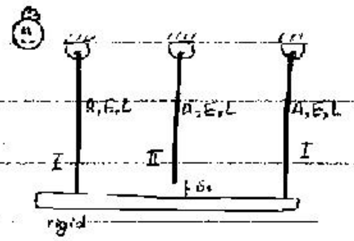
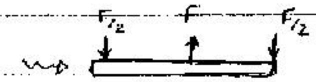
۸۷,۸,۱۵

(۴) میله‌ی وسطی را کوتاه‌تر گرفتیم، می‌کشیمش و جوش می‌کنیم
به میله‌ی صلب. بعد سیستم را رها می‌کنیم $\delta_0 \ll l$

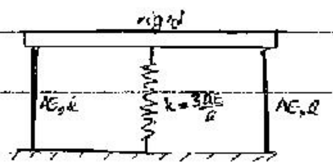


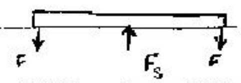


$\delta_1 = \frac{F/2\, l}{AE}$, $\delta_2 = \frac{Fl}{AE}$ $\quad \delta_0 = \delta_1 + \delta_2 \Rightarrow F = \frac{l}{AE} \times \frac{2}{3}\delta_0$

$\delta_0 - \delta_2 = \delta_1$

(۵) یک فنر به طول $l + \delta_0$ ($\delta_0 \ll l$)، فنر را فشرده می‌کنیم تا اینجا جا بگیرد.
δی میله‌ها!





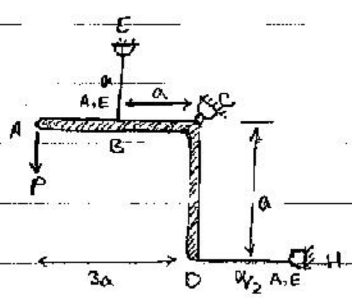
در آخرین لحظه به سیستم نگاه می‌کنیم، نیروی فنر برابر است با

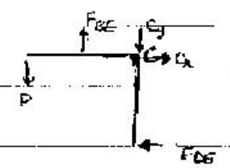
$F_s = k(\delta_0 - \delta)$

میله‌ها $F = \frac{AE}{l}\delta = \frac{F_s}{2} \Rightarrow \frac{3AE}{l}(\delta_0 - \delta) = 2\frac{AE}{l}\delta$

$\Rightarrow \delta = \frac{3}{5}\delta_0$

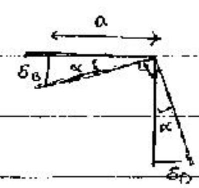
(۶) میله‌ی ضخیم‌تر، صلب است. نیروی BE؟





$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 3P - F_{BE} - F_{DE} = 0$ (I)

جسم صلب بعد از deflection هم صلب باقی می‌ماند، پس زاویه‌ی
تقاطع بین AC و CD ثابت می‌ماند.



(تشابه مثلث‌ها) $\delta_B = \delta_D$

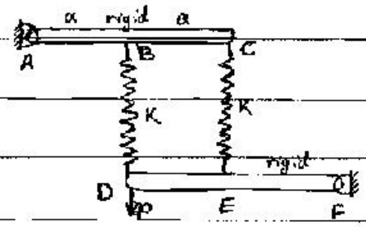
$\Rightarrow \frac{F_{BE}\, a}{AE} = \frac{F_{DH}\, a/2}{AE} \Rightarrow 2F_{BE} = F_{DH}$ (II)

STAEDTLER

(I),(II) $\Rightarrow F_{BE} = 2P$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



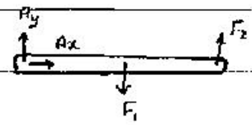
$\delta_D = ?$

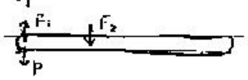
$\delta_C = \delta_1$

$\delta_B = \frac{\delta_1}{2}$ (تشابه مثلثات)

$\delta_D = \delta_2$

$\delta_E = \frac{\delta_2}{2}$





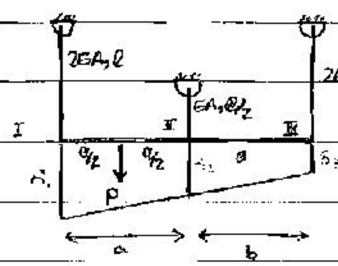
$F_1 = k\left(-\frac{\delta_1}{2} + \delta_2\right)$

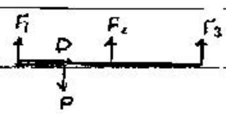
$F_2 = k\left(\delta_1 - \frac{\delta_2}{2}\right)$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow k\left(\delta_2 - \frac{\delta_1}{2}\right) = 2 \times k\left(\delta_1 - \frac{\delta_2}{2}\right)$

$\Sigma M_F = 0 \Rightarrow k\left(\delta_1 - \frac{\delta_2}{2}\right) + 2P = 2 \times k\left(\delta_2 - \frac{\delta_1}{2}\right)$

چهار معادله، چهار مجهول ← همه ی مجهولات معین می شوند.





$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 + F_3 - P = 0$

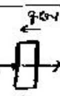
$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} F_2 + \frac{3a}{2} F_3 - \frac{a}{2} F_1 = 0$

$\frac{\delta_1 - \delta_3}{\delta_2 - \delta_3} = \frac{a+b}{a}$

$\delta_1 = \frac{F_1 l}{2AE}$ $\quad \delta_2 = \frac{F_2 l/2}{AE}$ $\quad \delta_3 = \frac{F_3 l}{2AE}$

* معادله دیفرانسیل تعادل:

$\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du}{dx}\right) = -q(x)$



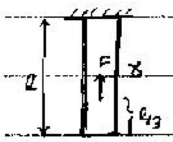
$F \leftarrow \; \rightarrow F+dF \Rightarrow \frac{dF}{dx} = -q(x)$, $F = \sigma A = E\underset{\downarrow\, du/dx}{\varepsilon} A$

دو سری شرایط مرزی داریم: هندسی ، طبیعی (هر دو باشد لحاظ کنید!!)

$$\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du}{dx}\right)=-q(x)-F\,\delta(x-l/3)$$

$$\int_0^{\infty}\delta(x-a)\,f(x)\,dx=f(a)$$

④ معادله دیفرانسیل تعادل:



$$\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du}{dx}\right)=\underbrace{-\gamma A}_{\text{وزن}}+F\,\delta\left(x-\frac{2l}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\int}AE\frac{du}{dx}=-\gamma Ax+\int_0^{\cancel{l}\ \infty}F\,\delta\left(x-\frac{2l}{3}\right)dx+C_1$$

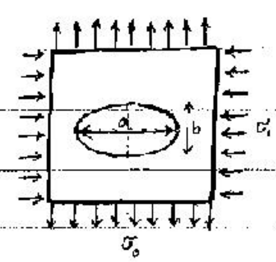
اینکه حد انتگرال برای F از صفر تا l باشد یا از صفر تا بی‌نهایت، تفاوتی در حاصل انتگرال ندارد!

$$\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{-\gamma x}{E}+\frac{F}{AE}+\frac{C_1}{AE}\Rightarrow u=\frac{-\gamma}{2E}x^2+\frac{F}{AE}x+\frac{C_1}{AE}x+C_2$$

$u(0)=0\Rightarrow C_2=0$

$u_x(l)=0\Rightarrow\frac{-\gamma l}{E}+\frac{F}{AE}+\frac{C_1}{AE}=0\Rightarrow C_1=\gamma lA-F$

⑤ قانون کلی هوک: صفحه و نقص سوراخ! می‌خواهیم که تنش‌ها



$b=0.95a$ یعنی تبدیل به دایره بشه!

(I) $a+a\varepsilon_x=b+b\varepsilon_y$ ← باید اینطوری بشه

(II) $\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)$, $\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)$

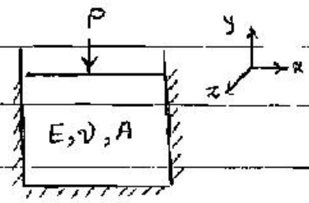
$$(I),(II)\Rightarrow a+\frac{a}{E}(-\sigma_1-\nu\sigma_0)=b+\frac{b}{E}(\sigma_0+\nu\sigma_1)\Rightarrow\sigma_1=\checkmark$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/۸/۱۹

③ مطلوب است $\varepsilon_z , \varepsilon_v$!



$\sigma_y = -\frac{P}{A}$

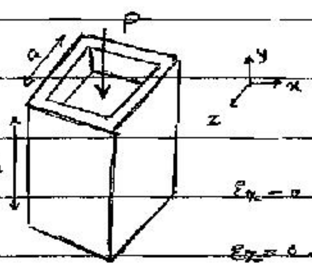
$\varepsilon_x = 0 \rightarrow \sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) = \nu\sigma_y = -\nu\frac{P}{A}$

$\sigma_z = 0$

$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{1}{E}\left[\nu^2\frac{P}{A} + \nu\frac{P}{A}\right]$

$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E}\left[-\frac{P}{A} - \frac{\nu P}{A}\right] \qquad \Delta V = V\varepsilon_v$

③ تغییر ارتفاع ؟



$\varepsilon_x = 0 \rightarrow \sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z)$

$\varepsilon_z = 0 \rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad \longrightarrow \sigma_x = \sigma_z$

$\sigma_y = -\frac{P}{A}$

$\sigma_x = -\frac{\nu P}{A} + \nu\sigma_x \Rightarrow \sigma_x(1-\nu) = -\frac{\nu P}{A}$

$\Rightarrow \sigma_x = \sigma_z = \frac{-\nu P}{(1-\nu)A}$

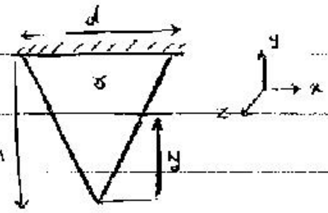
$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}\left(-\frac{P}{A} - \frac{2\nu P}{(1-\nu)A}\right) \quad , \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\frac{-P}{A} - \nu\left(\frac{-2\nu P}{(1-\nu)A}\right)\right)$

$\Delta h = h\varepsilon_y$

④ Elastic Foundation بستر ارتجاعی ← جسم زیرش یه فنر گسترده قرار گرفته است مثل آب!

rivet → پرچ

STAEDTLER

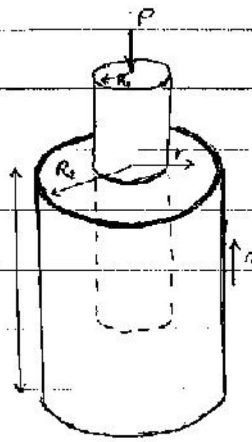


$$\sigma_y = 1/_3\, \gamma y$$

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}\left(1/_3\, \gamma y + \overset{\sigma_z}{0} + \overset{\sigma_x}{0}\right)$$

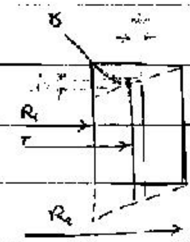
$$\Delta V = \varepsilon_V V = \int \varepsilon_V \, dV = \int \frac{(1-2\nu)\gamma y}{3E} A(y)\,dy$$

$$= \int_0^h \frac{\pi(1-2\nu)\,\gamma\, y^3\,dy}{12 E h^2}$$



④ بین لوله‌ی نازک و لوله‌ی کلفت یک لایه‌ی لاستیک پر کرده‌ام.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \tau = \frac{P}{2\pi r h}$$



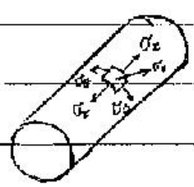
$$\tau = G\gamma \Rightarrow \gamma(r) = \frac{P}{2\pi h G} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{2\pi h G}\cdot\frac{1}{r} \Rightarrow v(r) = \frac{P}{2\pi h G}\int_r^{R_2}\frac{1}{r}\,dr$$

$$= \frac{P}{2\pi h G}\ln\frac{R_2}{r}$$ v در یک محل دلخواه

④ مخازن جدار نازک

$$\sigma_\theta = \frac{Pr}{t} \qquad \sigma_z = \frac{Pr}{2t} \qquad \sigma_r \ll \sigma_z, \sigma_\theta$$



$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\frac{Pr}{t} - \frac{\nu Pr}{2t}\right] = \frac{Pr}{Et}\left[1 - \frac{\nu}{2}\right] = \frac{u}{r} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\varepsilon_z = \frac{Pr}{Et}\left[\frac{1}{2} - \nu\right] = \frac{\Delta z}{z}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta t}{t}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\Delta V = \pi (r + r\varepsilon_\theta)^2 (1+\varepsilon_z) \times z - \pi r^2 z \overset{z=1}{\Longrightarrow} \frac{\Delta V}{\pi r^2} = (1+\varepsilon_\theta)^2 (1+\varepsilon_z) - 1 \qquad (\varepsilon^2 \simeq 0)$$

$$\to \frac{\Delta V}{\pi r^2} = 2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \varepsilon_v$$

(۷) دو سر استوانه‌ی جدار نازک را نیم‌کره چسبوندیم!

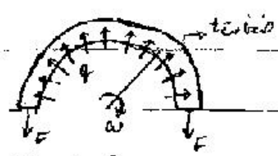
$$(\varepsilon_\theta)_c = \frac{Pr}{Et_1}\left(1 - \tfrac{1}{2}\nu\right)$$

$$(\varepsilon_\theta)_c = (\varepsilon_\theta)_s \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{2-\nu}{1-\nu}$$

$$(\varepsilon_\theta)_s = \frac{Pr}{2Et_2}(1-\nu)$$

اگر رابطه‌ی بالا برقرار باشد، تغییر شعاع‌های نیم‌کره‌ها و استوانه برابر خواهد بود و ترک‌ها تشکیل می‌شود
می‌ترکد یا ...

۸۷/۸/۲۴



$F = mr\omega^2$

اصل دالامبر: اگر جسمی با شتاب a حرکت کند، می‌توان آن را استاتیکی حل کرد و فقط یک نیروی ma به روش گذاشت. به طوری که انگار F=ma مانند یک نیرو در حالت استاتیکی به آن اعمال می‌شود.

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\rho_v r\omega^2}{A} = q = \rho t r\omega^2 \qquad \Sigma F_y = 0 \to 2F = P \times 2r \to F = \rho t r^2\omega^2 \to \sigma_\theta = \frac{\rho r^2\omega^2 t}{t}$$

(۸) Shrink fit: می‌خواهیم یک استوانه با قطر خارجی d+ε را در داخل استوانه‌ای با قطر داخلی d جا بزنیم. برای این کار استوانه‌ی بیرونی را گرم می‌کنیم و وقتی داخلی را درونش گذاشتیم، می‌گذاریم سرد شود.

