sin(x+\Delta x)\simeq \sin x+(\cos x)\Delta x \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\pi/6+\pi/180\right)\simeq \sin\pi/6+\cos\pi/6\times\pi/180=1/2+\frac{\pi\sqrt{3}}{360}$$

تابع اولیه:

تابع $F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ گوئیم هر گاه داشته باشیم: $F'(x)=f(x)$

نتیجه: $F(x)+c$ نیز تابع اولیه تابع $f(x)$ است در نتیجه: $\int f(x)dx=F(x)+c$

انتگرال‌های مهم:

$$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c \qquad ;\alpha\neq -1$$

$$\int \sin\alpha x dx=-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x+c \quad ,\int \cos x dx=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x+c \qquad ;\alpha\neq 0$$

$$\int e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+c \qquad ;\alpha\neq 0$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\mathrm{Ln}|x|+c$$

$$\int\frac{1}{a^2+b^2x^2}dx=\frac{1}{ab}\mathrm{Arctg}\frac{bx}{a}+c \qquad ;\int\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}dx=\frac{1}{b}\mathrm{Arc}\sin\frac{bx}{a}+c$$

انتگرال جزء به جزء: $\int u dV=uV-\int V du$

$$\int \mathrm{tg}x\, dx=\mathrm{Ln}|\cos x|+c \qquad ;\int e^x\left(f(x)+f'(x)\right)dx=e^x f(x)+c$$

مثال: حاصل انتگرال $\int x^4 e^x dx$ را حساب کنید.

$$I=\int x^{۴}e^{x}dx=\int e^{x}\left(x^{۴}+۴x^{۳}-۴x^{۳}-۱۲x^{۲}+۱۲x^{۲}+۲۴x-۲۴x-۲۴+۲۴\right)dx$$

$$I=e^{x}\left(x^{۴}-۴x^{۳}+۱۲x^{۲}-۲۴x+۲۴\right)+c$$

تعویض متغیر در انتگرال‌گیری:

در انتگرال معین $I=\int f\left(x\right)dx$ اگر به جای x تابعی از y را قرار دهیم داریم:

$$x=g(y)\ \Rightarrow\ dx=g'\left(y\right)dy\ \Rightarrow\ I=\int f\left(x\right)dx=\int f(g\left(y\right))g'\left(y\right)dy$$

مثال: حاصل انتگرال مقابل را حساب کنید. $\int\frac{۱}{\sqrt{x}\left(۲+x\right)}dx$

$$x=y^{۲}\ \Rightarrow\ dx=۲ydy\ \Rightarrow\ I=\int\frac{۱}{y\left(۲+y^{۲}\right)}۲ydy\quad\Rightarrow\quad I=\int\frac{۲}{۲+y^{۲}}dy=\sqrt{۲}\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{x}{۲}}+c$$

مثال: حاصل $\int x^{x}\left(۱+Lnx\right)dx$ را حساب کنید.

حل: $y=x^{x}\ \Rightarrow\ dy=x^{x}\left(۱+Lnx\right)dx\quad\Rightarrow\quad I=\int dy=y+c=x^{x}+c$

قضایای انتگرال:

- خطی بودن انتگرال (α,β ثابت) $\int_{a}^{b}\alpha f+\beta g=\alpha\int_{a}^{b}f+\beta\int_{a}^{b}g$
- تفکیک انتگرال $\forall c\in[a.b]\ ;\ \int_{a}^{b}f=\int_{a}^{c}f+\int_{c}^{b}f$
- مقدار متوسط $(f(c))$ $\exists c\in[a,b]\ ;\ \int_{a}^{b}f=f\left(c\right)\left(b-a\right)$
- **قضیه اساسی اول انتگرال:** اگر f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و به ازای $a<x<b$ داشته باشیم: $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(x\right)dx$

در نتیجه با فرض پیوستگی تابع f در x داریم: $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$

قضیه اساسی دوم انتگرال: اگر تابع f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و تابع $F(x)$ در رابطه زیر صدق کند

$$\forall x\in\left(a,b\right)\ ;\ F'\left(x\right)=f\left(x\right)\quad\Rightarrow\quad\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

مثال: حاصل $I=\int_{۰}^{۱}(۲x-۱)^{n}dx$ را حساب کنید.

