بسمه تعالی

جزوه

مقاومت مصالح ۱

دانشگاه

تهران

استاد

دکتر نائی

SUBJECT :

Year : Month : Date :

مقاومت ۱

Text book : "Mechanics of Materials" F.P. Beer & E.R. Johnston

* سرفصل ها:

۱. تنش محوری

۲. تغییر شکل محوری

۳. پیچش

۴. خمش

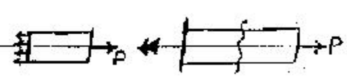
۵. برش

۶. تبدیل تنش (حالتی که بارها به سر جسم می‌آید، تنش max را حساب می‌کنیم)

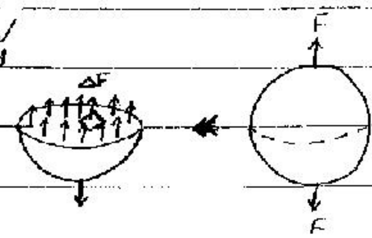
۷. تغییر شکل تیرها (مربوط به خمش)

۸۷/۷/۶

فصل اول: تنش محوری

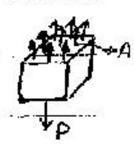


عکس‌العمل نیروی P در هر مقطع جسم، یک نیروی متمرکز نیست بلکه یک بار گسترده است (برآیند نیروهای بین مولکولی)



اگر سطحی از جسم به مساحت ΔA در نظر بگیریم، تنش برابر است با

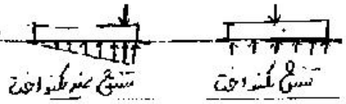
$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ ΔA را تا حدی بیشتر نمی‌توان کوچک در نظر گرفت (چرا؟)



برای محاسبه‌ی تنش بار گسترده را یکنواخت در نظر گرفته یعنی تنش در همه جا یکسان است پس داریم: $\sigma = \frac{P}{A}$

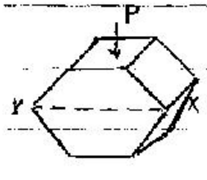
سطح مقطع

برای یکنواخت بودن تنش لازم است نیرو به مرکز سطح وارد شود ولی کافی نیست



SUBJECT :

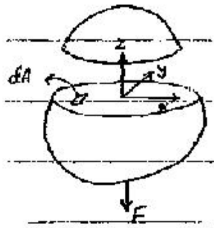
Year ( ) Month ( ) Date ( )



مثلاً در شکل مقابل نیرو به مرکز سطح وارد شده ولی تنش یکنواخت نیست در دو گوشه تنش صفر است. در شکل مقابل تنش در هر سطح مقطع بالاتر از خط چین یکنواخت است ولی این تکه‌های تیره که حساب شده، تنش از خط چین به بعد غیر یکنواخت باشد.

۸۷/۷/۸

فشار همان تنش است (stress) فرق خاصی ندارد فقط اینکه "فشار" = "تنش سطحی" است (surface stress).

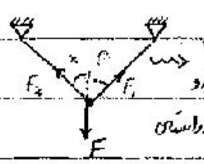


$\sigma = \frac{F}{A}$ $\quad F = \int \sigma_0 \, dA = \sigma_0 \int dA$ $\quad (Pa = N/m^2)$ واحد تنش

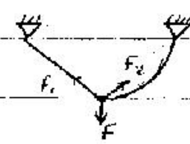
اسکالر نیروهای سطح حاصل از $\vec{F}$ به شکل استاتیکی خنثی می‌شود (توسط c).

$$x_F F = \int_A x \sigma_0 \, dA \rightarrow x_F \cancel{\sigma_0} \int dA = \cancel{\sigma_0} \int x \, dA \rightarrow x_F = \frac{\int x \, dA}{\int dA}, \quad y_F = \frac{\int y \, dA}{\int dA}$$

یافتن نیروهای داخلی:

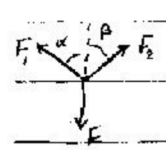


عضو دو نیرویی هر شکلی
از هر شکلی که باشد، دو نیرو
در امتداد هم و خلاف جهت و در راستای
دو مفصل



در استاتیک مقدار F را می‌داریم و مثلاً نیروهای داخلی را می‌خواهیم. ولی در مقاومت مصالح حدود F را تعیین می‌کنیم که مثلاً میله‌ای که فولادی است چقدر نیرو تحمل می‌کند و اینکه یعنی تنش نباید از یک حدی بیشتر شود. این را آیین‌نامه‌ی هر کشوری تعیین می‌کند.

برای حل اینها لازم نیست مانند استاتیک ← را x بگیریم و ↑ را y و دو معادله بنویسیم. اگر یک بار یک میله را و بار دیگر میله‌ی دیگر را x بگیریم به راحتی حل می‌شود. برای پیدا کردن F_1 و F_2:



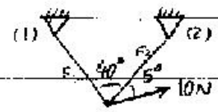
$F_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} F \qquad F_2 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} F$

STAEDTLER®

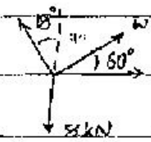
SUBJECT .

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثلاً :



$F_1 = \dfrac{\sin 5°}{\sin 40°} \times 10\,N$ $F_2 = \dfrac{\sin 45°}{\sin 40°} \times 10\,N$

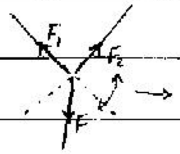


$W = \dfrac{\sin 18}{\sin 48} \times 8$

کششی + T

فشاری − C

تحلیل F_1, F_2

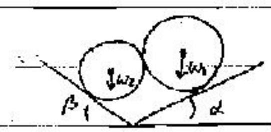


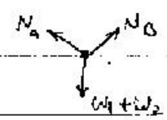
دو نیروی بالا (دو طرف خط اثر F_1) هستند پس

نیروی F_2 کششی است.

دو نیروی بالا یک طرف خط اثر F_1 هستند پس

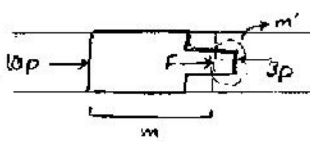
نیروی F_2 فشاری است.





لازم نیست همه به یک نقطه وارد شوند.

ممکن است نیرو در حال تعادل نباشد، فرقی ندارد. باز هم تمایل تنش را درک بیابیم.

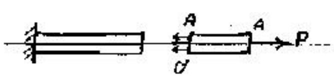


$10p - 3p = ma$ $F - 3p = m'a$

F در نیاید! ⟸ بیار بذار اینجا! نشد؟ تو اینجا در بیار!

۸۸/۷/۱۴

* تنش محوری



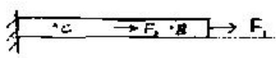
① نیرویی که بر سطح مقطع عمود است ← تنش محوری آن :

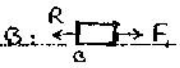
$\sigma = \dfrac{P}{A}$

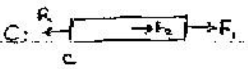
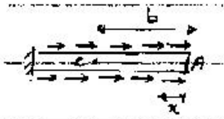
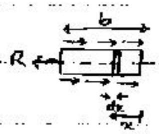
نیروی عمود بر سطح مقطع در قطعه‌ی مورد نظر را پیدا می‌کنیم و تقسیم بر مساحت می‌کنیم.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



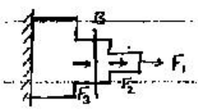
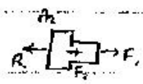
B:  $\Sigma F_x = 0 \rightarrow R - F_1 = 0 \rightarrow R = F_1$

C:  $\Sigma F_x = 0 \rightarrow R - F_1 - F_2 = 0 \rightarrow R = F_1 + F_2$

 

بارگسترده به معادله‌ی $q = 5x^3 \frac{N}{m}$. تنش محوری در نقطه‌ی C ؟

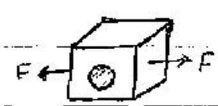
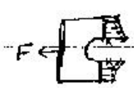
$dF = 5x^3 dx$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R - \int_0^b 5x^3 dx = 0 \Rightarrow R = \frac{5}{4} b^4 \quad \rightsquigarrow \quad \sigma_C = \frac{5}{4}\frac{b^4}{A}$

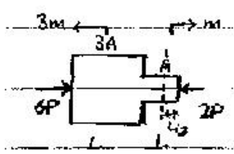
 

$R = F_1 + F_2 \qquad \sigma_B = \frac{F_1 + F_2}{A_1}$

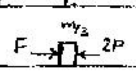
سطح مقطع استوانه‌ای جدار نازک به شعاع R و ضخامت t را $A = 2\pi Rt$ در نظر می‌گیریم

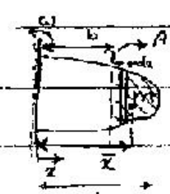
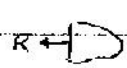
در شکل روبه‌رو تنش یکنواخت نیست و در دو نقطه‌ی x بیشتر است .
فعلاً ما تنش میانگین را حساب می‌کنیم و به عنوان پاسخ در نظر می‌گیریم .



$6P - 2P = (3m + m)\,a \rightarrow a = \frac{P}{m}$



$F - 2P = (m/3)\,\frac{P}{m} \rightarrow F = \frac{7}{3}P \rightarrow \sigma = \frac{7P}{3A}$

قطعه‌ی مقابل با سرعت ω حول محور می‌چرخد تنش در مقطع مورد نظر ؟ (چقدر)

$R = m\bar{x}\omega^2 \rightarrow \sigma = \frac{m\bar{x}\omega^2}{A(b)} \qquad A(x) = 56 - \frac{1}{2}x^2$

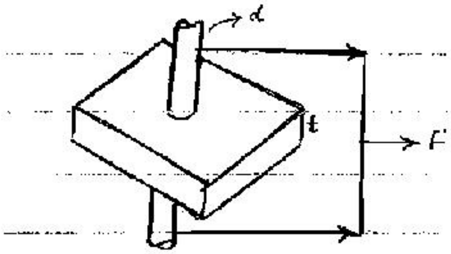
$dF = \rho A(x)\,dx\,\omega^2 x \rightarrow R = \int_b^L \rho\omega^2 x A(x)\,dx$

SUBJECT :

Year : Month : Date :

۸۷ ، ۷ ، ۱۵

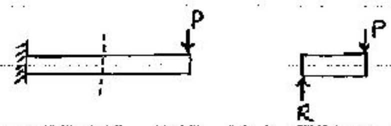
* تنش لهیدگی (تماسی) bearing stress



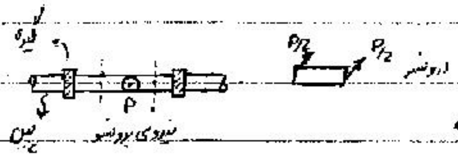
$$T_b = \frac{F}{td}$$

تصویر سطح تماس روی صفحه عمود بر نیروی برآیند

* تنش برشی (تنش برشی دوطرفه ، جابلین)



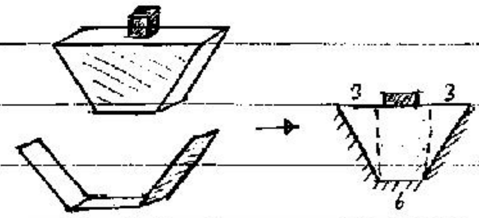
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R = P \qquad \tau = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}$$



تنش برشی از سطح مقطع ها برابر است با:

$$T = \frac{P/2}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

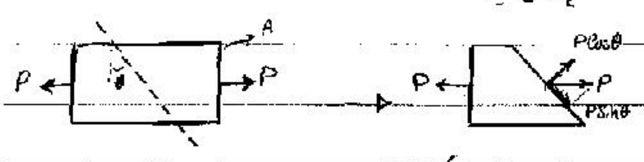
قطعه در درون قالب فشرده می شود و تنش تماسی برابر است با:



ضخامت = 1 تصویر سطح تماس 12 1

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R = P \qquad \tau_b = \frac{3\times10^3}{1\times12\times10^{-4}} = 2.5\times10^7 pa$$

با تغییر دادن θ سطح مقطعی را که تنش در آن max است پیدا می کنیم:



$$T = \frac{P \sin\theta}{A/\cos\theta} = \frac{P}{2A}\sin 2\theta$$

چون تنش برشی ماکزیمم در $\theta = 45°$ رخ می دهد که برای افزایش مقاومت قطعه در برابر شکست مواد شکننده به صورت مورب برش می خورند

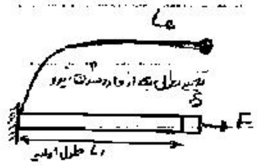
می دهد. تنش محوری max هم در $\theta = 0°$ رخ می دهد

$$\tau = \frac{P\cos\theta}{A/\cos\theta} = \frac{P}{A}\cos^2\theta$$

SUBJECT :
Year : Month : Date :

۸۸/۷/۲۲

* کرنش ـ تغییر مکان محوری Strain



(کرنش متوسط ـ مهندسی ـ اسمی و ...) $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$

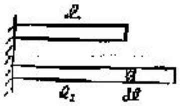
کرنش در جهت x است زیرا ابتدا میله در راستای x بوده است ... $\varepsilon_x = \frac{L_2 - L_1}{L_1}$

میله رو که ما خم کردیم کشیدیم ولی چون میله در حالت اولیه در جهت x بوده، ε_x می‌گذاریم

گاهی برای میله $y = f(x)$ می‌دهند برای آن باید طول قوس را بدست آوریم برای محاسبه‌ی طول.

$$\delta = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dy$$

کرنش واقعی: تغییرات طول را در هر لحظه در نظر می‌گیریم به صورت دیفرانسیلی.
مقطع

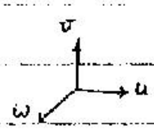


$$\varepsilon_t = \int_{l_1}^{l_2} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_2}{l_1} = \ln \frac{(l_2 - l_1) + l_1}{l_1} = \ln\left(\frac{l_2 - l_1}{l_1} + 1\right)$$

کرنش متوسط

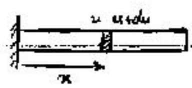
$$\varepsilon_t = \ln(1 + \varepsilon)$$

کرنش گاهی در جاهای مختلف یک جسم متفاوت است و یکسان نیست



با مقدار ε در جهات مختلف مختصات

اگر کرنش در قسمت های مختلف جسم یکسان نباشد:



$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$

اگر کرنش متغیر در جهت x باشد: (کرنش را به صورت جزئی حساب کرده‌ایم)

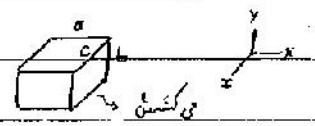
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

اگر کرنش را در نقطه‌های معلوم شده‌ی یک جسم (مثلاً نقطه‌ها را داده اند) بخواهیم و مثلاً داشته باشیم

$u = kxy$, $v = kxy$, $w = 2k(x+y)z$

ε_x , ε_y , ε_z را از $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ حساب می‌کنیم.

* کرنش حجمی: حجم نهایی را بر حجم اولیه تقسیم می‌کنیم.



$$\varepsilon_v = \frac{a(1+\varepsilon_x)\,b(1+\varepsilon_y)\,c(1+\varepsilon_z) - abc}{abc} = 1+\varepsilon_z+\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_x+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z-1$$

با تقریب $= \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$

⑤ مثال: نقاطی از جسم را بیابید که در آن تغییر حجم صفر باشد. $u = kzy \quad v = kxy \quad W = 2k(x+y)z$

$\Delta V = \nabla \varepsilon V$ پس ε_v باید صفر باشد

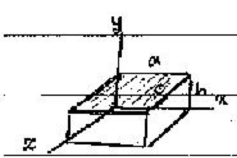
$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = ky$

$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = kx$

$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 2k(x+y)$

$\varepsilon_v = k(x+y) + 2k(x+y) = 3k(x+y)$

* کرنش سطحی



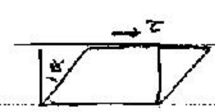
$\varepsilon_A = \frac{a(1+\varepsilon_x)c(1+\varepsilon_z) - ac}{ac}$ برای صفحه عمود بر y

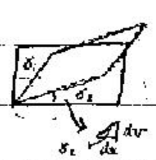
$x-z \rightarrow \varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_z$

$y-z \rightarrow \varepsilon_A = \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$x-y \rightarrow \varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

* کرنش برشی (کرنش زاویه‌ای): کاهش زاویه از حالت قائم در جسم را داریم





$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$

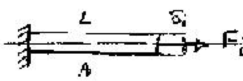
$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

۸۷/۷/۲۷

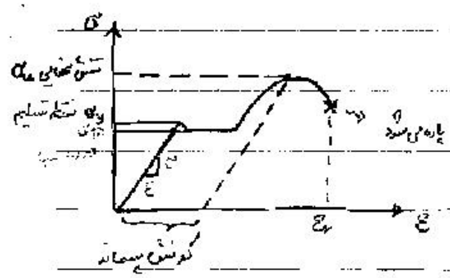
* قانون هوک



$\sigma_1 = \frac{F_1}{A}$ $\sigma_2 = \frac{F_2}{L}$ $\sigma_3 = \frac{F_3}{L}$ ...

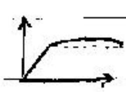
$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L}$ $\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L}$ $\varepsilon_3 = \frac{\delta_3}{L}$

با تغییر نیروها و تکرار آزمایش و اندازه‌گیری تنش و کرنش به نمودار زیر می‌رسیم. تمام طراحی‌های ما در قسمت خطی نمودار است. پس از آن هم جواب می‌دهد [illegible] است ولی خطرناک است.



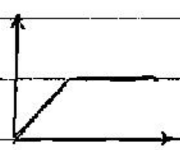
در قسمت خطی هر جا نیرو را قطع کنیم، از مسیر خود خط به سمت مبداء برمی‌گردد (الاستیک) ولی اگر از جایی روی قسمت منحنی رهایش کنیم، از روی خطی موازی با قسمت خطی برمی‌گردد (پلاستیک) (خط‌چین) ← کرنش پسماند!

$\sigma = a + b\varepsilon^n$ → به ازای nهای مختلف معادله‌ی قسمت‌های مختلف نمودار به دست می‌آید.

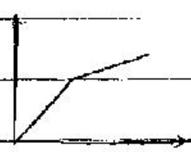


هرچه فلز نرم‌تر باشد منحنی کلی ساده‌تر می‌شود و تقریباً شامل دو بخش می‌شود.
و هرچه سخت‌تر باشد، طول قسمت خطی نمودار بیشتر می‌شود.

برای راحتی کار نمودارها را با چند خط مستقیم تقریب می‌زنند و با آن کار می‌کنند ولی ماده‌ای با چنین نمودارهایی وجود ندارد.



الاستوپلاستیک



bilinear

مدول یانگ $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ قانون هوک ⟸ $\sigma = E\varepsilon$

الاستیسیته { جزء خواص ماده است

شیب قسمت خطی نمودار تنش-کرنش

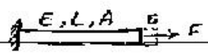
ضریب اطمینان برابر است با بار نهایی به بار مجاز و این را آیین‌نامه تعیین می‌کند.

u → ultimate   y → yield

$$SF = \frac{\sigma_{ultimate}}{\sigma_{allowable}}$$

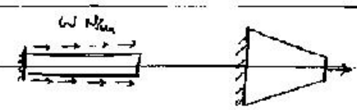
با توجه به نمودارها تنش های تسلیم بالاتر است از نقطه تسلیم ولی ما در ضریب اطمینان از σ_y استفاده می‌کنیم.

