دیورژانس توابع برداری

دیورژانس میدان برداری $\vec{F}$ $(\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}$ که F_z, F_y, F_x توابع اسکالر و حقیقی هستند) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}\left(\vec{F}\right)=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{یا} \quad \operatorname{div}\left(\vec{F}\right)=\vec{\nabla}.\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(F_x, F_y, F_z\right)$$

نکته: اگر میدان برداری $\vec{F}$، گرادیان یک تابع اسکالر مانند $f(x,y,z)$ باشد، یعنی $\vec{F}=\vec{\nabla}f$، در این صـورت دیـورژانس گرادیـان تابع اسکالر f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}(f)\right)=\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}f\right)=\nabla^2 f \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

که در آن عملگر ∇^2 را لاپلاس می‌نامند.

اگر تابع اسکالر $u\left(x,y,z\right)$ در معادله لاپلاس صدق کند، در این صورت تابع $u\left(x,y,z\right)$ را یک تابع همساز گویند.

معادله لاپلاس $\vec{\nabla}^2 u=0$

تاو (کرل) میدان برداری

فرض کنید $\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}$ یک میدان برداری در $\mathbb{R}^3$ باشد، کرل یا تاو میدان برداری $\vec{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{curl}\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

کرل میدان برداری $\vec{F}$ به این صورت هم نمایش داده می‌شود: $\operatorname{curl}\left(\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{F}$

میدان برداری پایستار

میدان‌های برداری که خود گرادیان یک تابع اسکالر باشند، کرلشان صفر است: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right)=0$

به چنین میدان‌هایی، پایستار گویند و در غیر این صورت ناپایستار گویند. در نتیجه میدان $\vec{F}$ را پایستار گوئیم هرگاه: $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$

خواص عملگر $\vec{\nabla}$ (دل)

خواص $\vec{\nabla}$ مشابه خواص مشتق مرتبه اول است:

۱) $\vec{\nabla}(f+g)=\vec{\nabla}f+\vec{\nabla}g$

۲) $\vec{\nabla}(fg)=g\vec{\nabla}f+f\,\vec{\nabla}g$

۳) $\vec{\nabla}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\vec{\nabla}f-f\,\vec{\nabla}g}{g^2}$

مثال: گرادیان تابع $F\left(x,y,z\right)=\left(x^2+y\right)^{xz^2}$ کدام است؟

حل:

$$\mathrm{Lnf} = xz^{۲}\mathrm{Ln}\left(x^{۲}+y\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{\nabla}f}{f} = \vec{\nabla}\left(xz^{۲}\right)\mathrm{Ln}\left(x^{۲}+y\right) + \frac{\vec{\nabla}\left(x^{۲}+y\right)}{x^{۲}+y}.xz^{۲}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}f = \left(x^{۲}+y\right)^{xz^{۲}}\mathrm{Ln}\left(x^{۲}+y\right)\left(z^{۲},۰,۲xz\right) + xz^{۲}\left(x^{۲}+y\right)^{xz^{۲}-۱}(۲x,۱,۰)$$

برخی خواص دیگر $\vec{\nabla}$:

$$۱)\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F}+\vec{\nabla}\times\vec{G} \qquad ۲)\vec{\nabla}\times\left(f\,\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F}+f\,\vec{\nabla}\times\vec{F}$$

$$۳)\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = ۰ \qquad ۴)\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = ۰$$

$$۵)\vec{\nabla}.\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}.\vec{\nabla}\times\vec{F}-\vec{F}.\vec{\nabla}\times\vec{G} \qquad ۶)\vec{\nabla}\left(g\vec{\nabla}f\times f\vec{\nabla}g\right) = ۰$$

قاعده زنجیره‌ای

فرض کنید عملگر یک به یک T هر نقطه (x,y) از صفحه xoy را به نقطه‌ای متناظر در صفحه uov تصویر کنندهٔ به قسمی که:

$$(u,v) = T(x,y)\ ,\ u = U(x,y)\ ;\ v = V(x,y)\ \Rightarrow\ (x,y) = T^{-۱}(u,v)\ ,\ x = X(u,v)\ ;\ y = Y(u,v)$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}\end{bmatrix}$$

