بسمه تعالی

جزوه

مقاومت مصالح ۲

دانشگاه

تهران

استاد

دکتر نائی

1

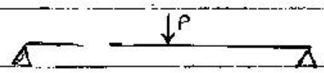
SUBJECT: مقاومت ۲ - ثانی

Year ( ) Month ( ) Date ( )

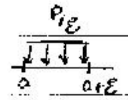
۸۷,۱۱,۲۳ ← جلسه اول

$EIy'' = M$

$EIy'''' = -\omega(x)$ بار گسترده

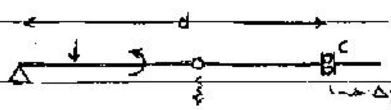


چون چیزی از راه بار گسترده حل نمی‌شود و تابع‌های ویژه‌ای لازم دارد



$\begin{cases} P/\varepsilon & a<x<a+\varepsilon \\ 0 & \end{cases}$ بار نقطه‌ای $\Rightarrow P\langle x-a\rangle_{-1}$

$\delta(x-a) = \begin{cases} 1/\varepsilon & a<x<a+\varepsilon \\ 0 & \text{others} \end{cases}$ $\rightsquigarrow \langle x-a\rangle_{-1}$



$\Delta y_c \langle x-d\rangle_{-4}$

اختلاف ازمسطح است $\rightarrow \Delta\theta\langle x-a\rangle_{-3}$

$EIy'' = M$ $P\langle x-a\rangle_{-1}$ $M\langle x-a\rangle_{-2}$

$EIy''' = V$

$EIy'''' = -\omega(x)$

Distribution Function:

$\langle x-a\rangle^0$ unitstep function $x<a \to 0$ $x>a \to 1$

$\langle x-a\rangle^1$ unitramp function تابع شیب $x<a \to 0$ $x>a \to 1$

P $\langle x-a\rangle_{-1}$ unitimpulse function - Dirac ״

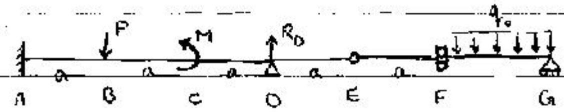
M $\langle x-a\rangle_{-2}$ Doublet function ״

$\Delta\theta$ $\langle x-a\rangle_{-3}$ step change function ״

Δy $\langle x-a\rangle_{-4}$ deflection change function ״

SUBJECT :

Year / Month / Date /



$x=0 : y=0 \ , \ y'=0$

$$EIy'''' = -P\langle x-a\rangle_{-1} - M\langle x-2a\rangle_{-2} + R_D\langle x-3a\rangle_{-1} + \Delta\theta_E\langle x-4a\rangle_{-3} + \Delta y\langle x-5a\rangle_{-4}$$
$$+ (-q_0)\langle x-5a\rangle^0$$

4 ثابت انتگرال و 3 مجهول داریم: $(\Delta y, \Delta\theta_E, R_D) \leftarrow$ 7 مجهول

$$\int \langle x-a\rangle_n \, dx = \langle x-a\rangle_{n+1} \qquad n<0$$

$$\int \langle x-a\rangle^n \, dx = \frac{1}{n+1}\langle x-a\rangle^{n+1} \qquad n\geq 0$$

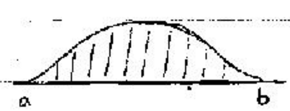
$$H(x-5a) = \begin{cases} 1 & x>5a \\ 0 & x<5a \end{cases}$$

$EIy'''' = P\langle x-a\rangle_{-1}$ در صورتی که P نیرو باشد

$EIy'' = P\langle x-a\rangle^0$ در صورتی که P گشتاور باشد در $x=a$

شرایط مرزی مثال:
$$\begin{cases} x=a & y=0 \ , \ y'=0 \\ x=6a & y=0 \ , \ y''=0 \\ x=3a & y=0 \qquad \Rightarrow \quad \text{6 معادله} \\ & M(4a^{\pm})=0 \rightarrow EIy''=0 \ , \ y''=0 \\ EIy'''(5a^{\pm})=0 & V=0 \quad \text{در لولا} \end{cases}$$

$$\langle x-a\rangle^n \begin{cases} (x-a)^n & x\geq a \\ 0 & x<a \end{cases}$$



$\langle x-a\rangle - \langle x-b\rangle \qquad EIy^{(4)} = -\omega(x)$

STAEDTLER

SUBJECT : مقاومت ۲ - ثانی

Year : | Month : | Date ( )

x^2+2x+4

$x-3=t \Rightarrow x=3+t$

$$(t+3)^2+2(t+3)+4=t^2+8t+19$$

$(x-3)^2+8(x-3)+19 \Rightarrow \langle x-3\rangle^2+8\langle x-3\rangle+19$ ①

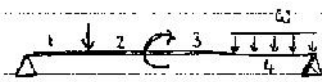
$(x-5)^2+12(x-5)-8 \Rightarrow \langle x-5\rangle^2+12\langle x-5\rangle-8$ ②

① − ② $=0 \Rightarrow \checkmark$

جلسه دوم ← 87,11,30

$EIy'''' = -\omega(x)$

$EIy'' = M(x)$



$EIy_1^{(4)}=0 \quad , \; EIy_2^{(4)}=0 \; , \; EIy_3^{(4)}=-\omega$

$\Rightarrow \int \Rightarrow$ شرایط مرزی، ۱۶ مجهول $\Rightarrow \checkmark$

جای کشش می‌کنیم و از ۵ حساب می‌کنیم

[illegible] :

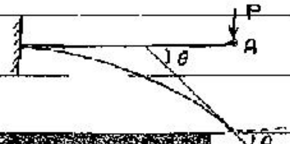
چون معادله دیفرانسیل $EIy''=M$ خطی است، می‌توانیم از superposition استفاده کنیم.

$EIy_1''=M_1 \quad , \; EIy_2''=M_2 \quad , \; EIy_3''=M_3$

$(y_1+y_2)''=y_1''+y_2''=y_3'' \qquad M_1+M_2=M_3$

$F=kx$ خطی است پس می‌توانیم دو فنر را موازی بگیریم و دو معادله را حل کنیم، ولی اگر مثلاً kx^2 بود، چون غیرخطی است، نمی‌توانستیم این کار را بکنیم

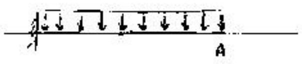
در این جا فقط تغییر مکان عمودی را در نظر می‌گیریم ولی اگر تغییر مکان صفحه‌ای بود، داشتیم: $\nabla^2(\nabla^2 y) = -\omega$



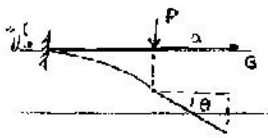
$y_A = \dfrac{Pl^3}{3EI} \Rightarrow \theta = \dfrac{Pl^2}{2EI} \simeq \tan\theta$

SUBJECT :

Year (| Month (| Date (

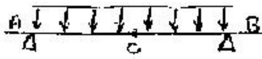


$\delta_A = \frac{\omega L^4}{8EI}$ $\theta_A = \frac{\omega L^3}{6EI}$

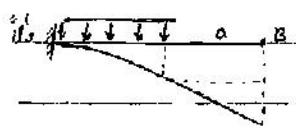


$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} + a\,tg\,\theta = \frac{PL^3}{3EI} + a\frac{PL^2}{2EI}$

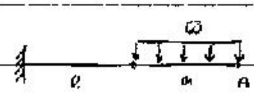
$\delta_A = \frac{ML^2}{2EI}$ $\theta = \frac{ML}{EI}$



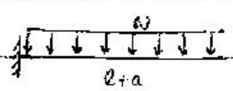
$\delta_C = \frac{5\omega L^4}{384EI}$



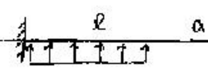
$\delta_B = \frac{\omega L^4}{8EI} + a\frac{\omega L^3}{6EI}$



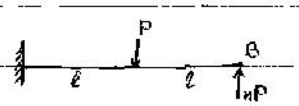
$=$



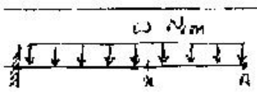
$+$



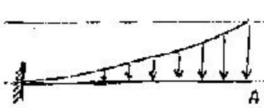
مثال) n چقدر باشد تا تغییر مکان نقطه B صفر شود؟



$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2}{2EI}L - \frac{nP(2L)^3}{3EI} = 0 \qquad \frac{5}{6}\frac{PL^3}{EI} = \frac{nP \times 8L^3}{3EI} \Rightarrow n = \frac{5}{16}$$



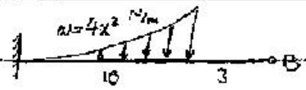
$\delta_x = ?$



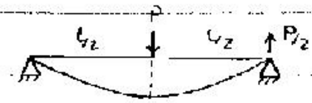
$$\delta_A = \int_0^l \frac{\omega dx\, x^3}{3EI} + \frac{\omega dx\, x^2}{2EI}(l-x)$$

SUBJECT : مقاومت ۲ - ثانی

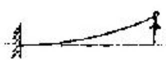
Year : Month : Date :



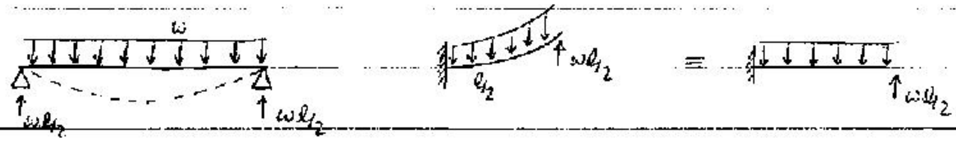
$$\omega = \int_0^{10} \frac{4x^2\, x^3 dx}{3EI} + \frac{4x^2 dx}{2EI}\,(13-x)$$

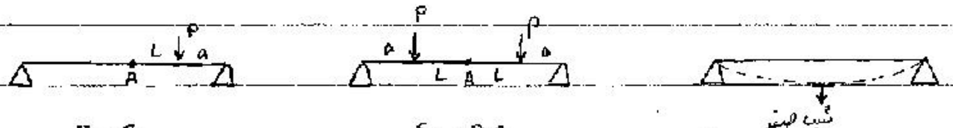


برای تغییر مکان وسط تیر مسئله را به این شکل در می آوریم :



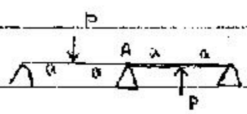
$$\delta = \frac{P/2\,(l/2)^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{48EI}$$





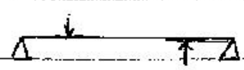
$\delta_A = \delta_0$ $\delta_A = 2\delta_0$

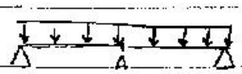
$\delta_B = \delta_A = 2\delta_0$



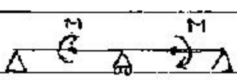
تغییر مکان A در اثر دو نیرو صفر است . پس نیروی وارد بر آن پایه صفر است .

پس می توانیم پایه را حذف کنیم، بعد تغییر مکان نقطه ی B را بدست آوریم . (کنکور امسال)





برای حل ← از این استفاده می کنیم



=> بار پایه حذف می شود

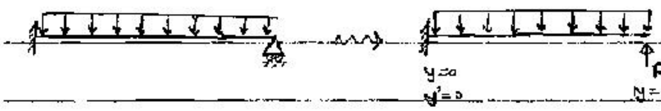
برای حل این را عکسش جمع می کنیم

(باز سؤال کنکور بوده)

STAEDTLER

این ها همه معین بود. اگر نامعین باشد، پایه‌ها را حذف می‌کنیم و جایشان نیرو می‌گذاریم،

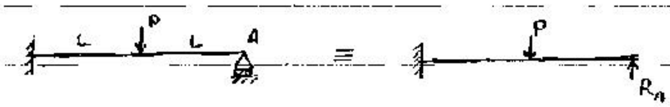
تا جایی این کار را می‌کنیم که مسئله به لحاظ استاتیکی پایدار بشود (معین)!