برای جدا کردن استوانه‌ها هم از روغن استفاده می‌کنیم (که برای جدار نازک‌ها جواب نمی‌دهد)

(۹) یک استوانه‌ی آلومینیومی به قطر داخلی r_1 و ضخامت دیواره t_1 و یک استوانه‌ی فولادی به قطر خارجی $r_1+\varepsilon$ و ضخامت دیواره‌ی t_2 را به هم shrink fit می‌کنیم. فشاری که دو استوانه به هم وارد می‌کنند چقدر است؟

SUBJECT :

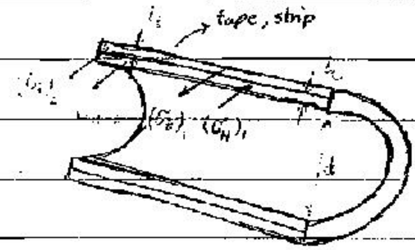
Year (　　) Month (　　) Date (　　)

$$r_m)_1 = \frac{d_1}{2} + \frac{t_1}{2} \quad , \quad r_m)_2 = \frac{d_1+\varepsilon}{2} + \frac{t_2}{2}$$

$$\varepsilon_\theta)_1 = \frac{P(r_m)_1}{E_1 t_1}\left(1-\frac{\nu_1}{2}\right) \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left(\frac{Pr}{t} - \nu\frac{Pr}{2t}\right)$$

$$\varepsilon_\theta)_2 = \frac{P(r_m)_2}{E_2 t_2}\left(1-\frac{\nu_2}{2}\right)$$

$$\frac{u}{r} = \frac{\Delta r}{r} = \varepsilon_\theta \qquad (\Delta r)_1 = (\varepsilon_\theta\, r_m)_1 \quad , \quad (\Delta r)_2 = (\varepsilon_\theta\, r_m)_2 \qquad \Delta r_1 + \Delta r_2 = \varepsilon$$



(*) حالت دوم داخل استوانه فشار داریم.

$$\sigma_t)_1 \times 2\ell t_t = \sigma_H)_1 \times 2\ell t_c \Rightarrow \sigma_t)_1 = \sigma_H)_1 \times \frac{t_c}{t_t} \quad (\mathrm{I})$$

$$Pd\ell = (\sigma_H)_2 \times 2\ell t_c + (\sigma_t)_2 \times 2\ell t_t \quad (\mathrm{II})$$

اختلاف کرنش‌ها در دو جهت، برای هر جسم باید برابر باشد.

$$(\varepsilon_t)_2 - (\varepsilon_t)_1 = (\varepsilon_H)_2 - (\varepsilon_H)_1 \longrightarrow \frac{(\sigma_t)_2 - (\sigma_t)_1}{E_t} = \frac{1}{E}\left((\sigma_H)_2 - \nu\frac{Pr}{2t_c}\right) - \frac{\sigma_H)_1}{E} \quad (\mathrm{III})$$

$$\varepsilon_H)_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_H)_2 - \nu\frac{Pr}{2t}\right) \qquad \varepsilon_H)_1 = \frac{\sigma_H)_1}{E} \qquad \sigma_H)_2 = \sigma_y$$ تنش تسلیم استیل

۸۷/۸/۲۹

* پیچش $c-c$ Torsion

$$\gamma \to \varepsilon \qquad G \to E \qquad \tau \to \sigma \qquad \phi \to \delta \qquad J \to A$$

گشتاور گسترده $\frac{N.m}{m}$

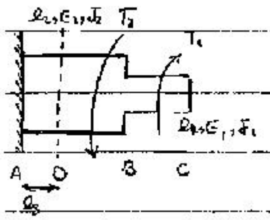
$$\frac{d}{dx}\left(G(x)J(x)\frac{d\phi}{dx}\right) = -t(x)$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$T(x) = G(x)J(x)\frac{d\varphi}{dx}$ — برای مقاطع دایره‌ای $\rightarrow J = \frac{1}{2}\pi r^4$

$\varphi = \frac{\int x\, t(x)\,dx}{GJ}$ اگر J, G ثابت باشند :



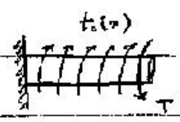
$\varphi_C = \varphi_{C/B} + \varphi_{B/A} = \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1} + \frac{(T_1 - T_2)L_2}{G_2 J_2}$

اگر T_1 به جای C به وسط میله وارد شود، باز باید به سه قسمت تقسیم کنیم (مثل مسائل کرنش)

۲ اگر پیچش O را بخواهیم، مثل قبل گشتاورها را منتقل می‌کنیم و حول می‌نویسیم : $\varphi_O = \frac{(T_1 - T_2)L_3}{G_2 J_2}$

توان $= P = Fv$

توان $= P = T\omega$ ؛ برای دوران $T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f}$



۳ $t_0(x)$ معلوم است. T را به گونه‌ای تعیین کنید که زاویه‌ی پیچش انتهای تیر صفر باشد!

$\int_0^l \frac{T_0(x)\,dx}{GJ} = \frac{TL}{GJ}$; که $\rightarrow \int_x^l t_0(x)\,dx = T(x)$

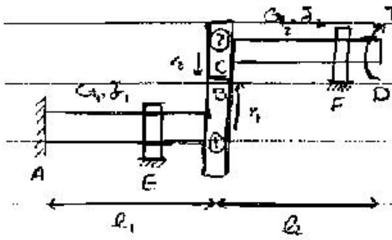
مرحله‌ی بعدی $\int_0^l \frac{x\, t_0(x)\,dx}{GJ} = \frac{TL}{GJ}$

۴

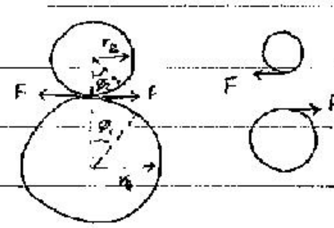
STAEDTLER

① و ② دو تا چرخدنده هستند، E و F دو تا یاتاقان هستند.

φ_D را می‌خواهیم!



برای چرخدنده‌ها داریم:



$$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2 \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2} \quad (\mathrm{II})$$

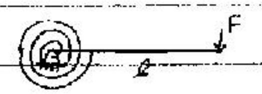
از سمت دیوار شروع می‌کنیم چون $\varphi=0$ است.

$$(\mathrm{II}) \Rightarrow T_B = \frac{r_1}{r_2}T_0 \longrightarrow \varphi_B = \frac{T_B L_1}{G_1 J_1}$$

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow \varphi_C = \frac{T_B L_1}{G_1 J_1}\times\frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \varphi_D = \varphi_C + \varphi_{D/C} = \frac{\frac{r_1}{r_2}T_0 L_1}{G_1 J_1}\times\frac{r_1}{r_2} + \frac{T_0 L_2}{G_2 J_2}$$

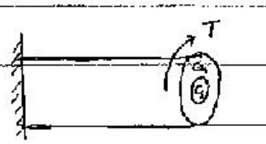
* مدلسازی با فنرها (فنر پیچشی):

$$T = k\phi \longrightarrow k = \frac{GJ}{L}$$



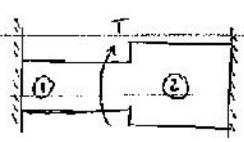
این فنرها از چرخیدن جسم جلوگیری می‌کنند

گشتاور $T = F\ell = k\theta$



$$\left.\begin{array}{l} T = T_1 + T_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{(دو فنر موازی)} \longrightarrow \varphi = \frac{T}{\Sigma k} = \frac{T}{\frac{G_1J_1}{L_1}+\frac{G_2J_2}{L_2}}$$

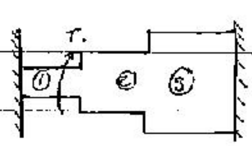
④



$$T = T_1 + T_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \Rightarrow \text{دو فنر موازی}$$

از راه معمولی: دیوار را برمی‌داریم و یک گشتاور معادل به جای آن می‌گذاریم، φ کل را پیدا می‌کنیم و مساوی صفر قرار می‌دهیم.



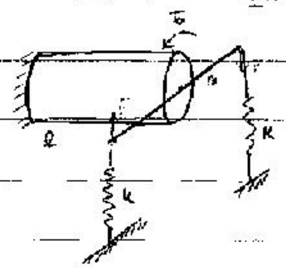
موازی 1 و (سری 2, 3) ← فنرها

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

(۱۰) میله ی صلب AB به استوانه ای به طول l جوش داده شده و دو انتهای آن به فنرهایی به سختی k متصل است.

در صورتی که گشتاور T_0 به استوانه وارد شود، زاویه ی دوران انتهای آن را بدست آورید.



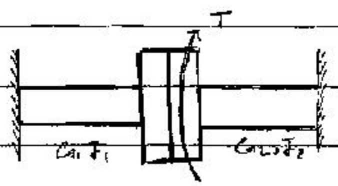
$T = T_0 - 2Fa$

δ فنر $= a\varphi$

$$\Rightarrow \frac{F}{k} = \frac{a(T_0 - 2Fa)L}{GJ} \rightarrow F = \checkmark$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{(T_0 - 2Fa)L}{GJ} = \checkmark$$

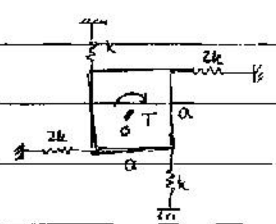
(۱۱) میله ی 2 به اندازه ی φ_0 لق است یعنی باید به اندازه ی φ_0 بچرخد تا به هم بچسبند و بعد هم جنس (۱ و ۲) با هم بچرخند!

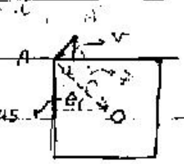


$\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_0$

$T = T_1 + T_2$

(۱۲) T را بدست آورید.





$u = AA' \sin\theta = OA\varphi \sin\theta = a/2\,\varphi$

$v = AA' \cos\theta = OA\varphi \cos\theta = a/2\,\varphi$ فقط این در صورتی صادق است

$\delta = v = a/2\,\varphi$

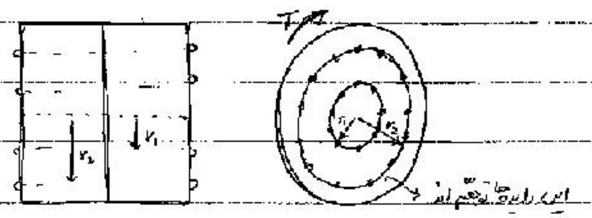
اگر بخواهیم از راه هندسی برویم، برای پیدا کردن میزان تغییر طول فنر، فاصله ی بین مرکز پیچش تا محل فنر را در φ ضرب می کنیم.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow T - (k a_{1/2} \varphi - 2k a_{1/2} \varphi - k a_{1/2} \varphi - 2k a_{1/2} \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = f(T)$$

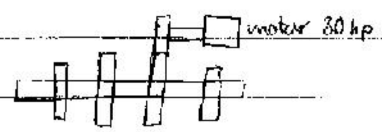
دو دیسک جدا توسط دو ردیف پیچ با مدول برشی G_1، G_2 و سطح مقطع A_1 و A_2 به هم متصل شده‌اند.
تعداد پیچ‌های ردیف اول n_1 و ردیف دوم n_2 می‌باشد و فاصله‌ی آنها از مرکز دیسک r_1 و r_2 می‌باشد. اگر
برای انتقال گشتاور T به کار گرفته شده است. تنش برشی در پیچ‌های هر ردیف را بدست آورید.



$\tau_1 A_1 \longrightarrow$ نیروی هر پیچ $\Rightarrow n_1 \tau_1 A_1 \rightarrow$ نیروی n_1 پیچ $\Rightarrow r_1 n_1 \tau_1 A_1$ گشتاور n_1 پیچ

$$T - r_1 n_1 \tau_1 A_1 - r_2 n_2 \tau_2 A_2 = 0$$

$$R\varphi = l\gamma \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{\tau_1 / G_1}{\tau_2 / G_2}$$



$1 hp = 735 w$

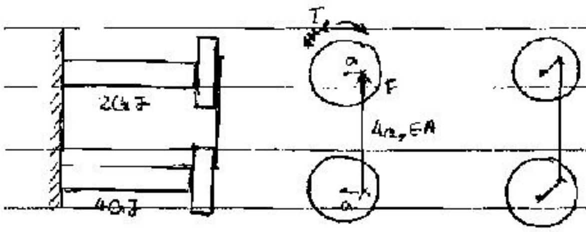
$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f}$ $\quad f = 3 Hz$ برای کل مجموعه ثابت است $\Rightarrow T = \checkmark$

مثلاً موتور ما 30 اسب است، 5 تاش می‌رود به یکی، 7 تاش می‌رود به یکی ...

SUBJECT

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/۹/۶



① زاویه دوران دیسک پایینی ؟

فصل دوم Beer ← مثال های 14، 15، 16

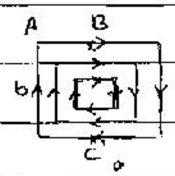
مقاطع هم خوب بچسبند!

* پیچش غیر دایروی :

فرمول کلی تنش و ϕ در مستطیل تحت پیچش :

$$\tau_{max} = \frac{T}{k_1 a b^2} \qquad \phi = \frac{TL}{k_2 a b^3 G}$$

تنش max در مقاطع غیر دایروی در نقطه‌ای اتفاق می‌افتد که روی مرز باشد و فاصله‌اش از محور پیچش کمترین فاصله باشد.

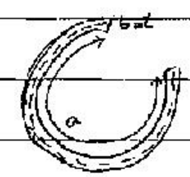


تنش در A $\to 0$ تنش در B, C $\to$ max

مربع $\begin{cases} k_1 = 0.208 \\ k_2 = 0.1406 \end{cases}$

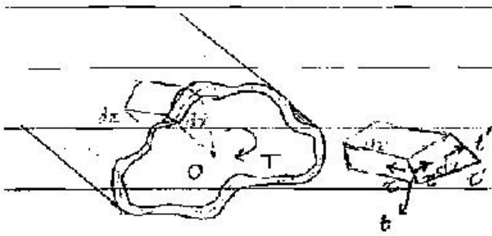
Narrow مستطیل narrow (مستطیل) $\to a \gg b \to \begin{cases} k_1 = 1/3 \\ k_2 = 1/3 \end{cases} \to \tau_{max} = \frac{T}{\frac{1}{3} a b^2}$, $\phi = \frac{TL}{\frac{1}{3} a b^3 G}$

جدار نازک باز



$$\tau_{max} = \frac{Tb}{\frac{1}{3} a b^3} = \frac{T\rho}{J} \qquad \phi = \frac{TL}{G \times \frac{1}{3} a b^3}$$

* مقاطع غیر دایروی : (ضخامت هم ثابت نیست!)



تعادل در راستای z : $\tau (t\,dz) = \tau' (t'\,dz)$

$\Rightarrow \tau t = \tau' t' = q =$ flow shear

جریان برشی

STAEDTLER

SUBJECT.

Year ( ) Month ( ) Date ( )

τ را با جریان زیر شبیه‌سازی می‌کنند. این جریان باید ثابت باشد. هر جا که ضخامت کم باشد، τ زیاد می‌شود، در گره‌ها

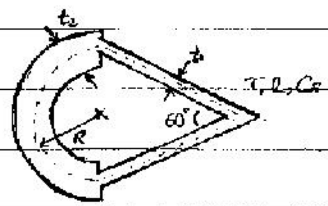
هم جمع جبری جریان‌های وارد به گره برابر صفر است. (اثباتش با تعادله!)

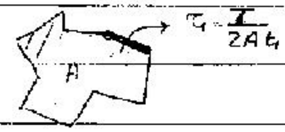
$$\text{نیروی جریان} = q\,ds \rightarrow dT = r\,q\,ds \rightarrow T = \int rq\,ds = q\int r\,ds = q \times 2A \rightarrow$$

$$\rightarrow T = \tau t \times 2A \rightarrow \tau = \frac{T}{2At}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ}, \quad J_{eq} = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$ ⟵ برای جدار نازک بسته

با توجه به فرمول تنش برشی برای جدار نازک بسته، در نقطه‌ای که t min است، τ max است.



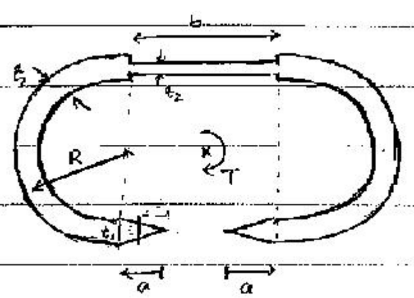


$$A = \frac{1}{2}\pi R^2 + R^2\sqrt{3}$$

$t \rightarrow \min \Rightarrow \tau \rightarrow \max$

$$\tau_{max} = \frac{T}{2\times(\frac{1}{2}\pi R^2 + R^2\sqrt{3})\,t_1}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ}, \quad J_{eq} = 4A^2 \Big/ \oint\frac{ds}{t} \doteq 4A^2 \Big/ \sum\frac{s_i}{t_i}$$ پس $$J_{eq} = \frac{4A^2}{\left(\frac{\pi R}{t_2} + \frac{2R}{t_1}\right)}$$



در جدار نازک باز: $\tau \rightarrow \max$: $t \rightarrow \max$

چون J، J کل و t مربوط به هر مستطیل است

$$\tau = \frac{tT}{\sum \frac{1}{3} l t^3} = \frac{Tt}{J}$$

$\sum \frac{1}{3} l t^3 \rightarrow$ J کل مقطع

$$J = \frac{1}{3} b t_2^3 + 2\times\pi R t_1^3 + 2\times\int_0^a t^3 ds = \frac{1}{3} b t_2^3 + 2\pi R t_1^3 + \frac{t_1^3 a}{4} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T t_1}{J}$$

$$\frac{t}{t_1} = \frac{s}{a} \Rightarrow \int_0^a t^3 ds = \frac{t_1^3}{a^3}\times\frac{a^4}{4}$$

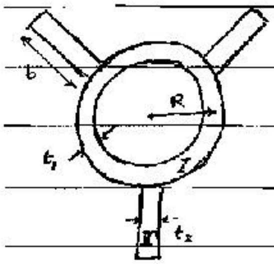
STAEDTLER

I Do know who know What ? :-o

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

(۱) در این مقاطع ترکیبی، ϕ ها یکی هستند.



$$k_1 = \frac{GJ}{L} = \frac{G(2\pi R^3 t_1)}{L}$$

$$\text{معادل } J = \frac{4(\pi R^2)^2}{\frac{2\pi R}{t_1}} = 2\pi R^3 t_1$$

$$k_2 = \frac{G \times (\frac{1}{3} b t_2^3)}{L}$$

$$\text{معادل } J = \frac{1}{3} b t_2^3$$

$$\phi = \frac{T}{k_1 + 3k_2} \qquad T_1 = k_1 \phi \xrightarrow{\text{جداره}} \tau_1 = \frac{T}{2At} = \frac{T_1}{2(\pi R^2) t_1}$$

$$T_2 = k_2 \phi \Rightarrow \tau_2 = \frac{T_2 \times t_2}{\frac{1}{3} b t_2^3}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 0$$

(۲) رابطه‌ی روبه‌رو برقرار است ←

از یک تابع کمکی که همساز باشد به نام تابع تنش پرنتل ϕ استفاده می‌کند

چون که همساز نیست!