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{F}{A} = E\frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{FL}{AE}$$

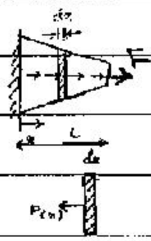


$$\left.\begin{matrix} \\ k = \frac{AE}{L} - dx \end{matrix}\right\} F = k\delta$$

با توجه به رابطه ی بالا می‌توان خیلی راحت به فنر تبدیل کنیم و مسئله را حل کنیم ولی نباید به تفاوت از این روش استفاده کنیم. (البته این رابطه در حالتی درست است که مساحت سطح مقطع E و A برای تمام طول ثابت باشد)



در مواردی مثل مثال های زیر، مساحت یا نیروی محوری در طول میله ثابت نیست و نمی‌توانیم از $\delta = \frac{FL}{AE}$ استفاده کنیم



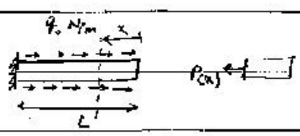
④ در اینجا هم F و A و E متغیر هستند. با انتگرال گیری از نیروهای محوری در هر المان... مسئله را حل می‌کنیم.

$$P_{(x)} = \int q(x)dx + F$$

$$\frac{\delta}{dx} = \frac{P(x)\,dx}{A(x)E(x)} \Rightarrow \boxed{\delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{A(x)E(x)}}$$

استاد اجازه دادن از ضمیمه‌ی کتاب انتگرال‌ها در امتحان استفاده نماییم

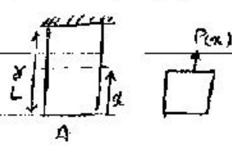
⑤ یه مثال ساده :



$$\Sigma F = P(x) - qx = 0 \Rightarrow P(x) = qx$$

$$\delta = \int_0^L \frac{qx\,dx}{AE} = \frac{qL^2}{2AE}$$

⑥ یه مثال دیگر تحت اثر وزن خودش!



$$\Sigma F = P(x) - \gamma A x = 0 \Rightarrow P(x) = \gamma A x$$

$$\delta = \int_0^L \frac{x\cancel{A}\gamma\,dx}{\cancel{A}E} = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

☺ لازم نیست حتماً قطع کنیم و P(x) رو حساب کنیم. می‌تونیم از خود q(x) و با انتگرال استفاده کنیم

$$\delta = \int_0^L \frac{x\,q(x)\,dx}{AE}$$

به این المان کوچک $q(x)dx$ وارد می‌شود

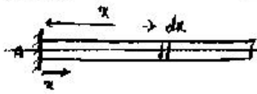
این انتگرال رو می‌شه با یک گشتاورگیری هم توضیح کرد.

۸۷/۷/۲۹

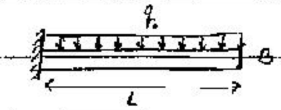
فرمولی که معرفی شد و در مواقع خاص کاربرد داشت:

$$\delta = \int \frac{x P(x)\,dx}{AE}$$

گشتاور حول محور

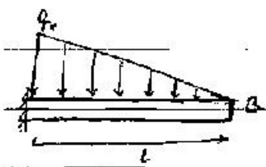
در این فرمول در واقع می‌بینیم نیروی $P(x)dx$ (روی یک قسمتی از میله) نسبت به میله‌ای که طولش x است، چقدر جلو می‌کشد.

با شکل دیگر فرمول:

$$\delta = \frac{\Sigma M_A}{AE}$$



$$\delta_B = \frac{(q_0 L)(L/2)}{AE}$$

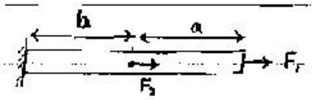
از این فرمول در امتحان استفاده نکن (بنابر ماهیت کلی‌اش)



$$\delta_B = \frac{\left(\frac{q_0 L}{2}\right)(L/3)}{AE}$$

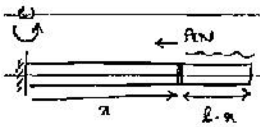
* دقت کن رابطه‌های معرفی شده فقط برای A و E ثابت هستند

یک مثال دیگه



$$\delta = \frac{F_1 a}{AE} + \frac{(F_1+F_2)b}{AE}$$

و با هم یک مثال: جابجایی نقطه‌ی انتهای میله؟



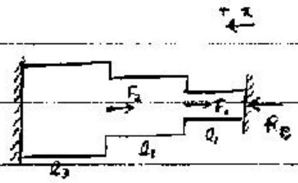
$$P(x) = (l-x)A\rho\left(\frac{l+x}{2}\right)\omega^2 \rightarrow \delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{A(x)E(x)}$$

STAEDTLER

SUBJECT:
Year (   ) Month (   ) Date (   )

مسائل نامعین رو از روی همین جابجایی میله حل می‌کنیم:

مثال: نیرویی که دیوار وارد می‌کند؟

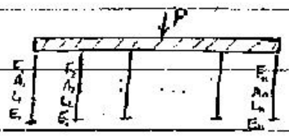


با نوشتن $\Sigma F=0$ به نتیجه نمی‌رسیم (۱ معادله و ۲ مجهول)

می‌آییم از راه فرمول δ می‌رویم، دیوار جلو را برمی‌داریم، نیرویش را جایگزین می‌کنیم:

$$\delta = \frac{(R_B)l_1}{A_1E} + \frac{(R_B - F_1)l_2}{A_2E} + \frac{(R_B - F_1 - F_2)l_3}{A_3E} \qquad \delta = 0 \rightarrow R_B = \checkmark$$

یه مثال دیگه:



نکته: نقطه‌ای وجود دارد که اگر P به آن نقطه وارد شود، میله جاری (افقی) و بدون کج شدن پایین می‌آید. به آن نقطه مرکز سختی جسم می‌گویند و محاسبه‌اش مهم است. وارد شدن P بر بقیه‌ی نقاط، سبب کج شدن میله می‌گردد.

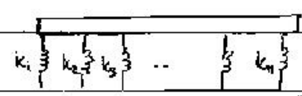
$$\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 + \cdots + F_n = P \\ \dfrac{F_1L_1}{A_1E_1} = \dfrac{F_2L_2}{A_2E_2} = \cdots = \dfrac{F_nL_n}{A_nE_n} \end{cases} \xrightarrow[\text{مجهول } n]{\text{معادله } n}$$

δ و تمام نیروهای مجهول حل می‌شوند

$$\delta = \frac{P}{\frac{A_1E_1}{L_1} + \frac{A_2E_2}{L_2} + \cdots + \frac{A_nE_n}{L_n}}$$

برای هر میله داریم: $\delta = \frac{FL}{AE} \Rightarrow F = \overbrace{\left\{\frac{AE}{L}\right\}}^{k}\delta \Rightarrow$ هر میله مثل فنر عمل می‌کند

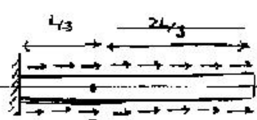
بنابراین این شکل می‌تواند اینگونه جایگزین شود:



همه‌ی فنرها موازی هستند و تغییر مکان یکسان دارند.

از طرفی برای فنرهای موازی می‌توانیم معادل‌گیری کنیم و یک فنر معادل قرار دهیم (مثل فنرهای موازی مثل خازن‌های موازی)

مثال: تغییر مکان نقطه‌ی c را بیابید.

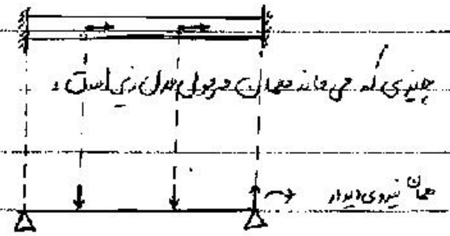


در حل اینگونه مسائل از c به بعد را می‌بریم و فقط اثر آن (نیروی معادلش) را در نقطه‌ی c اعمال می‌کنیم و با تیر مثل یک تیر جدید عمل می‌کنیم:

$$\delta_c = \frac{2q\,L/3 \times L/3 + q \times L/3 \times L/3}{AE}$$

مثال دیگری از حالت نامعین:

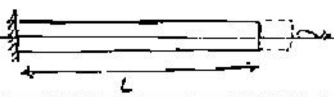
A و E در طول میله ثابت است.



اگر این را هم مثل مسئله صفحه قبل بنویسیم، $\delta = 0$، چیزی که می‌ماند همان معادله سازگاری است:

یعنی این شکل را می‌توانیم با مدل دیگری جایگزین کنیم:

* کرنش حرارتی:



$$\Delta L = L\alpha\Delta T \Rightarrow \varepsilon = \frac{L\alpha\Delta T}{L} = \alpha\Delta T$$

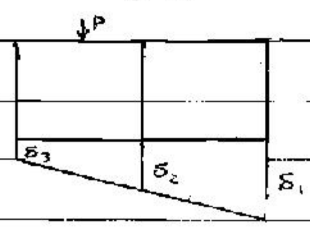
طبق رابطه‌ی هوک، چون کرنش داریم، باید تنش هم داشته باشیم، ولی با وجود کرنش اینجا تنش نداریم. گاهی یکی را داریم ولی دیگری را نداریم.

اگر در مقابل میله قید و محدودیتی بگذاریم، حرارت با تغییر طول میله، به این قید نیرو ایجاد می‌کند و در اثر نیرو تنش ایجاد می‌شود.

اگر سازه معین باشد، تنش حرارتی ایجاد نمی‌شود ولی اگر نامعین باشد (استاتیکی)، تنش ایجاد خواهد شد.

در حالت نامعین، معمولاً مسئله با روش انرژی حل می‌شود.

در مثال زیر می‌توان با نوشتن معادلات استاتیک و روابط هندسی و سازگاری بین نیروها، مسئله را حل نمود.

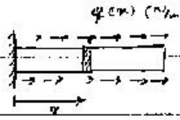


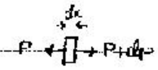
STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/۸/۱۴





$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P + dP - P + q(x)dx = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dP}{dx} = -q(x)$$

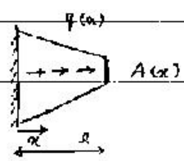
$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{P}{A} = E\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = -q(x) \Rightarrow EA\frac{d^2u}{dx^2} = -q(x)$$

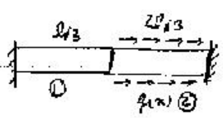
معادله دیفرانسیل بالا، با حل معادله دو ثابت انتگرالگیری بدست می آید که برای معین شدن آنها به شرایط مرزی (۲تا) نیاز است.

q در جهت x است، پس در معادله دیفرانسیل باید حتماً منفی باشد!

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} = -q_0 \Rightarrow EA\frac{du}{dx} = -q_0x + C_1 \Rightarrow EAu = -\frac{1}{2}q_0x^2 + C_1x + C_2$$

شرایط مرزی $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=l \Rightarrow u=0 \end{cases} \Rightarrow C_1, C_2$ ✓





در مورد مثال روبرو باید برای هر قسمت یک معادله بنویسیم

$$EA\frac{d^2u_1}{dx^2} = 0 \quad 0 \le x \le l/3 \qquad EA\frac{d^2u_2}{dx^2} = -q(x) \quad l/3 < x \le l$$

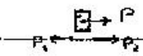
$\begin{cases} x=0 \rightarrow u_1=0 \\ x=l \rightarrow u_2=0 \end{cases}$

$x = l/3$: $u_1 = u_2 \rightarrow \frac{du_1}{dx} = \frac{du_2}{dx}$

SUBJECT

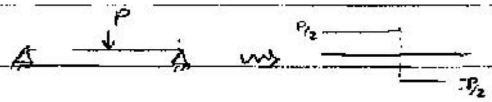
Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر نیروی متمرکز P به نقطه ای وارد شود، مقدار مشتق های u برابر نمی شوند. چون پیوسته نیست. u ها برابرند ولی چون پیوسته نیست، مشتق ها برابر نیستند. و مقدار مشتق ها به اندازه ی P فرق می کند.



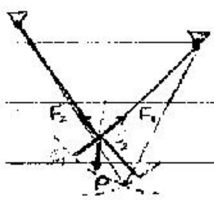
$P + P_2 = P_1 \Rightarrow P_1 - P_2 = P \Rightarrow EA\frac{du_1}{dx} - EA\frac{du_2}{dx} = P$

معادله پیوستگی



عدم پیوستگی نیروی برشی

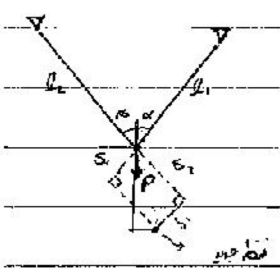
این یک توی برجاسون و تیموشنکو نیست ولی توی پوپوف هست.



* در شکل مقابل اگر نیروی P را وارد کنیم، هر میله مقداری تغییر طول دارد.

$\delta_1 = \frac{F_1 l_1}{AE}$

* تمرین: تغییر مکان نقطه ی اثر نیروی P را بر حسب δ_1 و δ_2 و α و β بدست آورید.



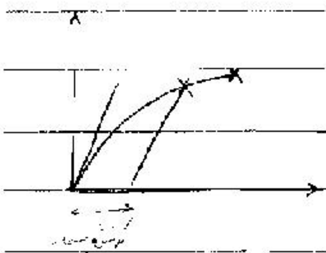
$$\begin{cases} \delta_1, \delta_2 = \alpha_i L_i \Delta T_i & \text{اگر تغییر دما بود} \\ \delta_i = \frac{F_i l_i}{AE} & \text{اگر تغییر طول بود} \end{cases}$$

* برنامه ی کامپیوتری که این مسئله رو با n تا میله نیز حل کند بنویسید.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/۸/۱۱



* اگر منحنی تنش - کرنش ما غیرخطی بود، برای پیدا کردن کرنش پسماند باید یک خط موازی با منحنی در نقطه‌ی مبداء رسم کنیم (در مبداء بر منحنی مماس رسم می‌کنیم تا شیب خط بازگشت را بدست آوریم)

* تنش گواه یا proof stress ← وقتی نمودار خطی نداریم با پرش ٪0.2 افست، این تنش را بدست می‌آوریم و از آن به جای تنش تسلیم استفاده می‌کنیم

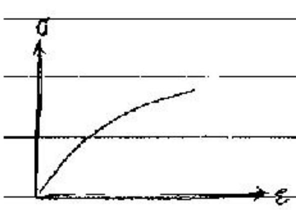
* شکل‌پذیری ← وقتی ماده را می‌کشیم، مساحت سطح مقطع آن رفته رفته کوچکتر می‌شود تا جایی که جسم پاره می‌شود. شکل‌پذیری جسم را به صورت $\frac{\text{مساحت نهایی}}{\text{مساحت اولیه}}$ یا $\frac{\text{تنش در حالت پاره شدن}}{\text{تنش تسلیم / تنش گواه}}$ تعریف می‌کنند

* اگر به جای کشیدن ما با فشردن جسم در آن تنش و کرنش ایجاد کنیم، قسمت خطی نمودار حاصل از قسمت خطی نمودار کشیدن کوتاه‌تر است. (اثر واشینگر)

* تانسور تنش: این تانسورها را تعریف می‌کنیم و بر اساس قوانین موجود آنها را به هم تبدیل می‌کنیم و معادلاتشان را بدست می‌آوریم. (مثل دایره‌ی موهر که برای حالت ایزوتروپی خوانده‌ایم!)

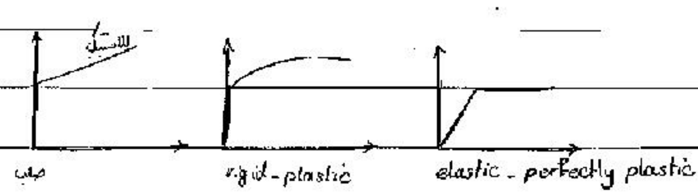
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

✓ بروید و بخوانید قطری‌سازی و کانونیک‌سازی را از ریاضی ۲! سر امتحان خودش تعیین می‌کند از چه راهی باید حل کرد!



* معادله‌ای برای منحنی مقابل بدست می‌آورند به صورت $\sigma = a + b\varepsilon^n$ که a, b, n را با سری آزمایش بدست می‌آورند. (منحنی Osgood)

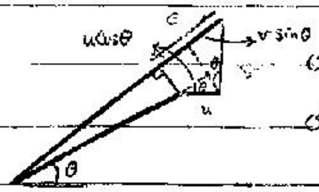
شکل‌های ممکن منحنی:



SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

۲ همین ابزار خود را هم روی سیستم با دستگاه‌های عرضه نیرو (و فنر) مدلسازی کرد.

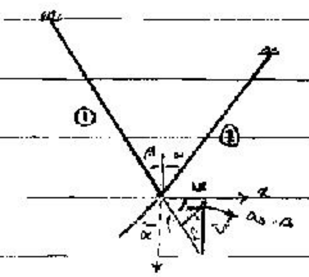


* به میله‌ی به نیروی وارد می‌کنیم، زاویه‌ی آن تقریباً تغییر می‌کند که در نتیجه زاویه‌ی نهایی را همان θ در نظر می‌گیریم. u تغییر مکان افقی و V تغییر مکان عمودی است. (زاویه کوچک است پس در ترکیب‌ها کمی و بر...)

total elongation → $e = v\sin\theta + u\cos\theta$ $e = \frac{FL}{AE} \Rightarrow F = \left(\frac{AE}{L}\right) e$

سختی میله

مثل فنر عمل می‌کند!



$\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)$

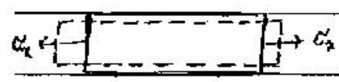
$e_1 = u\sin\beta + v\cos\beta \Rightarrow F_1 = k_1 e_1$

$e_2 = u\sin\alpha + v\cos\alpha \Rightarrow F_2 = k_2 e_2$

دو معادله‌ی دیگر هم از $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ برحسب F_1 و F_2 بدست می‌آوریم و دو مجهول u و V را بدست می‌آوریم. (روش جابجایی Displacement)

به جهت مثبت زاویه‌ها در دستگاه مختصاتی که در نظر می‌گیرید توجه کنید.

۸۷/۸/۱۳



* ε_x را خودمان ایجاد کردیم ولی ε_y و ε_z از کجا آمدند؟

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \ , \ \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$

ضریب پواسون

به موادی که خواص آنها در تمام جهات یکسان است isotropic گفته می‌شود و در غیر اینصورت orthotropic هستند.

اگر به جسم بالا در جهت y و z هم σ_y و σ_z وارد کنیم داریم:

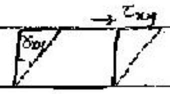
$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_y \ , \ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \ , \ \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_y$

$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z \ , \ \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z \ , \ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$

پس در کل داریم:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]$$
$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)\right] \quad ⑤$$
$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]$$

با وارد کردن نیروی محوری کرنش محوری خواهیم داشت ولی اگر نیروی برشی وارد کنیم کرنش زاویه‌ای خواهیم داشت.



$$\tau_{xy}=G\,\gamma_{xy} \quad ⑥$$

G ← مدول برشی

پس بین E ، ν و G رابطه‌ی روبه‌رو برقرار است که در آینده اثبات می‌کنیم:

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

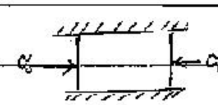
برای نیروهای برشی در دو جهت دیگر هم داریم:

$$\tau_{xz}=G\,\gamma_{xz}\ ,\ \tau_{yz}=G\,\gamma_{yz} \quad ⑦$$

به ۶ معادله‌ی ⑤ قانون عمومی هوک می‌گویند.

در معادلات علامت تنش کششی مثبت و تنش فشاری منفی وارد می‌شود.