$EIy'' = M \Rightarrow$ ۲ تا ثابت انتگرال

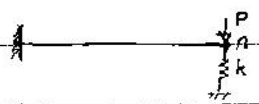
$y=0$, $y'=0$; $y=0$

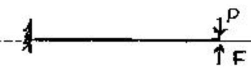
$y: \frac{wL^4}{8EI} - \frac{RL^3}{3EI} = 0 \Rightarrow R = \checkmark$



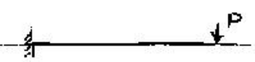
$\Rightarrow \checkmark$

مسئله نامعین: فنر F دارد!





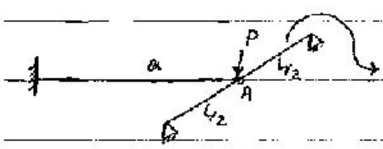
$$\frac{(P-F)L^3}{3EI} = \frac{F}{k}$$



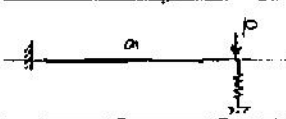
$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow P = \frac{3EI}{L^3}\,\delta = k\delta$ پس این هم مثل فنر است! جسم

پس وقتی هم فنر و هم تیر داریم، مثل دو فنر موازی می‌شود k هاشان را باهم جمع کرد: (تغییر طولشان باهم برابر است پس موازیند)

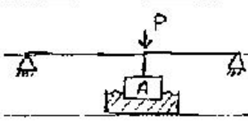
$$K = \frac{3EI}{L^3} + k \Rightarrow \delta = \frac{P}{K}$$



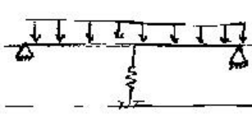
$\rightarrow \delta_A = \frac{PL^3}{48EI}$ فنر است



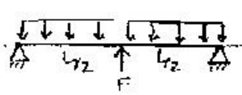
$\rightarrow K = \frac{48EI}{L^3} + \frac{3EI}{a^3}$ دو فنر موازیند



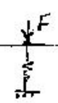
$A x \delta = F = kx$



$=$



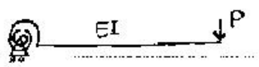
$+$



$$\frac{5wL^4}{384EI} - \frac{FL^3}{48EI} = \frac{F}{k}$$

SUBJECT: مقاومت ۲ - تابانی

Year ( ) Month ( ) Date ( )



$M = k\theta = PL$

$\delta_A = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2}{k}$ ← $(\delta_B = \frac{PL}{k} L)$

$\frac{PL^2}{16EI} - \frac{ML}{3EI} = \frac{M}{K}$ تابع کلین

۸۷/۱۲/۷ کلاس تشکیل نشد! (استاد نیامدند)

۸۷/۱۲/۱۴ ← جلسه سوم

۴ روش انرژی ←

کار روی سیستم انجام می‌دهیم ← انرژی داخلی تبدیل می‌شود که همان انرژی پتانسیل است. $W = \Delta U$

به آن انرژی پتانسیل کرنشی گفته می‌شود.

انرژی را min می‌کنیم.

* روش "حساب تغییرات" را حتماً بگیرید. حتماً! حتماً min می‌کنن!

● اصل مینیمم انرژی پتانسیل: یک جسم (پایدار یا ناپایدار) هنگامی به تعادل می‌رسد که انرژی پتانسیل آن مینیمم گردد.

ما بلدیم f(x) را min کنیم (مشتق بگیر، صفر بذار) ولی $I=\int f(y'',y',y,x)dx$ را بلد نیستیم. در اولی در یک نقطه min می‌شود ولی دومی به ازای یک تابع مشخص min می‌گردد.

مثلاً ما کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه را می‌خواهیم یابیم $S=\int\sqrt{1+y'^2}\,dy$ می‌نیمم گردد. می‌گذاریم توی معادلات اویلر

در می‌آید $y=ax+b$!

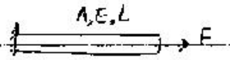
در روابط انرژی که می‌نویسیم هم به یک همچین رابطه‌ای می‌رسیم $I=\int f(y'',y',y,x)dx$!

اگر یک فنر را بکشیم و رها کنیم، انرژی پتانسیلی که درون آن ذخیره شده، آن را به حالت اول باز می‌گرداند و سیستم کنسرواتیو است. در مسائل ما هم سیستم‌ها الاستیک و کنسرواتیو هستند و هیچ انرژی را از دست نمی‌دهیم.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$U = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{F^2}{2k}$



$U = \frac{F^2 L}{2AE}$ کششی $U = \frac{T^2 L}{2GJ}$ پیچشی ؛ $U = \frac{M^2 L}{2EI}$ خمشی

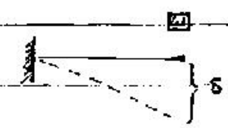
$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$

انرژی پتانسیل فنر $U = \frac{1}{2}F\delta = \frac{1}{2}k\delta^2$ است، ولی ما کار را از رابطه $F.\Delta x$ به دست می‌آوریم. دقت کن که اگر بخواهیم با انتگرال گرفتن کار انجام شده روی فنر را به دست بیاوریم $\int F dx$ ، F در هر لحظه متغیر است ($F = kx$) و آن F ای که در $\frac{1}{2}F\delta$ آمده، F ی آخر فنر به ازای δ است و با ← فرق دارد!

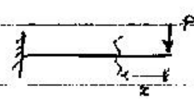
وقتی تیری را با فنر معادل سازی می‌کنیم، برای انرژی از رابطه $\frac{1}{2}F\delta$ استفاده می‌کنیم.

برای بار ضربه‌ای، اول برای یک فنر حل می‌کنیم، بعد برای سازه‌ها معادل سازی می‌کنیم.
از اتلاف حرارت در اثر ضربه صرف نظر می‌کنیم.

$W(h+\delta) = \frac{1}{2}k\delta^2 \rightarrow k\delta^2 - 2W\delta - 2Wh = 0$



$\xrightarrow{\text{بار معادل استاتیکی}}$



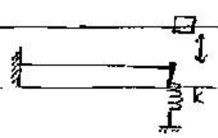
$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 L^3}{6EI} = \frac{1}{2}P\delta$

رابطه P با δ خطی!

بار دینامیکی معادل باری که به جای بار ضربه‌ای می‌گذاریم تا همان δ را بیابیم.

$$\delta = \frac{W}{k} \pm \frac{1}{k}\sqrt{W^2 + 2kWh} \longrightarrow \delta_d = \overbrace{\frac{W}{k}}^{\text{تغییر مکان استاتیکی جسم}} + \frac{1}{k}\sqrt{W^2 + 2khW} = \frac{W}{k} + \sqrt{\left(\frac{W}{k}\right)^2 + \frac{2hW}{k}}$$

$$F_d = k\delta_d = W + \sqrt{W^2 + 2hkW} = W\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hk}{W}}\right)$$



$k + \frac{3EI}{L^3}$

این سؤال آزمون جامع دکتری بوده! دو تا فنر ~~سری~~ می‌شود!
موازی

STAEDTLER

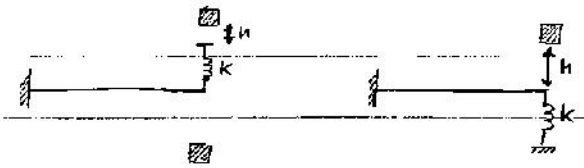
SUBJECT : مقاومت ۲ مصالح

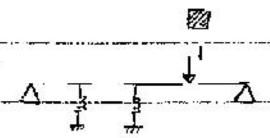
Year ( ) Month ( ) Date ( )

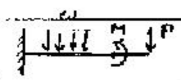
برای بدست آوردن k کافیست یک بار "یک" بگذاریم و δ را حساب کنیم، برعکسش می‌شه k ! $1 = k\delta \Rightarrow k = \frac{1}{\delta}$

حالا k را می‌گذاریم در رابطه‌ی قبل و بار معادل دینامیکی را بدست می‌آوریم.

این دو تا با هم فرقی دارن ! ← هیچ





قضیه کاستیگلیانو: اگر به سیستم مثل  داشته باشیم، انرژی را برحسب P، M و w حساب کن، اگر از رابطه‌ی بدست آمده برحسب P مشتق بگیری، تغییرمکان نقطه‌ی زیر P را به ما می‌دهد!

$$U = \frac{P^2L^3}{6EI} \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI} = \delta$$

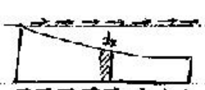
۸۷/۱۲/۲۱ ← جلسه چهارم

$$F = kx \rightsquigarrow \text{انرژی} = \tfrac{1}{2}F\delta$$

$$\Rightarrow du = \tfrac{1}{2}\varepsilon_x dx\, \sigma_x dy dz$$

$$u_0 = \frac{du}{dv} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_x\sigma_x \rightsquigarrow u_0 = \frac{\sigma_x^2}{2E} \quad (\sigma_x = E\varepsilon_x)$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \rightarrow u_0 = \frac{du}{dv} = \frac{P^2}{2A^2E}$$



$dv = A\,dx$

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{P^2}{2A^2E} \Rightarrow u = \int \frac{P^2 dv}{2A^2E} = \int \frac{P^2 dx}{2AE} = \frac{P^2L}{2AE}$$

$P(x) = q_0 x$

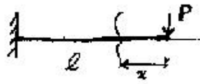
$$U_{\text{فنر}} = \frac{F^2}{2k} = \tfrac{1}{2}k\delta^2$$

می‌توانیم میله را با $k = \frac{AE}{L}$ فنری به سختی k بدل کنیم.

$$\sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow U = \int \frac{M^2y^2}{2I^2E}\, dA\, dx = \int \frac{M^2 dx}{2I^2E} \cdot \int_A y^2 dA$$

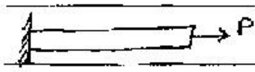
SUBJECT

Year ( ) Month ( ) Date ( )



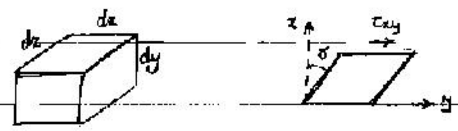
$M(x) = Px \longrightarrow U = \int_0^{\ell} \frac{P^2 x^2 dx}{2EI} = \frac{P^2\ell^3}{6EI}$

فنر $k : \frac{3AE}{\ell^3}$, $U = \frac{F^2}{2k}$



فنر $k : \frac{AE}{\ell} \longrightarrow U = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k} = \frac{P^2\ell}{2AE}$

⑦ زمانی که نیروی وارده ثابت باشد و گسترده نباشد، می‌توانیم با فنر معادل سازی کنیم و از $U = F^2/2k$ حل کنیم و زمانی که نیروی گسترده داریم، باید انتگرال‌گیری کنیم.

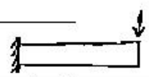


$dU = \frac{1}{2}\,\tau\, dx dz \,.\, \gamma dy$

$U_0 = \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}$

$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \Rightarrow U_0 = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$

پیچش $_{c-c}$: $\tau = \frac{T\rho}{J}$ $\qquad U = \int \frac{T^2\rho^2}{2GJ^2} dA\, dx = \int \frac{T^2 dx}{2J^2G} \cdot \overbrace{\int \rho^2 dA}^{I} = \int \frac{T^2 dx}{2GJ}$

برش : $U = \int \frac{kV^2(x)dx}{2GA}$  $\tau = \frac{VQ}{It}$ فقط برای مقطع ثابت برقرار است

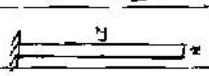
ثابت‌ها

⇐ U از رابطه‌ی بالا داده می‌شود : (از $U_0 = \frac{\tau^2}{2G}$ ، τ را برداریم $\frac{VQ}{It}$ ، جاگذاری کنیم، k در می‌آید)

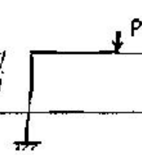
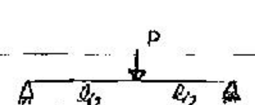
$k = \frac{A}{I^2}\int \frac{Q^2}{t^2} dA$ $\quad \underbrace{\text{فقط برای I ثابت}}$ $\qquad$ دایره $k = 10/9$ $\quad$ مستطیل $k = 6/5$

زمانی که مقطع ثابت و یکنواخت نیست، $\frac{VQ}{It}$ برقرار نیست !