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\tau_{xz} \to G\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} \to G\gamma_{yz}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\theta$$

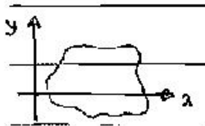
زاویه پیچش

رابطه‌ی روبه‌رو هم چون کرنش‌ها برقرار است.

در نتیجه هم روابط بالا داریم:

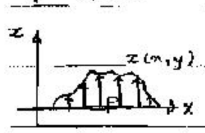
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \qquad (I)$$

$\cancel{\text{[illegible]}}$



* غشاء پرنتل :

اگر displacement عمودی (یعنی z(x,y)) را بسنجیم،



پرنتل به کمک معادلات تعادل، معادله‌ی روبه‌رو را به دست آورد.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{P}{S}$$

S ← نیروی اولیه داخل غشا / واحد طول

شرایط مرزی معادله پرنتل: ϕ روی مرز صفر است.

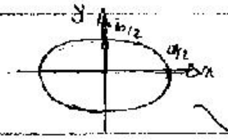
SUBJECT :

Year : Month : Date :

در مقایسه با رابطه قبلی داریم:
$\Phi = C_4 Z$, $C_4 P/_S = 2G\theta$

(دو رابطه مشابه اند)
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$

۱۱) می‌خواهیم اندازه‌ی θ چرخش، torque را هم بخواهیم (پس اول تنش‌ها را بدست آوریم)

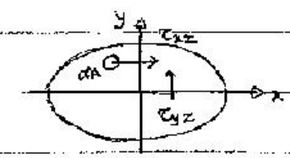


$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ برای اینکه Φ روی مرز صفر باشد $\Phi = c\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$

$(I) \rightarrow c\left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}\right) = -2G\theta \Rightarrow c = -\frac{G\theta a^2 b^2}{a^2+b^2}$

$\Rightarrow \Phi = -\frac{G\theta a^2 b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \checkmark \\ \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \checkmark \end{cases}$

τ_{xz} ، τ_{yz} است که در جهت x و در جهت y وجود دارد.



$T = \int (\tau_{xz} y - \tau_{yz} x)\, dA$

اگر استدلال بالا را مرتب کنیم، رابطه‌ی T به صورت زیر بدست می‌آید

$T = c_1 \int x^2 dA + c_2 \int y^2 dA$
$= c_1 I_{yy} + c_2 I_{xx}$

برای مقطع بیضوی $I_{xx} = \frac{\pi a b^3}{4}$, $I_{yy} = \frac{\pi a^3 b}{4}$ (این دوتا برحسب سطح‌اند نه مقطع $\begin{matrix} a \rightarrow 2a \\ b \rightarrow 2b \end{matrix}$)

برای پیدا کردن معادله‌ی T و τ برحسب یکدیگر، کافیست رابطه‌ی هر دو را با θ بدست آورده، سپس θ را بین دو رابطه حذف کنیم

حل مسئله‌ای که ابتدای جلسه داد:

$\Phi_{\text{بالایی}} = \frac{(T_0 - Fa)L}{2GJ}$ $\Phi'_{\text{پایینی}} = \frac{Fal}{4GJ}$ $a\Phi = a\Phi' + \frac{FL}{4EA}$

← سه معادله سه مجهول دیگر!

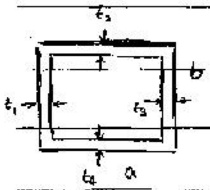
STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/۹/۹

① یک مقطع غیر دایروی جدار نازک داریم. می‌خواهیم ببینیم چه کسری از گشتاور اعمال شده توسط بخش سوم تحمل می‌شود



$$q = \tau_3 t_3 = q \Rightarrow Q = q\,b = T_3 \frac{ab}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_3}{T} = \frac{1}{4}$$

$$\tau = \frac{T}{2At} \Rightarrow q = \frac{T}{2A} \Rightarrow T = q \times 2ab$$

SUBJECT : تمارین ← ۱

Year : Month : Date :

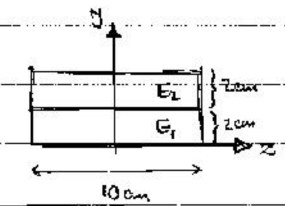
۸۷/۱۰/۱

برای حل مسائل خمش سه راه حل وجود دارد!

۱. عرض معادل n برای جی گرفتیم ـ (برای حالتی که عرض ثابت نباشد، مقطع مستطیلی نباشد، قابل استفاده نیست)

۲. محور تقارن مشترک باشد ← برای عرض متغیر هم جواب می‌دهد!

۳. فرمول انتگرالی



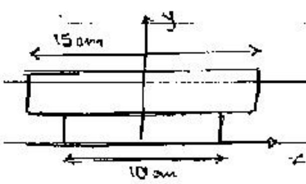
مثال ۱۱: تنش ماکزیمم و شعاع انحنای مقطع؟

$M = 200\ N.m$

$E_1 = 140\ GPa$

$E_2 = 210\ GPa$

$\frac{E_2}{E_1} = 3/2$



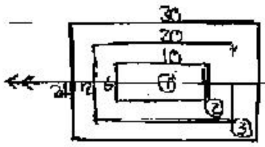
$$\bar{y} = \frac{15\times 2\times 3 + 10\times 2\times 1}{15\times 2 + 10\times 2} = 2.2$$

$$I_N = \frac{1}{12}\times 10\times 2^3 + 2\times 10\times (1.2)^2 + \frac{1}{12}\times 15\times 2^3 + 15\times 2\times (0.8)^2$$

$$= 64.7\ cm^4$$

در اینجا برای پیدا کردن تنش max باید با توجه به فاصله‌ی تار خنثی دو لبه مقایسه کنیم. چون بالایی اول E₂ بوده و حالا E₁ شده و ضرب در 1.5 شده، باید این را هم چک کنیم.

$$\sigma_{max} = 3/2 \times \frac{M\times 1.8}{I_N} \qquad \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = \frac{M}{E_1 I_N}$$



$E_1 = 150\ GPa$, $E_2 = 90\ GPa$, $E_3 = 30\ GPa$ ۱۲

$\hookrightarrow n_1 = 5,\ n_2 = 3,\ n_3 = 1$

$$I_e = \sum n_i I_i = 5\times \frac{1}{12} + \dots = 40680\ cm^4$$

$$(\sigma_1)_{max} = n_1 \frac{M\times 3}{I} = 132\ kPa$$

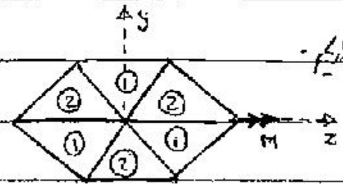
برای پیدا کردن تنش در هر نقطه، برای محاسبه تنش σ را بنویسید و بعد تقسیم بگیرید ! Which one to choose

STAEDTLER

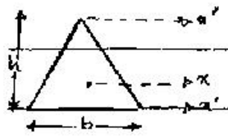
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

④ در این سوال ... عرض ثابت است (مثلث) ... محور تقارن ... داریم.



فرمول $\bar{y}=\frac{\sum E_i A_i y_i}{\sum E_i A_i} \rightarrow \sigma = E_j \frac{M y_j}{\sum E_i (I_{NA})_i}$



$I_x=\frac{1}{36}bh^3 \quad , I_{x'}=\frac{1}{12}bh^3 \quad , I_{x''}=\frac{1}{4}bh^3$

$$\bar{y}=\frac{E_1\times(\tfrac12 bh)\times\tfrac23 h+2\times E_1\times(\tfrac12 bh)\times(-\tfrac h3)+2E_2\times(\tfrac12 bh)\times(\tfrac h3)+E_2\times(\tfrac12 bh)\times(-\tfrac23 h)}{\sum E_i A_i}=0$$

$$\sigma_1=E_1\times\frac{Mh}{(E_1\times\frac14 bh^3+2E_1\times\frac1{12}bh^3+2E_2\times\frac1{12}bh^3+E_2\times\frac14 bh^3)}$$

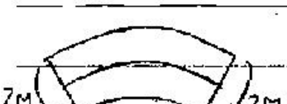
④ تیرهای فولادی به سختی E_1 تحت گشتاور M قرار گرفته است. در این وضعیت تیر فولادی مشابهی را خم کرده و به تیر اول می‌چسبانیم. در صورتی که پس از چسباندن تیرها گشتاور برداشته شود، شعاع انحنا را بدست آورید.

باقیمانده

$\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}=\frac{-M}{EI}$ داریم $\frac{1}{R}=\frac{M}{EI}$ البته باید توجه به شعاع انحنا داشته باشیم به جای

$t \rightarrow$ 2 برابر $\rightarrow$ 8 برابر می‌شود I ⟸ در حالت دوم داریم

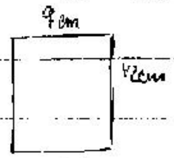
برای هر تیر $\rightarrow \frac{1}{R}=\frac{+M}{EI} \implies \left(\overset{M/EI}{\frac{1}{R}}-\frac{1}{R'}\right)=\frac{-M}{EI}-\frac{-2M}{8EI} \implies \frac{1}{R'}=\frac{5M}{4EI}$



STAEDTLER®

SUBJECT : غشاری ← ۲

Year (   ) Month (   ) Date (   )

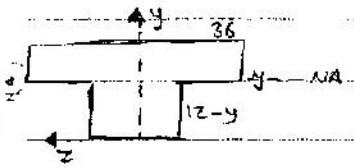


$\frac{E_c}{E_t} = 4$

⑥ محل محور خنثی و تنش ماکزیمم max.

برای بخش فشاری تغییر عرض می‌دهیم!

M در جهت z است!!!

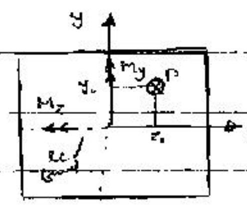


$$\bar{y} = \frac{(y\times 36\times y/2) + (12-y)\times 9\times (y-12)/2}{y\times 36 + (12-y)\times 9} = 0$$

$\Rightarrow$ ... $\Rightarrow y = 4cm \quad \Rightarrow I_{NA} =$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{4\times M\times 4}{I_{NA}}$$

⑦ K بخش ناحیه‌ای ← نیروی محوری داشته باشیم :



نیروی محوری به هر جایی باشد، در یک طرفش کاملاً کششی داریم!

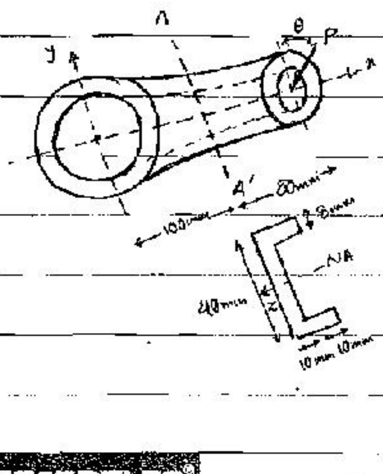
$$-\sigma = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{P}{A}$$

$M_y = P z_0$, $M_z = P y_0$

معادله تار خنثی : $\frac{z z_0}{I_y} + \frac{y y_0}{I_z} = \frac{-1}{A}$

⑧ There is a cranck ! $\sigma_{allow} = 100MPa$ کششی و فشاری ! $\theta = 60°$!

تنش در مقطع A-A ؟



$$\sigma = \pm\frac{(P\cos\theta\times 80)\times 10^{-3}\times 20\times 10^{-3}}{I} - \frac{P\sin\theta}{A}$$

$I = 9.51\times 10^{-8}\ m^4 \qquad A = 560\times 10^{-6}\ m^2$

در جهت فشاری → $\sigma_t = 13.69P$

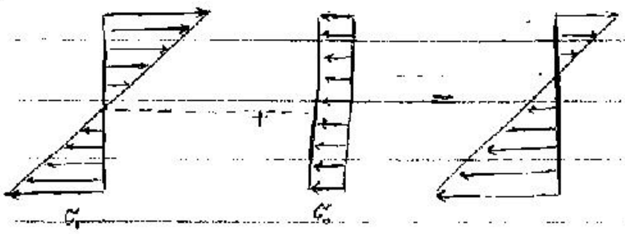
در جهت کششی → $\sigma_t =$ [illegible] P

هر کدام از این دو را مساوی σ_{allow} می‌گذاریم، P کمتر جواب مسئله است!

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

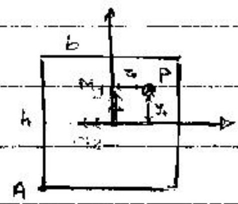
نمودار توزیع تنش



۸۷/۱۰/۳

مثال: بار P را در چه مسیری تغییر بدهیم که تنش در نقطه A همواره به صورت تابع مشخص (صفر) باشد. (P در ربع اول وارد می‌شود)

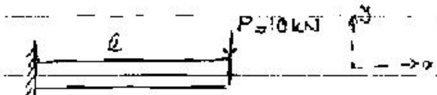
در این سؤال ناشناخته $\sigma = f(y,z)$



$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{\overset{Pz_0}{M_y} z}{I_y} - \frac{\overset{Py_0}{M_z} y}{I_z} \Rightarrow$$

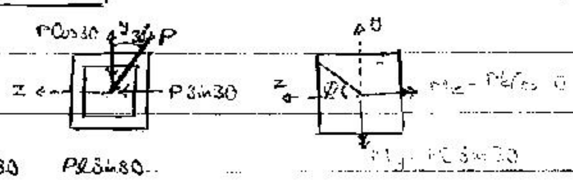
معادله محور خنثی: $\frac{1}{A} + \frac{z z_0}{I_y} + \frac{y y_0}{I_z} = 0$

$$\sigma_A = \sigma_0 = -\frac{P}{A} + \frac{P z_0(-b/2)}{\frac{1}{12} h b^3} - \frac{P y_0(-h/2)}{\frac{1}{12} b h^3}$$



مثال: یک تیر با سطح مقطع نشان داده شده، معادله تار خنثی؟

که مربع



ربع اول:

$$\sigma = \frac{\overset{P\ell\cos 30}{M_z} y}{I_z} - \frac{\overset{P\ell\sin 30}{M_y} z}{I_y} \Rightarrow$$

مربع جدار نازک $\rightarrow I_y = I_z = I$

معادله تار خنثی: $0 = \frac{P\ell\cos 30\, y}{I} - \frac{P\ell\sin 30\, z}{I} \Rightarrow \tan\varphi = 30°$

$\hookrightarrow y = \tan 30\, z$

SUBJECT : عناری ← ۳

Year : Month : Date :

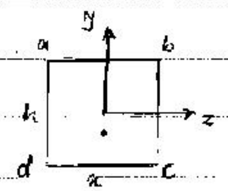
* هسته ← مکان هندسی نقاطی که اگر بار محوری P را روی آن نقاط اعمال کنیم تنش ناشی از نیروی P با
هم‌علامت تنش کل جوابی باشد.

معادله‌ی تار خنثی : $\frac{yy_0}{I_z}+\frac{zz_0}{I_y}+\frac{1}{A}=0$

(بازنویسی) $\rightarrow \frac{-y}{\frac{I_z}{Ay_0}} \quad \frac{z}{\frac{I_y}{Az_0}} = 1 \longrightarrow$ طول از مبدا $a=-\frac{I_y}{Az_0}$ عرض از مبدا $b=-\frac{I_z}{Ay_0}$

$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{Py_0y}{I_z} - \frac{Pz_0z}{I_y}$ $\qquad z_0=-\frac{I_y}{Aa} \qquad y_0=-\frac{I_z}{Ab}$

۱) اگر P در ناحیه اول باشد، تار خنثی از دوم و سوم و چهارم می‌گذرد. نسبت به مساحت تنش‌های وجود دارد برای
نقطه‌ی اثر P و محل تار خنثی!

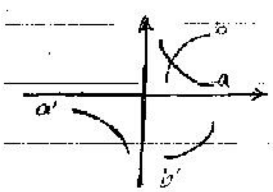


ab : $b=h/2$, $a=\infty$ $\Rightarrow y=\frac{-\frac{1}{12}xh^3}{xh\times h/2}=-h/6$, $z=0$

نقاط هر ضلع چند ضلعی محدب یک نقطه است.

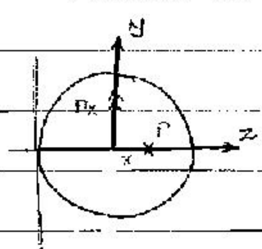
در مورد هسته رجوع شود به جزوه‌ی دکتر ناظمی ← نکات بسیار بسیار مفیدی ذکر شده!