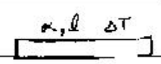
مثال: یک صفحه داریم (دو بعدی) که بالا و پایینش را بسته‌ایم. با ایجاد تنش در آن، کرنش را بدست آورید. $\varepsilon_x=?$



$\sigma_z=0\ ,\ \sigma_x=-\sigma_0\ ,\ \varepsilon_y=0$

$$\varepsilon_y=0\Rightarrow\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu(\sigma_x)\right)=0\Rightarrow\sigma_y=\nu\sigma_x=-\nu\sigma_0$$
$$\Rightarrow\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu(\sigma_y)\right)=\frac{1}{E}\left(-\sigma_0+\nu^2\sigma_0\right)$$

در حالت حرارتی داریم. کرنش حرارتی آن عبارت است از



$$\Delta l=\alpha L\Delta T$$
$$\varepsilon=\frac{\Delta L}{L}=\alpha\Delta T$$

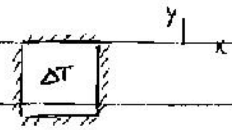
به هرکدام از سه معادله‌ی کرنش‌های محوری در قانون عمومی هوک یک ترم $\alpha\Delta T$ اضافه

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

می‌شود؟

مثال: از بالا و پایین و پهلوها جسم را بسته‌ایم. ε_z را می‌خواهیم؟



$$\sigma_z = 0 \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

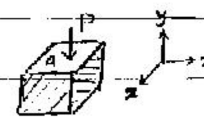
$$\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x - \nu\sigma_y = -E\alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_y = 0 \Rightarrow \sigma_y - \nu\sigma_x = -E\alpha\Delta T \Rightarrow \sigma_x = \ldots \text{ و } \sigma_y = \ldots \Rightarrow \varepsilon_z = \ldots$$

* برای کرنش حجمی هم با توجه به قانون هوک داریم:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + 3\alpha\Delta T$$

مثال: یک مکعب مستطیل را از ۵ طرف بسته‌ایم. از بالا یک نیروی P وارد می‌کنیم. تغییر حجم چقدر می‌شود؟



$$\sigma_y = -\frac{P}{A} \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_z \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu\sigma_z = -\nu\frac{P}{A} \\ \sigma_z - \nu\sigma_x = -\nu\frac{P}{A} \end{cases}$$

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

* اگر جسم ایزوتروپیک نبود α ها در جهات مختلف متفاوت بود و نمی‌توانستیم بنویسیم $\varepsilon_v = 3\alpha\Delta T$

اگر بخواهیم معادله‌ی مربوط به ε ها را برای پیدا کردن σ ها حل کنیم داریم:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda e - \frac{\alpha\Delta T}{1-2\nu} \quad , e = \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad , \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

G و λ ضرایب لامه نامیده می‌شوند.

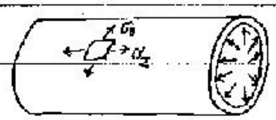
اگر بگوییم جسم تحت تنش صفحه‌ای قرار گرفته یعنی $\sigma_z = 0$ است و اگر بگوییم

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

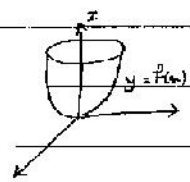
کرنش صفحه‌ای یعنی $\varepsilon_z = 0$ است.

مثال: مخازن تحت فشار (تحت فشار داخلی قرار می‌گیرند) [اگر شعاع بیشتر از 10 برابر ضخامت باشد جدار نازک در نظر می‌گیریم]



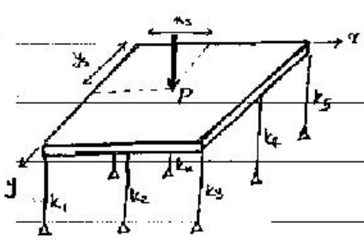
چون مقدار σ_θ و σ_z بسیار بسیار بیشتر از σ_r است، σ_r را صفر در نظر می‌گیریم.

شکل پیچیده‌تر سؤال‌هایی از این نوع این است که برای رویه‌ای که تحت معادله $y=f(x)$ به دست آید مثلاً یک بار حول محور z دوران می‌دهیم.



۸۷/۸/۱۸

* مرکز سختی یک سازه نقطه‌ای است که اگر در آن نقطه یک نیروی خارجی به سازه وارد کنیم، تمام نقاط سازه به یک اندازه جابه‌جا می‌شوند. مثلاً اگر سازه‌ای با یک صفحه‌ی افقی است، به صورت افقی بالا یا پایین برود تحت اثر نیرو!!



$$k_1\delta + k_2\delta + \cdots + k_n\delta = P$$

$$P x_s - k_1\delta x_1 - k_2\delta x_2 - \cdots - k_n\delta x_n = 0$$

$$\Rightarrow (k_1+k_2+\cdots+k_n)\cancel{\delta} x_s = (k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\cancel{\delta}$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n}{k_1+k_2+\cdots+k_n}$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i} , \quad y_s = \frac{\sum k_i y_i}{\sum k_i}$$

* مخازن جدار نازک ← سطح این مخازن هم به جای اینکه لازم نیست برای همه جا حساب کنیم، با بررسی روابط به معادله تبدیل می‌شوند.

STAEDTLER®

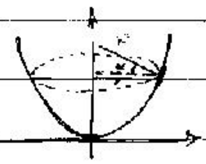
هندسه‌ی رویه‌ها ← دکتر کارشناس ← انحناها ← پیچش   ج

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

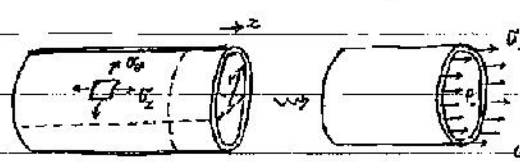
وقتی یک منحنی داریم و می خواهیم که نقطه‌ی مشخصی را در نظر بگیریم، با تعداد بی‌شماری مسیر می‌شود از این نقطه عبور کرد. اگر شعاع این مسیرها را در نظر بگیریم، مرکز همه‌ی آنها در راستای خط عمود بر منحنی خواهند بود. در این صورت این مسیرها تانسور هستند و می‌شود با داشتن ۲ تا از آنها هم چنین روابط حاکم بقیه‌ی مسیرها را نیز بدست آورد. دو مسیر خاص وجود دارند که شعاع انحنای آنها کمترین و بیشترین مقدار را در میان مقادیر شعاع‌ها دارند و این دو بر هم عمود هستند. این دو راستا راستاهای اصلی هستند و تاو برای آنها صفر است.

برای این مخازن جدار نازک یک المان در نظر می‌گیریم. در راستای تمام مسیرهایی که در بالا گفته شد این المان تحت کشش قرار می‌گیرد. ما دو تا از این کشش‌ها را که بر هم عمود هستند در نظر می‌گیریم. یکی از راستاها جزء این دسته منحنی‌های تانسور بالا نیست. شعاع این دو را با ضریب Cos از روی یکی از شعاع‌های مسیرهای دیگر بدست می‌آوریم.



$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \qquad r = R\cos\alpha$$

حالا مسائل ابتدایی که گفتیم، از راه معمولی مسائل رو حل می‌کنیم !! (سر و ته استوانه هم بسته است.)

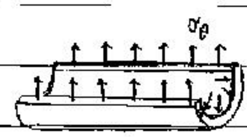


$$\pi r^2 P = \sigma_z \times 2\pi\left(r+\frac{t}{2}\right)t$$

نیرویی که به صفحه‌ی بستی در استوانه وارد می‌شود

شعاع متوسط

t خیلی کوچک است از t^2 صرف‌نظر می‌کنیم.

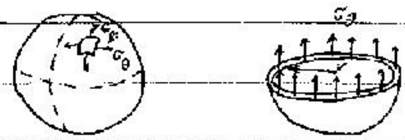


$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{Pr}{2t}$$

$$2tl\sigma_\theta = P\times 2rl \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{Pr}{t} \qquad \sigma_r = -P$$

اگر یک لوله‌ی با کره داشتیم، فقط تنش σ_θ داشتیم و σ_z برابر صفر می‌شد. σ_r رو صفر در نظر می‌گیریم چرا که در مقابل σ_z و σ_θ که خیلی بیشتر از آن هستند، قابل صرف‌نظر کردن!

۷ - مخزن جدار نازک کروی:



$$\sigma_\theta \times 2\pi r t = \pi r^2 P$$

$$\Rightarrow \sigma_\theta = \frac{Pr}{2t} = \sigma_\varphi$$

چون متقارن است و از هر طرف برش بزنیم فرقی نمی‌کند $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_z) \qquad \varepsilon_r = \frac{1}{E}(-\nu)(\sigma_\theta + \sigma_z) \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_\theta)$$

$$\Rightarrow \Delta r = r\varepsilon_\theta \qquad \Delta t = t\varepsilon_r \qquad \Delta l = l\,\varepsilon_z$$

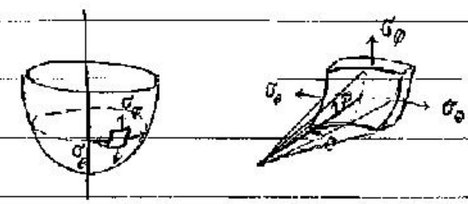
$$r \longrightarrow r + \Delta r$$

محیط $2\pi r \longrightarrow 2\pi(r+\Delta r)$

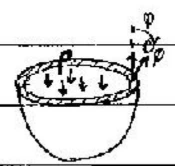
$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}$$

۸۷/۸/۲۵

* پوسته‌های دورانی:

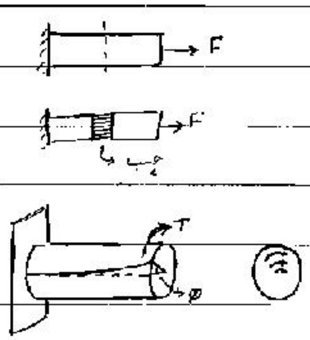


$$\frac{\sigma_\varphi}{r_\varphi} + \frac{\sigma_\theta}{r_\theta} = \frac{P}{t}$$



$$\sigma_\varphi \cos\varphi \, 2\pi r t = P\,\pi r^2 \Rightarrow \sigma_\varphi = \frac{Pr}{2t\cos\varphi}$$

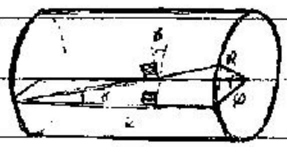
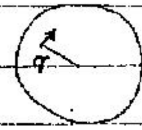
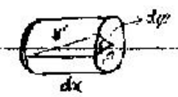
* پیچش:



برای حس کردن تنش، مثلاً اگر میله‌ای به صورت عمودی از مقطع ببریم، با چسب دوباره بچسبانیم و قبل از خشک شدن چسب نیروی F را اعمال کنیم، شکل چسب، تجسمی از تنش و نیروهای داخلی در اختیار ما می‌گذارد. حال اگر نیروی T به آن وارد کنیم، چه شکلی می‌شود؟

چون زاویه‌ی φ کوچک است، خط چسب را هم یک خط راست در نظر می‌گیریم

SUBJECT :
Year (　　) Month (　　) Date (　　)

اگر از داخل استوانه یه استوانه به شعاع کوچکتر از R دربیاریم، داریم :

γ' کوچکتر از γ است. (طول استوانه کوچک dx است، المان)

بزرگ $\rightarrow R\varphi = l\gamma$

کوچک $\rightarrow \rho\, d\varphi = \gamma' dx \rightarrow \gamma' = \rho \dfrac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \tau = G\gamma' = \rho G \dfrac{d\varphi}{dx}$ (I)

اگر در استوانه یک مقطع بزنیم و از پشت به مقطع نگاه کنیم، چون T به صورت تنش‌های τ ای مشاهده می‌شود که با ایجاد گشتاور، T را خنثی می‌کنند.

$$dT = \rho\tau\, dA \Rightarrow T = \int_A \rho\tau\, dA$$

$$\xrightarrow{(I)} T = \int_A \rho^2 G \frac{d\varphi}{dx} dA = G\frac{d\varphi}{dx}\int_A \rho^2 dA$$

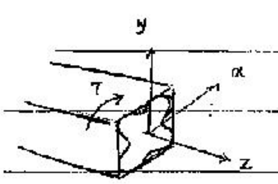
$\int \rho^2 dA \rightarrow$ ممان اینرسی

$$\Rightarrow T = GJ\frac{d\varphi}{dx} \xrightarrow{(I)} \tau = \frac{T\rho}{J}$$ تنش در هر مقطع

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \int_0^l \frac{T}{GJ}dx \xrightarrow[\text{ثابت}]{G, T} \varphi = \frac{Tl}{GJ}$$

۸۷/۸/۲۷



* پیچش مقاطع غیر دایروی :

این مقاطع دچار اعوجاج می‌شوند و مثل مقطع دایره‌ای نیستند. برای حل این مقاطع و هم چنین مقاطع دایروی معادله بسط آورده چنین است :

STAEDTLER

SUBJECT :

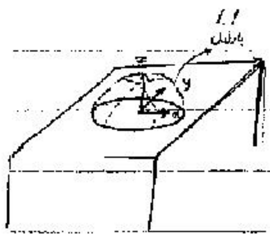
Year : Month : Date :

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -2G\theta \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta \\ \varphi = 0 \quad \text{برای نقاط مرزی} \end{cases}$$

(θ زاویه‌ی پیچش در واحد طول است).

φ را به صورتی در نظر می‌گیریم و از فرمول‌های پایینی T و τ را بدست می‌آوریم.

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \tau_{zy} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , T = 2\iint \varphi \, dx\, dy$$



P فشار داخلی است و S کشش در پلاستیک است.

$$z = z(x,y)$$

داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-P}{S}$$

$$\tau_{zy} = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \tau_{zx} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

با مقایسه دو فرمول بدست آمده: $P = 2\theta \quad , \quad 1/S = G$ (تشابه)

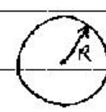
در راستای y انحنا نداریم $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-P}{S}$$

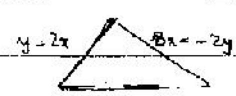
از جمله توابعی که بر اساس شرایط مرزی حدس می‌شوند:

$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \varphi = k(x^2+y^2-R^2)$ تابع φ باید روی مرز صفر شود

$\hookrightarrow$ برحسب θ



$$\varphi = (y-2x)(y)(3x+2y)$$



$$\theta = \frac{\varphi}{L} = \frac{TL}{G} \rightarrow \varphi = \frac{TL}{GJ}$$

وقتی معادلات φ پیدا شد در معادله‌ای که اول صفحه ذکر شد جایگذاری کرده و از روی آن T بدست می‌آید

مثلاً اگر سطح مقطع بیضی باشد معادله φ، معادله بیضی است.

$$\varphi = k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

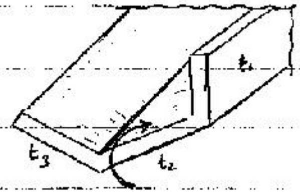
τ_{max} به جای کمترین فاصله از مرکز اتفاق می‌افتد

SUBJECT :

Year : Month : Date :

تنش برشی (τ) در مقاطع جدار نازک باز:

$$\tau = \frac{Tt}{\frac{1}{3}bt^3} \qquad t \ll b$$

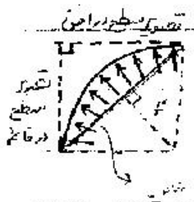


برای مقاطع باز:

$$\tau_j = \frac{T t_j}{\sum \frac{1}{3} t_j^3 b_j} \quad \left(\sum \tfrac{1}{3} t_j^3 b_j \to J\right)$$

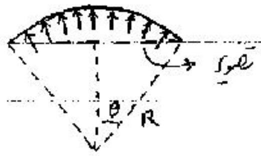
$$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{TL}{G \sum \frac{1}{3} t_j^3 b_j}$$

نکته: در کتاب محاسبه‌ی تنش این گونه عمل می‌کنیم. (در مورد جدار نازک‌ها برای محاسبه‌ی تنش آنها)

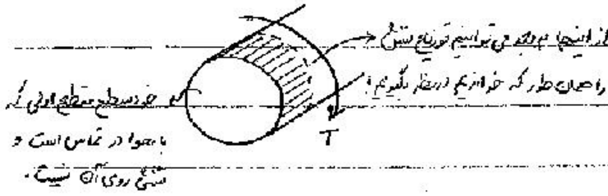


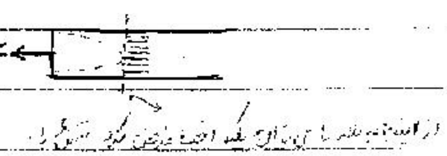
اگر با المان گیری و سپس با انتگرال گیری حل کنید، آخر سر به همین نتیجه خواهی رسید که نیرو برابر با P در سطح مقطع تقسیم شده است.

یا مثلاً در این شکل:



وقتی یک نیرویی یا گشتاوری به ابتدای میله وارد می‌شود، تا یه جایی از میله می‌توانیم با تقسیم آن بر سطح مقطع تنش را بیابیم. در ابتدا حالت یکنواخت ندارد.





در صورتی که F از اول به طور گسترده به سطح وارد شود و هم چنین در ابتدا گسترده داشته باشیم، از ابتدای میله می‌توان تنش را یکنواخت فرض کرد.

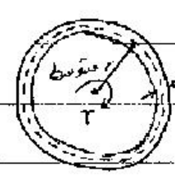
* مقاطع جدار نازک بسته:

در مقاطع جدار نازک، تنش داخلی تقریباً با خارجی برابر است و ما تنش را در مرکز مقطع حساب می‌کنیم.

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



$$\tau = \frac{T}{2At}$$

t ← ضخامت

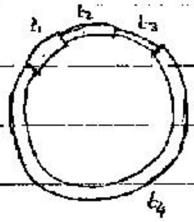
A ← سطح مقطع دایره به شعاع متوسط

$$\phi = \frac{TL}{4A^2G}\int\frac{ds}{t}$$

ds ← طول منحنی روی دایره به شعاع r_{ave}

در صورتی که ضخامت در مناطق مختلف متفاوت باشد، انتگرال به چند انتگرال تبدیل می‌شود

مثلاً :



$$\phi = \frac{TL}{4A^2G}\left[\frac{1}{t_1}\int \cancel{ds_1} + \frac{1}{t_2}\int \cancel{ds_2} + \frac{1}{t_3}\int \cancel{ds_3} + \frac{1}{t_4}\int \cancel{ds_4}\right]$$

S_1, S_2, S_3, S_4

$t_1, t_2, t_3, t_4 = cte$

$$\phi = \frac{TL}{4A^2G}\sum\frac{s_i}{t_i}$$

* منحنی بحثی ـ صلبیت ـ سختی ـ مقاومت ـ ظرفیت تحمل

برای یافتن سختی جداره به دنبال نیرو و تغییر مکان بگرد. رابطه‌ی بین نیرو و تغییر مکان را می‌نویسیم، وقت شود نیرو باید بیرون ضریب باشد، با حذف F و δ، آنچه که می‌ماند سختی جسم است.