اثر انرژی برشی را در تیرهایی که نسبت x/y خیلی کم باشد. در نظر نمی‌گیریم و فقط خمشی را در نظر می‌گیریم مثلا اینجا باید



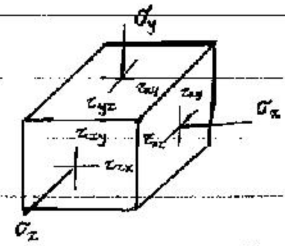
اثر نیروی محوری را هم لحاظ کنید.

مثلاً در این مسئله  اگر بخواهیم جابجایی را بیابیم، فقط خمش. 

STAEDTLER®

SUBJECT مقاومت ۲ - ثانی

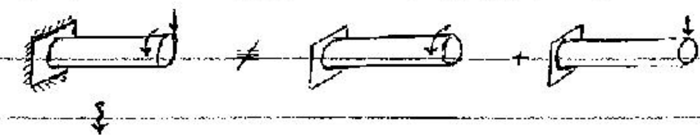
Year ( ) Month ( ) Date ( )



در حالت سه بعدی :

$$U = \int_V \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right)$$

برای حالتی که همزمان چند تا بارگذاری داریم، مثل زیر، چون خطی نیست، نمی‌توانیم از سوپرپوزیشن استفاده کنیم. باید مطلع کنیم...



$M_1(x) = P_0 x \quad M_2(x) = M_0 \longrightarrow M(x) = P_0 x + M_0$

$U = \int \frac{(P_0 x + M_0)^2}{\dots}\dots \qquad \left[\int \frac{M^2 dx}{2EI} \quad \text{با توجه به}\right]$

حالت دوبعدی : $U_0 = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x \quad , \sigma_x = E\varepsilon_x \Rightarrow U_0 = \frac{\sigma_x^2}{2E}$ و $U_0 = \frac{E\varepsilon_x^2}{2}$

حالت سه بعدی : $\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$

انرژی برحسب فقط تنش : $U = \frac{1}{2E}\int \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_y\right) + 2(1+\nu)\left[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right]$

اگر بخواهیم فقط برحسب کرنش باشد، از روابط زیر استفاده می‌کنیم :

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

ضرایب لامه که یادمان هست : (!؟)

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$U = \frac{1}{2}\lambda\int_V (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + G\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2\right) + \frac{1}{2}G\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{zy}^2 + \gamma_{xz}^2\right)$$

اگر حرارت هم داشته باشیم :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_z + \sigma_y)\right] + \alpha\Delta T$$

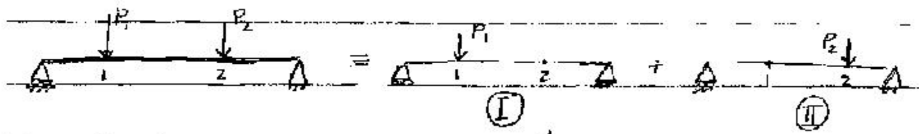
 $U =$ همان قبلی $+ \; 3E\alpha\Delta T / 2(1-2\nu) \left[\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right]$ ← فقط کرنش

SUBJECT :

Year : Month : Date :

$U =$ همون قبلی $+ \frac{3}{2}\alpha\Delta T\left[\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right]$ ← فقط تنش

۸۸/۱/۱۹



در سیستم بالا چون خطی است توانستیم از سوپر پوزیشن استفاده کنیم،

(I): $y_{11} = \alpha_{11} P_1$ $\quad y_{22} = \alpha_{22} P_2$

(II): $y_{21} = \alpha_{21} P_1$ $\quad y_{22} = \alpha_{12} P_2$

↳ تنسیر مکان نقطه‌ی ۱ وقتی بار در نقطه‌ی 2 قرار دارد

$\rightarrow y_1 = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2$

$\rightarrow y_2 = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی}} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

به شیوه‌ی دیگر نمایش

به کمک روش اجزا محدود هم می‌شود ضرایب موجود در ماتریس سختی را پیدا کرد.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

این نمایش شبیه $F = kx$ است.

برای انرژی از سوپرپوزیشن نباید استفاده کنیم. اینجا فقط به ترتیب برای بارگذاری عامل می‌شویم.

(I): $U_1 = \frac{1}{2} P_1 y_{11}$

(I)+(II): $U_2 = \frac{1}{2} P_2 y_{22}$

$\therefore U_3 = P_1 y_{12}$

تقسیم کاستیگلیانو هم برای سیستم غیرخطی غیر دایل استفاده است.

اگر U_3 را یکجا بنویسیم می‌شد همان سوپرپوزیشن و این همان دلیلی است که سوپرپوزیشن برای اینجا قابل قبول نیست.

$$U = \text{انرژی کل} = \frac{1}{2}\alpha_{11} P_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_{22} P_2^2 + \alpha_{12} P_1 P_2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\alpha_{11} P_1^2 + 2\alpha_{12} P_1 P_2 + \alpha_{22} P_2^2\right] \quad (A)$$

اگر در U_3 به جای P_1 از P_2 استفاده می‌کردیم، انرژی کل به صورت زیر در می‌آمد.

$$U = \frac{1}{2}\left[\alpha_{11} P_1^2 + 2\alpha_{21} P_1 P_2 + \alpha_{22} P_2^2\right] \quad (B)$$

و چون هر دو انرژی برای یک سیستم هستند، پس نتیجه می‌شود:

$\alpha_{12} = \alpha_{21}$

که این تقسیم مشهور به قضیه ماکسول است.

* تقسیم ماکسول می‌گوید اگر دو نقطه‌ی دلخواه داشته باشیم و هر بار نیرو را یکی از

SUBJECT: مقاومت ۲ - ثانی

Year (Month (Date (

این نقاط قرار دهیم و تغییرمکان نقطه‌ی دیگر را اندازه بگیریم ، این دو تغییر مکان باهم برابر خواهند بود .

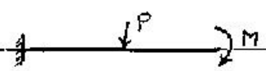
$\Rightarrow y_{12} = y_{21}$

* قضیه بتی - ماکسول :

$$\begin{cases} (y_{21} = \alpha_{21} P_1)^{\times P_2} \\ (y_{12} = \alpha_{12} P_2)^{\times P_1} \end{cases} \Rightarrow P_2 y_{21} = P_1 y_{12}$$

کار نیروی ۲ بر اثر تغییرمکانی که نیروی ۱ به وجود می‌آورد برابر است با کار نیروی ۱ بر اثر تغییرمکانی که نیروی ۲ به وجود آورده است .

لازم نیست حتماً نیرو باشند ، حتی گشتاور هم می‌تواند تغییرمکان ایجاد کند و ما می‌توانیم کار یک نیرو بر اثر تغییرمکانی که این گشتاور ایجاد کرده را محاسبه کنیم .



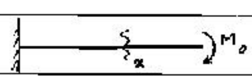
حال برگردیم به رابطه‌ی (A) ، داریم :

$$(A) \rightsquigarrow \frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 = y_1$$

* قضیه کاستیلیانو می‌گوید مشتق انرژی بر حسب نیرو ، جابه‌جایی زیر نیرو را به ما می‌دهد .

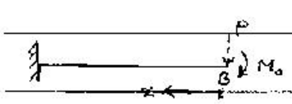
$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \delta_1$$

$$U = \int \frac{M^2(x)\,dx}{2EI} \rightsquigarrow \delta_1 = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial P}\,dx$$



$$\theta_M = \frac{\partial U}{\partial M} = \int \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial M}\,dx$$

$$M(x) = M_0 \quad , \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 1 \longrightarrow \theta = \int_0^l \frac{M_0 \times 1}{EI}\,dx = \frac{M_0 l}{EI}$$



اگر δ_B را می‌خواست ، چون ما باید فقط برای δ ، $\frac{\partial U}{\partial P}$ بگیریم ، یک P مجازی می‌گذاریم سر تیر ، آخرش قرار می‌دهیم $P = 0$

$$M(x) = Px + M_0 \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial P} = x$$

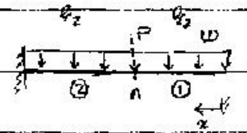
$$\delta_B = \int_0^l \frac{M_0 x}{EI}\,dx = \frac{M_0 l^2}{2EI}$$

$$M(x) = \frac{\omega x^2}{2} + Px \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = x$$

$$\delta = \int_0^l \frac{\omega x^3}{2EI}\,dx = \frac{\omega l^4}{8EI}$$

SUBJECT :

Year :　　Month :　　Date :

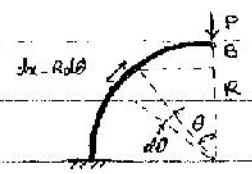


$$M_1 = \frac{\omega x^2}{2} \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

$$M_2 = \frac{\omega x^2}{2} + P\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad \frac{l}{2} \le x \le l$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0 \quad , \frac{\partial M_2}{\partial P} = \left(x - \frac{l}{2}\right) \quad \rightsquigarrow \delta_A = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\omega x^2}{2EI} \cdot 0 \cdot dx + \int_{l/2}^{l} \frac{\omega x^2}{2EI}\left(x - \frac{l}{2}\right) dx$$

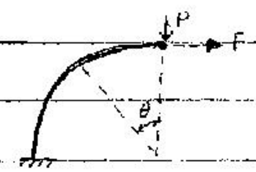
پس از این روش، θ یا δ ی هر نقطه را که خواستیم، یک P مجازی می‌گذاریم، حساب می‌کنیم.



$$M(\theta) = PR\sin\theta \qquad \frac{\partial M(\theta)}{\partial P} = R\sin\theta$$

$$\delta_B = \int \frac{PR\sin\theta}{EI} R\sin\theta \cdot Rd\theta = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta$$

تغییر مکان افقی B هم با همین روش بدست می‌آید.



$$M(\theta) = PR\sin\theta + FR(1-\cos\theta)$$

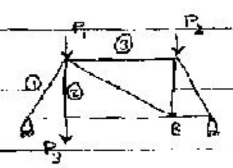
$$\frac{\partial M(\theta)}{\partial F} = R(1-\cos\theta)$$

$$F = 0$$

$$\delta_B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR\sin\theta}{EI} R(1-\cos\theta) Rd\theta = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos\theta)\, d\theta$$

۸۸/۱/۲۶

* روش کار مجازی (بار واحد)



مثلاً می‌خواهیم ببینیم نقطه B به ازای بارهایی که وارد کرده‌ایم، چقدر پایین می‌آید!

برای این کار اول یک بار واحد به B وارد می‌کنیم و نیروهای داخلی میله‌های

خرپا را حساب می‌کنیم (f_1 و f_2 و ... که f_i تغییر مکان هر کدام از میله‌هاست (deflection))

را به خاطر این نیروهای اصلی که قبلاً گذاشته بودیم را حساب می‌کنیم (F_1 و F_2 و ... نیروهای داخلی ناشی از P_1, P_2, P_3)

پس کار نیروهای داخلی عبارت است از: $\frac{F_1 l_1}{A_1E_1} f_1 \; , \; \frac{F_2 l_2}{A_2 E_2} f_2 \; , \ldots$

کار نیروی واحد ضرب در تغییر مکان B برابر با مجموع این کارهاست. پس δ بدست می‌آید.