اگر یک منحنی در ربع اول بود و تقعرش رو به بالا بود و عرض از مبدا و طول از مبداش مثبت بود، مرز هسته‌ی متناظر
در ربع سوم و با جهت تقعر مثبت خواهد بود. (منحنی a)



اگر در ربع اول بود ولی طول از مبدا و عرض مبدا تمام مماس‌هایی که بر
تمام نقاط آن رسم می‌شوند، همگی مثبت نبودند، مرز متناظر هسته با این
قسمت از جسم در ربع چهارم و با تقعر مخالف خواهد بود.

۲) دایره



$\sigma_{z=x} = -\frac{Px z}{I_y} - \frac{P}{A} \Rightarrow \frac{-Px(-R)}{\frac{\pi R^4}{4}} - \frac{P}{\pi R^2} = 0$

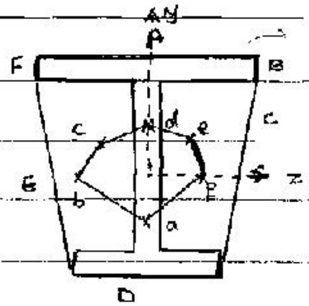
$\Rightarrow x = R/4$

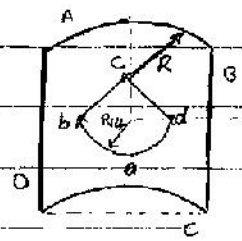
برای بیضی هم $\frac{1}{4}$ می‌شود!

SUBJECT :

Year : Month : Date :

first تمرین کن! ۵





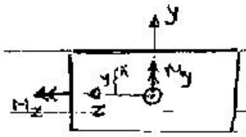
SUBJECT: 1 حل تمرین - مقاومت مصالح
Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/۱۰/۴

* مبانی توزیع تنش برشی در تیرهای منشوری :

خلاصه‌ای از خمش :

محور تقارن یکی از محورهای اصلی است.

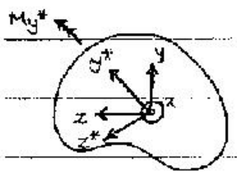


در حالتی که دستگاه اصلی منطبق بر دستگاه مختصات انتخاب شده باشد:

$$\sigma_{x_1} = \frac{-M_z y}{I_{zz}} \qquad \sigma_{x_2} = \frac{M_y z}{I_{yy}}$$

اگر تقارن نباشد ولی محور گشتاور از مبدأ مختصات انتخاب شده بگذرد که بر مرکز سطح منطبق باشد فرمول‌ها را برای نقاطی در ربع اول حساب می‌کنیم (همه جا مثبت باشد). اگر چیزی نزاین فرمول‌ها استفاده کنیم، برای همه جا برقرار است.

راستای اصلی ← *



$$\sigma_{x_A} = \frac{M_{y^*} z_A^*}{I_{y^*y^*}} \qquad \sigma_x = \frac{M_{y^*} z_A^*}{I_{y^*y^*}} - \frac{M_{z^*} y_A^*}{I_{z^*z^*}} = \frac{\bar M_y z_A}{I_{yy}} - \frac{\bar M_z y_A}{I_{zz}}$$

با استفاده از روابط زیر و یافتن $\bar M$ ها، گشتاورهای معادل را پیدا می‌کنیم که اگر دوران محورها هم در کار لحاظ شود، فایده این رابطه‌ها این است که به‌جای کلی محاسبات اضافی، گشتاورهای معادل سریع پیدا می‌شود.

$$\bar M_y = \frac{M_y + \frac{M_z I_{yz}}{I_{zz}}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_{yy} I_{zz}}} \qquad \bar M_z = \frac{M_z + \frac{M_y I_{yz}}{I_{yy}}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_{yy} I_{zz}}}$$

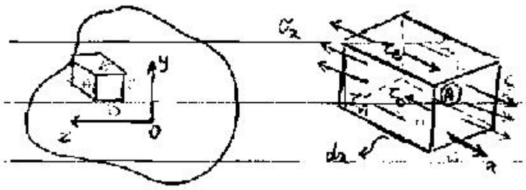
در تیرهای منشوری با جنس مرکب، تار خنثی حتماً از مرکز سطح می‌گذرد

جناب ژوراوسکی می‌گوید: اگر جسمی کلاً در حال تعادل باشد، هر جزء آن نیز باید در حال تعادل باشد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

یک المان جدا کنیم بیرون!



اگر بردار نرمال یک سطح در جهت مثبت یکی از محورها باشد

این سطح مثبت و هر برداری روی این سطح در جهت مثبت ... برای تنش τ در هر سطح المان آن را یکنواخت فرض کرده‌ایم

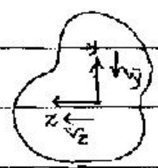
که هم جهت با یکی از محورهای مثبت باشد. و مقدار میانگین آن را نوشتیم.

تعادل را برای المان بنویسیم $\rightarrow \tau_A t_A\,dx + \tau_B t_B\,dx - \tau_C t_C\,dx - \tau_D t_D\,dx +$

$$\int_{(A)} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dA - \int_{(B)} \sigma_x\, dA = 0$$

ساده کنیم $\rightarrow \tau_A t_A + \tau_B t_B - \tau_C t_C - \tau_D t_D + \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA = 0$

می‌دانیم : $\sigma_x = \frac{\bar{M}_y z}{I_{yy}} - \frac{\bar{M}_z y}{I_{zz}} \rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial x} \frac{z}{I_{yy}} - \frac{\partial \bar{M}_z}{\partial x} \frac{y}{I_{zz}}$



برای ساده کردن جهت V و M، جهت‌ها را مانند M می‌گیریم ... از استاتیک داریم : $\frac{\partial M_y}{\partial x} = V_z$

$\frac{\partial M_z}{\partial x} = V_y$

ضرب خارجی کنید.

$$\frac{\partial \bar{M}_y}{\partial x} = \bar{V}_z = \frac{V_z + V_y \frac{I_{yz}}{I_{zz}}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_{yy} I_{zz}}}$$

این دو تا قبلی حالت ساده است، در حالت کلی $\bar{M}$ ها $\frac{\partial}{\partial x}$ ها ... داخل رابطه روی M ها اثر می‌کند. I ها ثابتند.

$$\frac{\partial \bar{M}_z}{\partial x} = \bar{V}_y$$

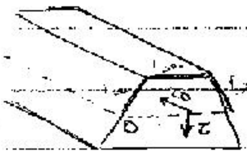
$$\Rightarrow \underbrace{\tau_A t_A + \tau_B t_B - \tau_C t_C - \tau_D t_D}_{\tau t} + \int \left(\frac{\bar{V}_z z}{I_{yy}} - \frac{\bar{V}_y y}{I_{zz}}\right) dA = 0$$

$$\Rightarrow \tau t + \frac{\bar{V}_z}{I_{yy}} \int z\, dA - \frac{\bar{V}_y}{I_{zz}} \int y\, dA = 0 \Rightarrow \tau t = \frac{\bar{V}_y Q_z}{I_{zz}} - \frac{\bar{V}_z Q_y}{I_{yy}}$$

که این همان رابطه ژوراوسکی است!

* اندازه تنش برشی τ : (اون τ های مجهول را باید برای سه وجه معلوم یا صفر کنیم تا جایی رو که می‌خوام بدست بیارم)

1) شرایط مرزی ... با استفاده از این شرایط τ روی ۳ سطح را پیدا می‌کنیم و ۴ امی بدست می‌آید.



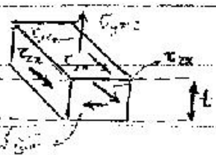
حالا دیگه تنش برشی روی صفحه مورد نظر رو هم داریم

باید به جوری برش بزنیم که با صفحه‌ای که تنش را در آن کار داریم سروکار پیدا کنیم.

فعلاً فقط با مقطع کار داریم، جهت τ بستگی به مساحتی دارد که برداریم.

راستای تنش برشی عمود بر خطی است که برش خورده.

2) جدار نازک (تنش دوبعدی یا یک بعدی)



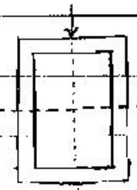
$$\sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0$$

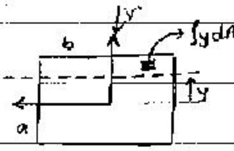
در صفحه عمود بر y — z (جهت)

وقتی در یک جهت ضخامت کم باشد، در آن جهت تمام تنش‌ها صفر است.

3) تحلیل تنش برشی :

تنش برشی روی صفحه تقارن بارگذاری صفر است.





$$\bar{V}_y = V_y = V \qquad \tau = \frac{VQ}{It} = \frac{VA\bar{y}}{It} = \frac{Vb(a/2 - y)(y/2 + a/4)}{(1/12\, ba^3)(b)}$$

t : طول برش

اینجا τ یک سهمی می‌شود برحسب y و ماکزیمم آن در تار خنثی اتفاق می‌افتد

زیرا اینجا $\frac{V}{It}$ ثابت است و Q هم در تار خنثی ماکزیمم می‌شود.

علامت Q هم بر اساس علامت [illegible] است.

راستای τ عمود بر راستای برش است، جهت τ از سمت Q^+ به سمت Q^- است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

STAEDTLER®

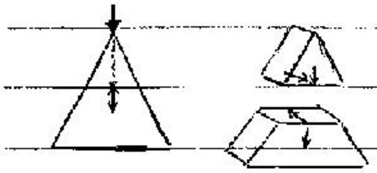
SUBJECT حل تمرین مقاومت مصالح ۳
Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/۱۰/۸

* برش زدن:
1) به گونه‌ای باشد که مقدار تنش برشی در سه وجه معلوم شود.
2) توضیحات مقداری پایین‌تر آمده!

عمود بر صفحه‌ی مقاطع برش می‌زنیم.
در موارد غیر جدار نازک، عمود بر راستای تنش برشی مقطع می‌زنیم.
جدار نازک: در راستایی که ضخامت کم است برش می‌زنیم.

بایستی گونه‌ای برش بزنیم که مقطع کاملاً جدا شود و در تعادل باشد.

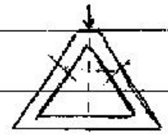


✓ تنش برشی همواره در راستای محور برش (در صفحه مقطع شده) می‌باشد.
✓ برش باید به گونه‌ای باشد که مقطع را به دو قسمت (جدا) تقسیم کند.

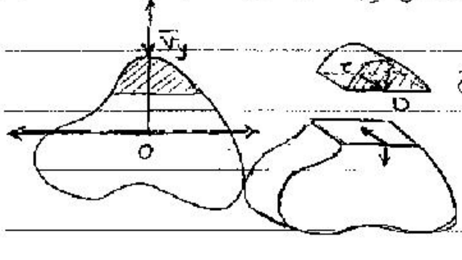
گاهی برای جدا کردن دو قسمت مجزای مقطع، لازم است دو جا مقطع بزنیم، در این موارد از نکات تقارن می‌شود استفاده کرد.

یکی از برش‌ها را جایی می‌زنیم که مقدار تنش برشی را در آن می‌خواهیم، دیگری را جایی می‌زنیم که تنش برشی را در آن بدانیم.

مثلاً اگر تقارن داشته باشیم که در صفحه‌ی تقارن تنش برشی صفر است.
یا مثلاً در شکل زیر بنا به تقارن، تنش هر دو مقطع با هم برابر است.



توضیحات قسمت 2) مقاطع جدار نازک بسته متقارن → 1) مقطع را از نقاط واقع بر صفحه‌ی تقارن می‌بریم و تنش آنجا را صفر قرار می‌دهیم.
2) از دو نقطه متناظر، برش زده و طول برش را دو برابر ضخامت در آنجا قرار می‌دهیم.



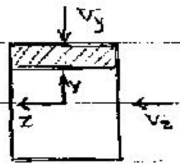
* جهت برش:
1) استفاده از جهت محورها (سطوح مثبت و منفی) در رابطه‌ی بدست آمده برای τ!
2) جهت همواره از Q^+ به سمت Q^- است. (با توجه به محور عرضی معرفی شده)

STAEDTLER

این شکل فرمول‌های تنش، حالت استاندارد دارد $\tau = \frac{V_y Q_z}{I_{zz} t} + \frac{V_z Q_y}{I_{yy} t}$

SUBJECT :

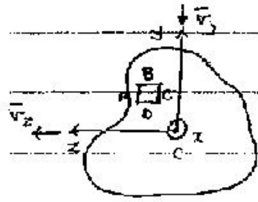
Year (   ) Month (   ) Date (   )



اگر چنانچه نیروی برشی داشته باشیم، تنش برشی از هر کدام در مقطع مورد نظر را به تنهایی حساب می‌کنیم و بنا به اصل برهم‌نهی، علامت‌ها را چک می‌کنیم.

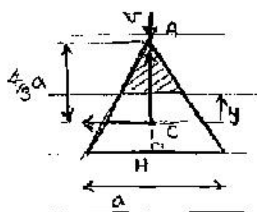
برای بخش (۱) در تعیین جهت برش از فرمول زیر باید استفاده کنیم که حالت برداری دارد.

$$\tau_A t_A - \tau_C t_C + \tau_B t_B - \tau_D t_D = \frac{\bar{V}_y Q_z}{I_{zz}} - \frac{\bar{V}_z Q_y}{I_{yy}}$$



τ در این صفحه به خاطر تأمین نیروی لازم برای نگه داشتن المان های تیر به هم کمک می‌کند. گاهی این نیرو توسط عوامل دیگری تأمین می‌گردد.

مثال ۸: در چه نقطه‌ای تنش برشی max می‌شود و مقدار max آن چیست؟



$AH = 2a$

$\bar{V}_y = V$

$$\bar{y} = \frac{(\frac{4}{3}a - y)}{3} + y = \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}y$$

مساحت مثلث کوچک $A_y = \left[\frac{(\frac{4}{3}a - y)}{2a}\right]^2 \left(\frac{1}{2}(2a)a\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}a - y\right)^2$

به نسبت تشابه

$Q_z = A_y \bar{y} = \dots$

$I_{zz} = \frac{1}{36}(a)(2a)^3$

$t = \left(\frac{\frac{4}{3}a - y}{2a}\right) a$

$$\Rightarrow \tau(y) = \frac{VQ_z}{t I_{zz}} =$$

$$\frac{d\tau(y)}{dy} = 0 \Rightarrow y = \dots \Rightarrow \tau_{max} =$$

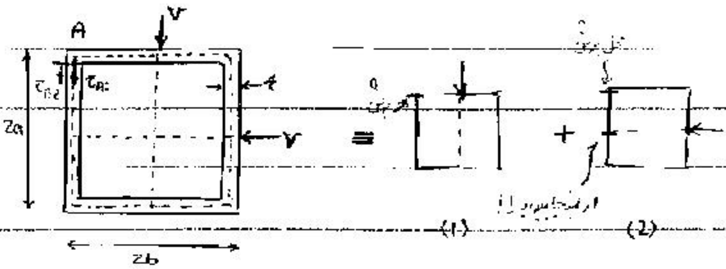
$$k = \frac{\tau_{max}}{\tau_{ave}} = \frac{\tau_{max}}{V/A} =$$

مساحت سطح مقطع

SUBJECT: ۲ حل تمرین مقاومت مصالح

Year ( ) Month ( ) Date ( )

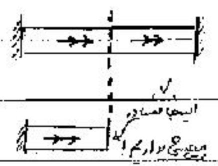
① تنش برشی در A ؟



صفحه‌ی تقارن فیزیکی برای نیروها عمل آینه‌ای می‌کند و برای گشتاورها برعکس عمل می‌کند (عمل آنتی آینه‌ای می‌کند)

در یک مسئله متقارن، مقدار نیروی برشی پیوسته در صفحه تقارن صفر است.

" " ، اگر گشتاور پیچشی پیوسته باشد مقدار پیچش در صفحه تقارن صفر است.



(1) $\tau_{A_1} = \dfrac{V(a-\overbrace{\tfrac{t}{2}}^{\text{صرفنظر}})bt}{I_{zz}\,t}$

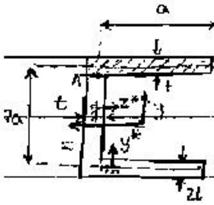
$I_{zz} = 2\left[\frac{1}{12}t\times(2a)^3\right] + 2\left[\underbrace{\frac{1}{12}(2b-2t)(t)^3}_{\text{صرفنظر}} + (2b-\underbrace{2t}_{\text{صرفنظر}})t\,(a-\underbrace{t/2}_{\text{صرفنظر}})^2\right]$

(2) $\tau_{A_2} = \dfrac{V Q_{yy}}{I_{yy}\,t}$

$Q_{yy} = (at)b$

۸۷, 10, 9

* نیروی برشی قائم بر سطح مقطع روبرو وارد شده است. تنش برشی در نقطه A را بدست آورید.