و نیز خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}$$

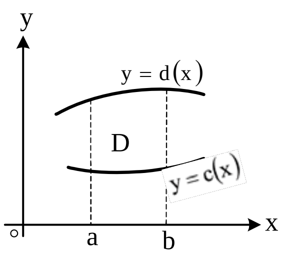
به ماتریس‌های اخیر ماتریس ژاکوبین گویند و داریم:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}$$

ماتریس ژاکوبین، بردار گرادیان تابع f(x,y) در هر نقطه در صفحه xoy را تبدیل بـه بـردار گرادیـان تـابع $f\left(X(u,v),Y(u,v)\right)$ در نقطـهٔ متناظرش در صفحهٔ uov می‌کند.

انتگرال دو گانه

ناحیه بسته D در فضای $\mathbb{R}^{۲}$ در صفحه xoy محصور بین منحنی‌های $y = d(x), y = c(x)$ و خط‌های $x = a$ و $x = b$ را در نظر بگیریـد. فرض کنید ناحیه D دارای چگالی سطحی f(x,y) باشد. در این صورت جرم باریکه محصور به منحنی‌های روبرو را می‌توان با انتگـرال‌گیـری در امتداد محور oy محاسبه نمود.



$$c(x) \le y \le d(x)\ \ ;\ \ x \le x \le x+dx\ \Rightarrow\ dm_{x} = \int_{c(x)}^{d(x)}\left(f(x,y)dx\right)dy$$

با انتگرال‌گیری از dm_x روی متغیر x از a تا b جرم ناحیه D به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m=\int_a^b dm_x=\int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dydx$$

اگر ناحیه D با چگالی f(x,y) محصور بین منحنی‌های $x=a(y)$, $x=b(y)$ و خط‌های $y=c$ و $y=d$ باشد نیز می‌توان نشان داد جرم ناحیه D به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m=\int_c^d\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dxdy$$

قضیه: اگر ناحیه D با چگالی $f(x).g(y)$ در صفحه xoy به صورت روبرو باشد:

$$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b\ ,\ c\le y\le d\}$$

آنگاه جرم ناحیه D به صورت روبرو به دست می‌آید:

$$m=\left(\int_a^b f(x)dx\right).\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

مرکز ثقل یک ناحیه

اگر سطح بستهٔ D دارای چگالی $f(x,y)$ باشد در این صورت نقطه $\left(\bar{X},\bar{Y}\right)$ را مرکز ثقل D گوئیم هرگاه:

$$\bar{x}=\frac{\iint_D xf(x,y)dxdy}{\iint_D f(x,y)dxdy}\quad,\quad \bar{Y}=\frac{\iint_D yf(x,y)dxdy}{\iint_D f(x,y)dxdy}$$

قضیه مقدار متوسط

اگر مساحت ناحیه D برابر S_D باشد در این صورت برای هر تابع f(x,y) که در درون D انتگرال‌پذیر باشد، نقطه $\left(x_\circ,y_\circ\right)$ وجود دارد به قسمی که:

$$f\left(x_\circ,y_\circ\right)=\frac{۱}{S_D}\iint_D f(x,y)dxdy$$

$f\left(x_\circ,y_\circ\right)$ را مقدار متوسط تابع F(x,y) در ناحیه D گویند.

تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه

انتگرال دوگانه $I=\iint_D f(x,y)dxdy$ را در نظر بگیرید چنانچه به هر دلیلی بخواهیم از تغییر متغیرهای $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ استفاده کنیم لازم است نخست تبدیل یافته ناحیه D که در صفحه (x,y) تعریف شده را در صفحه (u,v) پیدا کرده و آن را D' می‌نامیم.