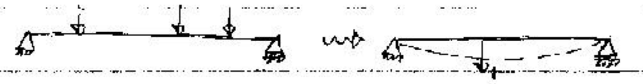
$$1 \times \delta = \sum \frac{F_i f_i l_i}{A_i E_i}$$

SUBJECT: مقاومت ۲ ـ ثانی

Year: ( ) Month: ( ) Date: ( )

برای خمش هم می‌توانیم همین کار را ایجاد کنیم. روی سازه‌ی خالی اول یک بار واحد می‌گذاریم، تنش‌ها را حساب می‌کنیم

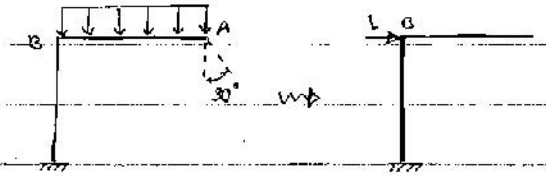
حالا بارهای اصلی را می‌گذاریم و تغییرمکان‌ها را حساب می‌کنیم. حالا کارها را حساب می‌کنیم با هم جمع می‌کنیم.



تغییرمکان $\frac{My}{IE}dx$ — نیرو $\frac{my\,dA}{I}$ — لنگر خمشی در سازه m به ازای بار واحد — لنگر خمشی در سازه M به ازای بار اصلی

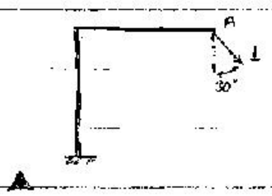
$$1\times\delta = \iint_A \frac{mMy^2}{I^2E}\,dA\,dx = \int \frac{Mm}{IE}\,dx \Rightarrow \delta = \int \frac{Mm}{IE}\,dx$$

مثال: تغییرمکان افقی در نقطه‌ی B:



تغییرمکان نقطه‌ی A در امتداد کج 30:

صورت سؤال، امتداد نیروی واحد را مشخص می‌کند.



از کار مجازی بیشتر برای خرپاها استفاده می‌شود.

یادت باشه در خرپا نیروهای خارجی رو به گره‌ها وارد کنی فقط!

برای پیچش هم همینطور اثبات می‌شود.

حتی اگر به جای بارگذاری روی خرپا، هر کدام از عضوهایش را مقداری گرم یا سرد کنیم:

تغییرطول $\alpha L\Delta t_i$ — نیرو f_i $\Rightarrow \delta = \sum f_i \alpha_i L_i \Delta t_i$

۳،۲، ۸۸ استاد نیامد!

۸۸ ،۲،۱۶

● مینیمم انرژی:

$\Pi = U - W$

$$EIy'' = M \Rightarrow \int \frac{M^2}{2EI}\,dx = \frac{1}{2}\int EI\,y''^2\,dx$$

$$\Pi = \int \frac{EI}{2}y''^2\,dx - \int w(x)\,y\,dx = \int \left[\frac{EI}{2}y''^2 - w(x)\,y\right]dx = \int F(x,y,y',y'')\,dx$$

SUBJECT :

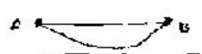
Year : Month : Date :

۲.۳ برای آنکه عبارت انتگرال مینیمم شود:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right)+\dots=0$$

↑ معادله‌ی اویلر

مثلاً با همین معادله‌ی اویلر می‌شه ثابت کرد که کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو نقطه مسیر مستقیم است.



$$S=\int\sqrt{1+y'^2}\,dx \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=k' \Rightarrow y'^2=\frac{k'}{1-k'}$$ ثابت

کتاب‌های applied physics را بخوانید!

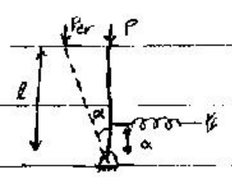
حالا یک سؤال II :

اویلر: $-w(x)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EIy'')=0 \Rightarrow EIy''''=w(x)$

پس از روش انرژی هم به همین پاسخ رسیدیم.

۲۸،۳،۶

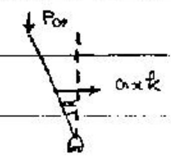
● کمانش ستون‌ها



اگر نیروی P کوچک باشد، زمانی که به ستون مقداری یک ضربه وارد می‌کنیم، ستون خودی یک نوسان می‌کند و سپس برمی‌گردد سر جای اولیه‌اش. اما زمانی که P خیلی بزرگ باشد (نیروی بحرانی) زمانی که ضربه می‌زنیم، کج می‌شود و دیگر سر جای اولیه‌اش برنمی‌گردد.

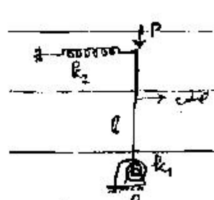
$\sin\alpha\simeq\alpha \quad \cos\alpha\simeq 1$

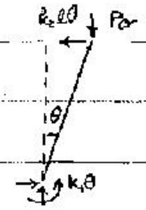
α را کوچک می‌گیریم و حل می‌کنیم. اگر بزرگ بگیریم هم به یک مسئله غیرخطی می‌رسیم که خیلی سخت حل می‌شود.



$$P\alpha l-\alpha k a\cdot a=0 \Rightarrow P_{cr}=\frac{ka^2}{l}$$

مثال:





$$\Sigma M_A=0 \Rightarrow k_2 l\theta l+k_1\theta-P_{cr}l\theta=0$$

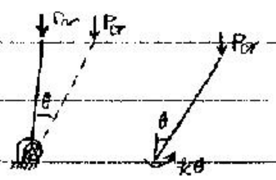
$$\Rightarrow P_{cr}=k_2 l+\frac{k_1}{l}$$

STAEDTLER

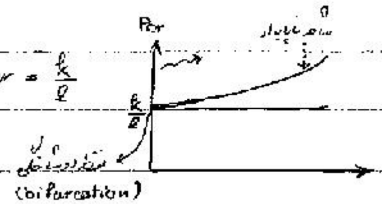
SUBJECT: مقاومت ۲ - ناری

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$P_{cr} \cancel{\propto} \theta$



$P_{cr}\,\ell\theta = k\theta \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{\ell}$

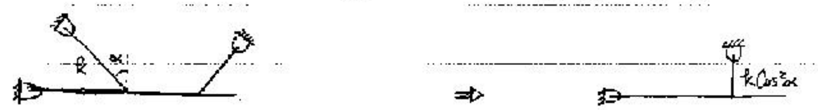


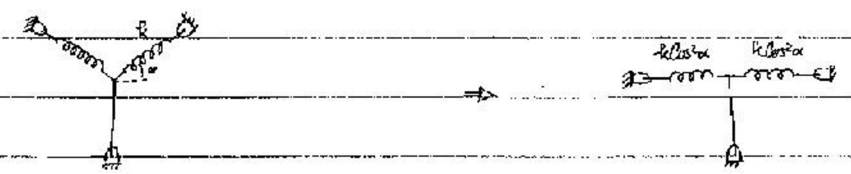
اگر زاویه θ را کوچک نگیریم : $P_{cr}\,\ell \sin\theta - k\theta = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{\theta}{\sin\theta}\,\frac{k}{\ell}$

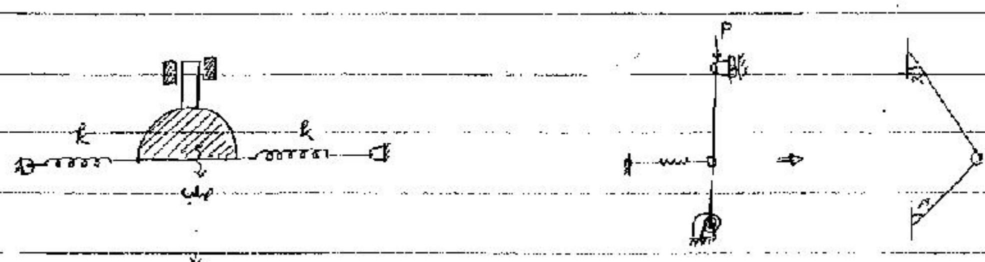
شکل متعادل هیچگاه خم نمی‌شود (دچار کمانش نمی‌شود). P هرچه باشد، باز هم خم نمی‌شود. اما اگر یک ضربه افقی به آن وارد شود، زاویه θ پیدا می‌کند [در ابتدا نوسان می‌کند و بعد در زاویه θ می‌ایستد] پس هرچه P بالا برود، θ صفر است

⇐ سازه ناپایدار

چون در اثر وارد شدن ضربه، دچار نوسان می‌شود. اما زمانی که زاویه θ پیدا می‌کند، اگر به آن ضربه‌ای وارد کنیم، نوسان می‌کند و باز هم در همان زاویه θ می‌ایستد. پس پایدار است ⇐ سازه پایدار







کتاب

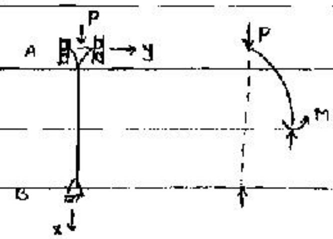
ΣM و ΣF را می‌نویسیم و ...

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اتصال مفصل-مفصل



$$EIy'' = M \;,\quad M = -Py \Rightarrow EIy'' = -Py \Rightarrow EIy'' + Py = 0$$

$$\Rightarrow \frac{P}{EI} = \lambda^2 \Rightarrow y'' + \lambda^2 y = 0$$

$$\Rightarrow y = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow y = A \sin \lambda x$$

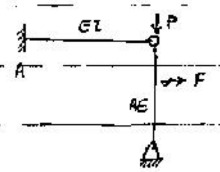
$$A \sin \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda^2 l^2 = n^2 \pi^2$$

چون در نقطه B لولا داریم، در نقطه A برای کمترین نیروی اصلی n را ۱ می‌گذاریم (چون لولا فقط تحمل نمی‌کند)

$$\frac{P_{cr}}{EI} l^2 = n^2 \pi^2 \Rightarrow P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

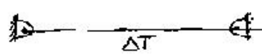
P_{cr} برای حالت‌های خاص به وجود می‌آید. (۴)



$$F = \frac{P}{\frac{3EI}{l^3} + \frac{AE}{l}} \cdot \frac{AE}{l}$$

اگر در A به جای دیوار، لولا باشد، کل P به تیر عمودی می‌رسد. (معلوم هم هست چون حول لولا لنگر نداریم)

حرارت بحرانی ؟



$$\frac{Fl}{AE} = \alpha l \Delta T \Rightarrow F = AE\alpha\Delta T$$

چون مفصل-مفصل است ⇐

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = AE\alpha\Delta T \Rightarrow \Delta T_{cr} = \checkmark$$

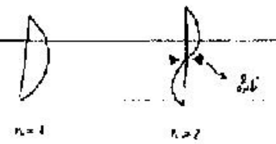
رابطه‌ای که برای P_{cr} در بالای صفحه بدست آوردیم، خطا دارد چون در هنگام نوشتن $M = EIy''$ تقریب زده‌ایم و باید از روابط روبرو استفاده کنیم تا به جواب کاملاً درست برسیم.

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \Rightarrow EIy'' - M(1+y'^2)^{3/2} = 0$$

10

SUBJECT : مقاومت ۲ [illegible]

Year ( ) Month ( ) Date ( )



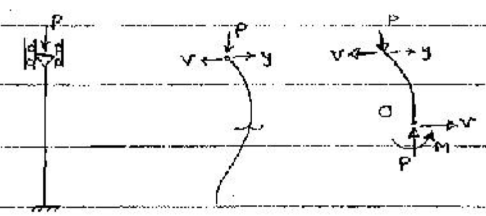
$\Rightarrow$ $l/2$ $\Rightarrow P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{l^2/4}=\frac{4\pi^2EI}{l^2}$ (x)

در واقع در اینجا سؤال این است که P_{cr} به ازای کدام n به وجود می‌آید

مثلاً فرض کنیم $P_{cr}=\frac{(1)^2\pi^2EI}{l^2}=500$ و $P_{cr}=\frac{(2)^2\pi^2EI}{l^2}=2000$ باشد یعنی به ازای 500 و 2000 این اتفاق می‌افتد

مثلاً به ازای 1500 و 4000 نمی‌افتد.