$\bar{y}^*_c = \dfrac{\sum \bar{y}^*_i A_i}{\sum A_i} = \dfrac{a\times(2at)+(2a)(at)}{at+2at+2at} = \frac{4}{5}a$

$\bar{z}^*_c = \dfrac{\sum \bar{z}^*_i A_i}{\sum A_i} = \dfrac{(2at)\,a/2 + at\times a/2}{5at} = \frac{3}{10}a$

حال مبدا دستگاه‌ها را در این مختصات مرکز سطح قرار می‌دهیم

STAEDTLER

SUBJECT :
Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$I_{yz} = (-0.2a)(\tfrac{6}{5}a)(at) + (-0.7a)(-\tfrac{4}{5}a)(2at) + (0.3a)(\tfrac{1}{5}a)(2at)$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}ta^3 + (at)(0.2a)^2 + \frac{1}{12}2ta^3 + (2at)(0.2a)^2 + \frac{1}{12}2at^3 + (2at)(0.3a)^2$$

+ توان بزرگ ≃ ۰

$$I_{zz} = (at)(6/5\,a)^2 + (2at)(4/5\,a)^2 + \frac{1}{12}(2a)^3 t + (2at)(1/5\,a)^2$$

$$\bar{V}_y = \frac{V_y - V_z \frac{I_{yz}}{I_{yy}}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_{yy} I_{zz}}} \quad , \quad \bar{V}_z = \frac{V_z - V_y \frac{I_{yz}}{I_{zz}}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_{yy} I_{zz}}}$$

A, B, C, D

$$-\underbrace{\tau_0 t_0}_{A \text{ نقطه شروع}} = \frac{\bar{V}_y Q_z}{I_{zz}} - \frac{\bar{V}_z Q_y}{I_{yy}} \quad , \quad Q_z = (at)(\tfrac{6}{5}a) \quad , \quad Q_y = (at)(-0.2a)$$

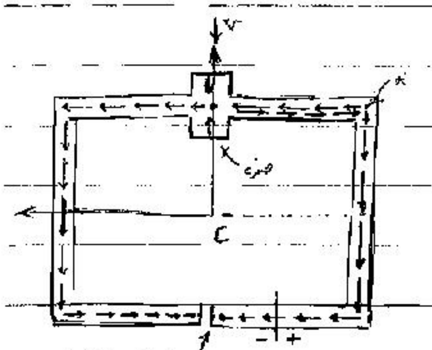
▲

* جریان برشی q :

$$dF = \tau(t\,dx) \rightarrow \frac{dF}{dx} = \tau t = q$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = q$$

جریان برشی q ⇒ $F = \int q\,dx = \int \underbrace{\tau t}_{V}\,dx$



(8) این شکل متقارنه!

برای رسم جریان برشی از جای شروع می‌کنیم که τ را داشته باشیم

در نقطهٔ * ممکن بود τ صفر نبود چون بسته است

جای علامت تفاوت کرد، جاهایی را در نظر گرفتیم که

آنقدر بسته شد که q صفر شود. ممکن بود اصلاً تغییر جهت نده!

یعنی به احتمال زیاد تغییر جهت می‌دهد یعنی در واقع به خاطر تقارن می‌توانیم بگوییم که اصلاً تغییر جهت نمی‌دهد

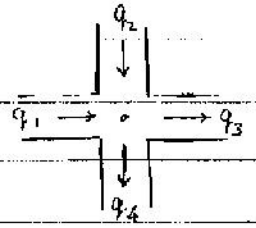
همین طوری که می‌شه تا به جایی برسد ولی تغییر جهت می‌ده!

از قضیه‌ای که درس دادیم باید برای تشخیص جهت استفاده کنیم

SUBJECT : حل تمرین مقاومت مصالح ۵
Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/۱۰/۱۱

* پیوستگی جریان برشی :

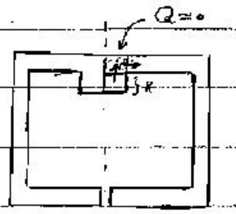


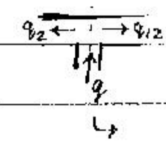
مجموع جریان های برشی ورودی با مجموع جریان های خروجی برابر است.
این قانون مربوط به گره است.

$$\sum q_i = \sum q_o$$

Here : $q_1+q_2=q_3+q_4$

این ناحیه‌های ۴ راه مانند، دارای توزیع تنش برشی پیچیده‌ای است، چون مثلاً اگر مثال جعبه‌ی قبل را در نظر بگیریم و فقط یک بخش از آن را به صورت جزئی در نظر بگیریم، یک طرف المان بسیار کوچک ما صفر است (Q صفر است) ولی در ضلع مقابل المان مقدار قابل ملاحظه‌ی $q_{/2}$ را دارد (نصف شده، چون نصف سطح مقطع را گرفتیم) چرا و چگونه این طور است؟





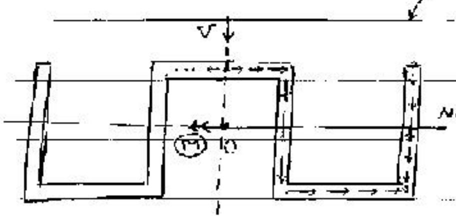
این q مستقل از (هم) تحلیل روی ۴ راهه! بلکه تنها به طول قسمت * بستگی داره! هرچی سمت که بزرگ باشه، باید به وسیله‌ی دو ضمیمه که $q/2$ می‌آیند تحمل شود.

تذکر!

از قانون Q مثبت و منفی استفاده می‌کنیم

از شرایط تقارن در نقاطی که در آنها τ صفر است، استفاده می‌کنیم

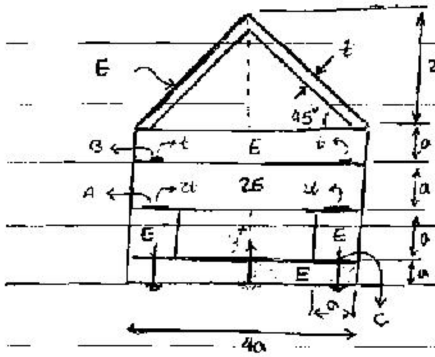
اگر برای نقطه‌ای شک داشتیم، با حل عددی و گرافیکی هم برای Q درباره‌ی جهت جریان برشی قضاوت می‌کنیم

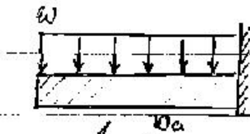


اگر گشتاور M هم علاوه بر نیروی برشی V به مقطع در مرکز سطح وارد شود، مقادیر مقطع به هم نمی‌خورد. از این رو می‌توان توجیه کرد: M را به صورت مجموع ۲ تا $\frac{M}{2}$ بنویسیم که به Q وارد می‌شوند و در نتیجه با توجه به فاصله‌ی ذکر شده برای تقارن تنش‌های عمودی است، باید توان M را به صورت کوپل نیروی متساوی تحلیل کنیم، اگر در نظر بگیریم. اما اینجا M در تنش محوری تأثیر دارد نه برشی!

SUBJECT

Year (   ) Month (   ) Date (   )





حالا هم بارگسترده را طوری جوش کنید منهدم نشود

حساب پیچ G_c و دو جوش حالا

فاصله‌ی دو پیچ در طول تیر از هم $= \frac{a}{2}$

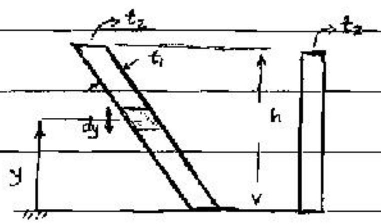
$\tau_{\text{مقطع جوش}} \leq \tau_{all}$, $\tau_{\text{پیچ } G_c} < \tau^*_{all}$

هر وقت چند جنس مختلف داشتیم، برای پیدا کردن تار خنثی و مرکز سطح Σ ها را باید E ها وزن‌دار کنید.

$$\bar{y}_c^* = \frac{\sum A_i \bar{y}_i^* E_i}{\sum A_i E_i}$$

$$\bar{y}_c^* = \left[4a^2E\left(\tfrac{a}{2}\right) + 2a^2E\left(\tfrac{3a}{2}\right) + (4a^2)\left(\tfrac{5a}{2}\right)(2E) + (4a^2)\left(\tfrac{7a}{2}\right)E + (2)(2at\sqrt{2})(5a)E\right] \Big/ \sum A_iE_i$$

$$\sum A_iE_i = 4a^2E + 2\times a^2E + 4a^2\times 2E + 4a^2E + 2\times(t\sqrt{2})(2a)E$$



برای محاسبه‌ی ممان اینرسی مقاطع جدار نازک کج:
آن قسمت‌ها را محور هر محور ممان لبی است ثابت نگه می‌داریم
دیگر مستقل هم ارتفاع با مقطع کجی می‌سازیم به جای
که مساحتش ثابت بماند!

$$dI = y^2 t_2\, dy$$

$$I = \int_0^h y^2 t_2\, dy = t_2 \frac{h^3}{3}$$

$$Q = \int_0^h y t_2\, dy = t_2 \frac{h^2}{2}$$

همان حول محور پایینی $\longrightarrow \frac{1}{12} h t_2^3 + (h t_2)(h/2)^2 = \frac{1}{3} t_2 h^3$

$I_{equal} = \sum I_i E_i \Big|_{\text{حول مرکز سطح}}$ درسته واحدش نمی‌خونه و دیمانسیون درست نیست ولی جواب درسته چی رو ه!

$\left[\frac{1}{12}(4a)a^3 + 4a^2(2.5a - \bar{y}_c^*)^2\right](2E)$ مثلاً برای قسمت 2E

STAEDTLER

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲
Year ( ) Month ( ) Date ( )

حالا با خیال راحت می‌توانیم برای هر مقطع بنویسیم: $\tau = \frac{VQ_e}{I_e t}$ البته باید Q رو هم وزن‌دار بنویسیم:

$$Q_e = \sum Q_i E_i$$

چون V و I ثابت هستند وقتی τ_{max} را می‌خواهیم باید $\frac{Q_e}{t}$ را max کنیم.
چون برش باعث fail شدن می‌شود τ است که اگر از یک حدی بیشتر شود، جسم منهدم می‌شود.

در این مثال حتی V هم برای هر مقطع در طول تیر متفاوت است، پس اول مقطعی را پیدا می‌کنیم که V در آن max باشد. اینجا مقطع انتهایی بیشترین V را دارد و اگر fail شدنی در کار باشد، اول اینجا اتفاق می‌افتد.

مقطع بحرانی کجاست؟ جایی که V max می‌شود. $V_{max} = wl = 10aw$

τ ای که ما حساب می‌کنیم با $\frac{VQ}{It}$ در واقع نیرویی را تأمین می‌کند که اون دو حالت مقابل جا می‌مانند. اگر گوشت تیر را ببریم، اون نیروی برشی که در نظر می‌گیریم وظیفه‌اش تولید τ بوده و اگر چسب می‌زنیم و یا پیچ می‌بندیم وظیفه‌ی تولید τ را اون‌ها دارند.

در $\frac{VQ}{It}$، t طول برشی ناحیه‌ای است که τ را تأمین می‌کند.

اتصالات:
- چسب (یا خط جوش): → τ از همان $\frac{VQ}{It}$ محاسبه می‌شود.
- میخ (یا پیچ): → F → $\tau = \frac{F}{A_{میخ}}$

چون y_c^* از بالا شد و + و − بودن تنش چندان مهم نیست و بیشتر با مقدار تنش کار داریم، نیازی نیست + − ها حساسیت نشون بدیم:

وقتی همیشه $\bar{y}_c^*$ را می‌نویسیم، خودش مثبت منفی را کنترل می‌کند!

خط جوش، طول 2t: $Q_A = (4a^2)(\bar{y}_c^* - a/2)E + (a^2)(\bar{y}_c^* - \frac{3a}{2})E$

طول برش → 2t ✓ $\Rightarrow \tau_A = \frac{(10wa)Q_A}{I_e \cdot (2t)}$

$$Q_B = Q_A + 2E(\tfrac{1}{2} 4a^2)(\bar{y}_c^* - 2.5a)$$

$$\tau_B = \frac{(10wa)Q_B}{I_e(t)}$$

STAEDTLER

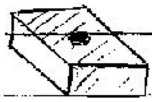
SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

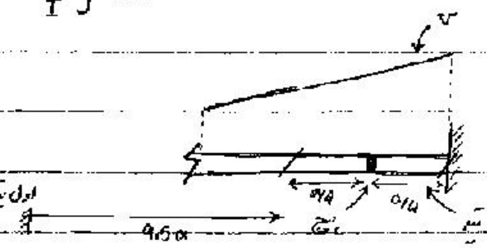
$$\max\{|\tau_a|, |\tau_b|\} = \underset{\text{چسب}}{\tau_{max}} \leq \tau_{all}$$

$$\Rightarrow w = \boxed{}$$ ✓

برای میخ هم به کمینه‌سازی آمدیم و مقدار min این دو ω، پاسخ مسئله است.



$$F = \int q\,dx = \int \frac{VQ}{I}\,dx \longrightarrow F = \frac{Q}{I}\int V(x)\,dx$$



$$\Rightarrow F = \frac{Q}{I}\int_{9.5a}^{10a} V(x)\,dx$$

$$Q_c = \left(\tfrac{1}{2}4a^2\right)\left(\bar{y}_c^* - \tfrac{a}{2}\right) E$$

$$\underset{\text{میخ}}{\tau_{max}} = \frac{F_{max}}{A} \leq \tau_{all}^*$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \boxed{}$$

۸۷/۱۰/۱۵

✓ وقتی I حول هر سه محور یکی باشد، I حول هر محور دلخواهی هم همان است (مکعب، کره)

✓ اگر I حول دو محور یکی باشد، در آن صفحه حول هر محور دلخواهی هم همان است (مربع، دایره)

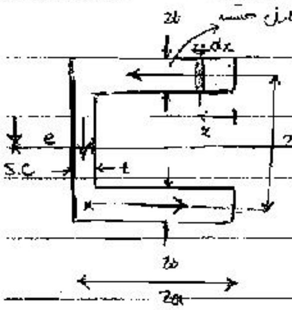
* مرکز برش: وقتی مقطع تحت خمش و برش قرار می‌گیرد، تنش‌های برشی به وجود آمده در مقطع معادل یک نیروی برشی هستند که در یک نقطه‌ای خاص وارد می‌شود. این نقطه همان مرکز برش است. اگر از یک دید دیگر نگاه کنیم (برعکس) در واقع نقطه‌ای است که اگر نیروی برشی در آن وارد شود، دیگر پیچش در مقطع نداشته باشیم و مجموع گشتاورها

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۱

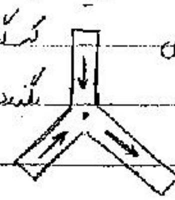
Year | Month | Date |

در مسائل مقاومت لنگر دلخواه یک سر آزاد نیست (با حل معادلات داریم) $\Sigma M = 0$ و معادله همه ...
چون استاتیکی داریم، برای پیدا کردن reaction ها از آن در معادلات کمک می‌گیریم

برای تحلیل مقاومتی، تغییر اشکال و جابجایی بردارها مجاز نیست و اگر این کار را بکنیم در حالتی است که تقریب داریم و نتیجه ابعاد مقطع هم نسبت به طول کوچک است.



با $\Sigma F_y = 0$ نوشتن، فشار نیروی معادل پیدا می‌شود.
مهم نیست مرکز برش را کجا در نظر بگیریم، هر جا که بگیریم
با جبری نوشتن مجموع گشتاور حاصل از
تنش های برشی، محل درست آن مشخص می‌شود
دقت کنید که گشتاور حاصل از نیروی معادل باید برابر با
گشتاور معادل تنش های برشی باشد تا آن ها را خنثی کند.
در این مسئله ما متقارن نیستیم که می‌توانستیم محور تقارن را مرکز برش فرض کنیم
مثلاً در حالت شکل که گشتاور همه تنش ها حول این نقطه صفر است، می‌توانیم راستای V هم
با آن نقطه بگذریم تا گشتاور برش صفر شود.



در عبارت $\frac{VQ}{It}$ ، I با t است، حساب کنیم ولی برای Q با order t^2 پیش می‌رویم!!

حالا حل مثال:

$Q(x) = (2tx)a \Rightarrow q(x) = \frac{VQ(x)}{I}$

$dF(x) = (2t)dx\,\tau = q(x)dx$

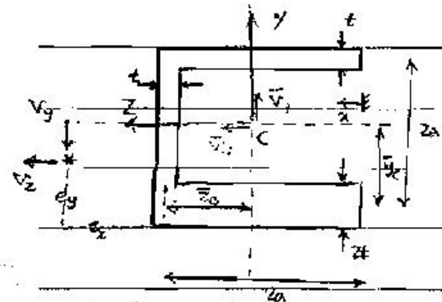
$dM = h\,dF = h\,q(x)dx \Rightarrow M = \int_0^{2a} h\,q(x)\,dx$

معادل گشتاورها $Ve = \int_0^{2a} \frac{(2a)V(2t)ax}{I}dx \Rightarrow e = \left(\int_0^{2a} x\,dx\right)\frac{4a^2t}{I} \Rightarrow e = \frac{8a^4t}{I}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در این مثال منظورمان همینه که نیروی معادل محوری ست ولی در حالت کلی باید یک بار یک نیروی افقی در نظر بگیریم و محاسبات را انجام دهیم و فاصله‌ی نیروی افقی بدست می‌آید (یک مکان هندسی) و یک بار هم نیروی عمودی را در نظر بگیریم و محل تقاطع این دو خط مرکز برش را پیدا کنیم. (به کتاب مراجعه کنید!)