$$I=\frac{۱}{۲\left(n+۱\right)}\left(۲x-۱\right)^{n+۱}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲n+۲}\left(۱\right)^{n+۱}-\frac{۱}{۲n+۲}\left(-۱\right)^{n+۱}=\frac{۱+\left(-۱\right)^{n}}{۲n+۲}$$

قضیه انتگرال تابع معکوس: اگر تابع f در $[a,b]$ صعودی و انتگرال‌پذیر باشد، در این صورت انتگرال تابع معکوس را از رابطه زیر حساب کرد:

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx+\int_{f\left(a\right)}^{f\left(b\right)}f^{-۱}\left(y\right)dy=bf\left(b\right)-af\left(a\right)$$

مثال: حاصل $\int_{۱}^{e}Lnxdx$ را حساب کنید.

$$\int_{۱}^{e}Lnxdx+\int_{۰}^{۱}e^{y}dy=e\quad\Rightarrow\quad\int_{۱}^{e}Lnxdx=۱$$

* قضیه تقارن در انتگرال معین

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}f\left(a+b-x\right)dx$$

مثال: حاصل $\int_{۰}^{۱}x\left(۱-x\right)^{n}dx$ را حساب کنید:

$$I=\int_0^1 x(1-x)^n\,dx=\int_0^1(1-x)x^n dx \quad\Rightarrow I=\int_0^1\left(x^n-x^{n+1}\right)dx=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

- مساحت بین منحنی‌ها

- سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در بازه $[a,b]$ از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

نتیجه: سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور ox دربازه $[a,b]$: $s=\int_a^b |f(x)|\,dx$

سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور oy در بازه $c\le y\le d$: $s=\int_c^d x\,dy=\int_c^d f^{-1}(y)\,dy$

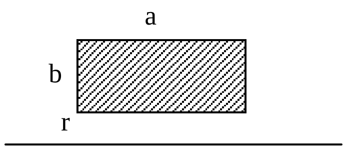
مثال: سطح محصور به منحنی $y=\mathrm{Ln}x$ و محور yها وقتی $0\le y\le 1$ را حساب کنید.

$$s=\int_0^1 e^y dy=e-1$$

- قضیه تخمین انتگرال معین: اگر در هر نقطه x از بازه $[a,b]$ و $\psi(x)\le f(x)\le\varphi(x)$ در نتیجه:

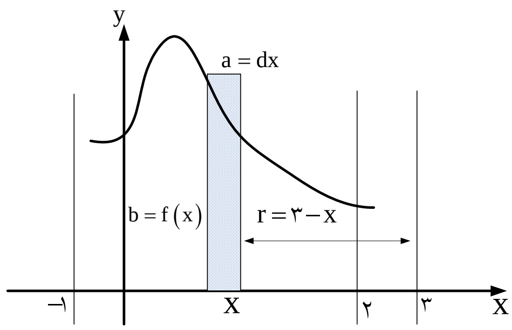
$$\int_a^b\psi(x)dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b\varphi(x)dx \qquad a<b$$

محاسبه حجم حاصل از دوران:



حجم حاصل از دوران مستطیل b,a حول خط به فاصله r :

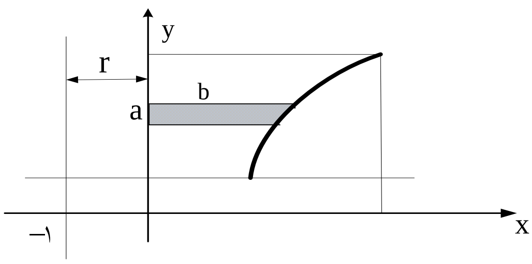
فرمول مهم: $V=\pi a(b+r)^2-\pi ar^2=\pi ab(b+2r)$



مثال: مطلوبست جزء حجم حادث از دوران سطح منحنی $f(x)^+$ با محور ox بین خطوط $x=-1$, $x=2$ حول خط $x=3$.

$$dv=\pi dx f(x)\left(f(x)+2(3-x)\right)=\pi f(x)\left(f(x)-2x+6\right)dx$$

مثال: جزء حجم حاصل از دوران منحنی $f(x)=\mathrm{Ln}x+x$ و محور oy بین خطوط $y=e+1$, $y=1$ حول خط $x=-1$ را تعیین کنید.