۸۸/۳/۱۳



$\Sigma M_O=0 \Rightarrow M+Py+Vx=0 \Rightarrow M=-Py-Vx$

$\frac{P}{EI}=\lambda^2$ [illegible]

$EIy''=M=-Py-Vx \Rightarrow EIy''+Py=-Vx$

$y=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x-\frac{V}{P}x$

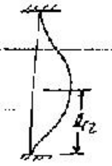
حال شرایط مرزی : $x=0, y=0 \Rightarrow B=0$

$x=l, y=0 \Rightarrow A\sin\lambda l=\frac{V}{P}l$

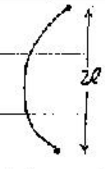
$x=l, y'=0 \Rightarrow A\cos\lambda l=\frac{V}{P}\times\frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow \tan\lambda l=\lambda l \Rightarrow \lambda l=4.493 \Rightarrow \frac{P}{EI}=\left(\frac{4.493}{l}\right)^2$

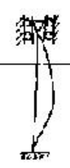
$\Rightarrow P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(0.7l)^2}$



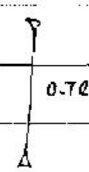
$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(l/2)^2}$

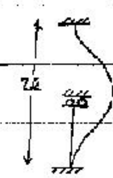


$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(2l)^2}$



=





$\frac{\pi^2EI}{(\frac{2l}{2})^2}=\frac{\pi^2EI}{l^2}$

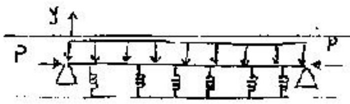
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

وقتی نیروی عرضی داریم ← می‌گیم تیر

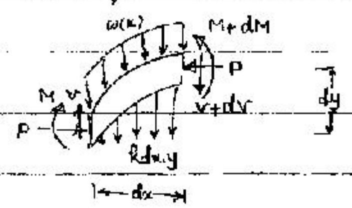
وقتی نیروی محوری داریم ← می‌گیم ستون

وقتی هر دو تا شو داریم ← تیر ستون



فرض کنیم تیر قابلیت به سمت بالا برود . و فرض کنیم زیر تیر هم فنر با سختی یا ساختمان.

k ی فنر را هم k (N/m) فرض می‌کنیم .



$$\sum F_y = 0 \qquad \sum F_x = 0$$

$$\omega\, dx - V + V + dV + k\,dx\,.\,y = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -ky - \omega \quad (I)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M + dM - M + P\,dy - V\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} + \frac{P\,dy}{dx} = V$$

$$EIy'' = M \Rightarrow EI\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dM}{dx} \quad , \quad EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2M}{dx^2}$$

$$\Rightarrow EIy''' + P\frac{dy}{dx} = V \quad (II)$$

۱ تست

$$(I), (II) \Rightarrow EIy'''' + Py'' + ky = -\omega(x) \quad III$$

اگر ستون بود و فنر هم نداشتیم معادله بالا به صورت زیر در می‌آید :

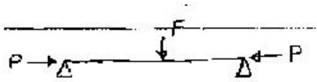
$$EIy'''' + Py'' = 0 \Rightarrow y'''' + \lambda^2 y'' = 0$$

که معادله مشخصه آن هم به صورت زیر حل می‌شود :

$$r^4 + \lambda^2 r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2 + \lambda^2) = 0$$

$Ae^{x} + Bxe^{x}$ ← ↳ $y = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + Cx + D$

که اگر شرایط مرزی را هم اعمال کنیم، حالت ... P_{cr} را می‌دهد که دیدیم .



③ نکته : اگر معادله III را حل کنیم یا چیزی شبیه آن را حل کنیم ، مثلاً این مسئله را :

y به صورتی کسری شبیه به کسر زیر در می‌آید که بار عرضی در صورت و بار محوری در مخرج ظاهر می‌شوند و هر چیزی مخرج را صفر کند بار بحرانی است .

$$y = \frac{F \dots}{\left(P - \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}\right)}$$

STAEDTLER®

* کمینه انرژی : چه مقدار انرژی لازم است تا کره‌ی زمین را نابود کنیم ؟

SUBJECT: حل تمرین مقاومت ۲

Year / Month / Date

۸۷/۱۲/۷

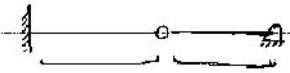
* مروری بر استاتیک

درجه آزادی یک سیستم همان تعداد مختصات لازم برای تعریف سیستم برابر است با : DOF = تعداد مجهولات − تعداد معادلات

نامعینی برعکس درجه آزادی است.

sys معین درجه آزادی اش برابر صفر و حالت ناپایدار می شود و اگر DOF آن منفی باشد، نامعین است.

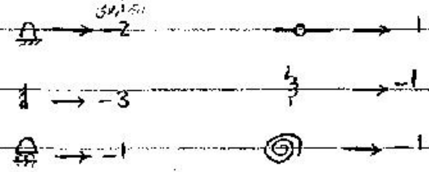
ممکن است بارگذاری به گونه ای باشد که تعدادی از مجهولات حتی در معادلات وارد نشوند و sys معین شود.



2x3 = تعداد معادلات
3+2+2 = 7 → درجه نامعینی = 1

در اثر بار محوری → 2x2 معادلات   2+1+1 = 4

هر قیدی، تعدادی از درجات نامعینی را می کاهد یا اضافه می کند.



هر درجه‌ی نامعینی به خاطر یک قید هندسی به وجود می‌آید و آن هم به‌جای خود یک قید فیزیکی به مسئله وارد می‌کند.

بنابراین شکلی به تنهایی معنا ندارد؛ هرکدام از قیدهای بالا، تعدادی درجه آزادی به آن اضافه می‌کنند.

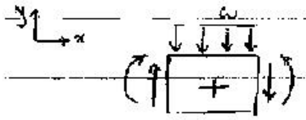
کشویی نسبت به چرخش قابلیت نگه داری دارد و یک درجه آزادی اضافه می‌کند.

⚠ برای تغییرمکان نباید از بار معادل استفاده کنیم و آن بار معادلی که در استاتیک پیدا می‌کردیم، فقط برای reaction ها و آن هم در سازه های معین، درست است.

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

⑦ روش توابع تکین　Singularity Functions



در مقطع مثبت، جهت برش‌ها (V_y) در جهت‌های مثبت محورها مثبت است، به طور w ها را به سمت پایین مثبت در نظر می‌گیریم.

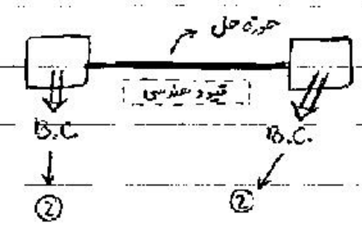
$$\begin{cases} \dfrac{dM(x)}{dx} = V(x) \\ \dfrac{dV(x)}{dx} = -\omega(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EIy''(x) = M(x) \\ EIy^{(4)}(x) = -\omega(x) \end{cases}$$

شرایط مرزی جابجایی از درجه ۱ (مشتق مرتبه صفر) — عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها وارد محاسبات می‌شود

شرایط مرزی تا نیروی برشی محاسبه شود! (درجه ۳)

عکس‌العمل‌ها اصلاً وارد نمی‌شوند

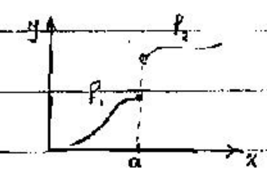
راه دوم حل (معادله دیفرانسیل مرتبه ۴) ما را مستقیماً به حوزه‌ی حل (خود تیر) ارجاع می‌دهد و دیگر نیازی به استفاده از استاتیک و پیدا کردن عکس‌العمل‌ها نیست.



در حالت عادی ما تیرها را با معادله مرتبه ۲ حل می‌کردیم ولی اگر در بارگذاری ناپیوستگی داشتیم (M چند ضابطه‌ای) انتگرال‌گیری مستقیم مشکل و پردردسر می‌شود. از توابع تکین برای پیوسته‌سازی استفاده می‌کنیم.

* حل مسائل با درجه ۴:
  - معادلات:
    - ۴ تا شرایط مرزی
    - معادلات قیود هندسی
  - مجهولات:
    - C_1, C_2, C_3, C_4 در نتیجه انتگرال‌گیری
    - قیود فیزیکی $\omega(x)$

← مسئله حل می‌شود!



$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \le a \\ f_2(x) & x > a \end{cases}$$

ناپیوستگی تابع بالا، هنگام محاسبات دردسرساز است. پس یک ضریب بدون بعد در f_1 و f_2 ضرب می‌کنیم به طوری که f_1 را در $x>a$ صفر کند و f_2 را بعد از a فعال کند و قبل از آن صفر نگه دارد.

۱۲

SUBJECT: حل تمرین مقاومت ۲

Year ( ) Month ( ) Date ( )

Heaviside $(x-a) \rightarrow \langle x-a\rangle^0 = \begin{cases} 0 & x<a \\ 1 & x>a \end{cases}$ مرزی سایر در $x=a$: نامعین است

unitstep مثل هوی‌ساید است ولی در $x \geq a$ مساوی ۱ داره!

$$n \geq 0 : \quad \langle x-a\rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & x \geq a \\ 0 & x<a \end{cases}$$

$\langle x-a\rangle^n$:

$$n<0 : \quad \langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \infty \ (\text{من-1}) & x=a \end{cases}$$

خواص مشتق و انتگرال :

$n \geq 0 : \quad \frac{d}{dx}\langle x-a\rangle^n = n\langle x-a\rangle^{n-1}$

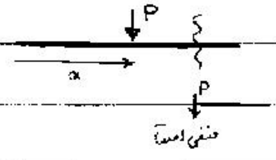
$$\int \langle x-a\rangle^n dx = \frac{1}{n+1}\langle x-a\rangle^{n+1}$$

$n<0 : \quad \frac{d}{dx}\langle x-a\rangle^n = \langle x-a\rangle^{n-1}$

$$\int \langle x-a\rangle^n dx = \langle x-a\rangle^{n+1}$$

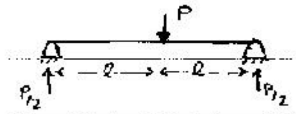
پس تابع منحنی پیش به صورت زیر، به کمک توابع تکین، پیوسته‌سازی می‌شود:

$f(x) = f_2(x)\langle x-a\rangle^0 + f_1(x) - f_1(x)\langle x-a\rangle^0$



$\Rightarrow V(x) = -P\langle x-a\rangle^0$ این $V(x)$ برشی است که P متمرکز در نیروی برشی سیستم وارد می‌کنه. اگر چند تا از این بارها داشتیم، کافی بود برای هر کدام اینطوری حساب کنیم، بعد superposition بزنیم.

