معادله منحنی‌ها در $\mathbb{R}^2$

۱- مقاطع مخروطی:

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

مبین این معادله به صورت $\Delta=b^2-4ac$ است, اگر $\Delta<0$ منحنی بیضی است, اگر $\Delta=0$ منحنی سهمی است و اگر $\Delta>0$ منحنی هذلولی است. معادلات منحنی به صورت زیر خلاصه می شود:

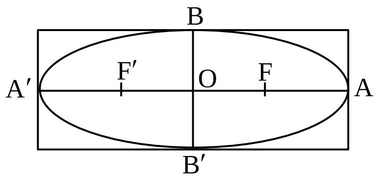
۱,۱) دایره: حالت خاص بیضی, دایره است؛ ($O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و R شعاع)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad\Rightarrow\quad R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}\ ,\ O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$$

۱,۲) بیضی: مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت به نام کانون برابر مقدار ثابت 2a باشد.

$$c=a^2-b^2 \quad , \quad b=\frac{1}{2}BB' \quad , \quad a=\frac{1}{2}AA'$$



$\pi ab=$ مساحت و فاصله کانونی: $FF'=2c$

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$: معادله بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور ox است.

۱,۳) سهمی: مکان هندسی نقاطی که فاصله آن از نقطه ثابتی به نام کانون و خط ثابتی به نام خط هادی برابر باشد. معادله سهمی به کانون $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ و خط هادی $x=\frac{-p}{2}$ به صورت روبرو به دست می آید: $y^2=2px$.

در حالت کلی ($\frac{p}{2}$ فاصله کانون تا خط هادی, $S(\alpha,\beta)$ راس سهمی افقی): $(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)$

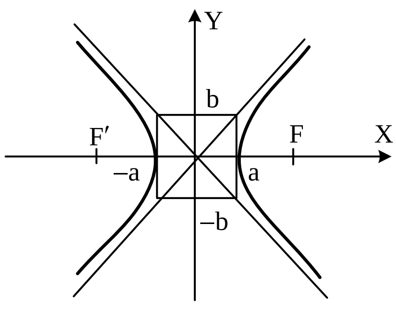
۱,٤) هذلولی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که تفاضل فواصل آنها از دو نقطه ثابت به نام کانون مقدار ثابت 2a باشد. معادله هذلولی به مرکز $O'(\alpha,\beta)$ و فاصله کانونی $ff'=2c$ که محور کانونی موازی محور ox باشد به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

که در آن $c^2=a^2+b^2$

این هذلولی دارای دو مجانب مایل به معادله های زیر است:

$$\frac{y-\beta}{b}=\pm\frac{x-\alpha}{a}$$



نکته: خروج از مرکز هذلولی: $e=\frac{c}{a}$

۲- معادلات پارامتری منحنی‌ها

اگر مختصات نقطه $M(x,y)$ هر یک تابع یک یا چند پارامتر باشد معادله را پارامتری گوئیم.

برای حالت یک پارامتری داریم:

$$x=X(t) \quad , \quad y=Y(t) \quad , \quad t\in\mathbb{R}$$

نکته: ضریب زاویه خط مماس بر منحنی و تقعر منحنی:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=z(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{z'(t)}{x'(t)}$$

معادله پارامتری دایره:

$$\begin{cases} x=\alpha+R\cos\theta \\ y=\beta+R\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad ۰\le\theta\le ۲\pi \quad \text{یا} \quad -\pi\le\theta\le\pi$$

معادله پارامتری بیضی:

$$\begin{cases} x=\alpha+a\cos\theta \\ y=\beta+b\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad ۰\le\theta\le ۲\pi \quad \text{یا} \quad -\pi\le\theta\le\pi$$

معادله منحنی ها در $\mathbb{R}^{۳}$

معادله یک منحنی در $\mathbb{R}^{۳}$ به صورت روبه رو خواهد بود: $x=X(t)\ ;\ y=Y(t)\ ;\ z=Z(t)$

این منحنی می تواند از برخورد سطوح مختلف در فضا ایجاد شود.