$F = k\delta$

پس همیشه می‌روی سراغ نیرو و تغییر مکان، مثلاً در رابطه‌ای که به دست آوردیم:

$$\text{تغییر مکان} \; \phi = \frac{\overset{\text{نیرو}}{T}L}{4A^2G}\int\frac{ds}{t} \Rightarrow T = \underbrace{\left(\frac{4A^2G}{L}\;\frac{1}{\int\frac{ds}{t}}\right)}_{k}\phi$$

$k \rightarrow$ رابطه‌ی سختی در جدار نازک بسته

* مقاطع جدار نازک باز:

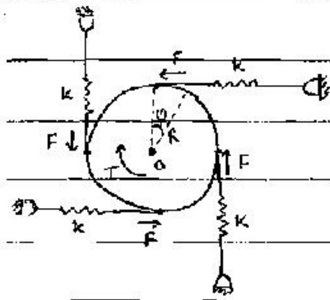
$$\phi = \frac{TL}{G\sum\frac{1}{3}t_i^3 b_i} \Rightarrow T = \underbrace{\left(\frac{G}{L}\sum\frac{1}{3}t_i^3 b_i\right)}_{k}\phi$$

$k \rightarrow$ رابطه‌ی سختی در جدار نازک باز

STAEDTLER

SUBJECT :
Year ( ) Month ( ) Date ( )

④ مثال : سختی پیچشی سیستم زیر را بیابید.



برای جسم صلب در حالت تعادل رابطه ی تعادل را می نویسیم:

$\Sigma M_o = 0$

$4kR\phi \times R - T = 0$

$4F = 4kR\phi$

بنابراین:

برای محاسبه ی سختی اگر فرمول آماده داشتیم (مثل روابط صفحه قبل) از آنجا استفاده می کنیم. اگر نبود مثل مثال ذکر شده خودمان پیدا می کنیم

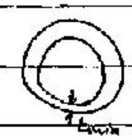
در مقاومت، برای محاسبه ی مقاومت، یعنی تا کجا به آن تنش وارد کنیم تا بشکند. پس در این مورد می رویم سراغ نیرو و تنش.

وقتی بر چند نمونه T یکسان وارد کنیم، max تنش هر کدام کمتر باشد، به این معنی است که مقاومت یا ظرفیت بیشتری دارد.

بنابراین همواره سراغ تنش max می رویم.

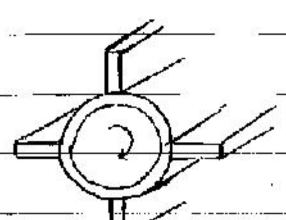
$\tau_{max} = \dfrac{T}{2A\,t_{min}}$

در رابطه ای که بدست آوردیم:



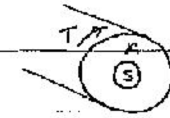
$\Rightarrow T = \underbrace{2A\,t_{min}\,\tau_{max}}_{\text{ظرفیت ماده}}$

فرض کنید یک جداره نازک بسته را به چند بازو وصل کرده باشیم:



در اینجا هم T بین اجزا تقسیم می شود

همه با هم می چرخند



T بین A و S تقسیم می شود

بنابراین مثل دو فنر موازی، سختی جداره نازک بسته از فرمول خودش و برای بازوها از فرمول خودشان

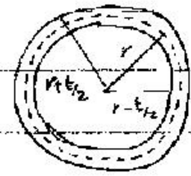
$\dfrac{4A^2G}{l\oint\frac{ds}{t}} =$ سختی برای بسته

$4k$ جمع سختی بازوها

SUBJECT .

Year (| Month (| Date ( )

در مسائل جدار نازک ($t \ll R$) از ترم‌های t صرف‌نظر کنیم.



$$\begin{cases} A = \pi\left((r+t/2)^2 - (r-t/2)^2\right) = 2\pi r t \\ J = (2\pi r t)\, r^2 = 2\pi r^3 t \end{cases}$$

این روابط برای جدار نازک ← بسته باید باشد!

در مسئله نازک $\phi = \dfrac{T}{4k}$

فرمول J در بسته‌ها: $J = \dfrac{4A^2}{\int \frac{ds}{t}}$

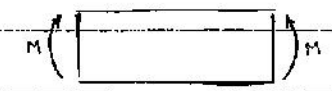
Ⅱ

SUBJECT : [ثانی]

Year : Month : Date :

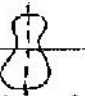
۸۷/۹/۴

* خمش :



تنش خمشی از نوع تنش محوری است، پیچشی نیست.

در اینجا نیز به کمک فرضیات، معادلات تعادل (معادلات دیفرانسیل) را بدست می‌آوریم.

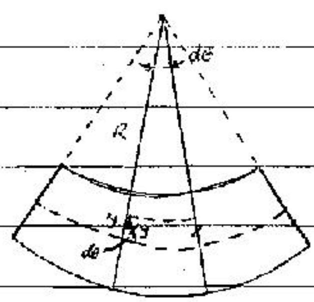
فرضیات اویلر-برنولی: اگر مقطع یک صفحه‌ی تقارن داشته باشد  و صفحه‌ای باشد که در آن تنش صفر باشد، به خطی که این دو صفحه را قطع می‌کند محور یا تار خنثی گفته می‌شود.

مقطع ما، قبل و بعد از خمش عمود بر محور خنثی باقی می‌ماند.

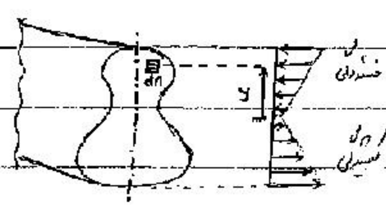
از کرنش برشی در راستای y و z (اگر α مقطع بر محور تیر باشد) صرف نظر می‌کنیم (و از تنش‌ها)

(اینجا K ها اصلی هستند!!)

صفحه‌ی خنثی (تنش در آن صفر است) همچنان می‌توانیم که M را حول یکی از محور تقارن مقطع، اعمال کنیم.



$$\varepsilon_x = \frac{-y\,d\theta}{R\,d\theta}$$



اگر σ_x تنش در فاصله‌ی y از محور خنثی و dA جز سطحی در آن فاصله باشد، انتگرال $\int \sigma_x dA$ مقدار نیروی محوری وارد بر مقطع را به ما می‌دهد.

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{R} \xrightarrow{\sigma_y = \sigma_z = 0} \sigma_x = -E\frac{y}{R}$$

$$\Rightarrow N = \int \sigma_x dA = \int -\frac{Ey}{R} dA \quad , \quad M = -\int y\,\sigma_x dA = -\int \frac{-Ey^2}{R} dA = \frac{E}{R} I$$

ممان اینرسی

با توجه به اینکه مجموع نیروهای طولی وارد بر مقطع (رابطه ۲) صفر است یعنی $N=0$ می‌توان مختصات تار خنثی را بدست آورد.

از رابطه‌ی نوشته شده برای M نیز می‌توان مقدار انحنای ایجاد شده در اثر خمش را بدست آورد.

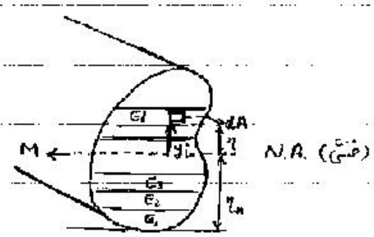
تنش خمشی نیز برحسب M از رابطه‌ی روبرو بدست می‌آید: $\sigma = -\frac{My}{I}$

۸۷٫۹٫۱۴ (بعد از میان ترم)

رابطه‌ی $\sigma = \frac{My}{I}$ برای مقاطع و یک جنس کاربرد دارد. برای مقاطع از جنس های مختلف:

* از $\frac{My}{I}$ در جنس های مختلف نمی‌توان استفاده کرد چون اصلاً در آن E ظاهر نشده!

رابطه‌ای که برای ε بدست آوردیم: $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ (برای هر نقطه)



$\varepsilon_i = \frac{y_i}{\rho}$ ⇝ (y_i: تا تار خنثی ، ρ: شعاع انحنا)

$\sigma_i = E_i \varepsilon_i \Rightarrow \sigma_i = \frac{E_i y_i}{\rho}$

نیرویی که به المان dA وارد می‌شود $\sigma_i dA$، بنابراین: $F = \int \sigma_i dA$ کل نیروی وارده به قسمت با جنس E_i

کل نیروی وارد شده به مقطع: $F_x = F_T = \sum_{i=1}^{N} \int \sigma_i dA = \sum \int \frac{E_i y_i}{\rho} dA$

گشتاور اول سطح حول محور خنثی که صفر است: $F_T = \sum \frac{1}{\rho} \int E_i y_i dA = 0$ ⇝

که با E_i وزن‌دار شده!

اگر محور را پایین‌ترین نقطه سطح مقطع در نظر بگیریم: $\sum \int E_i (\eta - \eta_n) dA = 0$

STAEDTLER

SUBJECT : [ادامه]

Year ( ) Month ( ) Date ( )

برای یک جنس $\bar{y}_i\,dA$

$$\sum\int E_i\eta\,dA = \eta_n\sum\int E_i\,dA \Rightarrow \eta_n = \frac{\sum\int E_i\eta\,dA}{\sum\int E_i\,dA} \Rightarrow \eta_n = \frac{\sum E_i\int \eta_i\,dA}{\sum E_i\int dA} = \frac{\sum E_i\,\bar{\eta}_i A_i}{\sum E_i A_i}$$

(می‌دانیم $\int y\,dA = \bar{y}A$)

آنچه به دست آمده (η_n یا $\bar{\eta}$) « معادل مرکز وزن » نامیده می‌شود

تا این جا با نیرو کار کردیم ، چون نیروی وارد نشده بود ، باید صفر بود. حالا لنگر را می‌نویسیم :

$y_i\sigma_i\,dA \rightsquigarrow$ لنگر وارد به dA

$$\sum\int y_i\sigma_i\,dA = M \Rightarrow M = \sum\int\frac{y_i^2E_i\,dA}{\rho} = \sum\frac{E_i}{\rho}\underbrace{\int y_i^2\,dA}_{I\ \text{ممان دوم حول تار خنثی}} \Rightarrow M = \frac{1}{\rho}\sum E_iI_i$$

* فراموش نکنید منظور از I_i ، ممان دوم جنس i ام حول تار خنثی است .

$$\frac{M}{\sum E_iI_i} = \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_i}{E_iy_i}$$ برای یکی از مقاطع

فرمول قابل استفاده برای چندجنسی‌ها :

$$\Rightarrow \sigma_i = E_i\frac{My_i}{\sum E_iI_i}$$

اگر تک جنس بودیم همان فرمول قبلی خواهیم رسید .

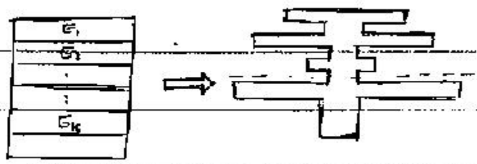
$$\sigma_i = \frac{My}{I}$$

در Beer Johnston روش دیگری ذکر شده که آن را هم باید ببینید !

$$\bar{\eta} = \frac{\sum n_iA_i'}{\sum A_i'} \qquad A_i' = n_iA_i\ \text{(مساحت‌های معادل)} \qquad n_i = \frac{E_i}{E_k}$$

(همه اجزا را به یک جنس تبدیل می‌کنیم (همه را به E_k تبدیل می‌کنیم))

در واقع با تغییر سطح معادل یک جنسی آن را پیدا می‌کنیم :



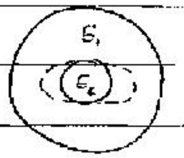
SUBJECT: [ثانی]
Year [ ] Month [ ] Date [ ]

حالا که یک جسم تبدیل شده ، I_e (I معادل) را پیدا می‌کنیم:

$$\sigma_i = \frac{My_i}{I_e}$$

جوابی که بدست آمده باید در n ضرب شود.

به عنوان مثال:

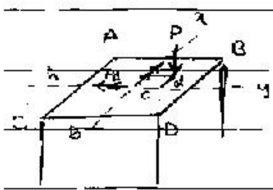


$$\frac{E_1}{E_2} = n$$

دایره مثلاً به بیضی تبدیل می‌شود. I بیضی را حساب می‌کنیم، I_e را می‌یابیم و در فرمول جاگذاری می‌نماییم.

گاهی اوقات این تبدیل کردن مشکل است، همان روش اول که استاد گفت، راحت‌تر است.

۸۷/۹/۱۸



نیروی خمشی از نوع محوری است، پس می‌توانند جمع شوند.

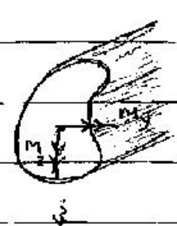
$$\sigma_y = \frac{My}{I}$$

$$\sigma_P = \frac{Pd\,h/2}{\frac{1}{12}bh^3} + \frac{Pe\,b/2}{\frac{1}{12}b^3h} + \frac{P}{bh}$$

محل محورهای تقارن موقعی:
می‌نویسیم معادله را.

* حالا P را روی یک سطح قرار می‌دهیم و انتگرال را نیز محاسبه می‌کنیم.

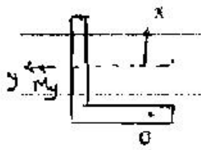
اگر مقطع شکل خاصی نداشت، مرکز سطح را می‌یابیم، دو محور عمود بر هم به شکل نیز دلخواه می‌گیریم و حال نقاط تعادل را می‌نویسیم.



وقتی بنویسیم ... $\int zy\,dA$

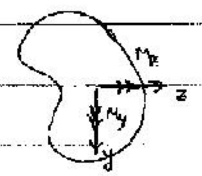
فرض کنیم این شکل متقارن!

SUBJECT: [illegible]
Year (   ) Month (   ) Date (   )



رابطه‌ای که داشتیم، فقط در حالتی درست است که حول محور اصلی گشتاورها را بنویسیم.

اگر محور اصلی داشته باشیم، باید M_y را روی دستگاه جدید تصویر کنیم



$I_{xy}=0$ حول محور اصلی

فرض می‌کنیم تنش خطی است

$$\sigma_x = cz + dy + k$$

اگر نیروی محوری نداشته باشیم: $k=0$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \int \sigma_x \, dA\, z = M_y$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \int \sigma_x \, dA\, y = M_z$$

$$\sum F_x = 0 = \int \sigma_x \, dA$$

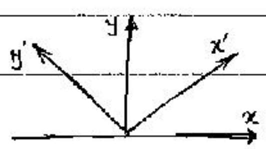
$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y - M_y I_{zy})y}{I_{yz} - I_{yz}^2}$$

در حالتی که → $I_{zy}=0$ ⟿ $\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$

$M_y = 0$

محورهای اصلی ← (رابطه برقرار است)

تغییر محورها: $I_x \quad I_y \quad I_{xy}$ → بدست می‌آوریم



$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

$$I_{x'y'} = -\frac{I_x + I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

برای بدست آوردن θ، $I_{x'y'}$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\tan 2\theta = \frac{2 I_{xy}}{I_x + I_y}$$

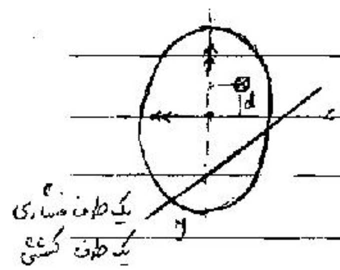
حال که محور اصلی بدست آمد، از رابطه‌ی $\sigma = \frac{My}{I}$ استفاده می‌کنیم

در تار خنثی تنش برابر صفر است.

STAEDTLER

SUBJECT: [نانی]

Year ( ) Month ( ) Date ( )



برای تعیین تار خنثی، یک نقطه‌ی دلخواه در ربع اول در نظر می‌گیریم.

$$\sigma_x = \frac{Pdy}{I_z} - \frac{Pcz}{I_y} - \frac{P}{A} = 0$$

معادله‌ی تار خنثی برحسب y و z به دست می‌آید.

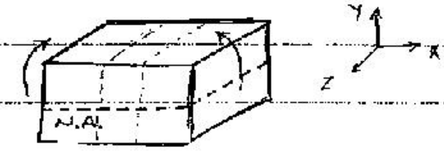
ممکن است سؤال کند که P را کجا قرار دهیم که تمام آن فشاری شود. این نقطه مکان هندسی است، هسته‌ی مقطع نامیده می‌شود.

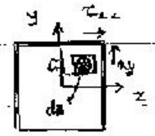
SUBJECT: [عماری]
Year ( ) Month ( ) Date ( )

نیم ترم دوم

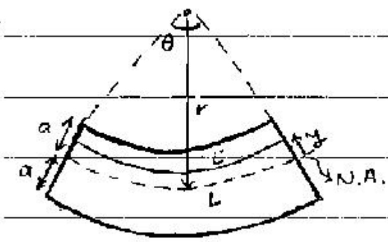
۸۷/۹/۱۷

* خمش Bending





$\int \sigma_x dA = 0 \quad (I) \quad ; \quad \int -y\,\sigma_x dA = M_z \quad (II)$



تنها چیزی که در مورد تار خنثی می‌دانیم اینست که تغییر طول (فشار و کشش) ندارد.

طول اولیه تیر: L

$L = r\theta$

$L' = (r-y)\theta$

$\delta = -y\theta \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{-y\theta}{r\theta} = \frac{-y}{r}$

کرنش پایین‌ترین قسمت تیر $\varepsilon_m = +\frac{a}{r} \longrightarrow \varepsilon_x = -\frac{y}{a}\varepsilon_m$

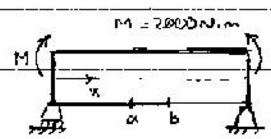
$(II) \Rightarrow \int \frac{y}{a} E\varepsilon_m y\, dA = \frac{\overset{\sigma_m}{E\varepsilon_m}}{a}\underbrace{\int y^2 dA}_{I} = M \Rightarrow \sigma_m = \frac{Ma}{I}$

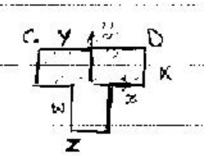
پس با توجه به راستای گشتاور وارد شده داریم: $\sigma_x = \frac{-M_z y}{I_z}$ یا $\sigma_x = \frac{-M_y z}{I_y}$

حول تار خنثی

و بنابر رابطه (I) هم داریم: $\frac{M}{I}\int y\,dA = 0$ ، $Q = A\bar{y}$

و اگر در هر دو راستا وارد شود یعنی هم M_z و هم M_y داشته باشیم، σ_x کل برابر جمع σ_xهای حاصل از هرکدام به تنهایی است.





تار خنثی کجاست؟ تنش ماکزیمم چقدر است؟

طول ab چقدر تغییر طول می‌دهد؟ CD چقدر تغییر طول می‌دهد؟

نیرویی که به بال (قسمت هاشور خورده) تیر وارد می‌شود؟

Q = ممان اول سطح: مساحت آن ضرب در فاصله مرکز سطح از محوری که می‌خواهیم نسبت به آن حساب کنیم.

SUBJECT: [عماری]
Year ( ) Month ( ) Date ( )

Q۷ محل تار خنثی باید برابر صفر باشد.