سپس تابع F(x,y) را بر حسب متغیرهای (u,v) بازنویسی می‌کنیم و آن را h(u,v) می‌نامیم. در انتها ژاکوبین تغییر دستگاه مختصات را که با J نشان می‌دهند به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$J=\frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\quad\Rightarrow\quad J=\frac{۱}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}\quad \text{یا}\quad J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

حال با توجه به $|J|dudv$ می‌توان نوشت:

$$I=\iint_{D'} h\left(u,v\right)|J|dudv$$

نکته: ژاکوبین تبدیل مختصات دکارتی (x,y) به قطبی (ρ,ϕ) برابر ρ می‌باشد.

مثال: حاصل $\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}dydx$ کدام است؟

حل: از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{\rho\cos\varphi}{\left(\rho^2+1\right)^2}\rho d\rho d\varphi=\left(\sin\phi\right)_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{\rho^2}{\left(1+\rho^2\right)^2}d\rho=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{tg^2\phi(1+tg^2\phi)}{(1+tg^2\phi)^2}d\phi=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\phi d\phi=\frac{\pi}{4}$$

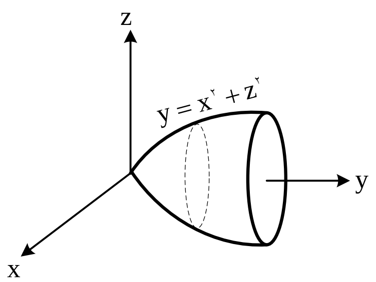
انتگرال سه‌گانه

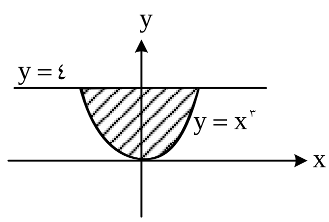
ناحیهٔ بسته D در فضای $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. اگر D محصور بین دو رویهٔ $z_1(x,y)$ و $z=z_2(x,y)$ بوده و چگالی حجمی D نیز f(x,y,z) باشد. همچنین تصویر ناحیه D در صفحه xoy نیز ناحیه R باشد در این صورت جرم ناحیهٔ D با چگالی f(x,y,z) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m=\iiint_{D}f(x,y,z)dzdydx=\iint_{R}\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dzdydx$$

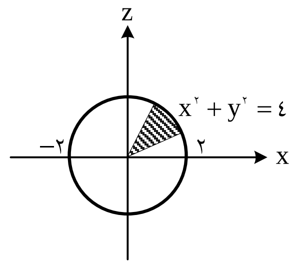
مثال: مطلوبست محاسبهٔ $\iiint_{D}\sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$ که در آن D ناحیهٔ محصور بین $y=x^2+z^2$ و $y=4$ است.

حل: ابتدا ناحیه فوق را رسم می‌کنیم.





تصویر ناحیه روی صفحه xy



تصویر ناحیه روی صفحه xz

اگر ناحیه رادر جهت z بگیریم آنگاه z بین $-\sqrt{y-x^2}$ و $\sqrt{y-x^2}$ و نیز y بین $y=x^2$ و $y=4$ واقع می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\iiint_{D}\sqrt{x^2+z^2}dxdydz=\int_{x=-2}^{2}\int_{y=x^2}^{4}\int_{z=-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}dzdydx$$

برای راحت‌تر شدن انتگرال جای دو متغیر را عوض می‌کنیم.

$$\iiint_{D}\sqrt{x^2+z^2}dv=\int_{x=-2}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{y=x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}dydzdx=$$

$$\int_{x=-2}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}y\sqrt{x^2+z^2}\Big|_{y=x^2+z^2}^{4}=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2-z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}dzdx$$

حال بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2-z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}\,dzdx=$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\left(4-r^2\right)r.rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(4r^2-r^4\right)drd\theta=\int_0^{2\pi}\frac{4}{3}r^3-\frac{1}{5}r^5\Big|_0^2 d\theta=\frac{64}{15}(\theta)\Big|_0^{2\pi}=\frac{128}{15}\pi$$

نکته: ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات دکارتی به استوانه‌ای برابر است با: $\left(x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z\right)$

$$J=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad |J|=\rho$$ دترمینان:

ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات دکارتی به کروی نیز برابر است با: $(x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta)$

$$J=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad |J|=r^2\sin\theta$$

مثال: فاصلهٔ مرکز ثقل نیم کره به شعاع R و چگالی واحد از صفحه دایره‌ای شکل قاعده نیمکره چقدر است؟

حل:

$$r=R\ ;\ 0\le\varphi\le 2\pi\ ;\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{z}=\frac{\iiint_D zf(x,y,z)dv}{\iiint_D f(x,y,z)dv}\ ;\ \iiint_D 1dv=V_D=\frac{2}{3}\pi R^3\ ,\ \iiint_D zdv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\cos\theta.r^2\sin\theta drd\varphi d\theta$$

$$\Rightarrow\iiint_D zdv=\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R\times[\varphi]_0^{2\pi}\times\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}R^4\quad\Rightarrow\quad \bar{z}=\frac{\frac{\pi}{4}R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3}=\frac{3}{8}R$$

با محاسبهٔ $\bar{x}$ و $\bar{y}$ می‌توان نشان داد: $\bar{x}=\bar{y}=0$ و در نتیجه فاصله همان $\frac{3}{8}R$ است.

انتگرال روی سطح

فرض کنید سطح دلخواه s در فضای R^3 به صورت روبرو باشد: $z=z(x,y)\ ,\ (x,y)\in S$

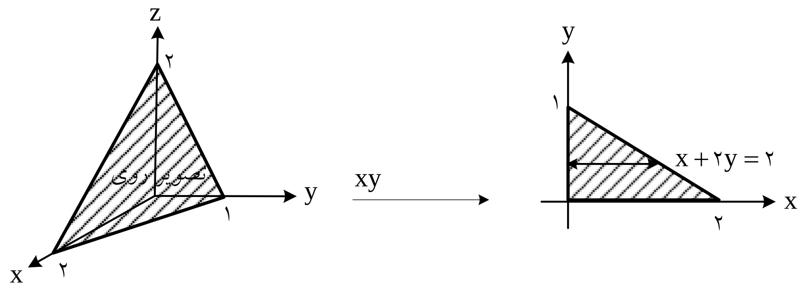
همچنین فرض کنید چگالی سطحی s نیز f(x,y,z) باشد، اگر جرم سطح s با چگالی فوق را بخواهیم داریم:

$$m=\iint_S f(x,y,z)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dxdy$$

همانطور که مشاهده می‌شود $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$ اندازه گرادیان تابع $z(x,y)-z=0$ است که با |ds| نمایش می‌دهیم.

مثال: انتگرال $\iint_S (z-x)ds$ که در آن s قسمتی از صفحه $x+2y+z=2$ است که در $\frac{1}{8}$ اول دستگاه مختصات واقع شده است را محاسبه کنید.

حل: ابتدا ناحیه را رسم می‌کنیم.



$$\Rightarrow z = 2 - x - 2y \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = -1 \\ \dfrac{dz}{dy} = -2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad ds = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-2)^2}\ dxdy$$

$$\Rightarrow I = \iint_s (z - x) ds = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{2-2y} (2 - x - 2y - x)\sqrt{6}\, dxdy = \sqrt{6}\int_0^1 \left(4 - 4y - 4 + 8y - 4y^2 - 4y + 4y^2\right) dy = 0$$

انتگرال سطح نوع دوم:

میدان برداری $\vec{F} = p\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ را در نظر بگیرید، چنانچه s سطح یک رویه فضایی بوده و $\vec{n}$ بردار یکهٔ عمود بر این سطح باشد مطابق تعریف شار میدان بردار $\vec{F}$ گذرنده از سطح s به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\Phi = \iint_s \vec{F}.\vec{n}\, ds$

مثال: چنانچه S بخشی از سهمیگون هذلولی $z = xy$ که بالای ناحیه مستطیلی $0 \le x \le 3$ و $0 \le y \le 2$ باشد، شار میدان برداری $\vec{F} = \hat{i} - y^2\hat{j} - z\hat{k}$ گذرنده از سطح S را بیابید.