مثال: منحنی روبرو چیست؟

$C: x=۲+\cos t \quad ; \quad y=-۱+\sin t \quad ; \quad z=۵$

حل: $(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=\sin^{۲}t+\cos^{۲}t=۱ \quad ; \quad z=۵$

منحنی c از برخورد استوانه موازی محور oz و صفحه عمود بر oz به دست می آید که دایره ای است با مرکز (۵ و ۱- و ۲) و شعاع یک.

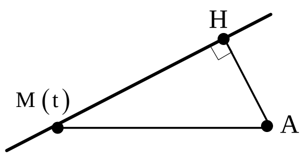
معادله خط مستقیم در $R_{۳}$

معادله پارامتری خط: $D: x=pt+x_{۰} \quad , \quad y=qt+y_{۰} \quad , \quad z=rt+z_{۰}$

که در آن $(x_{۰},y_{۰},z_{۰})$ یک نقطه از خط و $\vec{L}=(p,q,r)$ بردار موازی خط است (بردار هادی خط)

معادله کانونیک خط : $D: \frac{x-x_{۰}}{p}=\frac{y-y_{۰}}{q}=\frac{z-z_{۰}}{r}$ ؛ شرط: $pqr\ne ۰$

نقطه متغیر M را با $M(t)$ نمایش داده و داریم $M(t)=(pt+x_{۰},qt+y_{۰},rt+z_{۰})$، اگر نقطه $A(x_{۱},y_{۱},z_{۱})$ خارج خط D یا روی آن باشد برای تعیین تصویر A نسبت به خط D و یا فاصله A تا خط D به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



۱) ابتدا $\overrightarrow{AM(t)}$ را تشکیل می‌دهیم: $\overrightarrow{AM(t)}=(pt+x_{۰}-x_{۱},qt+y_{۰}-y_{۱},rt+z_{۰}-z_{۱})$

۲) $\overrightarrow{AM(t)}\perp\vec{L}$ قرار می‌دهیم (یعنی $\vec{L}.\overrightarrow{AM(t)}=۰$). با توجه به شکل t_H به دست می‌آید.

$H=M(t_H)$

نکته: در معادله خط، اگر $r=۰$ باشد خط بر محور OZ عمود است و داریم $z=z_{۰}$؛ به همین ترتیب برای سایر پارامترها.

نکته: برای محاسبهٔ مختصات نقطه قرینه نقطه A نسبت به خط D پس از محاسبه نقطه H از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$x_{A'}=۲x_H-x_A \quad , \quad y_{A'}=۲y_H-y_A \quad , \quad z_{A'}=۲z_H-z_A$

معادله خط مماس بر منحنی C در فضا

اگر منحنی C به معادله پارامتری $(x = X(t) \quad ; \quad y = Y(t) \; ; \; z = Z(t))$ در فضا باشد، امتداد خط مماس بر منحنی فوق به صورت $\vec{V} = \left(\frac{dx}{dt} , \frac{dy}{dt} , \frac{dz}{dt}\right)$ می‌باشد. در نتیجه معادله خط مماس در هر نقطه به دست می‌آید.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی روبرو در $t = \frac{\pi}{۲}$ کدام است؟ $C: x = \cos ۳t \; ; \; y = -t + ۱ \; ; z = ۲\sin t$

حل: $\vec{V}_۱ = (-۳\sin ۳t \, , -۱ \, , ۲\cos t) = (۳, -۱, ۰) \quad \Rightarrow \quad D: x = ۳t \; ; y = -t + \frac{\pi}{۲} - ۱ \; ; z = ۲$

طول قوس منحنی در فضا

جزء طول قوس منحنی عبارتست از: $ds = \sqrt{(dx)^۲ + (dy)^۲ + (dz)^۲}$

اگر x و y و z به صورت پارامتری از t داده شود ds بر حسب dt محاسبه می‌شود: $ds = \sqrt{x'(t) + y'(t) + z'(t)}dt$