$$a=dy\ ,\ b=x\ ,\ r=1$$

$$dV=\pi x\,dy(x+2)=\pi\left(1+\frac{1}{x}\right)(x+2)x\,dx$$

$$V=\int_1^e\pi(x+1)(x+2)dx$$

با استفاده از روش فوق می‌توان اثبات کرد حجم حادث از دوران سطح محصور بین دو منحنی g,f در بازه $[a,b]$ حول خط $x=c$ برابر است با:

$$V=\int_a^b 2\pi|x-c||f(x)-g(x)|\,dx$$

قضیه: حجم حادث از دوران سطح بسته به مساحت s حول خطی که فاصله مرکز ثقل سطح از آن d باشد برابر است با $V=2\pi sd$

قضیه تعمیم انتگرال معین

اگر تابع f در فاصله b(x), a(x) پیوسته باشد و b(x), a(x) نیز مشتق‌پذیر باشند و داشته باشیم $G(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ آنگاه خواهیم داشت: $G'(x)=b'(x)f(b(x))-a'(x)f(a(x))$

مثال: اگر $G(x)=\int_{x^۲}^{\cos x}\frac{\cos t}{۱+t^۲}dt$ باشد $G'(x)$ کدام است؟

حل
$$G'(x)=\sin x\frac{\cos(\cos x)}{۱+\cos^۲ x}-۲x\frac{\cos x}{۱+x^۴}$$

چند نکته:

تابع زوج $f(x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx=۲\int_{\circ}^{a} f(x)dx$

تابع فرد $f(x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx=\circ$

تابع متناوب با دوره تناوب T $f(x) \Rightarrow \int_{a}^{at+nT} f(x)dx=n\int_{\circ}^{T} f(x)dx$

آزمون انتگرال در سری‌ها:

$$\int_{۱}^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \le a_۱+\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$$

یعنی شرط همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ آن است که $\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$ همگرا باشد و یا کراندار باشد.

مثال: سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ با توجه به نکته بالا همگراست و مقدار آن بین ۱ و ۲ است زیرا:

$$\int_{۱}^{\infty}\frac{۱}{x^۲}dx=\left(-\frac{۱}{x}\right)\Big|_{۱}^{\infty}=۱\ ,\quad a_۱=۱$$

- قضیه انتگرال ریمان:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=a_n}^{b_n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_{a}^{b} f(x)dx\ ;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a\quad ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=b$$

مثال: مطلوبست محاسبه حد $A=\lim_{n\to\infty}\left(\text{Arctg}\frac{۱}{n^۲}+\text{Arctg}\frac{۲}{n^۲}+\cdots+\text{Arctg}\frac{n-۱}{n^۲}\right)$

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n-۱}\text{Arctg}\frac{i}{n^۲}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n-۱}\frac{i}{n^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n-۱}\frac{i}{n}=\int_{\circ}^{۱}xdx=\frac{۱}{۲}$$

نمونه سؤالات:

۱- اگر f(x)= sinx باشد سری $\sum_{n=۱}^{۱۰۰} f(n)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sin ۵۰\ \sin ۵۰/۵}{\sin ۰/۵}$ ۲) $\frac{\sin ۵۰\ \sin ۴۹/۵}{\sin ۰/۵}$ ۳) sin50 ٤) 2sin50

۲– اگر مقدار c در قضیه مقدار میانگین برای تابع زیر در بازه داده شده باشد e^{c^2-c} کدام است؟

$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^t}{1+t}dt \quad 0\le x\le 1$$

۱) $\frac{1+c^2}{1+c}$ ۲) $\frac{1+c^2}{c+c^2}$

۳) $\frac{1+c^2}{2c+c^2}$ ۴) $\frac{1+c^2}{2c+2c^2}$

۳– حاصل $\int_0^1\frac{dx}{x^{0/992}}$ کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) 3Ln2 ۳) ۱ ۴) ۱۲۵

۴– مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ وقتی $0\le x\le 3$ حول محور oy کدام است؟

۱) $\frac{116\pi}{15}$ ۲) $\frac{166\pi}{15}$ ۳) 12π ۴) $\frac{232\pi}{15}$

۵– طول نقطه عطف منحنی $(x+1)e^{-x^2}$ کدام است؟

۱) x=0 ۲) x= 1 ۳) x= -1 ۴) x= 2

۶– شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x-1)^{2n}$ برابر ۴ است. حاصل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}+\frac{c_n}{c_n+1}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲/۵ ۳) ۴/۲۵ ۴) $\frac{257}{16}$