حل:

$$x, y > 0\ ;\ z = xy \Rightarrow z_x = y\ ,\ z_y = x \qquad \Rightarrow \qquad \vec{N} = -z_x\hat{i} - z_y\hat{j} + \hat{k} = -y\hat{i} - x\hat{j} + \hat{k}$$

$$\iint_s \vec{F}.\vec{n} ds = \iint_A \left(\vec{F}.\vec{n}\right)\left|\vec{N}\right| dA = \iint \vec{F}.\vec{N} dA = \iint_A \left(-y + y^2x - z\right) dA = \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{2} \left(-y + y^2x - xy\right) dydx = \int_0^3 \left(-2 + \frac{8x}{3} - 2x\right) dx = -3$$

توجه: همانطور که دیده می‌شود بردار $\vec{n}$ از گرادیان تابع سطح به دست می‌آید.

قضیه دیورژانس

فرض کنید که S یک سطح بسته باشد که حجم v را به خود محدود کرده است و میدان برداری $\vec{F} = p(x,y,z)\hat{i} + Q(x,y,z)\hat{j} + R(x,y.z)\hat{k}$ دیورژانس $\vec{F}$ در تمام حجم v توابعی پیوسته باشند. می‌توان نشان داد:

$$\oiint_s \vec{F}.\vec{n} ds = \iiint_V \left(\vec{\nabla}.\vec{F}\right) dv$$

فرمول استروگرادسکی:

$$\oiint_s p(x,y,z) dydz + Q(x,y,z) dxdz + R(x,y,z) dxdy = \iiint_V \left(\vec{\nabla}.\vec{F}\right) dx$$

مثال: حاصل انتگرال روبرو را حساب کنید: $\oiint_s \vec{F}.\vec{ds}\ ;\ \vec{F} = x^3 + y^3 + z^3\ ;\ s = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

حل: $\oiint_s \vec{F}.\vec{ds} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \left(3r^2\right) r^2 \sin\theta\, drd\varphi d\theta = \left(\frac{3}{5}R^5\right) \times (2\pi) \times (2) = \frac{12}{5}\pi R^5$

انتگرال منحنی الخط

اگر ds المان طول قوس بر روی منحنی C باشد انتگرال منحنی الخط به صورت روبرو تعریف می‌شود:

$$I=\int_C f(x,y,z)ds \quad ; \quad ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

اگر منحنی C در صفحه با معدلات پارامتری $\begin{cases} x=p(t) \\ y=q(t) \end{cases}$ تعریف شده باشد آنگاه: $ds=\sqrt{p'^2(t)+q'^2(t)}dt$

مثال: انتگرال تابع $f(x,y,z)=x+z$ روی منحنی $z=t$ و $y=2\sin t$ و $C: x=2\cos t$ وقتی $0\le t\le\pi$ چقدر است؟

حل:

$$I=\int_C (x+z)ds=\int_0^\pi (2\cos t+t)\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+1}\,dt=\int_0^\pi \sqrt{5}(2\cos t+t)dt=\left[2\sqrt{5}\sin t+\frac{\sqrt{5}}{2}t^2\right]_0^\pi=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi^2$$

نکته ۱: در مختصات استوانه‌ای داریم: $ds=\sqrt{(\rho d\varphi)^2+(d\rho)^2+(dz)^2}$

نکته ۲: در مختصات کروی داریم: $ds=\sqrt{(dr)^2+(rd\theta)^2+(r\sin\theta d\varphi)^2}$

نکته ۳: برای محاسبه طول قوس یک منحنی (S) از فرمول $\int_{r_1}^{r_2} 1ds$ استفاده می‌کنیم.