طول قوس منحنی C از $t = t_۱$ تا $t = t_۲$ از رابطه روبروست می‌آید: $S = \int_{t_۱}^{t_۲} ds$

نکته: اگر طول قوس منحنی $y= f(x)$ را از $x_۱$ تا $x_۲$ بخواهیم می‌توانیم از رابطهٔ روبرو استفاده کنیم: $S = \int_{x_۱}^{x_۲} \sqrt{۱ + y'^۲}dx$

مثال: طول قوس منحنی C به معادله روبرو را تعیین کنید: $C: x = y^۲ - Lny \quad ; \quad z = \sqrt{v}y$

حل: $ds = \sqrt{(dx)^۲ + (dy)^۲ + (dz)^۲} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^۲ + ۱ + \left(\frac{dz}{dy}\right)^۲} dy = \sqrt{(۲y - \frac{۱}{y})^۲ + ۱ + ۷} = \left|۲y + \frac{۱}{y}\right|$

$$\Rightarrow s = \int_۱^e (۲y + \frac{۱}{y})dy = y^۲ + \ln y \Big|_۱^e = e^۲$$

انحنا و شعاع انحنای منحنی

جهت محاسبهٔ انحنا و تاب منحنی ابتدا به تعریف چند متغیر می‌پردازیم:

هرگاه ذره‌ای روی منحنی C به معادله $\overrightarrow{r(t)} = r_۱(t)\hat{i} + r_۲(t)\hat{j} + r_۳(t)\hat{k}$ حرکت کند در هر زمان t، بردارهای سرعت و شتاب لحظه‌ای عبارتند از: $\vec{v}(t) = \vec{r}_۱'(t)\hat{i} + r_۲'(t)\hat{j} + r_۳'(t)\hat{k} \quad , \quad \vec{a}(t) = \vec{r}''(t)\hat{i} + r_۲''(t)\hat{j} + r_۳''(t)\hat{k}$

مقدار سرعت و شتاب نیز از طول بردارهای آنان به دست می‌آید.

- بردار یکانی مماس بر منحنی C در نقطهٔ p به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$
- بردار یکانی عمودی اصلی یا قائم یکانی اول را به صورت روبرو تعریف می‌کنیم: $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$
- بردار قائم یکانی دوم نیز به صورت روبرو به دست می‌آید: $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$
- برای منحنی $y = f(x)$ که در صفحه تعریف شده است، انحنا از رابطه روبرو به دست می‌آید: $k(x) = \frac{|y''|}{(۱ + y'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

- برای منحنی $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ که در صفحه تعریف شده است، انحناء به صورت روبرو محاسبه می‌شود.

$$k(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left(x'^{2}+y'^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

- برای منحنی $\vec{r}(t)$ که در فضا تعریف شده انحناء هر نقطه از رابطه روبرو محاسبه می‌شود:

$$k(t)=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^{3}}$$

- عکس انحنا در هر نقطه را شعاع انحنا یا اصطلاحاً شعاع دایره بوسان گویند.

رویه‌های خاص در فضای $\mathbb{R}^3$

۱) معادله صفحه

بردار $\vec{N}$ را نرمال صفحه P (عمود بر آن) گویند اگر داشته باشیم:

$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$\vec{N}=(a,b,c)$ و (x_0,y_0,z_0) یک نقطه روی صفحه

برای تعیین وضعیت دو صفحه نسبت به هم از رابطه روبرو استفاده می‌کنیم:

$p:\vec{N}$ و نرمال $p':\vec{N}'$ نرمال $\Rightarrow$ $\vec{N}.\vec{N}'=|\vec{N}||\vec{N}'|\cos\theta$ و θ زاویه بین دو صفحه

برای تعیین وضعیت خط و صفحه نیز از ضرب داخلی $\vec{N}$ (بردار نرمال صفحه) و $\vec{L}$ (بردار هادی خط) استفاده می‌کنیم که زاویه به دست آمده مکمل زاویه خط و صفحه است.