۷– اگر $f(x)=\int_0^x\sqrt{1+f(t)}dt$ باشد f(1) کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۸– حاصل $\int_0^{\infty}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) Ln2 ۴) –Ln2

۹– تابع f در شرط $f(x)=\int_0^x\frac{\sqrt{f(t)}}{\cos^2 t}dt$ صدق می‌کند. کدام صحیح است؟

۱) f در $\mathbb{R}$ پیوسته است ۲) f در $\mathbb{R}$ صعودی اکید است

۳) خط x= 0 عمود بر y= f(x) است ۴) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

۱۰– سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos x)^n$ همگرا به f(x) است حاصل $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

حل نمونه سؤالات:

۱– گزینه ۱ صحیح است.

$$A=\sum_{n=1}^{100}\sin n=\frac{1}{2\sin(0/5)}\sum_{n=1}^{100}2\sin n\sin(0/5)=\frac{1}{2\sin(0/5)}\sum_{n=1}^{100}\cos(n-0/5)-\cos(n+0/5)$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2\sin(0/5)}\left(\cos(0/5)-\cos(100/5)\right)=\frac{\sin 50\,\sin 50/5}{\sin(0/5)}$$

۲- گزینه ٤ صحیح است.
$$f(0)=f(1)=0 \Rightarrow \exists c\in(0,1):\quad 2c\frac{e^{c^2}}{1+c^2}-\frac{e^{c}}{1+c}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{c^2-c}=\frac{1+c^2}{2c+2c^2}$$

۳- گزینه ٤ صحیح است.
$$I=\int_0^1 x^{-0/992}dx=\frac{1}{1-0/992}x^{1-0/992}\Big|_0^1=\frac{1}{0/008}=125$$

٤- گزینه ٤ صحیح است.
$$ds=2\pi x\sqrt{dx^2+dy^2} \quad\Rightarrow\quad s=\int_0^3 2\pi x\sqrt{1+x}\,dx \quad\Rightarrow\quad s=2\pi\int_0^3 (x+1-1)(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$\Rightarrow s=2\pi\left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{232}{15}\pi$$

۵- گزینه ۲ صحیح است.
$$y'=e^{-x^2}\left(1-2x(x+1)\right) \Rightarrow y''=e^{-x^2}\left[-4x-3-2x\left(1-2x^2-2x\right)\right]=0$$
$$\Rightarrow 4x^3-2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

٦- گزینه ٤ صحیح است.
$$L=\lim\sqrt[n]{c_n}\,(x-1)^2<1 \Rightarrow |x-1|<4 \Rightarrow \lim\sqrt[n]{c_n}=\frac{1}{16}$$
$$L=\lim\frac{c_{n+1}}{c_n}(x-1)^2<1 \Rightarrow \lim\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{1}{16} \Rightarrow \lim\frac{c_n}{c_{n+1}}=16$$

۷- گزینه ۳ صحیح است.
$$f'(x)=\sqrt{1+f(x)}\quad ,f(0)=\int_0^0=0$$
$$\Rightarrow \int\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)}}dx=\int 1dx \Rightarrow 2\sqrt{1+f(x)}=x+c \Rightarrow f(x)=\left(\frac{x+2}{2}\right)^2-1 \quad\Rightarrow\quad f(1)=\frac{5}{4}$$

۸- گزینه ٤ صحیح است.
$$I=\int_0^\infty\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}dx=\int_0^\infty\int_1^2 -e^{-yx}dydx \Rightarrow I=\int_1^2\int_0^\infty -e^{-yx}dxdy=\int_1^2\frac{1}{y}e^{-yx}\Big|_0^\infty dy=-\mathrm{Ln}2$$

در آزمون‌های بعد بیشتر توضیح داده خواهد شد.

۹- گزینه ۳ صحیح است.
$$f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{\cos^2 x}\quad;\quad f(0)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

خط قائم بر منحنی:
$$\Rightarrow 2\sqrt{f(x)}=\mathrm{tg}x+c \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^2x \quad\Rightarrow\quad f'(0)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

۱۰- گزینه ۳ صحیح است.
$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}-1 \quad,\quad \cos x>0 \quad\Rightarrow\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\Big|_{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}$$