نکته ٤: کار نیروی $\vec{F}$ در مسیر منحنی C به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\int_C \vec{F}.\overrightarrow{dr}=\int_c F_x dx+F_y dy+F_z dz$

اگر منحنی C به صورت پارامتری باشد $\left(C: x=X(t), y=Y(t), z=Z(t)\right)$ آنگاه: $\int_C \vec{F}.\overrightarrow{dr}=\int_{t_1}^{t_2}\left(F_x X'(t)+F_y Y'(t)+F_x Z'(t)\right)dt$

قضیه استوکس

فرض کنید S یک سطح جهت‌دار و هموار در فضا باشد و C نیز منحنی کرانهٔ S باشد. همچنین فرض کنید میدان برداری $\vec{F}$ در S و کرانه C پیوسته باشد در این صورت داریم: $\oint_C \vec{F}.\overrightarrow{dr}=\iint_s (\vec{\nabla}\times\vec{F}).\overrightarrow{ds}$

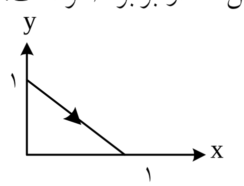
در حالتی که $F_z=0$ باشد، قضیه را گرین گویند و خواهیم داشت:

$$\oint_C F_x dx+F_y d_y=\iint_S\left[\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right]dxdy$$

نتیجه: اگر میدان برداری $\vec{F}$ پایستار باشد، انتگرال منحنی‌الخط $\int_c \vec{F}.\overrightarrow{dr}$ مستقل از مسیر است و می‌توان با ثابت نگه‌داشتن x و y و z در فواصل انتگرال‌گیری آن را ساده کرد.

نکته: برای تشخیص پایستار بودن یک میدان مقدار $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم. برای میدان‌های پایستار این مقدار برابر صفر است.

نمونه سؤالات:



۱- حاصل $\int_C \left(e^y-\sin x\right)dx+dy$ که در آن C منحنی نشان داده شده است، کدام است؟

۱) $e-\cos 1-1$ ۲) $e+\cos 1-3$ ۳) $e-\cos 1-3$ ٤) $e+\cos 1-1\le$

۲- محیط منحنی بسته $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ٤) $\frac{2\pi}{3}$

۳- طول قوس منحنی C به معادله پارامتری روبرو وقتی $0 \le t \le 1$ است کدام است؟

$$C: x=\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ ;\ y=\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ ;\ z=\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

۱) $\frac{\pi}{4}\ln 2$ ۲) $\frac{\pi}{2}\ln 2$ ۳) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ ٤) $\frac{\pi}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

٤- حاصل انتگرال روبرو کدام است؟

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$$

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ ٤) $\frac{\pi}{6}$

۵- حاصل $\oint_c \left(x^3+2y\right)dx+\left(4x-3y^2\right)dy$ که در آن C بیضی به معادله $x^2+4y^2=4$ می‌باشد کدام است؟

۱) $\frac{4}{27}$ ۲) $\frac{8}{81}$ ۳) $\frac{8}{27}$ ٤) $\frac{16}{81}$

٦- کار نیروی $\vec{F}=\left(y^2+x\right)\hat{i}+(2xy+1)\hat{j}$ روی مسیر دایره $x^2+y^2=1$ از نقطه $(1,0)$ به $(0,1)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ٤) $\frac{1}{2}$

۷- اگر $F(x,y,z)=0$ باشد، حاصل $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟

۱) F ۲) -F ۳) 1 ٤) -1

۸- اگر $f(x,y,z)=(z+y^2)^{x-z}$ باشد گرادیان تابع f در نقطه $p(1,1,1)$ کدام است؟

۱) $(\ln 2,0,-1)$ ۲) $(-\ln 2,0,1)$ ۳) $(\ln 2,0,\ln 2)$ ٤) $(\ln 2,0,-\ln 2)$

۹- کرل میدان $\vec{F}=u\vec{\nabla}v+v\vec{\nabla}u$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\vec{\nabla}(uv)$ ۳) $\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}(uv)\right)$ ٤) $\vec{\nabla}(u+v)$

۱۰- زاویه کرل میدان برداری $\vec{F}=e^y\hat{i}+yz^y\hat{j}-e^{xz}\hat{k}$ در نقطهٔ $p\left(\frac{1}{2}\ln 3,0,1\right)$ با محور oz کدام است؟

۱) $\mathrm{Arc}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ٤) $\frac{\pi}{6}$