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{XY \times X/2 - WZ \times W/2}{XY + WZ}$$

اطلاعات اضافی مسئله :

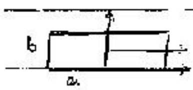
$X = 2cm$; $W = 14cm$; $Z = 2cm$; $Y = 18cm$

$\Rightarrow \bar{y} = -3.5\ cm$

پس تار خنثی در مقطع زیر مشخص شد :

$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$ ⚠ انتقال محورها برای ممان اینرسی :

⚠ ممان اینرسی مستطیل



$\frac{1}{12}ab^3$: حول مرکز سطح $\frac{1}{3}ab^3$: حول ضلع پایین

$$I_{NA} = \frac{1}{12} 18 \times 2^3 \times 10^{-8} + \overbrace{(18 \times 2)}^{A} \times 10^{-4} \times (\overset{d}{4.5})^2 \times 10^{-4}$$
$$+ \frac{1}{12} \times 2 \times 14^3 \times 10^{-8} + (2 \times 14) \times 10^{-4} \times (3.5)^2 \times 10^{-4}$$

σ_{max} در دورترین فاصله از تار خنثی اتفاق می‌افتد که اینجا در پایین‌ترین نقطه است و کششی می‌باشد.

$$\sigma_{max} = \frac{2000 \times (10.5) \times 10^{-2}}{I_{NA}} = \sigma_1$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\ell} \Rightarrow \delta = \varepsilon \ell = \frac{\sigma \ell}{E} \Rightarrow \delta_{ab} = \frac{\sigma_1 \times (ab)}{E}$$

۸۷/۹/۲۴

فقط در راستای x تنش داریم ولی به خاطر تنشی که در این راستا داریم ، در راستای z هم کرنش داریم (پواسون)

حالا ادامه‌ی سؤال جلسه قبل :

$$\sigma_x = -\frac{M \times 55}{I_{NA}} \rightarrow I_{NA} = 1477.34\ cm^4$$

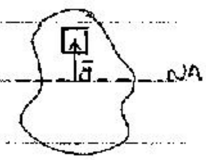
STAEDTLER®

SUBJECT [فشاری]

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\overset{\text{تار بالایی}}{\sigma_x}}{E} \rightarrow \delta_{CD} = \varepsilon_z \times CD$$

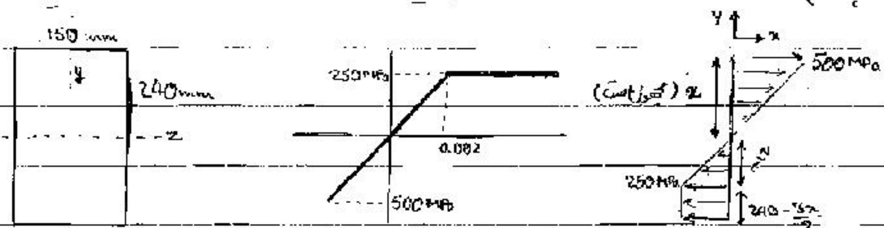
$$\int_A \sigma\, dA = F \Rightarrow F = \int \frac{My}{I}\,dA = \frac{M}{I}\overbrace{\int y\,dA}^{Q} = \frac{MQ}{I}$$



$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \Rightarrow Q = \bar{y}A$$

$$\Rightarrow F = \frac{M \times \overbrace{(2\times18)\times4.5}^{\bar{y}}}{I_{NA}}$$

(۴) مقطع مستطیل شکل نشان داده شده تحت لنگر خمشی M طوری قرار گرفته که فشار ایجاد شده در تار بالایی 500 MPa می‌باشد. چنانچه منحنی تنش کرنش برای جسم به شکل زیر باشد. فاصله محور خنثی از تار بالایی را بیابید.



تمام روابطی که تا اینجا گفته شد برای حالتی بود که ماده از قانون هوک پیروی کند و در حالت کششی و فشاری رفتار یکسانی داشته باشد.

در حالت بالا با توجه به نمودار تنش کرنش، توزیع تنش در مقطع به صورت بالا خواهد. در حالت فشاری تا یه جایی رفتارش خطیه ولی بعد از رسیدن تنش به مقدار 250 دیگر ثابت می‌ماند

ما می‌دانیم که تار خنثی نقطه‌ای است که تنش و کرنش صفر است و تنش از حالت فشاری به کششی تبدیل می‌شود.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{b\times500\times x}{2} = \frac{250\times x/2}{2}\times b + 250\times\left(240-\frac{3x}{2}\right)\times b = 0$$

$$\Rightarrow x = \text{چیزی}$$

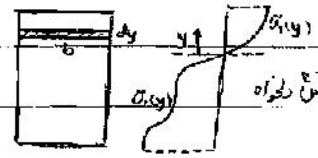
(۵) اثبات اینکه به ازای هر توزیع تنش دلخواه ΣF_x همان [مساحت توزیع تنش] $\times b$ است

(البته برای حالتی که عرض dA ثابت باشد)

$$\int \sigma(y)\,dA = \int \sigma_i(y)\,b\,dy = \underset{\text{اگر } b=\text{cte}}{b}\int \sigma_i(y)\,dy = b\times \text{مساحت توزیع تنش}$$

SUBJECT: [عماری]

Year ( ) Month ( ) Date ( )



۱) از همین ایده‌ها برای نشان دادن:

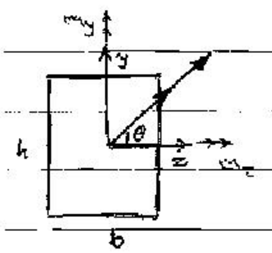
$$M = \int \sigma_1(y)\, y\, dA + \int \sigma_2(y)\, y\, dA$$

$$M = b\left[\int \sigma_1(y)\, y\, dy + \int \sigma_2(y)\, y\, dy\right]$$

داشتیم: $\int y \cancel{f(y)}\, dy = \bar{y} \times A \qquad ; \bar{y} = \dfrac{\int y f(y)\, dy}{\int f(y)\, dy}$

حالا ادامه سوال:

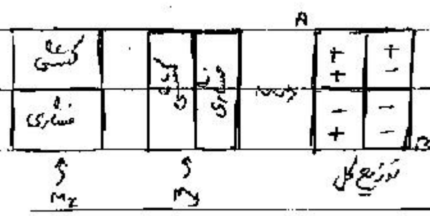
$$M = \frac{2}{3}x \times \left(\frac{500 \times x}{2}\right) b + \frac{x}{2} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{250 \times x/2}{2}\right) \times b + \left(\frac{240 - 3x/2}{2} + \frac{x}{2}\right) \times 250 \times \left(240 - \frac{3x}{2}\right) \times b$$



۲) زاویه θ را طوری تعیین کنید که تنش خمشی max باشد.

M را در راستای z و y تجزیه می‌کنیم و جداگانه توزیع تنش حاصل از هر کدام را بدست می‌آوریم. طبق اصل برهم‌نهی، تنش کل حاصل جمع این توزیع تنش‌ها است.

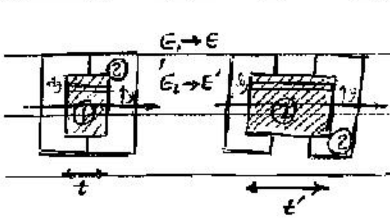
با توجه به توزیع تنش کل، ماکزیمم تنش در A یا B رخ خواهد داد.



$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = \frac{M\cos\theta \times h/2}{\frac{1}{12} b h^3} + \frac{M\sin\theta \times b/2}{\frac{1}{12} h b^3}$$

کافیست از σ_x برحسب θ مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم تا θ ای بدست آورد که به ازای آن تنش ماکزیمم می‌شود.

۳) خمش در مقاطع چند جنسی:



روش (1): با تغییراتی که در ابعاد جنس‌های مختلف می‌دهیم، یک مقطع تک جنسی ولی با ابعاد متفاوت تبدیل می‌کنیم.

تغییر را جوری اعمال می‌کنیم که در راستای محور خنثی ابعاد تغییر شود.

می‌دانیم M اعمال شده به دو مقطع باید یکسان باشد.

STAEDTLER

SUBJECT: [تقارنی]
Year ( ) Month ( ) Date ( )

جنس جدید

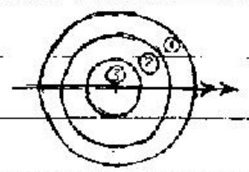
$\sigma t\, dy = \sigma' t' dy \Rightarrow \sigma t = \sigma' t' \Rightarrow E\varepsilon t = E'\varepsilon' t' \xrightarrow[\varepsilon=\varepsilon']{} Et = E't' \Rightarrow t' = \frac{E}{E'} t$

جنسی که می‌خواهد تبدیل شود

$\Rightarrow \sigma = \frac{E}{E'} \sigma'$

بعد از اینکه مقطع را یک جنسی کردیم و تمام محاسبات را انجام دادیم، برای بدست آوردن σ واقعی از فرمول بالا بهره می‌بریم.

این کار صرفاً یک کار هندسی است! (معمولاً E کوچیکه رو انتخاب می‌کنیم!)



$$\begin{cases} \frac{E_2}{E_1} = n_2 \\ \frac{E_1}{E_1} = n_1 \\ \frac{E_3}{E_1} = n_3 \end{cases}$$

این راه وقتی است که محور تقارن‌ها مشترک باشد!

حالت کلی $E_k \Rightarrow \frac{E_i}{E_k} = n_i$

در وقتی I را حول محور نشان داده شده بنویسیم، با n برابر شدن y که راستای خود محور است، I هم با توجه به فرمولش n برابر می‌شود.

در شکل‌های دیگر هم این رابطه برقرار است ولی اثباتش به راحتی میسر نیست.

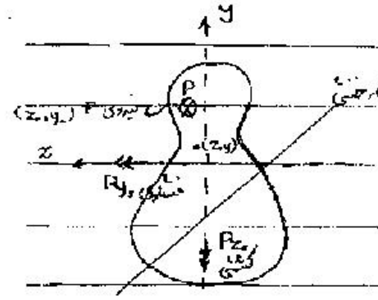
مقطع معادل تغییر شکل یافته $I_e = \sum_{i=1}^{n} n_i I_i$ $\quad \sigma_i = n_i \frac{My}{I_e}$

STAEDTLER

SUBJECT: [ ]

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷,۹,۲۳



هسته مقطع جایی است که اگر در آن ناحیه نیرو وارد کنیم، همه جای مقطع فشاری یا کششی می‌شود. (Kern Core)

این در کشش خیلی مهم است ولی در فشار خیلی مهم‌تر است.

$$\frac{+Pz_0}{I_y} z + \frac{Py_0}{I_z} y - \frac{P}{A} = 0$$

⇒ معادله‌ی تار خنثی: $\frac{z_0}{I_y} z + \frac{y_0}{I_z} y + \frac{1}{A} = 0$

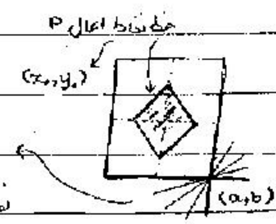
طول از مبداء: $a = +\frac{I_y}{A z_0}$ عرض از مبداء: $b = -\frac{I_z}{A y_0}$ این‌ها حول محور اصلی (اینرسی) هستند. (محور متقارن)

پس اگر P در ربع اول باشد، آن خط در ربع سوم می‌شود و آن خط و P در ربع‌های مقابل هستند!

نکته: روابط داده شده برای طول و عرض از مبداء مشترک و وابسته هستند.

برای پیدا کردن هسته‌ی یک مقطع باید تار خنثی را در مرزهای مقطع و یا حتی بیرون آن در نظر بگیریم و نقاط اعمال نیروی P را بدست آوریم. مجموعه‌ی این نقاط هسته‌ی مقطع است.

در چندضلعی‌های محدب کافی است اضلاع چندضلعی را به عنوان تار خنثی در نظر بگیریم، نقاط را پیدا کنیم و به هم وصل کنیم. چون که نقاط روی خطوط واصل در واقع، نقاط بدست آمده در نتیجه در نظر گرفتن خطوطی است که روی یک رأس واقع شده و با دوران خط از ضلعی به ضلع دیگر بدست می‌آیند.



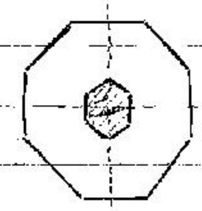
با تغییر این خط‌های تار خنثی، نقطه P روی خط حرکت می‌کند (مرز هسته) زیرا تار خنثی از نقطه ثابت (a,b) می‌گذرد و معادله

$$\frac{z_0}{I_y} a - \frac{y_0}{I_z} b + \frac{1}{A}$$

یک خط را برای (z_0,y_0) تشکیل می‌دهد.

SUBJECT: [ثانی]

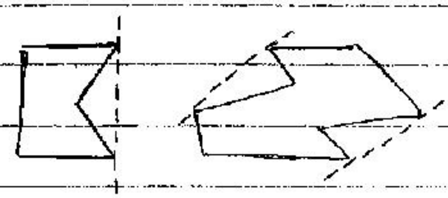
Year (   ) Month (   ) Date (   )



در نظر گرفتن ضلع‌ها و رسم نقاط و پس از آن رسم خطوط مماس برای اشکال محدب معتبر است.

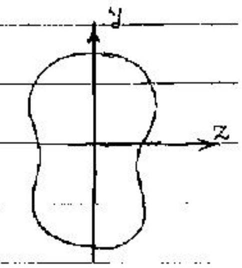
در شکل‌های مقعر، با دوران خطوط در رئوس شکل ممکن است محور خنثی داخل شکل بیفتد و در نتیجه آن شکل را به چند قسمت تقسیم کند. در این شکل‌ها می‌بایست خطوطی را در نظر بگیریم که از رئوس بگذرند ولی از داخل شکل نه!

مثلاً در شکل زیر دو ضلع خود شکل هم تا جایی‌های متناظرشان از داخل سطح مقطع می‌گذرد و به جای آنها باید خط چین را در نظر گرفت.



معادلات پارامتری مقطع را معمولاً به صورت $z(t)$, $y(t)$ به ما می‌دهند!

در مقاطع دلخواه که معادله پارامتری مقطع به صورت $z(t)$ و $y(t)$ داریم، خط مماس بر نقطه دلخواه را رسم می‌کنیم و $z(t)$ و $y(t)$ بدست می‌آید.



[illegible] تحقیقات نیروی هوایی

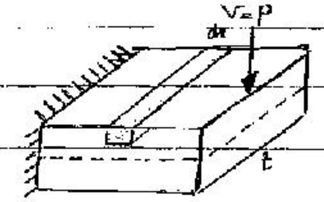
$$y(t) = \frac{I_z \dot{z}(t)}{A[y(t)\dot{z}(t) - \dot{y}(t)z(t)]}$$

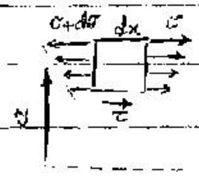
$$z(t) = \frac{I_y \dot{y}(t)}{A[z(t)\dot{y}(t) - \dot{z}(t)y(t)]}$$

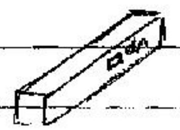
اثبات این فرمول در یک ISI Paper انجام شده! ولی به صورت مسئله امتحانی طرح شده است!

۸۷/۹/۲۵

* برش



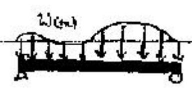




$$\int(\sigma+d\sigma)\,dA-\int\sigma\,dA=\tau t\,dx \qquad \left(\sum F_x=0\right)$$

$$\Rightarrow \int\frac{d\sigma}{dx}\,dA=\tau t$$

$$\sigma=\frac{My}{I} \Rightarrow \frac{d\sigma}{dx}=\frac{y}{I}\frac{dM}{dx}$$

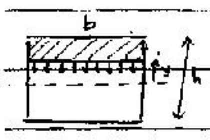


⑧ از استاتیک یادمون هست: $\dfrac{dM}{dx}=V \quad , \quad \dfrac{dV}{dx}=-\underbrace{w(x)}_{\text{بار گسترده}}$

پس در کل داریم:

$$\frac{V}{I}\underbrace{\int y\,dA}_{Q}=\tau t \Rightarrow \tau=\frac{VQ}{It}$$

در مباحث قبلی به تنش برشی میانگین $\tau=\frac{P}{A}$ تعریف کردیم و برای تمام نقاط سطح مقطع تنش را ثابت در نظر می‌گرفتیم.
ولی تنش برشی واقعی از رابطه‌ی بالا بدست می‌آید.



$V=P$

$Q=(h/2-y)\,b\times\frac{1}{2}(h/2+y)$

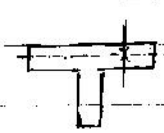
$I=\frac{1}{12}bh^3$

$t=b$

$$\Rightarrow \tau=\frac{6}{h^3b}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

با توجه به رابطه‌ی بالا τ در تار خنثی ماکزیمم مقدار خود را دارد (البته الزاماً در همه‌ی مسائل اینطوری نیست!)

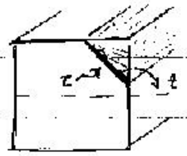
بیشترین τ در کمترین t اتفاق می‌افتد. مثلاً در مقطع زیر باید به صورت — مقطع بزنیم نه ----.
اگر عمود باشد حتماً در t کمتر قطع کنیم.



STAEDTLER®

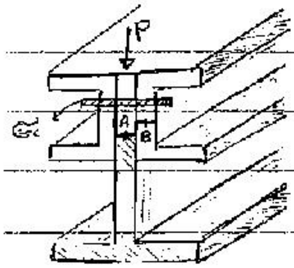
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



$Q =$ مساحت $\times \bar{y}$

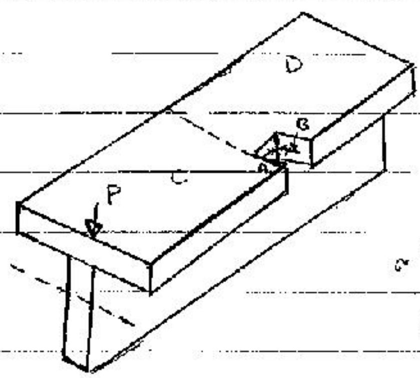
تنش برشی را در هر نقطه‌ای که خواستید با جایی ببرید و مقطع بزنید که یک قطعه جدا شود، بعد برای آن قطعه تعادل را بنویسید.

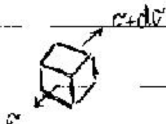


۴) در مقطع روبرو، برای پیدا کردن تنش برشی در نقاط A و B قطعات رنگی نشان داده شده برای هر کدام، کافی هستند.

۸۷/۹/۲۵

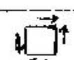
* جریان برشی Shear flow



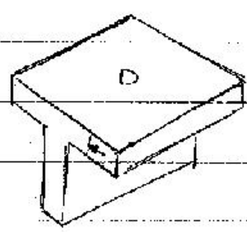


تنش در مقطع B بیشتر از A است.

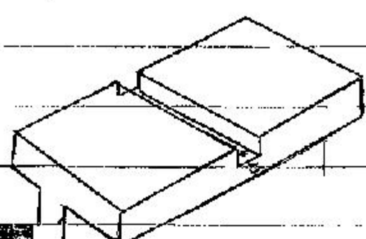
این اختلاف را نیروی برشی جبران می‌کند.

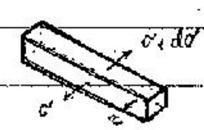


با هر برشی که روی یک نقطه بزنیم، مقدار متفاوتی برای تنش برشی به دست می‌آید.



اگر طولی برش بزنیم، در طول که فقط طول است.
پس چیزی که قطعه را سر جایش نگه داشته تنش برشی است که از سمت قطعه بر آن وارد شده و اختلاف dσ را تأمین می‌کند.



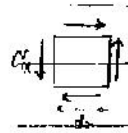


STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

الزمی البته ! اعداد مساوی در نظر بگیریم برای ...



از بسط تیلور σ_x جملات اول آن کافیست.

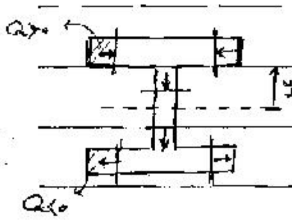
$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}(dx)^2 + \dots$$

از هر جایی که برش بزنیم، تنش‌های برشی داریم که مرز سطح مقطع ایجاد شده، مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند!

(این نتیجه را با بسیار نزدیک کردن سطح A به B در المان صفحه‌ی قبل گرفتیم!)