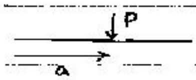
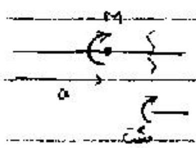
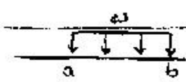
مثال ۱۴:



$V(x) = P/2 \langle x-0\rangle^0 - P\langle x-\ell\rangle^0 \longrightarrow M(x) = \int V(x)\,dx = P/2\, x - P\langle x-\ell\rangle$

$P/2$

▲

	ω	V	M
	$P\langle x-a\rangle^{-1}$	$-P\langle x-a\rangle^{0}$	$-P\langle x-a\rangle^{1}$
	$-M\langle x-a\rangle^{-2}$	$M\langle x-a\rangle^{-1}$	$M\langle x-a\rangle^{0}$
	$\omega\langle x-a\rangle^0$ $-\omega\langle x-b\rangle^0$	$-\omega\langle x-a\rangle^1$ $+\omega\langle x-b\rangle^1$	$-\omega/2\langle x-a\rangle^2$ $+\omega/2\langle x-a\rangle^2$

تا بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کند؛

$\omega(x) = k\langle x-a\rangle - k\langle x-b\rangle - k(b-a)\langle x-b\rangle^0$

$f(x) \rightarrow$ چندجمله‌ای

$x - a = y \rightarrow x = y + a \rightarrow f(x) = g(y) \rightsquigarrow y^3 \rightarrow \langle x-a\rangle^3 +$ ضریب ثابت $\langle x-a\rangle^0$

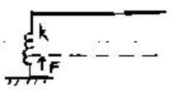
* شرایط مرزی

تکیه‌گاه ساده — $y'' = 0$, $y''' = 0$ — $y = 0$, $y'' = 0$

گیردار — $y = 0$, $y' = 0$ — $y''' = 0$, $y'' = 0$

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year ( ) Month ( ) Date ( )



$\oplus$

$F = k|y|$

$\downarrow$

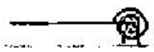
$EIy''' = -ky$

$\ominus \quad \ominus$

$EIy''' = +ky$

$\ominus \quad \ominus$

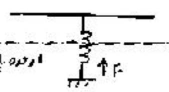
$EIy'' = ky'$



$EIy'' = -ky'$

* حالا تکیه‌گاه‌های وسط تیر (تکیه‌گاه میانی): (اینجا دیگه به جای E، EIy''' نمی‌ذاریم چون شرط مرزی نیست)

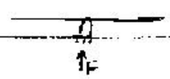
پس اینجا اول یه فرض برای تغییر مکان می‌گیریم بعد ω را می‌نویسیم



ادامه این

$\omega(x) = -F\langle x-a\rangle^{-1}$

$\frac{F}{k} = -y(a)$



$\omega(x) = -F\langle x-a\rangle^{-1}$

$y(a) = 0$

تغییر شیب

$y' = \Delta\theta \langle x-a\rangle^{0}$

$\omega(x) = \underbrace{-EI\,\Delta\theta}\langle x-a\rangle^{-3} \longrightarrow \omega(x) = \alpha\langle x-a\rangle^{-3}$

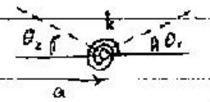
$\alpha \leftarrow$ ضریب مجهول

$y''(a^{\pm}) = 0$

SUBJECT :

Year : | Month : | Date :

۸۷/۱۲/۱۴ .



می‌دانیم فرض می‌کنیم دو طرف فنر با θ_1 و θ_2 کج شده باشد.

$$y' = \alpha (x-a)^0$$

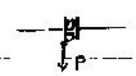
$$\theta_{\text{پیچش فنر}} = \theta_1 + \theta_2 = y'(a^+) - y'(a^-)$$

$M = k\theta$ فنر

$$M = EIy''(a)$$

این فنر وسط domain وارد شده، پس مثل شرایط مرزی توی EIy'' وارد نمی‌شه، بلکه معادله به صورت زیر در میاد:

$$M = k[y'(a^+) - y'(a^-)]$$

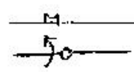


$$V(x) = -P\langle x-a\rangle^0 + f(x)$$

$$V(a^+) = -P + f(a) = 0$$

$$V(a^-) = f(a) = P$$

شرط ها از معادلات سازگاری، یکی از این دو تاست، فرقی نداره! ←
$$\begin{cases} V(a^+) = 0 \\ \text{یا} \\ V(a^-) = P \end{cases}$$



$$\begin{cases} M(a^-) = M \\ \text{یا} \\ M(a^+) = 0 \end{cases}$$

● روش حل:

۱) استفاده از $EIy^{(4)} = \omega$

$\boxed{\text{الف}}$ از استاتیک عکس العمل های تکیه‌گاه $x=0$ را بدست می‌آوریم و آنها را با توان های منفی در ω ظاهر می‌کنیم. در انتگرال گیری ها محاسبه‌ی $V(x)$ و $M(x)$ ثابت انتگرال‌گیری نمی‌گذاریم. ولی از M (EIy'') تا y دو ثابت قرار می‌دهیم.

قیود هندسی + C_1 و C_2 : مجهولات

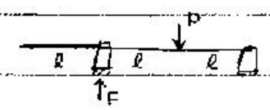
روابط سازگاری یا شرایط مرزی هندسی اضافی + شرایط مرزی هندسی : معادلات

STAEDTLER

وقتی داری روی شرایط فیزیکی انتگرال گیری می‌کنی نباید ثابت بذاری چون در واقع با وجود فیزیکی بودن شرط، ثابت‌ها خودشون از اول قرار داده شده‌اند. ولی وقتی داری از شرایط ریاضی انتگرال می‌گیری، ثابت‌ها را حتماً بذار!

متود هندسی اگر حل صد مسئله را ناممکن می‌کرد، همانطور که قبلاً گفتیم بوش می‌داریم و نیرو و اینها می‌ذاریم.
اگر مثل لولا و کشو، افزودن آنها، مستلزم افزودن یه شرط هندسی برای تأمین آن درجهٔ آزادی هندسی اضافه شده باشد، خودشان بطور خودبخود شرط را جاهای دیگه وارد کرده‌اند (در استاتیک از آن استفاده کرده‌ایم) و به درد ما نمی‌خورند.

$\boxed{ب}$ - بی‌خیال استاتیک (ه) $\leftarrow EIy^{(4)} = -\omega(x)$ بعد از هر انتگرال گیری یک ثابت اضافه می‌کنیم. وقتی به V رسیدیم، با اعمال شرایط مرزی، تکلیف ثوابت را مشخص می‌کنیم. حالا اگه نیروی بوشی می‌خواست، دوباره مشتق می‌گیریم اینها!
اینطوری واقعاً اصطلاحاً ... دور زدیم. (کلاً بی‌خیال یعنی اینکه استاتیک بلد نیستی!!)



$$\omega(x) = -F\langle x-\ell\rangle^{-1} + P\langle x-2\ell\rangle^{-1}$$

$$V(x) = F\langle x-\ell\rangle^{0} - P\langle x-2\ell\rangle^{0} + C_1$$

$$M(x) = F\langle x-\ell\rangle - P\langle x-2\ell\rangle + C_1x + C_2$$

$$EIy' = \frac{F}{2}\langle x-\ell\rangle^2 - \frac{P}{2}\langle x-2\ell\rangle^2 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIy = \frac{F}{6}\langle x-\ell\rangle^3 - \frac{P}{6}\langle x-2\ell\rangle^3 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

$$B.C.\begin{cases} y''(0)=0 \\ y'''(0)=0 \\ y(\ell)=0 \\ y(3\ell)=0 \\ y''(3\ell)=0 \end{cases} \longrightarrow F = P/2 \ \checkmark$$

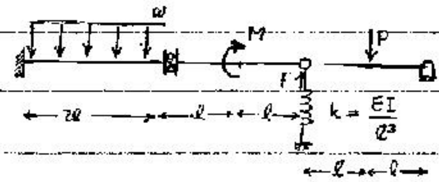
اگر در $x=\ell$ به جای لولا فنر گذاشته بودیم هم $F = P/2$ می‌بود (استاتیک) و این نشون می‌ده شرط $y(\ell)=0$ برای محاسبهٔ F اصلاً لازم نبود ولی برای محاسبهٔ C_i ها و... حتماً باید ازش استفاده کنیم؛ چون فنر و لولا هرکدام یه y متفاوت با ثوابت متفاوت به ما می‌دهند.
پس برای $EIy^{(4)}$ اصلاً از استاتیک استفاده نکنید، چون گیج می‌شید از لزوم معادله اضافه!

SUBJECT :

Year :   Month :   Date :

۲) استفاده از $M(x) = EIy''$

۴) مثال :



$$\omega(x) = \omega\langle x-0\rangle^{0} - \omega\langle x-2\ell\rangle^{0} + \beta\langle x-2\ell\rangle^{-2} - M\langle x-3\ell\rangle^{-2} + \alpha\langle x-4\ell\rangle^{-3} + P\langle x-5\ell\rangle^{-1}$$

$$- F\langle x-4\ell\rangle^{-1}$$

$$\text{B.C.}\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y(6\ell)=0 \\ y''(6\ell)=0 \end{cases}$$

وقتی از شرایط داخل (گوشت) تیر، در یک نقطه ای خبر داری،
می‌تونی براش از EIy'' و امثالهم استفاده کنی و بنویسی!

$$\text{معادلات سازگاری (شرط اضافی)}\begin{cases} y^{(3)}(2\ell^{\pm}) = 0 \\ y''(4\ell) = 0 \\ F = -k\,y(4\ell) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow C_1, C_2, C_3, C_4, \alpha, \beta, F \longrightarrow y(x)\ \checkmark$$

۷) سوپرپوزیشن :

هر سازه‌ای که مجموعه‌ای از تیکه‌های مستقیم باشه، از این روش حل می‌شه (البته تو کارمون نیست!)
این روش مثل روش توابع تکین نیست که y کل تیر رو به ما بده، بلکه می‌تونه y و شیب و ... یک نقطه رو بده!

● حل مسائل :

۱) از اصل سوپرپوزیشن استفاده می‌کنیم که برای سیستم‌های خطی برقرار است. پس وقتی مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل
داری، باید ببینی رابطه‌ی بین کدام‌ها خطی است، تا فقط برای همان‌ها super position بزنی!
ما می‌توانیم بین بار، نیرو و گشتاور با θ، شیب و y از این اصل استفاده کنیم!

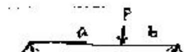
?

STAEDTLER

$$\Rightarrow \delta_A = \delta_{A_1} + \delta_{A_2} + \delta_{A_3} + \dots$$

در این فصل از جداول ته جانسون استفاده می‌کنیم. قرارداد کتاب بالا مثبته! $y \uparrow \rightarrow x$

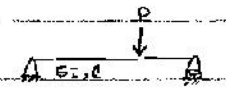
دقت کنید که کتاب شیب را در انتهای تیر می‌دهد و لزومی ندارد که بیشینه‌ی خیز هم حتماً در انتهای تیر باشد، یا شیب انتهای تیر بیشینه باشد.

تو جدول برای  $y(x)$ را برای $x<a$ گفته، با کمک همین جدول $y(x)$ را برای $x>a$ حساب کنید.

ما از هفته‌ی ۱ تا حالا با تغییرمکان‌های کوچک کار داشتیم.

وقتی زیر تیر می‌نویسه: EA یعنی از تغییرمکان محوری استفاده کن! اگه اطلاعات کامل نداد، یعنی از محاسبات آن دسته از تغییرمکان‌ها که آن‌ها را لازم داره، صرف‌نظر کن!

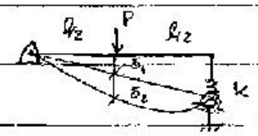
مثلاً اینجا چون A نداده، در راستای محور برای تغییرمکان‌ها صرف‌نظر می‌کنیم و فقط خمشی داره!



$$\delta_{A_v} = \frac{(P\cos\alpha)\ell^3}{48EI}$$

$$\delta_A^* = \delta_{A_v} \times \cos\alpha = \frac{P\cos^2\alpha\,\ell^3}{48EI}$$ اگر α معلوم بود ←

$$\alpha \ll 1 \rightarrow \delta_A^* = \delta_{A_v} = \frac{P\ell^3}{48EI}$$ اگر α کوچک و نامعلوم بود ←



در جدول سوپرپوزیشن، deflection تیر و شیبش را در دوسرگیردار، نسبت به خط واصل لولاها و در یک‌سرگیردار، نسبت به خط شیب صفر می‌دهد.

تالس $\delta_1 = \frac{1}{2}\delta_{\text{فنر}} = \frac{P}{4k}$

$\delta_2 =$ سرهای تیر را بگیر چون دوتا لولا داری! $= \frac{P\ell^3}{48EI}$

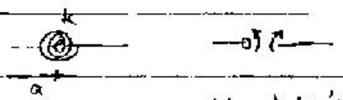
$\Rightarrow \delta_A = \delta_1 + \delta_2$ فقط مارک‌ها! هیچ‌کس زیادی قبول نیست!