حل نمونه سوالات

۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$C: y=1-x\ ,\ 0\le x\le 1$$

$$dy=-dx \Rightarrow I=\int_0^1\left(e^{1-x}-\sin x-1\right)dx=\left[-e^{1-x}+\cos x-x\right]_0^1=e+\cos 1-3$$

۲- گزینه ۲ صحیح است. منحنی فوق از تقاطع یک صفحه باکره پدیده آمده است. که دایره‌ای است به شعاع $\sqrt{R^2-OH^2}$ که OH فاصله مرکز کره از صفحه است و R شعاع کره می‌باشد داریم:

$$OH=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ ,\ R=2\ \Rightarrow\ r=\sqrt{4-3}=1\ \Rightarrow\ I=2\pi r=2\pi$$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$\vec{r} = \left(\cos\frac{\pi}{۴}t\ ,\ \sin\frac{\pi}{۴}t\ ,\ \ln\cos\frac{\pi}{۴}t\right)$$

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \left(-\frac{\pi}{۴}\sin\frac{\pi}{۴}t\ ,\ \frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴}t\ ,\ -\frac{\pi}{۴}tg\frac{\pi}{۴}t\right) \Rightarrow |\vec{V}| = \frac{\pi}{۴}\sqrt{۱+tg^{۲}\frac{\pi}{۴}t} = \frac{\pi}{۴}\sec\frac{\pi}{۴}t$$

$$\Rightarrow L = \int_{۰}^{۱}\frac{\pi}{۴}\sec\frac{\pi}{۴}tdt = \ln\left(\sec\frac{\pi}{۴}t + tg\frac{\pi}{۴}t\right)\Bigg|_{۰}^{۱} \Rightarrow L = \ln\left(\sqrt{۲}+۱\right)$$

۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$I = \int_{۰}^{\sqrt{۲}}\int_{۰}^{\sqrt{۲-x^{۲}}}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}dydx \qquad \Rightarrow \qquad I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\sqrt{۲}}\rho.\rho d\rho d\varphi = \left(\frac{\pi}{۲}\right)\times\left(\frac{۱}{۳}\rho^{۳}\right)\Bigg|_{۰}^{\sqrt{۲}} = \frac{\pi\sqrt{۲}}{۳}$$

۵- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{x^{۲}}{۴}+y^{۲} = ۱ \Rightarrow S_D = \pi ab = ۲\pi \Rightarrow \oint(x^{۳}+۲y)dx + (۴x-۳y^{۲})dy = \iint_D (۴-۲)ds = ۲s_D = ۴\pi$$

۶- گزینه ۴ صحیح است.

$$I = \int_{x^{۲}+y^{۲}=۱}(y^{۲}+x)dx + (۲xy+۱)dy \quad ; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = ۲y - ۲y = ۰$$

$$\Rightarrow I = \int_{(۱,۰)}^{(۰,۱)}(y^{۲}+x)dx + (۲xy+۱)dy = \int_{(۱,۰)}^{(۰,۰)}(۰,x)\,dx + \int_{(۰,۰)}^{(۰,۱)}(۰+۱)dy = -\frac{۱}{۲}+۱ = \frac{۱}{۲}$$

۷- گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_x} \quad ; \quad \frac{\partial y}{dz} = -\frac{F_z}{F_y} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -۱$$

۸- گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x,y,z) = (x+y^{۲})^{x-z} \Rightarrow \vec{\nabla}f =$$

$$\left[\left[(x-z)(x+y^{۲})^{x-y-۱} + (x+y^{۲})^{x-z}\ln(x+y^{۲})\right],\left[۲y(x-z)(x+y^{۲})^{x-z-۱}\right],\left[-(x+y^{۲})^{x-z}\ln(x+y^{۲})\right]\right]$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}f(۱,۱,۱) = \left(\ln ۲, ۰, -\ln ۲\right)$$

۹- گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{F} = u\vec{\nabla}v + v\vec{\nabla}u = \vec{\nabla}(uv) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}(uv) = ۰$$

۱۰- گزینه ۳ صحیح است.