نکته: اگر نقطه $A(x_1,y_2,z_1)$ خارج یا روی صفحه p به معادله $p(x,y,z)=ax+by+cz+d=0$ باشد، برای تعیین تصویر نقطه A روی صفحه p، ابتدا خطی عمود بر صفحه p از نقطه A می‌گذرانیم و سپس نقطه تلاقی خط فوق با صفحه p را تعیین می‌کنیم. یعنی:

$$D: x=at+x_1 \quad , \quad y=bt+y_1 \ , \ z=ct+z_1$$

$$\Rightarrow a(at+x_1)+b(bt+y_1)+c(ct+z_1)+d=0 \quad \Rightarrow \quad t_H=-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}=\frac{-p(A)}{N^2}$$

$$\Rightarrow H=(at_H+x_1, bt_H+y_1, ct_H+z_1)$$

از روی H می‌توان تصویر A را نسبت به صفحه p نیز پیدا کرد.

فاصله نقطه A از صفحه p نیز برابر $|\overrightarrow{AH}|$ است و داریم:

$$|\overrightarrow{AH}|=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

معادله دسته صفحه: اگر $p_1=0$ و $p_2=0$ دو صفحه متقاطع باشند آنگاه معادله هم صفحه‌های دسته صفحه متقاطع به صورت زیر خواهد بود:

$$P:\alpha p_1+\beta p_2=0$$

که در آن α و β پارامترهای نامعلومی هستند که با شرایط مساله تعیین می‌گردند به ازای $\alpha=0$ صفحه p_2 و به ازای $\beta=0$ صفحه p_1 را خواهیم داشت.

مثال: معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل خط D بوده و با خط به معادله $x=y=2z$ نیز موازی باشد.

حل:

$$D: x=2t-1 \ ; \ y=-t \ ; \ z=t+2$$

$$D: x=-2y-1 \ ; \ z=-y+2 \qquad \Rightarrow \qquad D: x+2y+1=0 \ ; \ y+z-2=0$$

$$P:\alpha(x+2y+1)+\beta(y+z-2)=0 \qquad \Rightarrow \qquad P:\alpha x+(2\alpha+\beta)y+\beta z+\alpha-2\beta=0 \ ; \ \vec{L}'=(2,2,1)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{N}_p.\vec{L}'=0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha+2(2\alpha+\beta)+\beta=0 \quad \Rightarrow \quad \beta=-2\alpha \quad \Rightarrow \quad p: x-2z+5=0$$

نکته: برای محاسبهٔ طول عمود مشترک دو خط متنافر D و D' ابتدا صفحه شامل خط D و موازی D' را به دست می‌آوریم (بر حسب α و β) سپس فاصلهٔ D' را از صفحه فوق تعیین می‌کنیم. (فاصله هر نقطه D' از صفحه فوق مقدار ثابتی است)

نکته: برای محاسبه معادله عمود مشترک دو خط متنافر D و D'، ابتدا D را بر حسب متغیر t و D' را بر حسب t' می‌نویسیم و نقاط $M(t)$ و $M'(t')$ را روی آنها تعیین می‌کنیم سپس از روابط $\vec{L}.\overrightarrow{MM'}=0$ و $\vec{L}'.\overrightarrow{MM'}=0$، t و t' و $\overrightarrow{MM'}$ را می‌یابیم.

۲) بیضیگون

یک بیضگون استاندارد به مرکز $O(\alpha,\beta,\gamma)$ دارای معادله‌ای به صورت روبرو می‌باشد:
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

منحنی حاصل از تلاقی بیضیگون با صفحه‌های موازی صفحه مختصات، یک بیضی است. به طور مثال، صفحه $z=\gamma$ منحنی تلاقی یک بیضی به معادله روبه رو خواهد بود.
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-B)^2}{b^2}=1\ ,\ z=\gamma$$

حالت خاص بیضیگون، کره است و حالتی است که $a=b=c=R$ باشد.