الگوریتم کارها:

1) مرکز سطح را بدست می‌آوریم

2) ممان‌های دوم سطح را نسبت به دستگاه نشان داده شده، محاسبه می‌کنیم (I_{zz}, I_{yz}, I_{yy})

3) $\bar V_y$ و $\bar V_z$ را بدست می‌آوریم

4) نسبت به دستگاه جدید، موقعیت مرکز برش را با دو پارامتر (e_z و e_y) فرض می‌کنیم. (نقطه نشانگری)

5) یک بار V_y بر مقطع که از نقطه مرکز برش عبور می‌کند و تعادل گشتاورها را در نظر می‌گیریم (معادله اول) بار دیگر V_z بر مقطع و آن را از مرکز برش در نظر گرفته و معادله دوم را از تعادل گشتاورهای مقطع بدست می‌آوریم.

به علت کمی وقت از مرحله 4 به بعد را الان می‌نویسیم!

$M_{\text{نیروی برشی}} = \int l\, q_1(x)\, dx$

اول فرض می‌کنیم مقطع یک V_y وارد شود!

$\underbrace{\tau_A t_A}_{q_1(x)} = \frac{\bar V_{y_1} Q_z}{I_{zz}} \quad \frac{\bar V_{z_1} Q_y}{I_{yy}}$

$Q_z = (tx)(2a - \bar y_c)$

$Q_y = \left(\left[(2a - \bar z_c - x) + (2a - \bar z_c)\right]/2\right)(tx) \times (-1)$! منفی برای مشتق

$V_y e_z = \int (2a)\, q_1(x)\, dx \Rightarrow e_z = \checkmark$

حالا فرض می‌کنیم مقطع یک V_z وارد شود!

$M_{\text{ناشی از نیروی برشی در اثر } V_z} = \int l'\, q_2(x)\, dx$

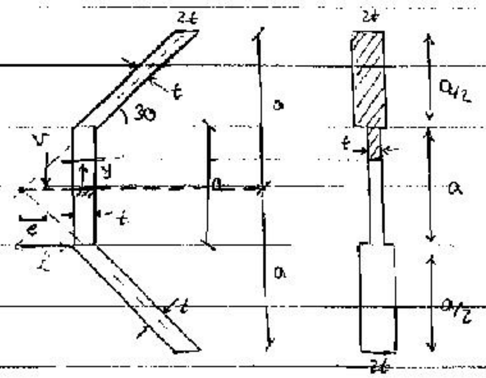
$q_2(x) = \frac{\bar V_{y_2} Q_z}{I_{zz}} - \frac{\bar V_{z_2} Q_y}{I_{yy}} \quad ; \; l' - l$

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۵

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$V_z e_y = \int_0^{2a} (2a)\, q_z(x)\, dx \Rightarrow e_y = \checkmark$$

▲



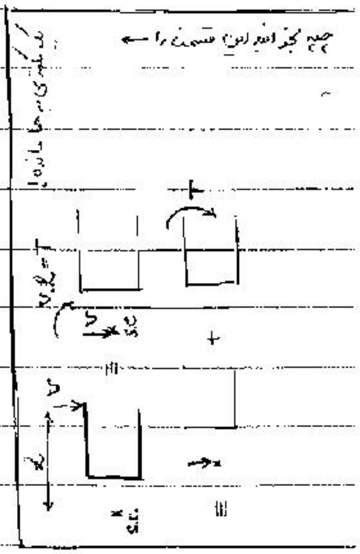
$$I_{zz} = \left[\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\right)^3(2t) + \left(\frac{a}{2}\times 2t\right)\left(\frac{3a}{4}\right)^2\right]\times 2 + \frac{1}{12}a^3 t = \dots$$

$$Q(y) = \left(2t\times \frac{a}{2}\right)\left(\frac{3a}{4}\right) + \left(\frac{a}{2}-y\right)t\left(\frac{a/2+y}{2}\right)$$

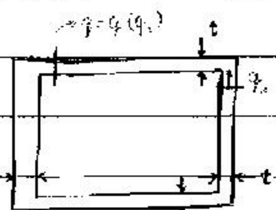
$$L = \frac{a}{2}\cot 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$q(y) = \frac{VQ(y)}{I_{zz}}$$

$$dM = L\, q(y)\, dy \Rightarrow Ve = \int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\frac{VQ(y)}{I_{zz}}\, dy \Rightarrow e = \checkmark$$



▲



* جدار نازک بسته :

در اینجا دیگر جدار باز نیست که q صفر چند نقطه را با توجه به شرایط مرزی داشته باشیم.
برای پیدا کردن مرکز برش در جدار بسته‌ها، باید دو معادله داشته باشیم. اول برای یک
نقطه یک q فرض می‌کنیم ($q=q_0$) و q ی بقیه نقاط را با توجه به این q بدست
می‌آوریم. اما با این کار، علاوه بر مرکز برش، q_0 هم مجهول است. معادله‌ی دوم عبارتست
از $\oint \frac{q}{t} ds = 0$ که q هر نقطه را بر t همان نقطه تقسیم می‌کند و روی محیط مقطع را
می‌پیماید، انتگرال می‌گیرد. معادله‌ی اصلی که داشتیم همان معادله‌ی تعادل گشتاوری
است. برای اثبات رابطه‌ی ذکر شده، باید رابطه‌ای برای پیچش بسته بیاوریم و مساوی صفر
قرار دهیم.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2A}\oint \frac{q}{Gt}\, ds = 0$$

STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

* تبدیلات تنش و کرنش

یک تانسور n بعدی به n+1 پارامتر نیاز دارد برای مشخص شدن!

تانسور تنش در صفحه‌های مختلف فرق دارد ولی با داشتن آن برای یک صفحه‌ی مشخص، می‌توان آن را برای صفحات دیگر هم مشخص نمود. که تانسور دو بعدی است.

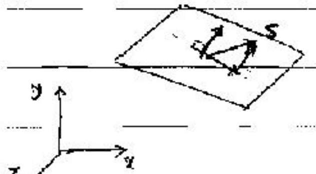
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} ; \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

تانسور تنش در یک نقطه

اگر در یک نقطه از یک صفحه‌ی خاص، حالت تنش را داشته باشیم، دو کار می‌توانیم انجام دهیم:

بردار تنش را در دو راستای موازی و عمود بر بردار نرمال صفحه تصویر کنیم

به این ترتیب که می‌توانیم ببینیم در چه صفحه‌ای بردار نرمال max است یا تنش برشی max است ولی لزوماً هیچ کدام از بردارهای τ_{xy} و τ_{xz} و ... را نمی‌دهد.



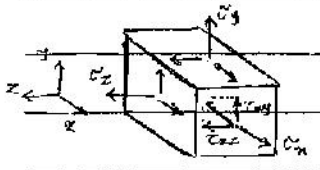
و داریم:

$$S = [\sigma_{ij}] \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} ; \quad \vec{n} = [l, m, n]^T$$

که بردار تنش در صفحه $\vec{n}$

به دایره‌ی مور در واقع ما یک صفحه‌ی اصلی را پیدا کرده‌ایم (یعنی $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) و آن را صفحه‌ی z در نظر گرفته‌ایم و حالا این تبدیل پیچیده‌ی سه‌بعدی را با یک تبدیل ساده‌تر دو بعدی که همان دایره‌ی مور باشد جابجا کرده‌ایم. دایره‌ی مور هم در واقع مکان هندسی صفحات مختلفی است که روی آن‌ها تنش‌ها را می‌خواهیم محاسبه کنیم.

۲۱، ۲۵، ۸۷



$$[\sigma] = \left[\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} \right]$$

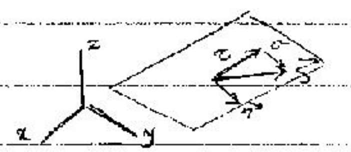
بردار تنش در صفحه x — بردار تنش در صفحه y — بردار تنش در صفحه z

اگر تانسور تنش را مثلاً در $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ که در واقع بردار نرمال صفحه‌ی x است ضرب کنیم، مؤلفه‌های تنش در صفحه‌ی x را به ما می‌دهد.

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح 4

Year: Month: Date:

ما قبلاً برای تانسور تنش در یک المان در صفحات موازی محورها، مولفه‌های تنش را داشتیم حال می‌خواهیم در صفحه‌ای که ما انتخاب می‌کنیم.



$$S = [\sigma]\vec{n} = [\sigma]\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{\sigma} = (\vec{S}\cdot\vec{n})\vec{n}$ بردار تنش نرمال صفحه مورد نظر در مختصات xyz

$\vec{\tau} = \vec{S} - (\vec{S}\cdot\vec{n})\vec{n}$ بردار تنش برشی در صفحه در مختصات xyz

$\|\vec{\sigma}\| = \vec{S}\cdot\vec{n} = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{yz} mn$

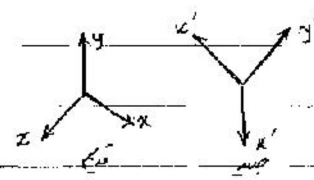
برای پیدا کردن صفحاتی مهم است که تنش‌های نرمال در آنها max می‌شود: (برای طراحی)

$\|\vec{\sigma}\|$ بیشینه باشد $\Rightarrow$ تنش S باید موازی $\vec{n}$ باشد $\Rightarrow \frac{S_x}{l} = \frac{S_y}{m} = \frac{S_z}{n}$

$\Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \sigma_p$ تنش‌های اصلی

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_p & \text{مقادیر ویژه تانسور تنش} \\ \vec{n} & \text{بردار ویژه} \end{cases}$$

تبدیل از دستگاه مختصات قدیم به جدید



$$T = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & \square & \square & \square \\ y' & \square & \square & \square \\ z' & \square & \square & \square \end{array}$$

کسینوس‌های هادی

حل بردار جسم $[V]_{x'y'z'} = T \times [V]_{xyz}$ برای تانسور مرتبه یک

برای تانسور مرتبه ۲ $[\sigma]_{x'y'z'} = T \times [\sigma]_{xyz} \times T^t$

STAEDTLER

تانسور مرتبه صفر اسکالر

SUBJECT :

Year : Month : Date :

حداکثر تنش برشی در صفحه‌ی تنش‌های اصلی رخ می‌دهد و برای حداکثر آن داریم:

$$\vec{\tau} = (\vec{S}) - (\vec{S}.\vec{n})\vec{n} \Rightarrow \|\vec{\tau}\| = \left[\|\vec{S}\|^2 - (\vec{S}.\vec{n})^2\right]^{1/2}$$

در حالت کلی خیلی طولانی می‌شود

دستگاه را بر محورهای اصلی بیان می‌کنیم

$$\vec{S}.\vec{n} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 l \\ \sigma_2 m \\ \sigma_3 n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\vec{\tau}\| = \left[\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2\right]^{1/2}$$

با مشتق‌گیری و نوشتن دستگاه معادلات و حل آن، بردارهای نرمال صفحاتی که در آن‌ها τ max است، به صورت زیر بدست می‌آیند.

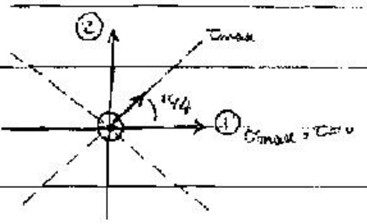
$\left[0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$\left[\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$ (*)

$\left[\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

با وجودی که ۱۲ تا بردار بدست آوردیم، ولی در واقع ۳ تا هستند چون از یک جهت، دو تا بردار نرمال مخالف هم جهت یکی حساب می‌شوند. انتظار هم داشتیم τ در دو صفحه‌ی مقابل شکل برابر است.

مثلاً بردارهای (*) صفحات زیر را مشخص می‌کنند



در نتیجه داریم:

$$\tau_{max} = \mathrm{Max}\left\{\left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right|\right\} \rightarrow$$

از آنجا که محورهای اصلی را به گونه‌ای نامگذاری می‌کنیم که $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ انتظار هم بیشتر بدست می‌آید:

$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ برقرار

اساس بحث دایره موهر این است که یکی از محورهای اصلی (یعنی در صفحه محور برای تنش‌های صفحه‌ای) را داریم، دو محور دیگر را آنقدر دوران می‌دهیم و می‌چرخانیم تا دو محور و صفحه‌ی اصلی دیگر را پیدا کنیم.

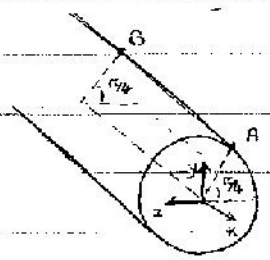
STAEDTLER

SUBJECT : حل تمرین - مقاومت مصالح ۱۵
Year ( ) Month ( ) Date ( )

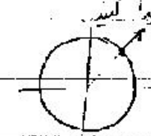
تبدیل تنش را براساس معادل الحاق و تبدیل کرنش را براساس رابطه هندسی می‌نویسیم. پس اینها رفتاری به جسم ندارند و مستقلند.

شکل اصلی قانون هوک به صورت $[\sigma]_{6\times1} = [Q]_{6\times6}[\varepsilon]_{6\times1}$ است که $[Q]$ تانسوری از خواص ماده در دستگاه مختصات مشخص شده است. از آنجا که با دوران دستگاه $[\sigma]$ و $[\varepsilon]$ هر طور مستقل تغییر می‌کنند، لزومی ندارد که $[Q]$ ثابت بماند. ولی اگر خواص ماده به جهت بستگی نداشته باشد و ایزوتروپیک (همسانگرد) باشد $[Q]$ با دوران دستگاه مختصات ثابت می‌ماند. ما روی ایزوتروپیک دو ثابت داریم E و ... البته در مواد غیر ایزوتروپیک مقدار $G = \frac{E}{2(1-\nu)}$ ... Q تنها 21 پارامتر دارد.

مثال ۵: فرض کنید محیط مطابق شکل داریم که تحت فشار یکنواخت P قرار گرفته است. شرایط مرزی را در نقاط A و B پیدا کنید.



از روبرو ببینیم → اول B را بررسی می‌کنیم →



$$\vec{S} = [\sigma]\,\vec{n}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} , \quad \vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{P\sqrt{2}}{2} \\ \frac{P\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{P\sqrt{2}}{2} \\ \frac{P\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \tau_{xy}\sqrt{2}/2 - \tau_{xz}\sqrt{2}/2 \\ -P\sqrt{2}/2 = \\ \dots \end{cases}$$

در نقطه A می‌توانیم که یا مرای صفحه‌ای مثل همین که برای B نوشتیم بنویسیم، یک بار هم برای صفحه‌ی عمود بر x.

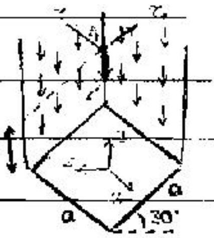
$$S_A = [\sigma_A][n_A] \Rightarrow \begin{bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [\sigma_A]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

در این مثال ارتباط بین اعضای تانسور تنش را می‌خواستیم، تا برای حل مسئل دیگری به عنوان شرایط مرزی لحاظ کنیم. در اینجا کاری با حل مسئله نداریم، هر چیزی رو که می‌بینیم می‌نویسیم.
مثلاً در یک مسئله تنش max در یک نقطه را می‌خواهیم. قبل از تحلیل مسئله این شرایط را بدست می‌آوریم، بعد وارد می‌شویم.
از این حرف‌ها (هر چیزی که از اول ترم خواندیم را به کار می‌گیریم برای تحلیل تنش). حالا با زاویه
صفحه و تحلیل‌هایی که یاد گرفتیم، max را پیدا می‌کنیم.

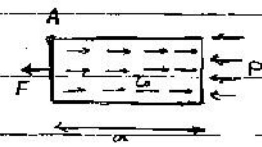
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

⑪ یه مکعب تحت یک فشار هیدرواستاتیکی $\tau = P$ داریم. روی وجوه جانبی‌اش هم تنش برشی τ_0 داریم. اصلاً با سرعت از روش دوران، تنش‌ها در نقطه A نسبت به xyz، تنش‌ها و صفحات اصلی و هر چیز دیگری که می‌خواهیم:



چون از این دستگاه تعمیم به A که بدیهیست !!