اگر تمام تنش‌های برشی در نقاط مختلف مقطع در نظر بگیریم (یعنی مقطع بزنیم، تنش برشی پیدا کنیم) و آنها را بر روی مقطع نمایش دهیم، شبیه جریان سیال درون لوله می‌شود. جریان برشی می‌نامیم!

برای پیدا کردن جهت تنش، به جای المان درون، کافیست مقطع را در نظر بگیریم، هر دفعه Q مقطع را نسبت به تار خنثی بدست آوریم. اگر + بود، جهت پیکان تنش به مقطع نزدیک می‌شود، اگر منفی بود از آن دور می‌شود.

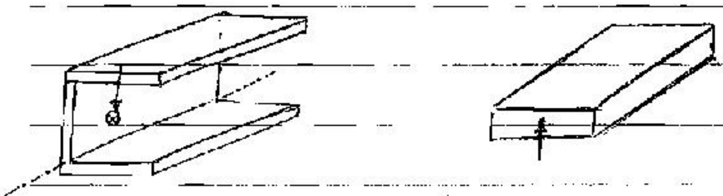


$$\tau = \frac{VQ}{It} \Rightarrow \underbrace{\tau t} = \frac{VQ}{I}$$

جریان برشی (N/m) $q = \frac{VQ}{I}$

جریان برشی در هر مقطع، شبیه یک لوله گسترده در نظر است!

۸۷/۱۰/۲



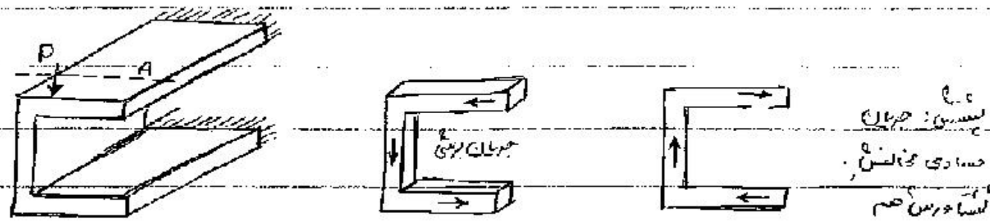
در این حالت اگر از مرکز سطح نیرو وارد کنیم، تیر می‌پیچد و هم خم می‌شود، ولی در حالت الف اگر از مرکز سطح هم وارد کنیم، نمی‌پیچد و فقط خمش می‌شود.

اگر بخواهیم در روی نقطه‌ای را پیدا کنیم که پیچش نداشته باشیم و فقط خمش شود یعنی

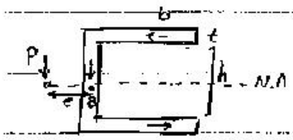
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

دنبال « مرکز برش » (Shear Center) بگردیم ، یک تکه از آن را قطع می‌کنیم و بیرون می‌آوریم .



برای پیدا کردن مرکز برش دنبال جاهای خوب می‌گردیم ! اینجا B خوب چون گشتاور همهٔ یک قسمت از مقطع در آن نقطه صفر می‌شود و بقیه رو هم طوری می‌ذاریم که همدیگرو خنثی کنن !



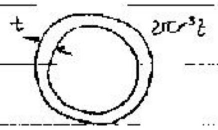
$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad I = \frac{1}{12}t^3a + atd^2$$

$$= \frac{Pt \times x \times h/2}{I_{NA}t}$$

در جملات بزرگ‌ها از اولین ترم صرف‌نظر می‌کنیم

کلاً از t^2 و t^3 .

$$= \frac{Phx}{2I}$$

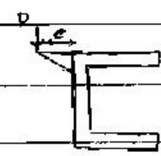


$$dF_1 = \tau(t\,dx) = \frac{Phx}{2I}\,t\,dx$$

$$dM_1 = \frac{Phx\,t\,dx}{2I} \times h/2$$

$$M_1 = \int_0^b \frac{Ph^2t}{4I}\,x\,dx \qquad M = 2M_1 = \frac{Ph^2b^2t}{4I}$$

$$Pe = \frac{Ph^2b^2t}{4I} \Rightarrow e = \frac{h^2b^2t}{4I}$$

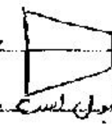


برای اینکه P در فاصلهٔ e از مقطع وارد شود ، یک نبشی می‌گذاریم ؛ اینطوری :

در این مقطع هم چون در ① یا ② گشتاور می‌نویسیم در هر مقطع τ و M را حساب می‌کنیم زیرا در این نقطه τ یا M صفر می‌شود !!

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۱-  در فرمول $\tau = \frac{VQ}{It}$ قابل قبول نیست چون I متغیر است، جنس هم ثابت ولی جنس یا تیری قابل قبول است.

R فاصله‌ی نیرو از نقطه‌ای است که می‌خواهیم گشتاور را بنویسیم. (بازوی گشتاور) $\frac{PQ_i}{It_i} t_i dx R_i$

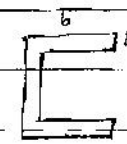
گشتاور حاصل از نیروی برشی در هر قطعه حول این نقطه

گشتاور هر قطعه $\int_0^{b_i} \frac{PQ_i}{I} dx R_i \longrightarrow$ گشتاور مجموع $\sum \int_0^{b_i} \frac{PQ_i}{I} dx R_i$

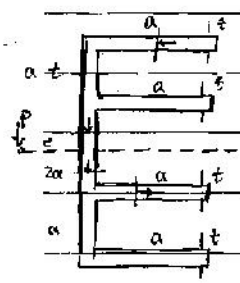
این ترکیب شد با

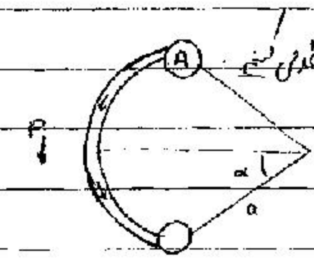
$$M = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{PQ_i}{I} dx R_i = Pe$$

$$\Rightarrow e = \frac{1}{I} \sum \int_0^{b_i} Q_i(x) R_i dx$$

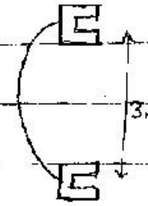
مثال: 

$$e = \frac{2}{I} \int_0^b tx \frac{h}{2} \times \frac{h}{2} dx = \frac{b^2 h^2 t}{4I}$$





در اینجا هم از مساحت ... در مقابل A صرف‌نظر کنیم



از 1cm و 2cm در مقابل 3m صرف‌نظر می‌کنیم و می‌گوییم که A است و مثل بالایی حساب می‌شود

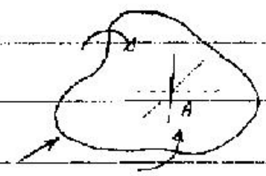
کل سطح را یک دایره کوچک در نظر می‌گیریم ... : $e = a \frac{\alpha}{\sin\alpha}$

SUBJECT :
Year ( ) Month ( ) Date ( )

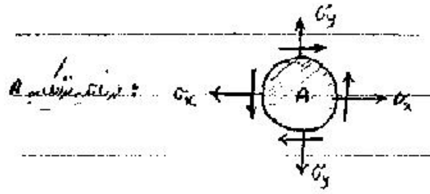
۸۷/۱۰/۷

* تبدیل تنش

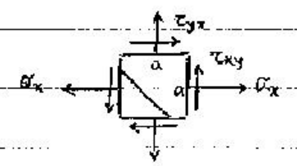
فرض کنید سطح مقطع جسمی تحت تنش‌های مختلف قرار گرفته:



مقدار تنش را در نقطه‌ای مثل A می‌خواهیم محاسبه کنیم. بسته به اینکه در کدام صفحه این کار را انجام دهیم، مقادیر مختلفی برای تنش بدست خواهد آمد.



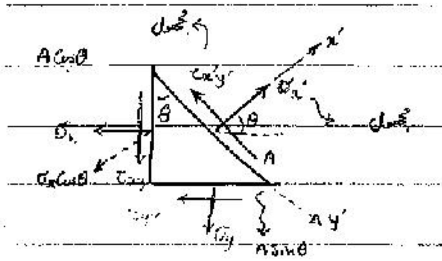
یک نقطه بسیار کوچک یا یک المان بسیار کوچک در نظر می‌گیریم (یا مکعب). تنش‌ها را در این نقطه می‌خواهیم ... می‌خواهیم تنش‌ها را در صفحه‌های دلخواه و مشخص بدست آوریم.



معمولاً المان را به صورت یک مربع در نظر می‌گیریم:
با نوشتن تعادل برای المان ثابت می‌شود $\tau_{yx} = \tau_{xy}$
یعنی ثابت می‌شود تنش‌ها در دو صفحه‌ی عمود بر هم باید با هم برابر باشند.

بنابراین ما توانستیم تنش را در صفحه‌های عمود بر هم بدست آوریم، اگر تنش را در صفحه‌ای مثل این صفحه بخواهیم باید از اول شروع به محاسبه کنیم، از تنش‌های بدست آمده استفاده می‌کنیم. به این کار تبدیل تنش می‌گویند.

تعادل را برای المان می‌نویسیم:



$$\begin{cases} \sum F_{x'} = 0 \longrightarrow \sigma_{x'} = \checkmark \\ \sum F_{y'} = 0 \qquad \tau = \checkmark \end{cases}$$

تنش را ضرب می‌کنیم، نیروها را تشکیل می‌دهیم و تعادل را هم برای نیروها می‌نویسیم نه تنش‌ها!

اگر روابط تعادل را بنویسیم خواهیم داشت:

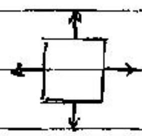
STAEDTLER

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma_{x'}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow \tau_{x'y'} = -\frac{+\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

از آنجایی که ما دنبال تنش max هستیم، بنابراین باید در صفحه‌های مختلف تنش را بررسی کنیم و با max تنش جسم طراحی بشود. وقتی در یک صفحه‌ی خاص تنش max شد، در امتداد همان صفحه ضخامت را زیاد می‌کنیم، نه اینکه کل جسم را ضخیم‌تر کنیم.

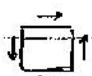
این روابط برای ΣF ها برای المان به خصوص در نظر گرفته شده صادقند و اگر جهات تغییر کنند، علامت‌ها تغییر می‌کنند.



جهات‌ها + هستند.

در محور جهت‌ها قرارداد ... از تنش محوری کششی مثبت و فشاری منفی است.

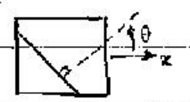
(اینو خودم گفتم) ← τ_{xy} یعنی τ در صفحه‌ی عمود بر x در راستای y. برای تعیین جهت مثبت τ در هر یک از ۴ صفحه‌ی المان بالا، ابتدا با مقایسه‌ی جهت بردار نرمال المان و جهت مثبت محورها، علامت صفحه را تعیین کنید. در یک صفحه‌ی +، جهت مثبت τ هم جهت با جهت مثبت محورهاست و اگر منفی باشد در خلاف جهت محورهاست.



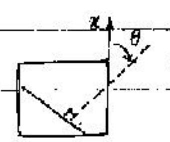
جهت‌های مثبت τ وقتی x و y اینجوری اند

اینجا θ را زاویه‌ی خط عمود بر صفحه با محور xها در نظر گرفته و بر + و − بودن زاویه توجه به جهت مثلثاتی تأکید داره!

از محور x به سمت خط عمود بر صفحه برویم!



$\theta > 0$



$\theta < 0$

در مسائل می‌بینیم المان را جهت وجهی داده و تنش‌های محوری و افقی را داده، حالا به شکل المان اصلاً کار نداریم، همه یک مقدار است! پس ما تنش را در دو صفحه عمود بر هم داریم، حالا تنش را در هر صفحه خواسته شده بدست می‌آید.

خلاصه: تنش را در دو صفحه‌ی عمود بر هم داریم و در صفحه‌ی دیگری می‌خواهد، با شکل المان اصلاً کار نداریم، اول جهت x و y را تعیین می‌کنیم، بعد علامت تنش‌ها را تعیین می‌کنیم، بعد هم θ را. با روابط تعادل به جواب می‌رسیم.

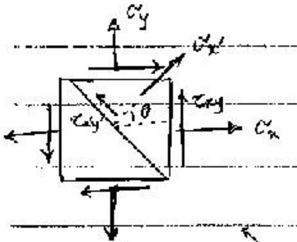
با فاکتورگیری کردن عرم در جمله 2 $\left(\sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta\cos\theta \right)$ که در بالا نوشته‌ام، می‌توانیم θ ای را پیدا کنیم که حاصل max بشود!

دوران دادن ← یعنی همه جا را می‌چرخانیم تا قطرهای ما بشوند محورها!

SUBJECT

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/10/9



$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

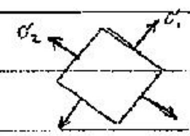
این زاویه بسیار کوچک است.

برای پیدا کردن θ ای که به ازای آن تنش عمودی ماکزیمم است، کافیست از روابط بالا نسبت به θ مشتق بگیریم و

برابر صفر قرار دهیم. زاویه‌ی مربوط به صفحه‌ای با تنش محوری max برابر است با $\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$

حال اگر این مقدار بدست آمده را در روابط بالا جایگزین کنیم مقادیر max و min بدست می‌آیند. (مقدار ویژه)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



تنش اصلی، تنش در صفحه‌ای است که دیگر همراه آن تنش برشی وجود نداشته باشد

زاویه بدست آمده بالا، زاویه‌ی مربوط به صفحه‌ی تنش‌های اصلی است.

زاویه‌ی مربوط به صفحه‌ای با تنش برشی max نیز برابر است با: $\tan 2\theta = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$

و رابطه‌ی تنش برشی max:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

در تانسور تنش $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$ جمع درایه‌های روی قطر اصلی و هم چنین دترمینان همه‌ی ماتریس‌ها یکی است

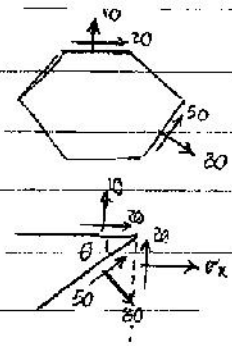
زیرا اگر به کمک بردار ویژه - مقدار ویژه بخواهیم مقادیر اصلی تنش را بدست بیاوریم همه‌ی ماتریس‌ها به معادله‌ی زیر ختم می‌شوند:

STAEDTLER

$$\sigma^2 + (\sigma_x+\sigma_y)\sigma + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



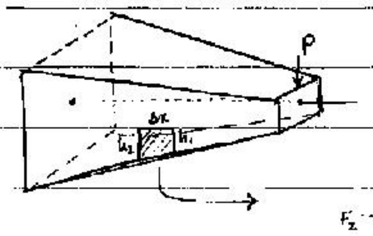
برای استفاده از فرمول‌ها از روی دو تنش‌های به کار رفته باید بر هم عمود باشند ولی اگر در این مثال المان را دوران دهیم با داده‌ها که تنش‌ها بر هم عمود نبودند کار هست یکی از تنش‌های محور را حساب کنیم. یکی از تنش‌ها و تنش روی صفحه‌ی کج را داریم. فقط یک مجهول باقی می‌ماند.

*** مقاطع متغیر:**

در حالت گذشته تنش محوری ناشی از گشتاور خمشی را محاسبه کردیم، برای محاسبه‌ی نیروها با نسبت تنش را در مساحت سطح مقطع ضرب کنیم:

$$\sigma = \frac{My}{I} \qquad dF = \sigma dA \Rightarrow F = \int_A \frac{My}{I} dA = \frac{M}{I} \underbrace{\int y\, dA}_{Q} = \frac{MQ}{I}$$

ولی روابطی که تا اینجا به دست آوردیم، هم برای تیرهای منشوری (با سطح مقطع ثابت) است. مقطع زیر را در نظر بگیرید:



$h_2 = h_1 + \Delta h$

τ را در این مقطع می‌خواهیم

$\Delta x \to 0$

دو سطح مقطع متفاوت داریم، پس برای یک‌یک این سطح‌ها، تنش محوری را با توجه به F‌ها محاسبه می‌کنیم (چون A‌ها متفاوت است، دقت کنید I‌ها و Q‌ها متفاوت می‌شوند). اختلاف نیروها تقسیم بر سطح مقطع τ را به ما می‌دهد حال پس از تشکیل τ، اگر $\Delta x \to 0$ میل دهیم، مقدار تنش در مقطع مورد نظر به دست می‌آید.

رابطه‌ی زیر برای τ به دست می‌آید:

$$\tau = \frac{VQ}{It} + \frac{M}{4I}(1 - Qh)\frac{dh}{dx}$$

تغییرات h را برحسب x به دست آورده و از آن مشتق می‌گیریم.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

کوئیز شماره‌ی ۲ ← شنبه ۸/۱۹

تمرین تحویلی ... ← کوئیز شماره‌ی ۳ ← شنبه ۸/۲۶

کلاس جبرانی ... ساعت ۹:۳۰ - ۱۲ ← پنجشنبه ۸/۲۹

۹۲/۷/۱۴ ← جلسه‌ی اول

۱۷

* تبدیل واحدهای سیستم‌های مختلف

	SI	U.S.
M	kg	slug
L	m	ft
T	s	s
F	N	lbf

1 slug = 32.2 lbm

1 lbm = 0.454 kg

1 slug = 14.61 kg

1 ft = 0.3048 m

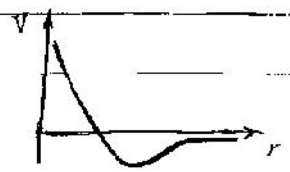
* تنش Stress

مدل پتانسیل Lennard – Jones برای ... $V_{LJ} = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$

σ : فاصله‌ی بین ذره‌ها در حالت عادی

r : مقدار تغییر یافته‌ی فاصله‌ی بین ذره‌ها

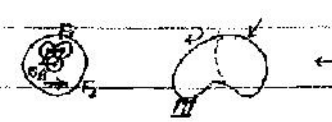
ε : کمیتی مربوط به خواص ماده‌ها



My Comment : نیروهای داخلی که در روی سطوح بی‌نهایت کوچک یک مقطع عمل می‌کنند، از لحاظ مقدار و جهت با یکدیگر متفاوتند و نیروهای خارجی را در تعادل نگه می‌دارند. در مقاومت مصالح تعیین شدت این نیروها در نقاط مختلف یک مقطع بسیار مهم است، چرا که با تعیین شدت نیرو در یک نقطه می‌توان مصالح مناسب برای مقابله با آن را انتخاب کرد و یا تغییر شکل عضو را در اثر آن بدست آورد. نیروی وارد بر واحد سطح که همان شدت نیروی گسترده بر روی سطح می‌باشد، تنش نامیده می‌شود.

تنش یه چیز داخلیه! در هر مقطعی از جسم یه سری نیروی گسترده‌ی محوری و برشی وجود داره!

$\sigma = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_1}{\delta A}$ تنش محوری در نتیجه‌ی نیروهای محوری است!



- نیروهایی که مماس بر سطح هستند (سطح مقطع)، تنش برشی رو تشکیل می‌دن! $\tau = \frac{\delta F_2}{\delta A}$

SUBJECT :

Year : Month : Date :

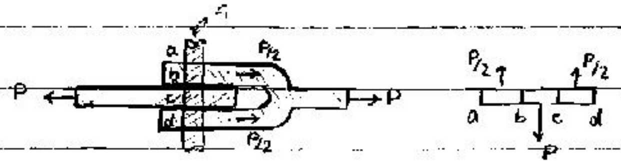
گشتاوری که محور آن عمود بر سطح باشد، گشتاور پیچشی و گشتاوری که محور آن داخل صفحه‌ی سطح مقطع باشد گشتاور خمشی نامیده می‌شود.