SUBJECT

Year : Month : Date :

۸۷،۱۲،۲۱

اگر فنر پیچشی وسط تیر با لولا بود، لازم نیست اصلاً توجه به M وارد کنی، کافیه بنویسی مثل اینکه چون
از گوشه تیر جدا داری!



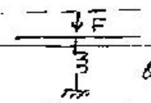
$$M = k(y'(a^+) - y'(a^-)) = EIy''(a^+)$$ رابطه سازگاری

$$w(x) = -F\langle x-a\rangle^{-1} \qquad V(x) = C\langle x-a\rangle^{0}$$

$$, -ky(a) = F$$

$$V(x) = EIy'''(a^-) = +ky(a^-)$$

وقتی شرایط مرزی گوشه رو داری، باید تحولات گسترده این عبارتو اضافه کنی،
می‌بایست برو برای اینکا $EIy^{(n)}$ بنویس!



$$w(x) = F\langle x-a\rangle^{-1}$$

$$\& \quad EIy^{(4)} = -F\langle x-a\rangle^{-1} + \cdots$$

$$F = +ky(a)$$

اینو با بالایی مقایسه کن!

برای فنرها همیشه یک جابجایی فرض کن و علامت نیرو و جابجایی را براساس فرضت تعیین کن و معادله را بساز.

* ادامه‌ی سوال پوزلین :

Before superposition: some useful points about using Mathematica and Maple! (:= → assignment ; = equal sign)

	Mathematica	Maple
Function names:	Solve (First char → Capital)	solve (First char → lower case)
Defining function:	f[x_, t_] := …	f(x) :=
Enter key:	Shift+Enter ویرایش / Enter اجرا	Both execute!
Call package:	<< Package name…	with (package name)

STAEDTLER For your strange functions you should call packages!

SUBJECT حل تمرین مقاومت مصالح ۲

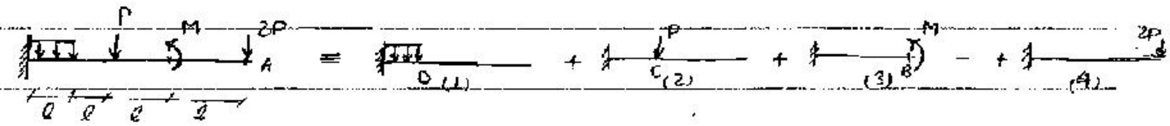
Year ( ) Month ( ) Date ( )

For solving ODE :	DSolve[{—— == …, B.C.s} ,y[x],x]	
Heaviside :	Heaviside Theta Unit Function	Heaviside
Simplifing :	FullSimplify[ ]	simplify (2 doostan)
Numerical Value of last calculated parameter :		N[%]

Mohammad Maleki's email address: m63_maleki@yahoo.com

Now SuperPosition Again :

θ_A , δ_A : « First Example »



به وقتایی که دقیقاً یکی از اینا رو نتونیم توی جدول پیدا کنیم. در اینگونه مواقع از بر نقطه‌ی کلی که شرایط مشابهش توی جدول هست استفاده می‌کنیم.

θ را کوچک فرض می‌کنیم.

$$\delta_{A_{(4)}} = \frac{(2P)(4l)^3}{3EI}, \quad \delta_{A_{(3)}} = \delta_B + l\theta_B = \frac{-M(3l)^2}{2EI} - l\,\frac{M(3l)}{EI} = \ldots$$

$$\delta_{A_{(2)}} = \delta_C + 2l\,\theta_C = \frac{P(2l)^3}{3EI} + (2l)\left(\frac{P(2l)^2}{2EI}\right)$$

$$\delta_{A_{(1)}} = \delta_D + 3l\,\theta_D = \frac{\omega l^4}{8EI} + (3l)\,\frac{\omega l^3}{6EI}$$

جهت پایین برای خط‌چین را مثبت گرفتیم.

$$\theta_{A_{(4)}} = \frac{(2P)(4l)^2}{2EI}, \quad \theta_{A_{(3)}} = \theta_{B_{(3)}} = \frac{-M(3l)}{EI}$$

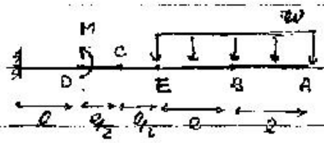
$$\theta_{A_{(2)}} = \theta_{C_{(2)}} = \frac{P(2l)^2}{2EI}, \quad \theta_{A_{(1)}} = \theta_{D_{(1)}} = \frac{\omega l^3}{6EI}$$

STAEDTLER

SUBJECT:

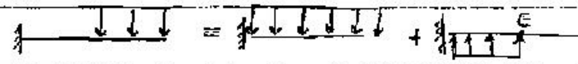
Year ( ) Month ( ) Date ( )

تکلیف ... های توابع تکین کاری نداریم، اینجا با همه‌ی اینا هندسی و جبری و علامت‌ها رو خودمون قرارداد می‌کنیم.



Next Example ← δ, θ های A, B, C:

$\delta_{A_1} = \delta_{D_1} + \theta_{D_1} l = \frac{-Ml^2}{2EI} - (3l)\frac{Ml}{EI}$

δ_{A_2}:  $\Rightarrow \delta_{A_2} = \frac{w(4l)^4}{8EI} - (\delta_C + 2l\theta_C)$

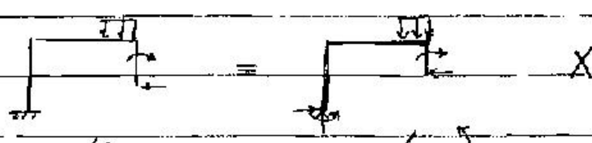
$\Rightarrow \delta_{A_2} = \frac{w(4l)^4}{8EI} - \frac{w(2l)^4}{8EI} - 2l\,\frac{w(2l)^3}{6EI}$

$\delta_A = \delta_{A_1} + \delta_{A_2} \Leftarrow \cdots$

برای حساب کردن δ_B، تیر را می‌شکانیم از B به بعد!

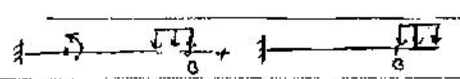
وقتی می‌خوای یک تکه را ببری باید برآیند استاتیکی معادل‌هاشو حساب کنی و در محل بریده‌شدن اعمال کنی تا برای بقیه‌ی تیر، شرایط تغییری نکند. البته برای اینکه بتونی ادامه‌ی تیر رو را حل کنی، باید به تعداد کافی قید برای معین شدن داشته باشد!

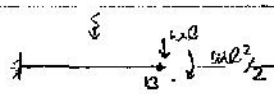
چون تو مقاومت مصالح معادله دیفرانسیل حل می‌کنی، وقتی می‌خوای معادل‌سازی کنی باید تمام عوامل و شرایط یکی بمونن!



(این تکه رو حواست، چه‌جوری می‌خوای حلش کنی؟!

حالا ادامه حل سوال:

تیر مسئله = 



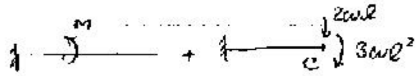
STAEDTLER®

V

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲
Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\delta_{B_1} = -\frac{M\ell^2}{2EI} - (3\ell)\frac{M\ell}{EI} + \frac{\omega(3\ell)^4}{8EI} - \frac{\omega(2\ell)^4}{8EI} - \ell\,\frac{\omega(2\ell)^3}{6EI}$$

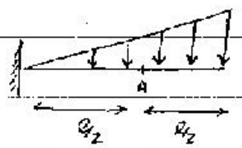
$$\delta_{B_2} = \frac{(\omega\ell)(3\ell)^3}{3EI} + \frac{(\frac{\omega\ell^2}{2})(3\ell)^2}{2EI}$$

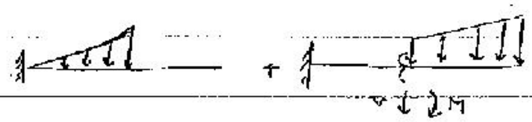
$\delta_C :$ $\equiv$ 

$$\delta_{C_1} = \frac{-M(\ell)^2}{2EI} - \frac{\ell}{2}\,\frac{M\ell}{EI}$$

$$\delta_{C_2} = \frac{(2\omega\ell)(3\ell/2)^3}{3EI} + \frac{(3\omega\ell^2)(3\ell/2)^2}{2EI}$$

* Next One *



راه اول $\equiv$ 

راه دوم $\equiv$ مستقیم از روش انتگرال می‌گیریم یعنی یک نیروی $\omega(x)\,dx$ می‌گیریم و تغییرمکانش رو حساب می‌کنیم (دیفرانسیل تغییرمکان)، حالا از این تغییرمکان دیفرانسیلی انتگرال می‌گیریم.

$$d\delta_{A_1} = \frac{[\omega(x)\,dx]\,x^3}{3EI} + (\ell/2 - x)\,\frac{[\omega(x)\,dx]\,x^2}{2EI} \qquad 0 \leq x \leq \ell/2$$

$$d\delta_{A_2} = \frac{[\omega(x)\,dx]}{3EI}(\ell/2)^3 + \frac{[\omega(x)\,dx\,(x-\ell/2)]\,(\ell/2)^2}{2EI} \qquad \ell/2 \leq x \leq \ell$$

پس

راه اول $\longrightarrow$ $\delta_A = \int \delta_{A_1} + \frac{V(\ell/2)^3}{3EI} + \frac{M(\ell/2)^2}{2EI}$

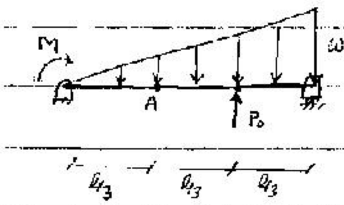
راه دوم $\longrightarrow$ $\delta_A = \int_0^{\ell/2} d\delta_{A_1} + \int_{\ell/2}^{\ell} d\delta_{A_2}$

در روابط بالا $\omega(x) = \frac{\omega}{\ell}x$ را جایگذاری می‌کنیم.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

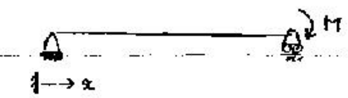
۸۷٫۱۲٫۲۲



δ_A , θ_A

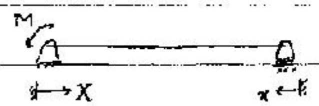
شکل را با چند بارگذاری ساده‌تر جمع آثار کنیم .

(۱) در جدول شکل زیر را داریم :



$y=\frac{-M}{6EIl}(x^3-l^2x)$

اگر به این شکل از پشت کاغذ نگاه کنیم به صورت مقابل در می‌آید :



پس کافیه در معادله‌ی y بالا به جای x قرار بدهیم $x-l$

تا معادله‌ی جدید نسبت به دستگاه X بدست آید :

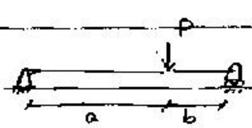
$X=l-x \rightarrow y=\frac{+M}{6EIl}[(l-x)^3-l^2(l-x)]$

$M\rightarrow -M$ نسبت به دستگاه کتاب و y بالا مثبت $\longrightarrow$ $y=\frac{-M}{6EIl}[(l-X)^3-l^2(l-X)]$ معادله جدید نسبت به دستگاه X ، y پایین مثبت

پس در شکل (۱) داریم :

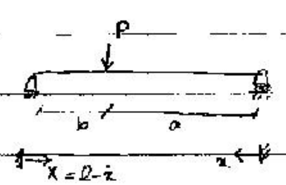
$\delta_{A_1}=\frac{-M}{6EIl}[(l-l/3)^3-l^2(l-l/3)]$

(۲) در جدول شکل زیر را داریم :



$x\le a:\ y=\frac{Pb}{6EIl}[x^3-(l^2-b^2)x]$

در این سؤال x ها کوچکتر از a است و می‌توانیم از همین رابطه استفاده کنیم . اما اگر $x>a$ بود ، از پشت کاغذ به تیر نگاه می‌کردیم ، داریم :



پس کافیه در فرمول جای a و b ها را عوض کنیم و به جای x هم بگذاریم $l-X$.