۳) سهمیگون

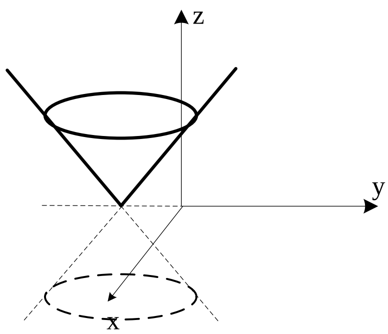
سهمیگون یک سطح از یک طرف بسته و از یک طرف باز است. معادله یک سهمیگون استاندارد که محور کانونی آن موازی محور oz و رأس آن $S(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد به صورت روبروست:
$$z-\gamma=\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}$$

دامنهٔ تغییرات z مقادیر $z\geq\gamma$ است و هر صفحه $z=z_0>\gamma$ نیز سهمیگون را در یک بیضی قطع می‌کند. اگر $a=b$ باشد سهمیگون را دوار گویند.

۴) هذلولیگون

هذلولیگون یک منحنی از دو سو باز است. معادله یک هذلولیگون استاندارد به طوری که محور کانونی آن موازی محور oz باشد به صورت زیر است:
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

که در آن $O(\alpha,\beta,\gamma)$ مرکز هذلولیگون است. بدیهی است صفحه موازی محور oz هذلولیگون را در یک هذلولی قطع می‌کند و همچنین صفحه‌های عمود بر oz نیز هذلولی را در یک بیضی قطع می‌کنند.



۵) مخروط بیضوی

مخروط بیضوی به راس $S(\alpha,\beta,\gamma)$ به معادله زیر می‌باشد.
به طوری که محور تقارن آن موازی محور oz باشد.
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=0$$

صفحه‌های موازی xoy و یا $z=z_0$ مخروط را در یک بیضی قطع می‌کنند. اگر $a=b$ باشد مخروط را دوار گویند. صفحات $y=y_0$ و $x=x_0$ مخروط را در یک هذلولی قطع می‌کنند.

خط قائم بر یک رویه و صفحه مماس بر رویه

اگر $f(x,y,z)$ یک تابع اسکالر باشد گرادیان تابع f برداری در $\mathbb{R}^3$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$\vec{\nabla}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

بردار گرادیان یک تابع اسکالر بر رویه مربوط به آن تابع در نقطه مورد نظر، عمود است. بنابراین بردار نرمال صفحه مماس در هر نقطه قابل محاسبه است (یا بردار هادی هر خط عمود در نقطه مورد نظر)

مشتق سویی یک تابع

به فرض تابع اسکالر $w=f(x,y,z)$ و یا $w=f(x,y)$ به ترتیب در $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$ تعریف شده باشند، مشتق سویی یا جهتی تابع f در امتداد بردار $\vec{b}$ در نقطه $M(x_0,y_0,z_0)$ به صورت زیر خواهد بود: $\frac{\partial f}{\partial s}=\vec{\nabla}f.\frac{\vec{b}}{b}=\vec{\nabla}f.\vec{e}_b$

مقدار $\frac{\partial f}{\partial s}$ در واقع آهنگ تغییرات تابع f در نقطه M و در جهت $\vec{b}$ است. بدیهی است مشتق جهتی f در هر نقطه در جهت گرادیان، ماکزیمم مقدار خود را دارد و در جهت عکس گرادیان مینیمم مقدار دارد.

حد و پیوستگی توابع چند متغیره و اسکالر

تابع $W=f(x,y,z)$ و یا $w=f(x,y)$ را در نقطه M_0 دارای حد گوئیم هرگاه

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0 \quad 0<|\vec{r}-\vec{r}_0|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f-l|<\varepsilon$$

$0<|\vec{r}-\vec{r}_0|<\delta$ در $\mathbb{R}^3$ درون کره به مرکز M_0 و شعاع δ است که خود M_0 را شامل نیست. در $\mathbb{R}^2$ نیز دایره‌ای است که این ویژگی را دارد.

برای بررسی وجود یا عدم حد بهترین راه استفاده از مختصات استوانه‌ای و کروی است. روش دیگر ثابت نگه داشتن دو پارامتر و متغیر دانستن یک پارامتر است.