تنش عمودی یا محوری برای نیروهای داخلی یک جسم تعریف می‌شود و باید مقطع بزنیم.

تنش تکیه‌گاهی یا تماسی تنشی است که در اثر تماس دو جسم ناشی می‌شود و برابر است با نیرویی که دو جسم به یکدیگر وارد می‌کنند تقسیم بر مساحت تصویر سطح تماس بر صفحه‌ی عمود بر نیروی برآیند.

$$\sigma_b = \frac{P}{A}$$

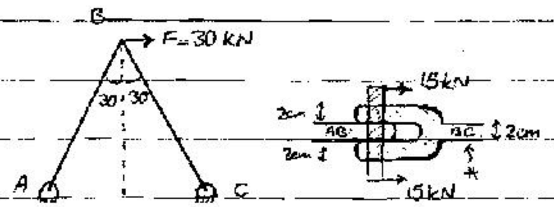
پین‌ها



$$\tau = \frac{P/2}{A}$$

تنش در جسمی که داره سقوط آزاد می‌کند، صفر!

مثال: عرض AB و BC 7cm است.
قطر پین 10mm است.
تنش ماکزیمم در AB و BC و تنش تکیه‌گاهی در BC؟



$$\left.\begin{aligned} F_{AB} &= F_{BC} \\ (F_{AB}+F_{BC})\times \cos 60 &= 30 \end{aligned}\right\} \rightarrow F_{AB}=F_{BC}=30\ kN$$

$$(\sigma_{max})_{AB} = \frac{30\times10^3}{2\times10^{-2}\times(7-1)\times10^{-2}}$$

کمترین مساحت در نقطه‌ای است که پین در قطعه‌ی AB فرو رفته!

$$(\sigma_{max})_{BC} = \frac{30\times10^3}{7\times10^{-2}\times 2\times10^{-2}}$$

تنش max در قسمت * است.

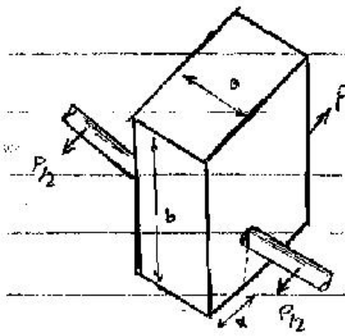
$$(\sigma_b)_{BC} = \frac{30/2\times10^3}{2\times10^{-2}\times1\times10^{-2}}$$

STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

و مثال بعد: x را طوری تعیین کنید که شکست در هر دو کلید داشته باشیم $\tau_{aa}=\tau_{bb}$

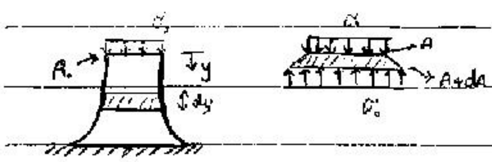


نیروی P باید در دو سطح بالایی را پاسخ بدهد. $\tau_{aa}=\frac{P}{a\times 2\times 2}$

در اینجا هم هم تنش لهیدگی و تنش برشی ایجاد می‌کند هر چی قطر میله کمتر باشد، تنش لهیدگی بیشتر است.

۸۷/۷/۲۱ سه شنبه جلسه دوم

در شرایطی که تحت تنش یکنواخت قرار گرفته، توزیع مساحت را برای حالتی که تنش در تمام مقاطع ثابت باشد بدست آورید. (وزن پایه مد نظر)



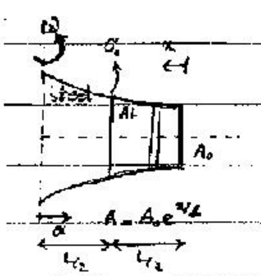
$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow \sigma_0(A+dA)-\sigma_0 A-A\,dy\,\gamma=0$$

$$\sigma_0\,dA=A\,dy\,\gamma \Rightarrow \frac{dA}{A}=\frac{\gamma}{\sigma_0}dy \rightarrow \ln A=\left(\frac{\gamma}{\sigma_0}\right)y+C \quad (I)$$

اگر $y=0 \Rightarrow A=A_0 \rightarrow C=\ln A_0$

$$(I) \rightarrow \ln A-\ln A_0=\frac{\gamma}{\sigma_0}y \Rightarrow A=A_0 e^{\gamma/\sigma_0 \, y}$$

حول محور دوران می‌کند. تنش تسلیم چسب σ_0 است.



$$dF=dm\,x\,\omega^2 \rightarrow F_t=\int_{L/2}^{L}\rho A\,dx\,x\,\omega^2=m\bar{x}\omega^2$$

مختصات مرکز جرم

با چه سرعتی بچرخانیم تا جدا شوند؟

وقتی جدا می‌شوند که تنش حاصل از نیروی مرکزگرا برابر با تنش تسلیم چسب شود!

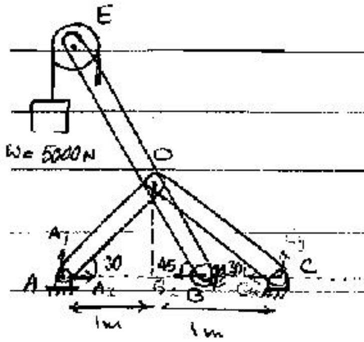
$$\sigma_0=\frac{\int_0^{l/2}\rho(l-x)A_0e^{x/l}dx\,\omega^2}{A_0e^{1/2}}=\frac{\rho A_0\omega^2\int_0^{l/2}(l-x)e^{x/l}dx}{A_0e^{1/2}}=\frac{\rho\omega^2}{e^{1/2}}\left[\left[l(l-x)e^{x/l}\right]_0^{l/2}\right.$$

$$\left.+\left[l^2e^{x/l}\right]_0^{l/2}\right]=\sigma_0 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{\sigma_0\times 2}{\rho l^2}}$$

$l-x \quad e^{x/l}$; $-1 \quad le^{x/l}$; $0 \quad l^2e^{x/l}$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



(11) ضخامت میله‌ها 4mm ، سطح مقطع 100mm ،

سطح پین C و عرض میله‌ی CD به شرطی که

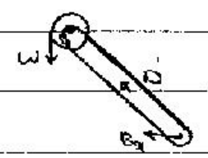
تنش برشی مجاز برای پین 150 MPa و تنش محوری مجاز

میله‌ی CD 50 MPa باشد؟

$\tau_{all} = 150\ MPa$

$\sigma_{all} = 50\ MPa$

C ← پین دوبل



$\Sigma M_D = 0 \rightarrow B_x \times \tan 30 = W \times 1.1 \rightarrow B_x = 9526.28\,N$

برای کل جسم $\Sigma F_x = 0 \rightarrow C_x + A_x + B_x = 0 \rightarrow F_{CD} \times \sqrt{3}/2 + F_{AD} \times \sqrt{3}/2 + B_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow W = A_y + C_y \rightarrow 5000 = F_{CD} \times 1/2 + F_{AD} \times 1/2$

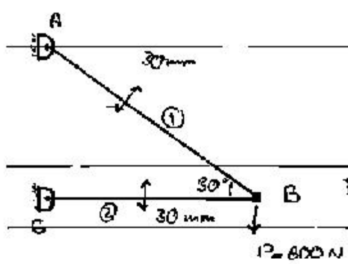
$\rightarrow F_{AD} = \qquad , F_{CD} =$

$\tau_{all} = \frac{F_{CD}}{2 \times \pi r^2} \rightarrow r =$

* پایه لغزان و نیروی کل A ، F_{CD} به سادگی بدست می‌آید.

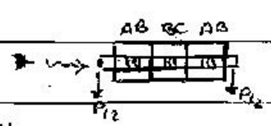
$\sigma_{all} = \frac{F_{CD}}{4 \times (x - 2r)}$

عرض‌ها ضخامت



(12) اتصال B دوبل است. ضخامت همه‌ی میله‌ها 10mm است.

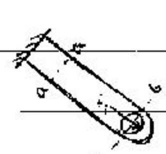
قطر پین اتصال 8mm



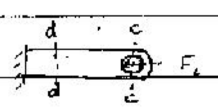
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_2 = F_1 \cos 30$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_1 \sin 30 = 600 \rightarrow F_1 = 1200$

نیروی AB کششی و BC فشاری است. $\rightarrow F_2 = 600\sqrt{3}$



تنش ماگزیمم در مقطع b-b



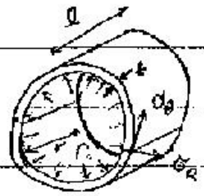
تنش ماگزیمم در مقطع d-d

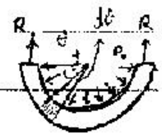
تنش در c-c صفر است.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

(۲) لوله به طول l، به شعاع r، ضخامت t، تنش محیطی σ_θ ؟ P ، r ، $t \ll$





$P_0 dA$

$\downarrow$

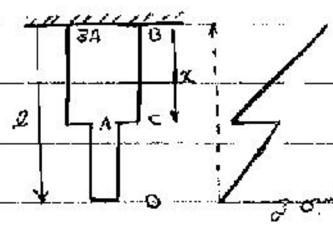
$l \times r \times d\theta$

$$\Sigma R = \int_0^{\pi} \underbrace{(l r d\theta)}_{dA} P_0 \times \sin\theta \Rightarrow R = l P_0 r$$

به جای حساب کردن ΣR می‌توانستیم بنویسیم: فشار × تصویر استوانه بر صفحه‌ی عمود بر راستای نیروی برآیند $= 2R$ با اشکال

$$\sigma_\theta = \frac{l P_0 r}{l t} \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{P_0 r}{t}$$

(۴) به خاطر تحت نیروی وزن قرار گرفته است؛ x کجا باشد که ماکزیمم تنش مینیمم باشد؟



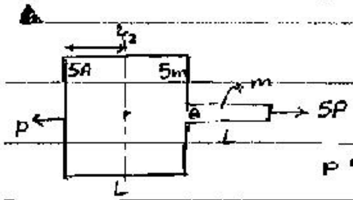
در چنین مسائلی حالتی که ناشی از تغییرات x هستند، حالتی که max و min تنش‌ها در تیر با هم برابرند (از نظر قدر مطلق)، حالتی است که max تنش کمترین مقدار خود را دارد. این حالت را از نظر حسی می‌پسندیم.

$$(\sigma_B)_{max} = \frac{\gamma L_{CD} A + 3\gamma L_{BC} A}{3A} = \frac{\gamma L_{CD} + 3\gamma L_{BC}}{3} \rightarrow 2L_{CD} = 3L_{BC}$$

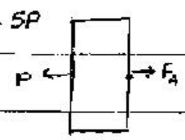
$$(\sigma_C)_{max} = \frac{\gamma L_{CD} A}{A} = \gamma L_{CD}$$

$$L_{BC} + L_{CD} = L \rightarrow \begin{cases} L_{CD} = \frac{3}{5} L \\ L_{BC} = \frac{2}{5} L \end{cases}$$

(۵) تنش در مقطع؟



$$5P - P = 6m \times a \rightarrow a = \frac{2}{3}\frac{P}{m}$$



$$F_A - P = \frac{5m}{2} \times \frac{2P}{3m} \Rightarrow F_A = \frac{8P}{3} \rightarrow \sigma_A = \frac{8P}{15A}$$

SUBJECT :

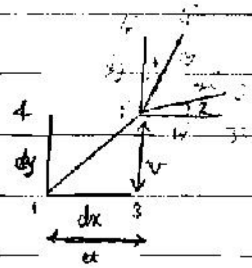
Year (   ) Month (   ) Date (   )

۸۷/۷/۲۸ نیم جلسه سوم

* کرنش

یادآوری: برای یک نقطه داریم $\sigma_x \leftarrow\square\rightarrow \sigma_x$ ولی برای یک المان داریم $\sigma_x \leftarrow\square\rightarrow \sigma_x + d\sigma_x$

* یک نقطه با دو سطح عمود بر هم dx و dy تحت یک بارگذاری به صورت زیر در می‌آید:



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (I)$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \hat{1} + \hat{2} \rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

وقتی کرنش برشی داریم، چون زاویه کوچک است، از تقریب‌های زیر استفاده می‌کنیم:

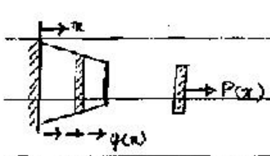
$\cos\theta \sim 1$ $\quad \sin\theta = \theta$ $\quad tg\theta \sim \theta$

u را در برخی مراجع با δ نشان می‌دهند.

$(I) \rightarrow \delta_x = \int \varepsilon_x \, dx$

قانون هوک $\sigma = E\varepsilon \Longrightarrow \frac{P}{AE} = \varepsilon$

④ المان جدا شده نشان داده شده است



$P = \int_x^L q(x)\,dx$

$$\delta_L = \int_0^L \frac{P}{AE}\,dx \leftarrow ④$$

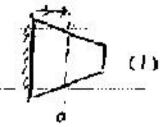
$$\delta_L = \int_0^L \frac{x\,q(x)\,dx}{AE}$$ فرمول استاندارد نهایی

STAEDTLER

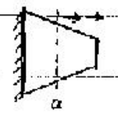
SUBJECT

Year (   ) Month (   ) Date (   )

* حواسمون به توزیع بارگذاری باشه:



(1)



(2)

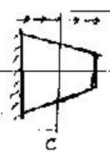
در حالت (1) در قسمتی که بارگذاری نداریم یعنی از a تا L باید انتگرال روبه‌رو را فقط محاسبه کنیم

$$\delta = \int_0^b \frac{P(x)\,dx}{A(x)\,E(x)}$$

در حالت (2) که از صفر تا a بارگذاری نداریم، در این قسمت مقدار P ثابت است. یعنی برای انتگرال‌گیری باید یکبار انتگرال ① را با حدود $\int_a^L$ بگیریم و بعد جمع کنیم با انتگرال با P (نیرو) ی ثابت

$$\delta = \int_a^L \frac{P(x)\,dx}{A(x)\,E(x)} + P \int \frac{dx}{A(x)E(x)} \qquad P = \int_a^L q(x)\,dx$$

حالت سوم: در این حالت تمام میله تحت بارگذاری قرار گرفته ولی ما δ ی یه نقطه‌ی وسط مثل c رو می‌خواهیم

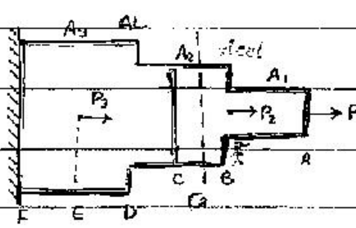


انتگرال رو از 0 تا c می‌گیریم ولی باید مقدار بار بعد از c رو هم لحاظ کنیم

$$P_c = \int_c^L q(x)\,dx \quad \text{یعنی} \quad P(x) = P_c + \int_x^c q(x)\,dx = \int_x^L q(x)\,dx$$

چون قبلی را شد، فرقی نداره!

$$\delta_c = \int_0^c \frac{P(x)\,dx}{A(x)\,E(x)}$$



$$\delta_{A/B} + \delta_{B/C} + \delta_{C/D} + \delta_{D/E} + \delta_{E/F} =$$

$$\frac{P_1 L_{AB}}{A_1 E_s} + \frac{(P_1+P_2)L_{BC}}{A_2 E_s} + \frac{(P_1+P_2)L_{CD}}{B_2 E_{Al}} + \frac{(P_1+P_2)L_{DE}}{A_3 E_{Al}} + \frac{(P_1+P_2+P_3)L_{EF}}{A_3 E_{Al}}$$

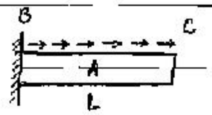
$$\delta_G = \delta_{E/F} + \delta_{D/E} + \delta_{C/D} + \delta_{G/C} =$$

$$\hookrightarrow \frac{(P_1+P_2)L_{CG}}{E_s A_2}$$

STAEDTLER

SUBJECT .

Year (   ) Month (   ) Date (   )



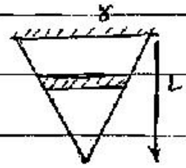
$q(x) = \frac{q_0}{L^2} x^2 \xrightarrow{(I)} P = \int_x^L \frac{q_0}{L^2} x^2 dx = \frac{q_0}{3L^2}(L^3 - x^3)$ ④

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{AE} = \frac{q_0}{AEL^2}\left(L^4 - \frac{L^4}{4}\right) = \frac{q_0 L^2}{4AE}$$

$$(II) \rightarrow \delta = \int_0^L \frac{x\,q(x)\,dx}{AE} = \frac{q_0}{L^2 AE}\int_0^L x^3 dx = \frac{q_0}{AE} \times \frac{L^2}{4}$$

▲

⑤ تنش در مقطعی به فاصله‌ی x از رأس مخروط ← $\sigma = \frac{1/3\,\gamma A x}{A} = 1/3\,\gamma x$

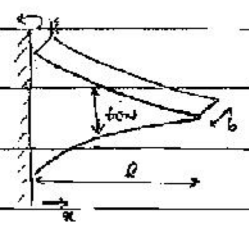


$$\delta = \int_0^L \varepsilon dx = \int_0^L \frac{\sigma}{E} dx = \int_0^L \frac{1/3\,\gamma x}{E} dx = \frac{1/3\,\gamma L^2}{2E} = \frac{\gamma L^2}{6E}$$

▲

حل ۸۱ و ۸۸ (کوئیز شماره 2 ← یکشنبه ۱۹ تا 8) مهلت جلسه چهارم

⑥ تمرین مشابه در مورد کرنش: δ ی نقطه‌ی پایانی؟



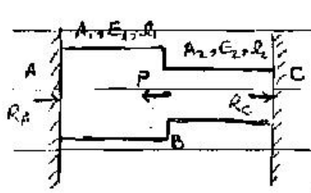
$t(x) = 16 - x^2 \rightarrow t(l) = 0 \Rightarrow l = 4$

$$p(x) = \int_x^4 \rho\omega^2 x\, b(16 - x^2)dx = \frac{b\rho\omega^2}{4}(16 - x^2)^2$$

$$\delta(l) = \int \frac{\frac{b\rho\omega^2}{4}(16 - x^2)^2 dx}{b(16 - x^2)E} = \frac{32}{3E}\rho\omega^2$$

▲

⑦ مسئله از نظر استاتیکی نامعین و حل آن به کمک δ:

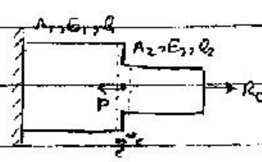


$\delta_B = ?$

$R_A, R_C = ?$

$P = R_A + R_C$

راه حل معمولی این مسئله این است که دیوار را برداریم و به جایش عکس‌العمل R_C را بگذاریم



$\delta_C = 0$ ← و می‌دانیم

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\delta_C = \frac{R_C l_2}{A_2 E_2} + \frac{(R_C - P) l_1}{A_1 E_1} = 0 \Rightarrow R_C = \frac{P l_1}{A_1 E_1} \times \left(\frac{l_2}{A_2 E_2} + \frac{l_1}{A_1 E_1}\right)^{-1} = \frac{P l_1 A_2 E_2}{A_2 E_2 l_1 + A_1 E_1 l_2}$$

$R_A = P - R_C = \dots$ ✓

$$\delta_B = \frac{(R_C - P) l_1}{A_1 E_1}$$

راه دوم: در B مقطع می‌زنیم. δ_B برای دو بخش ① و ② برابر است. (مقطع رو بین E قبل از P می‌زنیم)

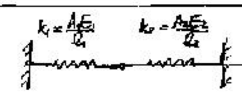
$$(\delta_B)_1 = (\delta_B)_2 \Rightarrow \frac{R_A l_1}{A_1 E_1} = \frac{R_C l_2}{A_2 E_2}$$

راه سوم: مدلسازی با فنر

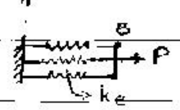
$$\left.\begin{array}{l} F = k\delta \\ \delta = \frac{FL}{AE} \end{array}\right\} \rightarrow k = \frac{AE}{L}$$

فنر موازی $\Rightarrow \delta_1 = \delta_2$, $P_t = P_1 + P_2$, $k_e = k_1 + k_2$

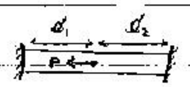
فنر سری $\Rightarrow P_1 = P_2$, $\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

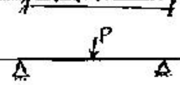


اگر این مسئله رو با فنر مدلسازی کنیم، دو فنر موازی داریم:



$$\delta_B = \frac{P}{k_e} = \frac{P}{\frac{A_1E_1}{l_1} + \frac{A_2E_2}{l_2}}$$

$$R_A = k_1 \delta_B = \frac{A_1E_1}{l_1} \times \delta_B \quad , \quad R_E = k_2 \delta_B = \frac{A_2E_2}{l_2} \times \delta_B$$

راه تستی: به طول مجازی $l' = \frac{l}{AE}$ تعریف می‌کنیم. بعد تبدیل یکنواخت می‌شه

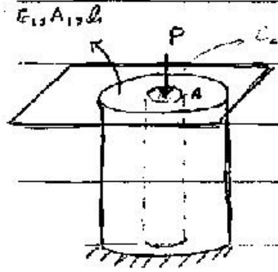


حالا با یه تیر دو تکیه‌گاه حل می‌کنیم.