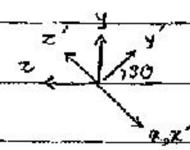


$$F = \tau_0(4a^2) - Pa^2 = 3a^2P$$

$$\sigma_A = \frac{F}{A} = \frac{3a^2P}{a^2} = 3P$$

دستگاه مختصات $x'y'z'$ را در A قرار داده‌ایم. می‌خواهیم تانسور تنش در A با توجه به این دستگاه را پیدا کنیم.

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} 3p & \tau_0 & \tau_0 \\ \tau_0 & -P & 0 \\ \tau_0 & 0 & -P \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$T = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x' & y' & z' \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[\sigma]_{xyz} = T \times [\sigma'] \times T^t = P\begin{bmatrix} 3 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حالا از معادله ویژه استفاده می‌کنیم

$$\sigma_p = P\begin{Bmatrix} 3.44 \\ -1.44 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

این جواب برای همه دستگاه‌ها یکی است! و بردارهای ویژه:

$$\Rightarrow \text{بردارهای ویژه نسبت به } x'y'z' \qquad \overset{e_1'}{\begin{Bmatrix} 4.44 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \quad \overset{e_2'}{\begin{Bmatrix} -0.44 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \quad \overset{e_3'}{\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \qquad e_i = Te_i'$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{p_{max}} - \sigma_{p_{min}}) = \frac{P}{2}(3.44 - (-1.44)) \simeq 2.44P$$

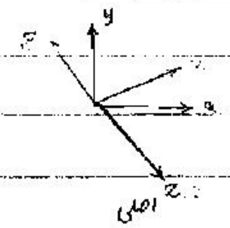
SUBJECT حل تمرین - مقاومت مصالح II

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۷/۱۰/۲۲

* دایره مور

فرض کنید دستگاهی داشته باشیم که محور z آن محور اصلی باشد.



$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$[\sigma']_{x'y'z'} = [T][\sigma]_{xyz}[T]^T$$

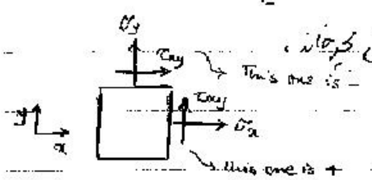
$$T = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ y' & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ z' & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

همان روابطی که دکتر ثانی گفته!

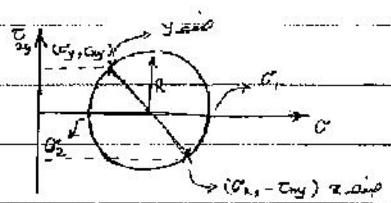
$$\Rightarrow [\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta & \cdots \\ \vdots & \end{bmatrix}$$

الان دیگه المان رو به جای سه‌بعدی، دوبعدی در نظر می‌گیریم. با بعد z آن کاری نداریم.

قرارداد مان برای علامت τ هم تغییر می‌کند: اگر المان را در جهت مثبت مثلثاتی بچرخاند، مثبت است!



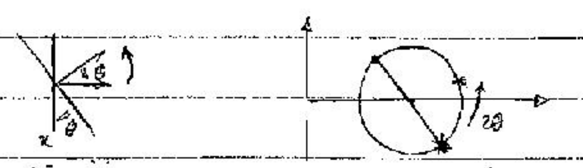
هر نقطه روی دایره مور نشان دهنده‌ی یک صفحه است در واقع:



τ_{max} = شعاع دایره مور $= R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

مختصات مرکز $= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_{\text{مرکز}}$ ، $\sigma_{1,2} = \sigma_{\text{مرکز}} \pm R$

مثلاً اگر یک صفحه داشته باشیم و به اندازه‌ی θ (درجه) بچرخیم که به یک صفحه‌ی جدید برسیم، روی دایره‌ی مور نقطه‌ی متناظر صفحه اولی را در نظر می‌گیریم و از آن به اندازه‌ی 2θ در جهت همان θ می‌چرخیم تا به نقطه‌ی متناظر با صفحه‌ی جدید برسیم.



فضای حقیقی

برای هر تانسور دوبعدی دیگری هم، می‌شود از دایره مور استفاده کرد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

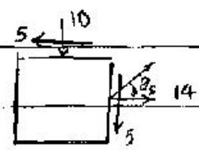
تانسور کرنش

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

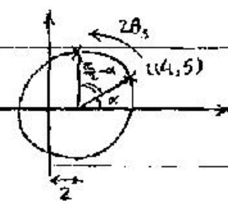
۳ مؤلفه تکراری شده

$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}$, $\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}$

(۹) تنش برشی ماکزیمم و زاویه صفحه برش ماکزیمم با محور x ؟



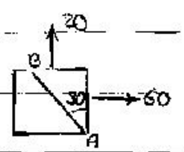
$$\begin{cases} \sigma_x = 14 \\ \sigma_y = -10 \\ \tau_{xy} = -5 \end{cases} \Rightarrow \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{14-(-10)}{2}\right)^2 + (-5)^2} = 13$$

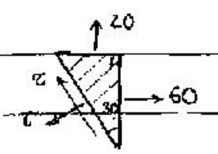


$$\tan\alpha = \frac{5}{14-2} = \frac{5}{12} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{5}{12}$$

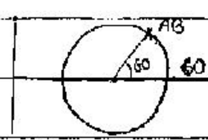
$$2\theta_s = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \theta_s = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

(۱۱) تنش های برشی و عمودی را در صفحه‌ی نشان داده شده به دست آورید. τ_{AB}, σ_{AB} ?





حل به کمک دایره موهر ⇐

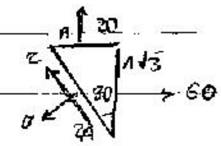


$$R = \sqrt{\left(\frac{60-20}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 20$$

$$\tau = R\sin 60 = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \simeq 50 \Rightarrow \tau = -50$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + R\cos 60 = \frac{20+60}{2} + 20 \times \frac{1}{2}$$

راه دوم تعادل!

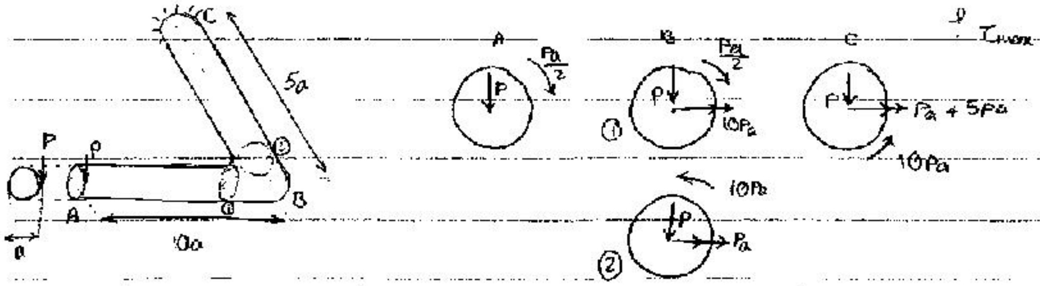


$$\left.\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \Rightarrow \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 60A\sqrt{3} - (\tau\cos 60)(2A) - (\sigma\sin 60)(2A) = 0 \\ 20A + (\tau\sin 60)(2A) - (\sigma\cos 60)2A = 0 \end{array}$$

SUBJECT : ۱۲ حل تمرین - مقاومت مصالح

Year (   ) Month (   ) Date (   )

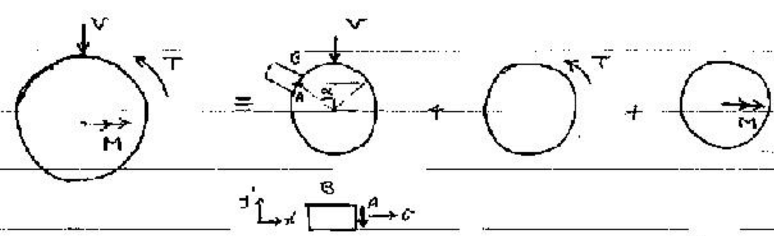
τ_{max} ؟



برای جسم اصلی P را می بریم به مرکز سطح و برای پیچش این می بریم P را به مرکز برش ، در اینجا هر دو یکی هستند.
این مقطع های کرانی را در نظر می گیریم و می بینیم τ در کدام بیشتر است؟

۸۷/۱۰/۲۳

ادامه ی مثال :

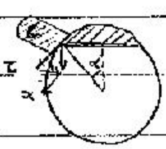


در هر مقطع ، هر المانی که در نظر بگیریم ، در صفحه ی xy آن ، به خاطر برش و پیچش تنش برشی و به خاطر خمش σ داریم . در کل از صفحاتی که از این المان می گذرد τ ماکزیمم المان را می خواهیم برای ما مهم نیست کدام صفحه ، ماکزیمم را می خواهیم . می دانیم خمش هیچ تنش ای ایجاد نمی کند (فرض مقاومت ۱)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x'}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 > 0 \quad \sigma_2 < 0 \quad \sigma_3 = 0 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

اگر یک برش بزنیم مثل شکل ، τ بر خط برش عمود است ولی این τ تنها τ موجود در صفحه ای از المان بالا است که ذکر شد . که آن τ هم به خوبی خود مماس بر مرز مقطع (دایره ها) است زیرا در صفحه ی c ، نقطه هوا هست و هیچ تنشی نداریم ، در نتیجه در راستای عمود بر مرز مقطع τ صفر است.
حالا τ را به کمک برش عرضی بدست می آوریم :



$$\frac{Q}{t} = \frac{r^2 \sin^2\alpha}{3} \Rightarrow \frac{VQ}{It} = \frac{Vr^2 \sin^2\alpha}{3I} \Rightarrow \tau_1 = \frac{VQ/It}{\sin\alpha} = \frac{Vr^2 \sin\alpha}{3I}$$

$$\tau_{max}^2 = \frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 \quad \begin{cases} \sigma = \dfrac{Mr\cos\alpha}{I} \\ \tau = \dfrac{Tr}{2I} + \dfrac{Vr^2 \sin\alpha}{3I} \end{cases}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\frac{d\tau_{max}}{d\alpha}=0 \rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ tg\alpha = \frac{T^*}{M^{*2}-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T^* = \frac{T}{2\pi r} \\ M^* = \frac{M}{2\pi r} \end{cases}$$

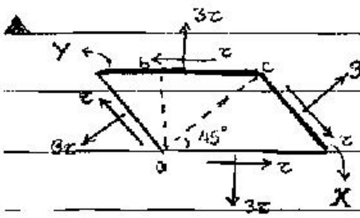
این دو تا را تعریف کردیم!

$$B\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ tg\alpha = \frac{1}{198} \simeq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tau_{cr1} = \\ \tau_{cr2} = \end{cases}$$

ممکنه سازه یکی از این 4 تای بحرانی بدست آمده است!

$$C\begin{cases} tg\alpha = \frac{2}{7} \\ \cos\alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tau_{cr1} = \\ \tau_{cr2} = \end{cases}$$

پس ما کلی اول مقاطع بحرانی را بدست آوردیم. بعد در هر کدام نقطه‌های بحرانی را بدست آوردیم و در هر نقطه صفحه‌ی بحرانی را.

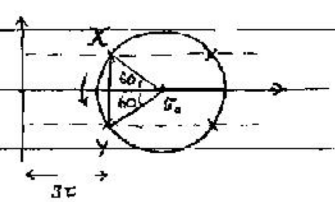


(n) همه چیز را برای این المان حساب کنید!

$\sigma, \tau \Big|_{ab, ac} = ?$

$\tau_{max} = ?$ $\sigma_p = ?$ $\gamma_{max} = ?$ $\varepsilon_{max} = ?$

τ در صفحه‌ی X منفی است. پس در دایره‌ی مور منفی رسم می‌کنیم. پس بالایی از این دو نقطه است. از طرفی زاویه‌ی بین X و Y است 60 است پس باید 120 روی دایره‌ی مور بچرخانیم! چون پادساعتگرد باید بچرخیم، نقطه‌ی سمت چپ محور این شرایط را دارد.



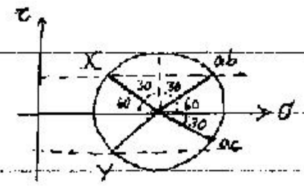
یه نکته‌ی دیگه اینکه چون تنش‌های محوری‌شون برابره، روی یک خط عمودی هستند.

$R \sin 60 = \tau \Rightarrow R = \frac{2}{\sqrt{3}}\tau$

$\sigma_0 = 3\tau + R\cos 60 = 3\tau + \frac{\tau}{\sqrt{3}}$

صفحه‌ای که تنش برشی در آن ماکزیمم می‌شود، در دایره‌ی مور 30 درجه با صفحه‌ی X فاصله دارد پس روی المان 15 درجه باید دوران بدهیم

$\tau_{max} = R = \frac{2\tau}{\sqrt{3}}$

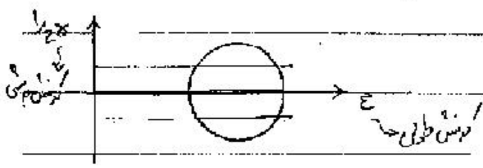


صفحه‌ی ab محوری X است

$$\begin{cases} \sigma_{ab} = \sigma_0 + R\sin 30 \\ \tau_{ab} = R\cos 30 = \tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{ac} = \sigma_0 + R\cos 30 \\ \tau_{ac} = -R\sin 30 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 + R = \tau(3+\sqrt{3}) \\ \sigma_2 &= \sigma_0 - R = \tau\left(3 \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{aligned}$$

برای کرنش هم، دایره مور و تانسور کرنش ها شبیه هستند با این تفاوت که در اینجا به جای γ، $\gamma/2$ داریم.



$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{\tau_x}{G} = \frac{\tau}{G} \\ \varepsilon_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{ab} = \frac{\tau}{G} \\ \varepsilon_{ab} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{ab} - \nu(3\tau)\right] = \frac{1}{E}\left[\left(3+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\tau - 3\tau\nu\right] \end{cases}$$

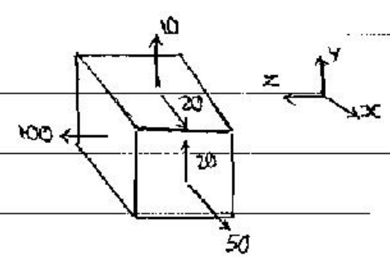
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_{ab}\right] = \frac{1}{E}\left[3\tau - \nu\tau\left(3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_y}{G} = \frac{\tau}{G}$$

$$\gamma_{max} = 2R = 2\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_y\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_{ab}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_{ab}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_y\right)^2}$$

▲



σ_p? ε_p? τ_{max}? γ_{max}?

۵ چون روی یکی از وجوه تنش برشی نداریم، پس صفحه‌ی اصلی است. پس دایره مور را روی آن می‌کشیم.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= 100 \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \sigma_z = \sigma_z = 100$$

$$\begin{cases} \sigma_x = 50 \\ \sigma_y = 10 \\ \tau_{xy} = 20 \end{cases} \Rightarrow \tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{50-10}{2}\right)^2 + 20^2} = 20\sqrt{2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{50+10}{2} \pm 20\sqrt{2} = 30 \pm 20\sqrt{2}$$

$$\sigma_{max} = 100, \quad \sigma_{min} = 30 - 20\sqrt{2} \rightarrow \underset{\text{واقعی}}{\tau_{max}} = \frac{100 - (300 - 20\sqrt{2})}{2} = 35 \pm 10\sqrt{2}$$

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[50 - \nu(10 + 100)\right]$$

$$\nu = 0.25 \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{22.5}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[10 - 0.25\,(50 + 100)\right] = \frac{-27.5}{E}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{22.5 - 27.5}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{22.5 + 27.5}{2E}\right)^2 + \left(\frac{20}{2G}\right)^2}$$

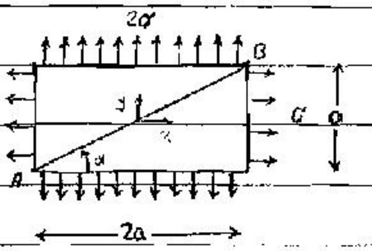
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{1}{E}\left[100 - 0.25(50 + 10)\right] = \frac{85}{E}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \Rightarrow \varepsilon_z = \varepsilon_3$$

$$\gamma_{max} = 2\varepsilon_{xy\,max} = \max\left\{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, |\varepsilon_1 - \varepsilon_3|, |\varepsilon_2 - \varepsilon_3|\right\}$$

↳ این نقاط زوج‌ها در تانسور آشنا!

④ تغییر طول قطر این صفحه؟



$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x = \sigma \\ \sigma_y = 2\sigma \\ \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma - \nu(2\sigma)\right] = \frac{1-2\nu}{E}\sigma \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[2\sigma - \nu\sigma\right] = \frac{2-\nu}{E}\sigma \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \end{array}\right.$$

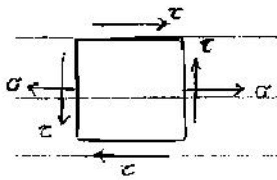
فرض می‌کنیم روی قطر تمام نقاط شرایط یکسان دارند و ε_x و ε_y برای همه‌شان یکی است. والمان را برای دایره مور بسیار کوچک می‌گیریم و نقاط روی قطر همه همین المان کوچک‌اند!! (در این سؤال به جای همه‌ی βها α بذارید!)