مثال: حد تابع $f(x,y,z)=\frac{e^{xy}-e^{y}}{zx-z}$ در نقطه (۲و۲-و ۱) کدام است؟

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-2,2)} f=\lim\frac{e^{-2x}-e^{-2}}{2x-2}=\frac{1}{2e^{2}}\lim_{x\to 1}\frac{e^{-2(x-1)}-1}{x-1}=\frac{-1}{e^{2}}$$

بهینه سازی توابع اسکالر چند متغیره

فرض کنیم تابع اسکالر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ با ضابطه $y=f(x)$ داده شده باشد. گرادیان f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\in\mathbb{R}^n$$

نقطه $x^*\in\mathbb{R}^n$ را نقطه بحرانی تابع گوئیم هرگاه $\frac{\partial f}{\partial x^*}=0$ باشد. (با شرط وجود مشتقات جزئی)

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^3-3xy^2+6y$ را تعیین کنید.

حل: $\vec{\nabla}f=(3x^2-3y^2\ ,\ -6xy+6)=(0,0)\ \Rightarrow\ x^2=y^2\ ,\ xy=1 \Rightarrow$ نقاط بحرانی $(-1,-1)\ ,\ (1,1)$

ماتریس هسین

اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ با ضابطه $y=f(x)$ یک تابع اسکالر مشتق‌پذیر از مرتبه دوم نسبت به همه مولفه‌های x باشد، ماتریس هسین به صورت زیر تعریف می‌شود: $H(f)=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right]_{n\times n}$

قضیه اکسترمم‌های نسبی تابع چند متغیره

اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ با ضابطه $y=f(x)$ دارای مشتقات دوم جزئی پیوسته نسبت به مؤلفه‌های x ونقطه x^* یک نقطه بحرانی f باشد به طوری که داشته باشیم: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*}=0$ در نتیجه نقطه x^* ممکن است یکی از حالت‌های زیر باشد:

۱) ماکزیمم نسبی: اگر ماتریس هسین $H(f)$ به ازای $x=x^*$ منفی معین باشد نقطه x^* ماکزیمم نسبی برای $y=f(x)$ است.

۲) مینیمم نسبی: اگر ماتریس هسین $H(f)$ به ازای $x=x^*$ مثبت معین باشد نقطه x^* مینیمم نسبی برای $y=f(x)$ است.

۳) نقطه زین اسبی: اگر ماتریس هسین $H(f)$ به ازای $x=x^*$ نامعین باشد نقطه زین اسبی برای $y=f(x)$ است.

نکته: ماتریس A مثبت معین است هرگاه $x'Ax \ge 0$ (برای هر x). از ویژگی‌های ماتریس معین، مثبت بودن همه مقادیر ویژه آن و مثبت بودن مجموع درایه‌های آن می‌باشد. ماتریس منفی معین هم حالت بالعکس دارد. مثبت یا منفی بودن ماتریس هسین را از مقادیر ویژه آن در می‌یابیم.

مثال: اکسترمم‌های نسبی تابع روبرو را تعیین کنید: $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2xy + x - 4y$

حل: $\vec{\nabla} f = (2x - 2y + 1, 8y - 2x - 4) \Rightarrow (x,y)^* = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow H(f) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$ مثبت معین $\Rightarrow$ مینیمم نسبی $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

نمونه سوالات:

۱- منحنی C به معادله $z=t$ و $y=\sin t$ و $x=\cos t$ مفروض است. کوتاهترین فاصله مبداء مختصات از خط مماس بر منحنی C در نقطه $(-1, 0, \pi)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{1+\pi^2}$ ۲) $\sqrt{2+\pi^2}$ ۳) $\sqrt{2+2\pi^2}$ ۴) $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{2}}$

۲- معادله صفحه مماس بر رویه $z = x^2y + xy - \frac{y}{x+1}$ در نقطه (۳ و ۲ و ۱) کدام است؟

۱) $13x + 3y - 2z = 13$ ۲) $13x - 3y - 2z = 1$ ۳) $13x - 3y + 2z = 13$ ۴) $13x + 3y + 2z = 25$