حالا با گشتاورگیری حول تکیه‌گاه‌ها، عکس‌العمل‌ها رو محاسبه می‌کنیم.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



۴) استوانه از دو آلیاژ مختلف ساخته شده. یکی دور دیگری رو گرفته است. یک صفحه گذاشتیم روی استوانه‌ها با نیروی P به مرکز آن فشار وارد می‌کنیم. مطلوب است یافتن P_1 و P_2 ! $\ell_1=\ell_2$

$P = P_1 + P_2$ (I)

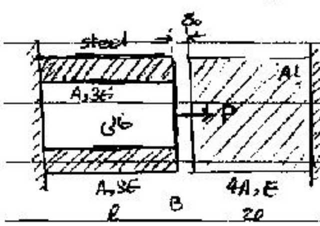
$\delta_{A_1} = \delta_{A_2}$ $\quad \delta_1 = \dfrac{P_1\ell_1}{A_1E_1} = \dfrac{P_2\ell_2}{A_2E_2}$ (II)

$A_2 = \pi r_2^2$

$A_1 = \pi(r_1^2 - r_2^2)$ $\quad$ (I) , (II) $\Rightarrow P_1 , P_2$ ✓

با توجه به فنرها، دو فنر موازی داریم: $k_1 = \dfrac{A_1E_1}{\ell}$, $k_2 = \dfrac{A_2E_2}{\ell_2}$, $P_1 = k_1\delta$, $P_2 = k_2\delta$, $\delta = \dfrac{P}{k_1+k_2}$

۵) دو تا میله رو به وسیله‌ی یک صفحه به هم متصل کردیم. اولی هم یه قطعه داریم.



هدف از جوش دادن صفحه به اینکه P به هر دو میله وارد شود.

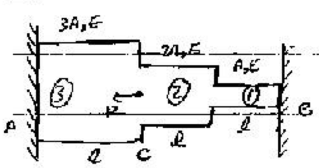
$P_S , P_{Al} = ?$

تا وقتی که پر شود، فقط میله‌ها حرکت می‌کنند. بعد از Al، میله‌ها هر سه با هم تحت اثر P قرار می‌گیرند.

$\underset{\text{آخر کار}}{P} = 2P_S + P_{Al}$, $\delta_S = \delta_{Al} + \delta_0 \longrightarrow \dfrac{P_s\ell}{3AE} = \dfrac{P_{Al} \times 2\ell}{4AE} + \delta_0$

به کمک فنرها اگر بخواهیم حل کنیم: $P' = 2k_s\delta_0$ = (نیروی فنر تا لحظه‌ای که δ را پر کند) $= 2 \times \dfrac{3AE}{\ell}\delta_0$

$P'' = P - P' = P - \dfrac{6AE}{\ell}\delta_0$ $\qquad (\delta_{Al})_B = \dfrac{P''}{2k_s + k_{Al}}$ $\qquad \delta_s = \delta_{Al} + \delta_0$ $\nearrow P_s = k_s\delta_s$, $\searrow P_{Al} = k_{Al}\delta_{Al}$



۶) اینجا ① و ② با هم سری هستند چون نیروهایشان با هم برابرند.

③ با حاصل این دو موازی است. $\quad R_A , R_B = ?$

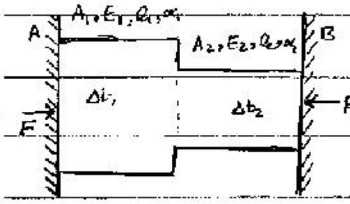
$k_{1,2} = \dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2} = \dfrac{\frac{AE}{\ell} \times \frac{2AE}{\ell}}{\frac{AE}{\ell} + 2\frac{AE}{\ell}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{AE}{\ell}$ $\qquad k_e = \dfrac{2}{3}\dfrac{AE}{\ell} + \dfrac{3AE}{\ell} = \dfrac{11}{3}\dfrac{AE}{\ell}$

SUBJECT :
Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\delta_C = \frac{P}{\frac{11}{3}\frac{AE}{\ell}} \leadsto R_A = \frac{3AE}{\ell} \times \delta_C \qquad R_B = k_{1,2} \times \delta_C = \frac{2}{3}\frac{AE}{\ell} \times \delta_C$$

④ میله‌ها دارای تغییر دماهای Δt_1 و Δt_2 هستند.

چون هیچ نیروی خارجی نداریم، دو نیروی تکیه‌گاه برابرند.

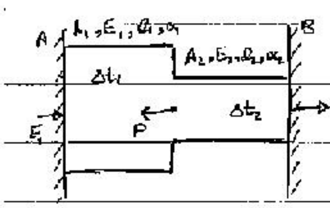


$$\delta_1 = -\frac{F\ell_1}{A_1E_1} + \alpha_1\ell_1\Delta t_1$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 0 \Rightarrow F \checkmark$$

$$\delta_2 = -\frac{F\ell_2}{A_2E_2} + \alpha_2\ell_2\Delta t_2$$

⑤ همان سؤال قبل + یک P !!



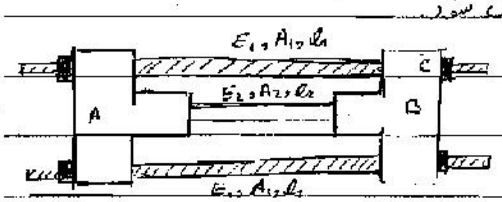
$$\text{(I)}\quad P = F_1 + F_2$$

$$\delta_1 = -\frac{F_1\ell_1}{A_1E_1} + \alpha_1\ell_1\Delta t_1$$

$$\text{(II)}\quad \delta_1 + \delta_2 = 0 \Rightarrow F \checkmark$$

$$\delta_2 = +\frac{F_2\ell_2}{A_2E_2} + \alpha_2\ell_2\Delta t_2$$

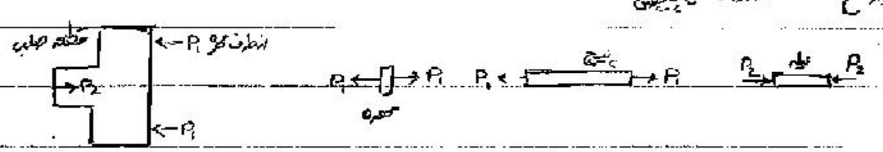
⑥ گرفتن پیچ‌ها: مهره‌ی پیچ‌ها را روی پیچ می‌چرخانیم تا پیچ سفت شود.



P^* گام پیچ: فاصله‌ی بین دو دندانه‌ی متوالی

پیشروی $\delta = n \times P^* \times m$

تعداد دورها — تعداد نخ‌ها — تعداد دوره‌های پیچش



$$2P_1 = P_2 \qquad \delta_1 = \frac{P_1\ell_1}{A_1E_1} \qquad \delta_2 = \frac{P_2\ell_2}{A_2E_2}$$

در نقطه C چون جسم صلب و پیچ در هم گیر کرده‌اند، مهره یکبار به سمت راست می‌رود، یکبار هم به خاطر مهره به سمت چپ می‌آید. ولی برآیند این رفت و برگشت‌ها باید برابر جابجایی مهره باشد.

$$n \times p^* = \delta_1 - \delta_2$$

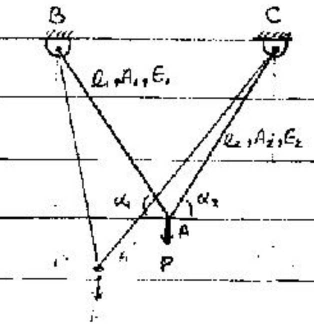
$$n \times p^* = \left|\frac{P_1\ell_1}{A_1E_1}\right| + \left|\frac{P_2\ell_2}{A_2E_2}\right|$$

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/۸/۱۲

* روش displacement (حالت کلی)



$A'C = l_2 + \delta_2$

$A'B = l_1 + \delta_1$

$\delta_1 = \frac{F_1 l_1}{A_1 E_1}$, $\delta_2 = \frac{F_2 l_2}{A_2 E_2}$, $\begin{cases} F_1\cos\alpha_1 = F_2\cos\alpha_2 \\ F_1\sin\alpha_1 + F_2\sin\alpha_2 = P \end{cases}$

تا اینجا ۴ معادله و ۴ مجهول داریم ولی دو مجهول u و v را اضافه می‌کنیم تا جابجایی نقطه A را بدست بیاریم

$\hat{A'QC} \rightarrow (\underbrace{A'C}_{l_2+\delta_2})^2 = (l_2\sin\alpha_2 + v)^2 + (l_2\cos\alpha_2 + u)^2$

$\rightarrow l_2^2 + \delta_2^2 + 2l_2\delta_2 = l_2^2\sin^2\alpha_2 + 2l_2\sin\alpha_2 v + v^2 + l_2^2\cos^2\alpha_2 + 2l_2\cos\alpha_2 u + u^2$

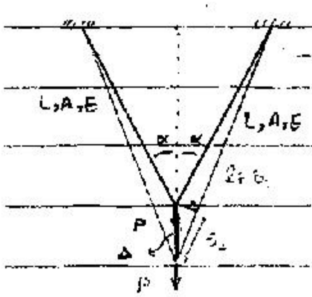
$\delta^2, u^2, v^2 \ll \delta, u, v$ پس از آنها صرف‌نظر می‌کنیم

$\rightarrow l_2\delta_2 = l_2\sin\alpha_2 v + l_2\cos\alpha_2 u \Rightarrow \delta_2 = \sin\alpha_2 v + \cos\alpha_2 u$

در مثلث سمت چپ $\rightarrow (l_1 + \delta_1)^2 = (l_1\sin\alpha_1 + v)^2 + (l_1\cos\alpha_1 - u)^2 \Rightarrow \delta_1 = v\sin\alpha_1 - u\cos\alpha_1$

✓ برای حالت n میله‌ای هم برای هر یک رابطه‌ی $F = \delta \times k$ را می‌نویسیم ... و $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ را هم می‌نویسیم. δها را بر حسب u و v می‌نویسیم و تمام Fها را در معادله‌ی ΣF جایگزین می‌کنیم تا با دو معادله، دو مجهول u و v محاسبه شوند. (زوایای α را از جهت مثبت محور x در جهت مثلثاتی بنویسید) $\delta = u\cos\alpha + v\sin\alpha$

⑤ یه مثال ساده:



به کمک [illegible]، انتظار [illegible] داریم! $\leftarrow \Delta = \frac{\delta}{\cos\alpha}$

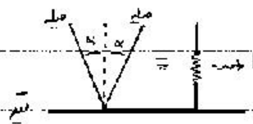
$P = 2F\cos\alpha \rightarrow F = \frac{P}{2\cos\alpha}$

$\delta = \frac{FL}{AE} \rightarrow \delta = \frac{PL}{2AE\cos\alpha} \Rightarrow \Delta = \frac{PL}{2AE\cos^2\alpha}$

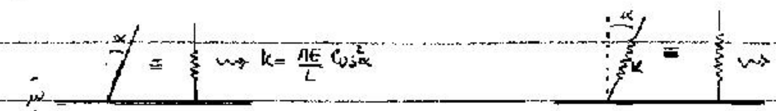
SUBJECT

Year ( ) Month ( ) Date ( )

پس برای حل کردن دو حالت زیر کافی است فنرهایی با ثابت‌های داده شده را در نظر بگیریم:

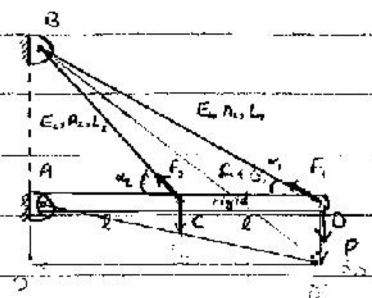


$\rightarrow k = \frac{2AE}{L}\cos^2\alpha$



$\rightarrow k = \frac{AE}{L}\cos^2\alpha$ $\qquad \rightarrow k = K\cos^2\alpha$

یا تئوری بوردا



$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow P\times 2\ell = F_1 \sin\alpha_1 \times 2\ell + F_2 \sin\alpha_2 \times \ell \qquad \delta_D = ?$

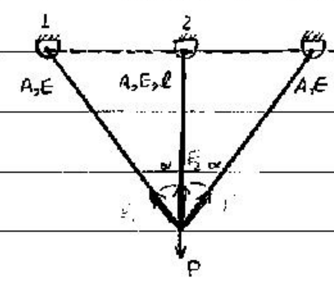
$\delta_1 = \frac{F_1 \ell_1}{A_1 E_1}, \quad \delta_2 = \frac{F_2 \ell_2}{A_2 E_2} \qquad \delta_C = \frac{1}{2}\delta_D \rightarrow$ تناسب

$\overset{\triangle}{BOD'} \Rightarrow (\ell_1 \pm \delta_1)^2 = (\ell_1 \cos\alpha_1)^2 + (\ell_1 \sin\alpha_1 \pm \delta_D)^2$

$\Rightarrow \delta_1 = \delta_D \sin\alpha_1 \Rightarrow \delta_D = \frac{\delta_1}{\sin\alpha_1}, \quad \delta_C = \frac{\delta_2}{\sin\alpha_2}$

حالا 6 معادله 6 مجهول حل می‌کنیم δ_D بدست می‌آید.

این مسئله را از سه روش می‌شود حل کرد.



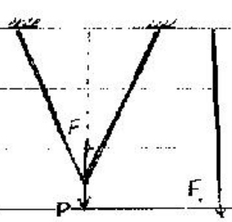
روش اول (استاندارد) (Routin

$F_2 + 2F_1\cos\alpha = P$

$\delta_1 = \frac{F_1(\ell/\cos\alpha)}{AE} \qquad \delta_2 = \frac{F_2\ell}{AE} = \frac{\delta_1}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{F_2\ell}{AE} = \frac{F_1\ell/\cos^2\alpha}{AE} \Rightarrow$ حل مجهولات تعیین می‌شوند

روش دوم: میله‌ی وسطی را جدا در نظر بگیریم.



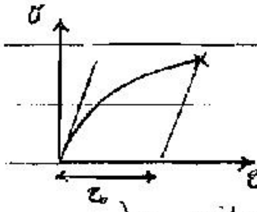
$\frac{(P-F)\ell/\cos\alpha}{2AE\cos^2\alpha} = \frac{F\ell}{AE}$

روش سوم: به کمک فنرها

$$\delta = \frac{P}{\underbrace{\frac{AE}{\ell}}_{\text{میله وسط}} + \underbrace{\frac{2AE\cos^2\alpha}{\ell/\cos\alpha}}_{\text{دو تا میله مورب}}}$$

SUBJECT:

Year: Month: Date:

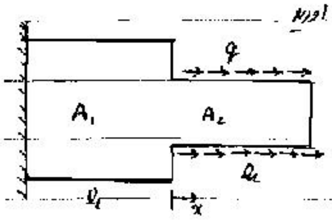


(4)

ε_0 → residual strain / Permanent strain → δ_0 $\quad \varepsilon = \frac{\delta}{l} \quad (\delta = \int \varepsilon\, dx)$

اگر بار را از روی میله برداریم (وقتی قانون هوک هم برقرار نباشد) میله به حالت اولیه برنگردد. برای پیدا کردن residual strain از نقطه ی مورد نظر بر روی نمودار یک خط موازی با خط مماس بر نمودار در ابتدا رسم می کنیم و محل تقاطع آن با محور ε، کرنش پسماند را می دهد.

(5) $\delta_0 = ?$ در حالتی که بار q موجود است، حال اگر بار را برداریم، δ ی پسماند را بدست آورید



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{a} + \left(\frac{\sigma}{b}\right)^3$$

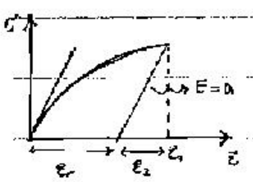
$$\sigma_x\Big)_2 = \frac{q x (l_2 - x)}{A_2} \rightarrow \delta_2 = \int \varepsilon\, dx = \int_0^{l_2} \left[\frac{(\sigma_x)_2}{a} + \left(\frac{(\sigma_x)_2}{b}\right)^3\right] dx \rightarrow \delta_2 = ✓$$

چون بار گسترده نداریم می توانیم از رابطه ی $\delta = \varepsilon l$ استفاده کنیم

$$\sigma_1 = \frac{q l_2}{A_1} \rightarrow \varepsilon = \left(\frac{\sigma_1}{a}\right) + \left(\frac{\sigma_1}{b}\right)^3 \Rightarrow \delta_1 = \varepsilon l_1$$

$$\delta_T\Big)_1 = \delta_1 + \delta_2$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{a} + \frac{3\sigma^2}{b^3} \rightarrow \frac{d\varepsilon}{d\sigma}\Big)_{\varepsilon, \sigma = 0} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a$$



بر روی خط ابتدایی (برگشت) رابطه خطی است و می توانیم با یک مسئله که قانون هوک در آن برقرار است و E برابر با $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a$ است، شبیه سازی کنیم. حالا به کمک این شبیه سازی ε_2 را محاسبه می کنیم. ε_1 را هم که از حالتی که تحت بارگذاری قرار داشت بدست آوردیم. در آخر داریم:

کرنش پسماند $\varepsilon_r = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

1 میله) $\delta_1 = \frac{FL}{AE} = \frac{(q l_2) l_1}{A_1 a}$

2 میله) $\delta_2 = \int \frac{x q(x) dx}{A_2 E} = \int_0^{l_2} \frac{x q}{A_2 a} dx \rightarrow \delta_2$

$$\delta_T\Big)_2 = \delta_1 + \delta_2 \Rightarrow \delta_0 = (\delta_T)_1 - (\delta_T)_2$$