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2\beta + \varepsilon_y \sin^2(-\beta) + \frac{1}{2}\underbrace{\gamma_{xy}}_{0}\sin(-2\beta) = \frac{1-2\nu}{E}\sigma \times \frac{1}{5} + \frac{2-\nu}{E}\sigma \times \frac{4}{5} = \frac{9-6\nu}{5E}\sigma$$

وقتی کرنش ثابت است می‌توانیم از $\delta = \varepsilon l$ استفاده کنیم، ولی اگر ثابت نبود باید از انتگرال استفاده می‌کردیم.

$$\Rightarrow \Delta = \int \varepsilon_x\, dx = (\sqrt{5}a)\,\varepsilon_{x'} = \frac{9-6\nu}{5E}\sigma a\sqrt{5} = \cdots$$

SUBJECT: ۱۴ حل تمرین - مقاومت مصالح
Year | Month | Date |



$\varepsilon_z = 0 \quad , \sigma = \tau$ $\qquad\qquad$ $\sigma_p , \tau_{max} , \gamma_{max} , \varepsilon_{max} = ?$

$$\varepsilon_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = 0$$

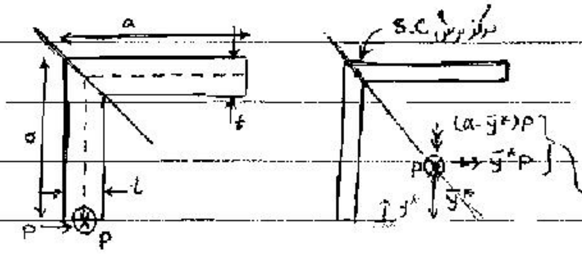
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \nu(\sigma + \quad) = \nu\sigma$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Longrightarrow \sigma_z = \sigma_3 = \nu\sigma$$

کرنش انقصابیه، یعنی همه ی z هاش صفره !

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\sigma^2/4 + \sigma^2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 > 0 \\ \sigma_2 < 0 \\ \sigma_3 = \nu\sigma \end{array}\right\} \longrightarrow \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 \Rightarrow \tau_{max\ \text{واقعی}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\sigma$$

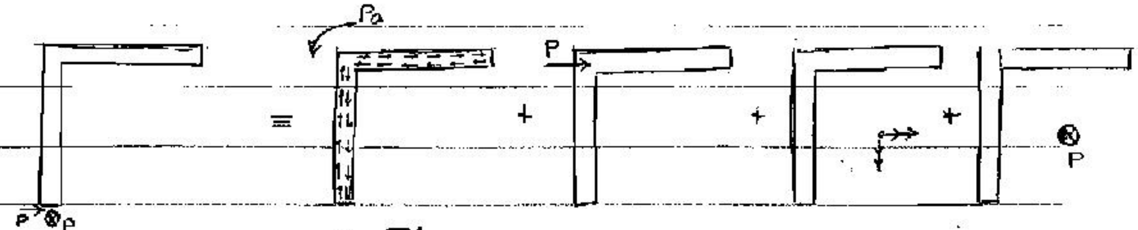


τ_{max} را در این مقطع بیابید؟

اول باید مرکز سطح و مرکز برش رو پیدا کنیم

برای تحلیل خمش، نیروی نرمال را به مرکز سطح می‌بریم و گشتاورهای معادل این انتقال را هم اضافه می‌کنیم

برای تحلیل برش هم نیرو را به مرکز برش می‌بریم و یک گشتاور پیچشی معادل برای انتقال نیرو، اضافه می‌کنیم.



$$\tau = \frac{T t}{\sum \frac{1}{3} b_i t_i^3}$$

جاهایی از مقطع که اگر امتداد دهیم، روی جای دیگر است. تنش‌ها را می‌توانیم تحلیل کنیم و تنش فایلی‌شکلی دارد.

STAEDTLER

SUBJECT :
Year (   ) Month (   ) Date (   )

* تیرها

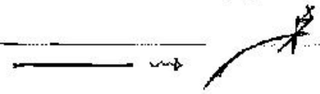
تیرها دو دسته‌اند: ① آنهایی که با فرض اولر-برنولی تحلیلشان می‌کنیم! (ما با این کار داریم)

② آنهایی که با فرض‌های تیموشنکو تحلیلشان می‌کنیم!

در هر دو فرض بر این است که مقاطع تیر به شکل صفحه باقی می‌مانند.

① فرض ①: تار خنثی تبدیل به curve می‌شود و مقاطع عمود بر آن، مقطع می‌مانند عمود بر curve جدید (مثل خمش خالص)

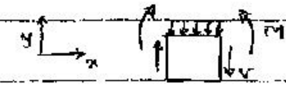
فرض ②: می‌گوید لزومی ندارد عمود بماند.



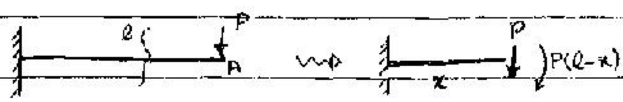
ولی با فرض اولر برنولی پیش می‌رویم

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$EIy'' = M \rightsquigarrow EIy^{(4)} = -\omega(x)$$



تیر طره‌ای (یک سر گیردار):



$$M(x) = -P(l-x) = P(x-l) = EIy''(x)$$

Boundry Conditions $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

$$EIy'(x) = \frac{Px^2}{2} - Plx + C_1$$

$$EIy(x) = \frac{Px^3}{6} - \frac{Pl}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$\xrightarrow{B.Cs} \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{Px^3}{6} - \frac{Pl}{2}x^2\right]$$

$$y_A = y(l) = \frac{-Pl^3}{3EI} \quad , y'_A = \frac{dy}{dx}\Big)_{x=l} = \frac{-Pl^2}{2EI}$$

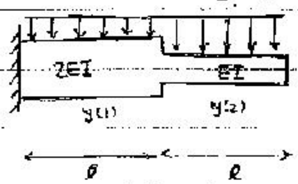
STAEDTLER

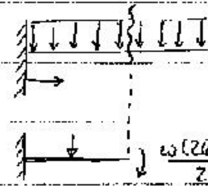
زین پس تیر را فقط با تار خنثی‌اش نشان می‌دهیم.

SUBJECT: حل تمرین - مقاومت مصالح ۱۵

Year: Month: Date:

ω ثابت





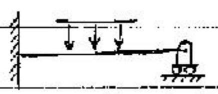
$M(x) = -\frac{\omega(2l-x)^2}{2}$

$0 \le x \le l$: $2EIy_1''(x) = M(x) \to C_1, C_2$

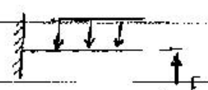
$l \le x \le 2l$: $EIy_2''(x) = M(x) \to C_3, C_4$

B.Cs $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y_1(l)=y_2(l) \\ y_1'(l)=y_2'(l) \end{cases}$

وقتی مسئله نامعین است: هر قید هندسی اضافی یک قید فیزیکی اضافی می‌آورد و موجب نامعین شدن مسئله می‌شود.



=

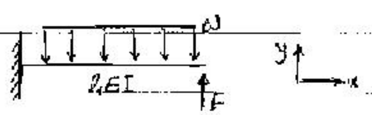


$+ \; y_A = 0$

$y_A = 0$ (مقدار F تعیین شده که y_A را صفر کند)

قید هندسی خودش یک معادله‌ی اضافی می‌دهد. قید هندسی را برمی‌داریم و قید فیزیکی را می‌گذاریم و با معادله‌ی اضافی F را حل می‌کنیم!!

همین رو حل کنیم:



$\frac{\omega(l-x)^2}{2}$ $\quad F(l-x)$

$M(x) = F(l-x) - \frac{\omega(l-x)^2}{2}$

$EIy''(x) = F(l-x) - \frac{\omega(l-x)^2}{2}$

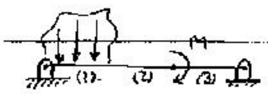
B.Cs $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \cdots$ w.r.t(F)

$y_A - y(l) = 0 \Rightarrow F$ ✓

$\frac{dy}{dx} = 0 \to \begin{cases} x_m \\ y_m \end{cases}$ نقطه‌ی max

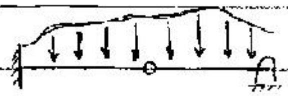
SUBJECT
Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر M هم متفاوت باشه، باز همین بحث هست.

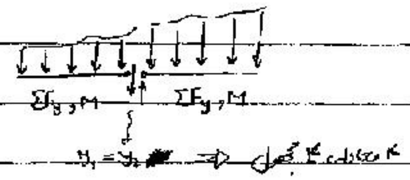


مثلاً در این شکل روبرو، در سه قسمت جدا جدا بررسی اش می کنیم.

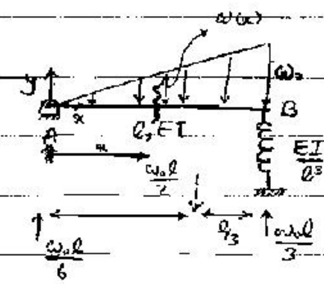
می شه زیاد معادله، زیاد مجهول! (همه می خندن!)



نیروی عکس العمل تکیه گاه، لولا و اسنهای نیرودار را می خواهیم.



۸۷.۱۰.۲۶



اول ببینید مسئله معین یا نامعین!

اینجا معین ← پس نیروی فنر بدست می آید پس

تکیه گاهان نقطه ی انتهای تیر بدست می آید.

در نتیجه شرایط مرزی مشخص می شوند.

معادل کل اش

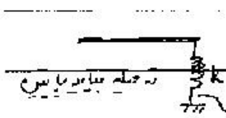
هنگام بدست آوردن M، به کمک مقطع زدن، هیچ وقت بار گسترده را با معادل اش جایگزین نکنید

$$B.C.s \begin{cases} \delta_B = -\dfrac{\frac{\omega_0 \ell}{3}}{EI/\ell^3} = \dfrac{\omega_0 \ell^4}{3EI} \\ \delta_A = 0 \end{cases}$$

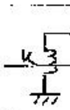
$$M(x) = \frac{\omega_0 \ell}{6}x - \frac{x}{3}\left(\frac{x\,\omega(x)}{2}\right) \quad , \ \omega(x) = \frac{x}{\ell}\omega_0$$

$$\Rightarrow EIy''(x) = \frac{\omega_0 \ell}{6}x - \frac{\omega_0 x^3}{6\ell}$$

اگر این فنر معادله می شد نیرویی، به ky برای نیرویش استفاده می کنیم و آنجا در طرف راست $EIy'''=$ که نیروهای برشی قرار می گیرند می گذاشتیم. برای علامت ky هم با توجه به مکان فنر تصمیم می گیریم



$EIy''' = +ky$



$EIy''' = -ky$

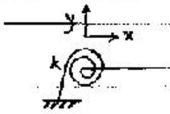
نیروی برشی

مثلاً اینجا نیرویی که فنر به تیر وارد می کند، به سمت بالا است پس نیرو بر قرار داد منفی است. ↲

ky هم چون y منفیه، منفی است. پس دو طرف معادله هم علامت هستند.

SUBJECT: حل تمرین - مقاومت مصالح ۱۴

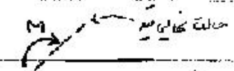
Year ( ) Month ( ) Date ( )



$\leftarrow \boxed{\text{First}}$

برای فنر پیچشی هم سه حالت!

فنر پیچشی گشتاور مقاوم می‌کند!



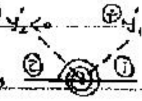
اگر $y' > 0$

$\xrightarrow{} \theta$

$|M| = |ky'|$

$EIy'' = +ky'$

$\ominus\, y'_2 < 0$ $\oplus\, y'_1 > 0$ $\boxed{\text{Third}}$



اگر یه فنر پیچشی حول وسط تیر باشد،

اگر $y' < 0$

$\leftarrow \boxed{\text{Second}}$

پیچش فنر برای خواهد بود با $\theta = |y'_1| + |y'_2| = y'_1 - y'_2$

پس حالا می‌توانیم دو تا تیر را جدا در نظر بگیریم و بنویسیم:

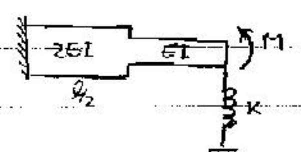
$EIy'' = -ky'$ $\ominus$ $\oplus$

$M \curvearrowleft \curvearrowright M$

$k\theta = EIy''$

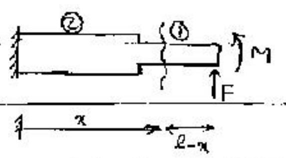
برای فنر پیچشی نمی‌توانیم الزاماً بنویسیم $y = 0$.

برای فنر پیچشی خالی، نیروی برشی صفر است.



چون 2EI داریم، دو مقطع متفاوت باید بزنیم. (تیر یکنواخت نیست)

مسئله نامعین است. تیر یک درجه اضافی نیز است.



$M(x) = M + F(l-x)$

$EIy_1'' = M + F(l-x) \rightsquigarrow c_1, c_2, F \qquad l/2 \leq x \leq l$

$2EIy_2'' = M + F(l-x) \rightsquigarrow c_3, c_4 \qquad 0 \leq x \leq l/2$

$$B.C.s \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y'_2(0) = 0 \\ F = -ky_1 \end{cases}$$

«منفی» فرض کردیم می‌آید پایین!

$$\begin{cases} y_1(l/2) = y_2(l/2) \\ y'_1(l/2) = y'_2(l/2) \end{cases}$$

ادامه‌ی حل به عهده‌ی دانشجو!

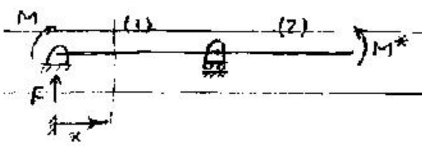
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

☺ یکی دیگه!

تکیه‌گاه کشویی: شیب دو سرش رو برابر نگه می‌داره.

اینجا چون یک چرخش نداریم، شیب هاش هم صفر می‌شن!



مثل قبلی را که در اینجا تکیه‌گاه گیردار است برش می‌زنیم و ممان نامعلوم را می‌گذاریم (M^*) و همه‌ی معادلات را بر حسب این مجهول جدید بازنویسی می‌کنیم

$$M^* - M - Fl = 0 \Rightarrow F = \frac{M^* - M}{l}$$: تعادل

$$\begin{cases} M_1(x) = M + \left(\frac{M^* - M}{l}\right) x & 0 \leq x \leq l \\ M_2(x) = M^* & l \leq x \leq 2l \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} EIy_1'' = M_1(x) \rightsquigarrow M^*, C_1, C_2 \\ EIy_2'' = M_2(x) \rightsquigarrow C_3, C_4, M^* \end{cases}$$ ۵ مجهول

$$B.C.s \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_1(l) = 0 \\ \cancel{y_2(l) = 0} \\ y_1'(l) = y_2'(l) \end{cases}$$ ، و $y'(2l) = 0$

▲

✓ اگر یک لولا وسط تیر بود ( $\equiv$ —o—) ، تیر را دو تیر جدا از هم در نظر می‌گیریم و جدا جدا حل می‌کنیم. فقط یک شرط پیوستگی داریم و در نقطه‌ی لولا، M صفر و y'' صفر است.
← نقطه‌ی عطف داریم.

✓ چند نکته:

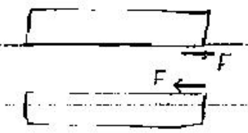
ملاحظه‌ای که برای تانسور تنش در نظر می‌گرفتیم، در واقع صفحات کوچکی بودند و با الان که تنش روی دو تا صفحه‌ی مجاور جسم متفاوت می‌باشن.

از مثالی که سر کلاس آقای ... حل شد که دو تا تیر رو چسبانده‌ایم (در حالت خمیده) به هم، وقتی رهاشان می‌کنیم، تار تحتانی تیر بالایی می‌خواد کش بیاد ولی تار فوقانی تیر پایینی می‌خواد کوتاه بشه ولی به خاطر چسب نمی‌شن. این اتفاق می‌افته، هر کدام از این تارها یک نیروی F (یا یک تنش برشی) به دیگری وارد می‌کنه!

حل تمرین - مقاومت مصالح ۱۷

SUBJECT : ۱۷

Year ( ) Month ( ) Date ( )



وقتی دو تیر را رها می‌کنیم، هرکدام از این دو تیر، مقداری دچار کرنش می‌شوند

که در این مسئله کرنش هایشان برابره!

با انتقال F ها به مرکز هندسی تیرها و بعد نوشتن کرنش ها به کمک ε ی

این دستگاه پیچیدگی خمش مرکب و در آخر برابر قرار دادن کرنش ها، F بدست می‌آید.