۳- شعاع انحنای منحنی پارامتری C به معادله زیر در $t = 0$ کدام است؟

$x = t \; ; \; y = \sin 2t \; ; \; z = \cos^2 t$

۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $5\sqrt{5}$

۴- محیط منحنی بسته $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۵- طول قوس منحنی C به معادله پارامتری زیر وقتی $0 \le t \le 1$ کدام است؟

$C: x = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \quad ; \quad y = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \quad ; \quad 2 = \log_e \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

۱) $\frac{\pi}{4}\ln 2$ ۲) $\frac{\pi}{2}\ln 2$ ۳) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ ۴) $\frac{\pi}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

۶- اگر $f(x,y) = x^2y - y^2 - x^3 + xy$ باشد نقطه $(0,0)$ برای f چه نقطه‌ای است؟

۱) مینیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی ۳) نقطه زینی ۴) نقطه غیر بحرانی

۷- صفحه مماس بر رویه $2x^2 + y^4 + z^2 - 4z = 0$ در نقطه $p(1,1,1)$ با محور oy چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) $\text{Arc}\sin\frac{1}{3}$ ۲) $\text{Arc}\cos\frac{1}{3}$ ۳) $\text{Arc}\sin\frac{2}{3}$ ۴) $\text{Arc}\sin\frac{3}{4}$

۸- اگر $f(x,y,z)=xye^{-z}+\dfrac{z}{x+y}$ باشد، مشتق جهتی f در جهت بردار $\vec{k}+۲\vec{j}+۲\vec{i}$ و در نقطه $P(۱,-۲,۱)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $\dfrac{۵}{۳}$ ۳) $\dfrac{-۱}{۳}$ ٤) $\dfrac{-۵}{۳}$

۹- تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-y}{x+y^۲} & x>-y^۲\\ xy+۱ & x\le -y^۲\end{cases}$ مفروض است. مقدار حد مقابل کدام است؟

$$\lim_{(x,y)\to(-۱,۱)} f(x,y)$$

۱) موجود نیست ۲) صفر ۳) ۱ ٤) ۱-

۱۰- مختصات مرکز انحنای منحنی C با معادله داده شده زیر کدام است؟

$$x=۱+\cos^۲ t\ ;\ y=\sin t\cos t$$

۱) $(۱,\circ)$ ۲) $\left(\dfrac{-۳}{۲},\circ\right)$ ۳) $\left(۱,\dfrac{۱}{۲}\right)$ ٤) $\left(\dfrac{۳}{۲},\circ\right)$

حل نمونه سوالات:

۱- گزینه ٤ صحیح است.

$$\vec{V}=\frac{\vec{dr}}{dt}=(-\sin t,\cos t,۱)\ ,\ t=\pi$$

$$D: x=-۱\ ;\ y=-t\ ;\ z=t+\pi \quad\Rightarrow\quad oM=\sqrt{۱+t^۲+(t+\pi)^۲}\Rightarrow oH=\sqrt{۱+\frac{\pi^۲}{۲}}$$

۲- گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x,y,z)=x^۲y+xy-\frac{y}{x+۱}-z=\circ$$

$$\vec{\nabla}f=\left(۲xy+y+\frac{y}{(x+۱)^۲},x^۲+x-\frac{۱}{x+۱},-۱\right)\ \Rightarrow\ \vec{\nabla}f(۱,۲,۳)=\left(\frac{۱۳}{۲},\frac{۳}{۲},-۱\right)\Rightarrow \vec{N}=(۱۳,۳,-۲)$$

$$\Rightarrow\ P:۱۳(x-۱)+۳(y-۲)-۲(x-۳)=\circ\ \Rightarrow\ P=۱۳x+۳y-۲z=۱۳$$

۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$\vec{r}=(t,\sin ۲t,\cos^۲ t)\ ;\ t=\circ$$

$$\vec{V}=\frac{\vec{dr}}{dt}=(۱,۲\cos ۲t,-\sin ۲t)=(۱,۲,\circ)\ \Rightarrow \vec{a}=\frac{\vec{dv}}{dt}=(\circ,-۴\sin ۲t,-۲\cos ۲t)=(\circ,\circ,-۲)$$

$$R=\frac{۱}{k}=\frac{v^۳}{|\vec{v}\times\vec{a}|}=\frac{۵\sqrt{۵}}{|(-۴,۲,\circ)|}=\frac{۵\sqrt{۵}}{\sqrt{۲۰}}=\frac{۵}{۲}$$

٤- گزینه ۲ صحیح است.

منحنی فوق از تقاطع یک صفحه باکره پدید آمده است که دایره‌ای است به شعاع $\sqrt{R^۲-OH^۲}$ که OH فاصلهٔ مرکز کره از صفحه است و R شعاع کره می‌باشد. داریم:

$$OH=\frac{|-۳|}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}\ ,\ R=۲\ \Rightarrow\ r=\sqrt{۴-۳}=۱\ \Rightarrow\ I=۲\pi$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$\vec{r}=\left(\cos\frac{\pi}{٤}t\ ,\ \sin\frac{\pi}{٤}t\ ,\ \log_e\cos\frac{\pi}{٤}t\right)\ \Rightarrow\ \vec{V}=\frac{\vec{dr}}{dt}=\left(\frac{-\pi}{٤}\sin\frac{\pi}{٤}t,\frac{\pi}{٤}\cos\frac{\pi}{٤}t,\frac{-\pi}{٤}tg\frac{\pi}{٤}t\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{V}| = \frac{\pi}{4}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}t} = \frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{4}t \Rightarrow L = \int_0^1 \frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{4}t\,dt = \ln\left(\sec\frac{\pi}{4}t + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^1 \Rightarrow L = \ln(\sqrt{2}+1)$$

۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$\vec{\nabla}f = (2xy - 3x^2 + y, x^2 - 2y + x)\ ,\ (x,y) = (0,0) \Rightarrow H(f) = \begin{bmatrix} 2y-6x & 2x+1 \\ 2x+1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |H(f) - \lambda I| = (-\lambda)(-2-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$ نامعین

۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^4 + z^2 - 4z \Rightarrow \vec{\nabla}f = (4x, 4y^3, 2z-4) \Rightarrow \vec{\nabla}f(1,1,1) = (4,4,-2) = \vec{N}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\vec{N}.\vec{j}}\right) \Rightarrow \sin\theta = \frac{4}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}} = \frac{2}{3}$$

۸- گزینه ٤ صحیح است.

$$\vec{\nabla}f = \left(ye^{-z} - \frac{z}{(x+y)^2}\ ,\ xe^{-z} - \frac{z}{(x+y)^2}\ ,\ -xye^{-z} + \frac{1}{x+y}\right)$$

$$\vec{\nabla}f(1,-2,1) = (-2e^{-1}-1, e^{-1}-1, 2e^{-1}-1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial b} = \vec{\nabla}f.\overrightarrow{e_b} = \frac{2}{3}\left(-2e^{-1}-1\right) + \frac{2}{3}\left(e^{-1}-1\right) + \frac{1}{3}\left(2e^{-1}-1\right) = \frac{-5}{3}$$

۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$x = -1 + r\cos\theta\ ,\ y = 1 + r\sin\theta \Rightarrow \frac{x^2 - y}{x + y^2} = \frac{r\cos^2\theta - 2\cos\theta - \sin\theta}{r\sin^2\theta + 2\sin\theta + \cos\theta}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(-1,1)} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos^2\theta - 2\cos\theta - \sin\theta}{r\sin^2\theta + 2\sin\theta + \cos\theta}\ ,\ \cos\theta > -2\sin\theta$$

$$\Rightarrow = \frac{-2\cos\theta - \sin\theta}{2\sin\theta + \cos\theta} \Rightarrow$$ حد ندارد

۱۰- گزینه ٤ صحیح است.

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\ ;\ y = \frac{1}{2}\sin 2t \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow O\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$