$x>a:\ y=\frac{Pa}{6EIl}[(l-x)^3-(l^2-a^2)(l-x)]$

5

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year (Month (Date ( )

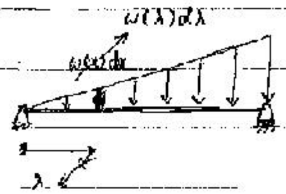
پس در شکل (2) داریم:
$$\delta_{A_2} = \frac{P(l/3)}{6EIl}\left[(l/3)^3 - (l^2-(l/3)^2)\,l/3\right]$$

وقتی تیرهای مستقیم را حل می‌کنیم قرارداد علامت‌های خطی و دلتا، پایین مثبت، ولی برای جانب و دوران، هر وقت هرچی بخواهد بود.

(3) یک دیفرانسیل نیرو می‌گیریم، چون دوتا ضابطه برای تغییر مکان داریم، پس انتگرال به دوتا انتگرال شکسته می‌شود.

اگر $x<l/3$ بود رابطه‌ی اولی و $x>l/3$ رابطه‌ی دومی را استفاده می‌کنیم. یه چیزی رو خاطر نشان کنم، در روابط داده شده x مختصات نقطه‌ای است که تغییر مکانش رو می‌خواهیم یعنی اینجا باید $l/3$ بگذاریم. این x مختصاتی که الان ازش استفاده می‌کنیم، مختصات $P(x)$ را نشان می‌دهد و با اون فرق داره.

برای اینکه قاطی نشه، به جای xها گذاشتیم λ.



$$d\delta_{A_{3,1}} = \frac{(\omega(\lambda)\,d\lambda)(l-\lambda)}{6EIl}\cdot\left[(l/3)^3-(l^2-(l-\lambda)^2)\cdot l/3\right] \qquad \lambda > l/3$$

$$d\delta_{A_{3,2}} = \frac{(\omega(\lambda)\,d\lambda)\cdot\lambda}{6EIl}\left[(l-l/3)^3-(l^2-\lambda^2)(l-l/3)\right] \qquad 0<\lambda<l/3$$

پس در شکل (3) داریم:
$$\delta_{A_3} = \int_0^{l/3} d\delta_{A_{3,2}} + \int_{l/3}^{l} d\delta_{A_{3,1}}$$

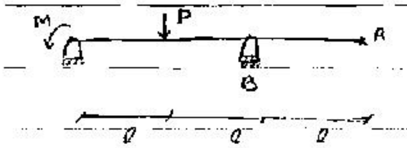
▲

برای شکل (1) اگر شیب می‌خواستیم اگر بخواهیم حل بالا را از اونور نگاه کنیم، θ رو از روی جدول نگاه می‌کردیم، علامتش رو از روی شکل تعیین می‌کنیم، اونور که M وارد می‌شه شیبش منفیه طبق اون طرفی که M نداره!

اما اگر می‌خواستیم تیر بالا رو حل کنیم (از اونور نگاه کنیم) باید اول θ رو به دست می‌آوردیم، بعد ازش مشتق می‌گرفتیم.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



θ_A ، δ_A ؟ :

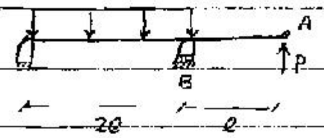
در جدول چیزی مثل A نداریم. اول برای نقطه‌ی کلی B

θ و δ را بدست می‌آوریم.

جهت مثبت θها با توجه جهتی که به δ می‌دهند (δ پایین مثبت) تعیین می‌شود.

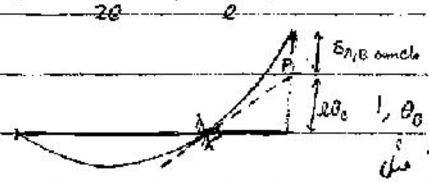
$$\theta_B = \frac{-P(2\ell)^2}{16EI} + \frac{M(2\ell)}{6EI} \quad , \theta_A = \theta_B \ \checkmark$$

$$\delta_A = \cancel{\delta_B}^{\,0} + \ell\theta_B = \left[\frac{-P(2\ell)^2}{16EI} + \frac{M(2\ell)}{6EI}\right]\ell \ \checkmark$$



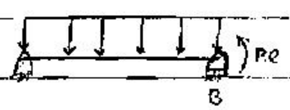
باز B را نقطه‌ی کلی می‌گیریم.

از روش «دیوار کردن» آقای ملکی بهره می‌بریم.



دیوار می‌شه anchor! چه جالب!

انحنای تیر به صورت مقابل خواهد بود. می‌توانیم بعد از اینکه θ_B را پیدا کردیم، در B یک دیوار در نظر بگیریم. بقیه‌ی δ_A دقیقاً مثل این است که یک نیروی P به یک تیر یک سر گیردار وارد کرده ایم. (δ برای تیر متصل به دیوار، نسبت به خط شیب صفر اندازه گیری می‌شود.



برای θ_B چون بین دو لنگه به اندازه‌ی کافی مفید است، قسمت اضافی تیر را می‌بریم و معادل استاتیکی آن را اعمال می‌کنیم.

$$\theta_B = \frac{(P\ell)(2\ell)}{3EI} + \frac{\omega\ell^3}{24EI}$$

$$\delta_A = \ell\theta_B + \delta_{A/B\ anch} \Rightarrow \delta_A = \checkmark$$

$$\delta_{A/B\ anch} = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

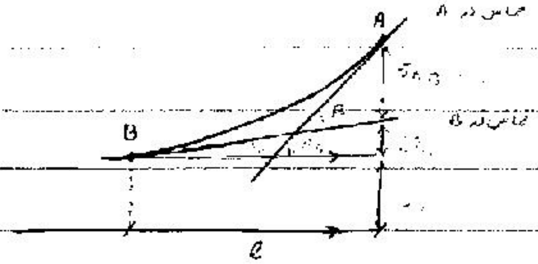
$$\theta_A = \theta_B + \theta_{A/B\ anch}$$

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حالا روش نکته کلی ، دیوار کردن به تفصیل :

فرض کنیم یک تکه از تیر را داریم ، برای نقطه‌ی A اطلاعات را می‌خواهیم و B نقطه‌ی مطلوبی است که می‌توانیم محاسبات را به راحتی برای آن انجام دهیم .



هرجا دوست داشتی یه خط مماس کن ،

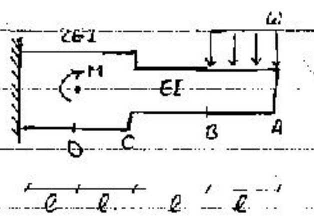
محور به خط مماس دیوار کن !!

هرجا دلت خواست دیوار کن !

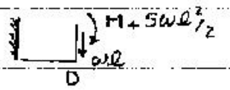
$$\delta_A = \delta_B + \ell\theta_B + \delta_{A,B}\ \text{anch}$$

$$\beta = \theta_{A/B}\ \text{anch} \rightarrow \theta_A = \theta_B + \theta_{A/B}\ \text{anch}$$ زاویه‌ی بیرونی مثلث θ_A

$\delta_A , \delta_B , \delta_C , \delta_D , \theta_A = ?$



δ_D :

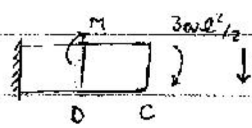


$$\rightarrow \delta_D = \frac{(M + 5\omega\ell^2/2)\ell^2}{2(2EI)} + \frac{(\omega\ell)\ell^3}{3(2EI)}$$

$$\theta_D = \frac{(M + 5\omega\ell^2/2)\ell}{(2EI)} + \frac{(\omega\ell)\ell^2}{2(2EI)}$$

$$\delta_C = \delta_D + \ell\theta_D + \delta_{C/D}\ \text{anch} \quad , \theta_C = \theta_D + \theta_{C/D\ \text{anch}}$$

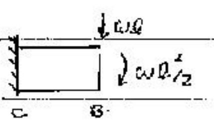
$\delta_{C/D\ \text{anch}}$:



$$\rightarrow \delta_{C/D\ \text{anch}} = \frac{(3\omega\ell^2/2)\ell^2}{2(2EI)} + \frac{(\omega\ell)\ell^3}{3(2EI)}$$

$$\theta_{C/D\ \text{anch}} = \frac{(3\omega\ell^2/2)\ell}{(2EI)} + \frac{(\omega\ell)\ell^2}{2(2EI)}$$

$$\delta_B = \delta_C + \ell\theta_C + \delta_{B,C}\ \text{anch} \quad , \theta_B = \theta_C + \theta_{B,C}\ \text{anch}$$



$$\rightarrow \delta_{B/C\ \text{anch}} = \frac{(\omega\ell)\ell^3}{3EI} + \frac{(\omega\ell^2/2)\ell^2}{2EI}$$

SUBJECT :

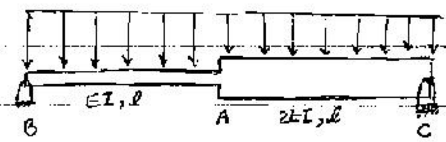
Year / Month / Date

$$\theta_{B,C\ anch} = \frac{(\omega l)l^2}{2EI} + \frac{(\omega l^2/2)l}{EI}$$

$$\delta_A = \delta_B + l\theta_B + \delta_{A,B\ anch} \quad , \quad \theta_A = \theta_B + \theta_{A,B\ anch}$$

$\delta_{A,B\ anch} \Rightarrow$ 

$= \frac{\omega l^4}{8EI}$ $\quad \theta_{A,B\ anch} = \frac{\omega l^3}{6EI}$



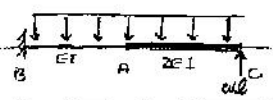
δ_A, θ_A

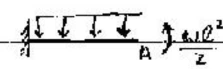
برای اینکه راحت باشید، یک سمت را برای همه چی مثبت بگیرید.

الان به سمت بالا همه چی رو مثبت گرفتیم.

$$\delta_C = \delta_B + 2l\theta_B + \delta_{C,B\ anch}$$

$$\rightarrow \delta_{C,B\ anch} = -2l\theta_B \quad \rightarrow \theta_B = -\frac{1}{2l}\,\delta_{C,B\ anch}$$



$\rightarrow$ 

$$\delta_{C,B\ anch} = \delta_{A,B\ anch} + l\theta_{A,B\ anch} + \delta_{C,A\ anch}$$

$$= \left(\frac{\omega l^4}{8EI} - \frac{(\omega l^2/2)l^2}{2EI}\right) + l\left[\frac{\omega l^3}{6EI} - \frac{(\omega l^2/2)l}{EI}\right] + \left[\frac{\omega l^4}{8(2EI)} - \frac{(\omega l)l^3}{3(2EI)}\right]$$

حالا که θ_B معلوم شد، B را مرجع می‌گیریم

$$\delta_A = \underset{0}{\delta_B} + \underset{\checkmark}{l\theta_B} + \underset{\checkmark}{\delta_{A,B\ anch}}$$

(٧)

$$\delta_A = \delta_B + l\theta_B + \delta_{A,B\ anch}$$

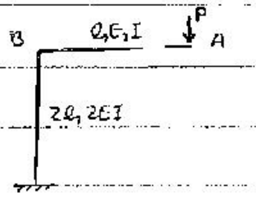
$\Rightarrow \delta_{A,B} = \delta_A - \delta_B = l\theta_B + \delta_{A,B\ anch}$ تغییر مکان نسبی عرضی

در راستای خط عمود بر خط واصل AB

$\delta_{A,B}$ محوری $\rightarrow$ در راستای خط واصل AB مثل $\frac{Pl}{AE}$, $\int \frac{F(x)dx}{A(x)E(x)}$

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

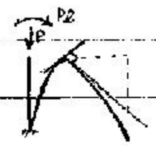
Year ( ) Month ( ) Date ( )



(11) یه تاب ! δ_{A_H} , δ_{A_V} Vertical

↳ Horizontal

در نقطه‌ی B دو تا میله بر هم عمودند پس بعد از deformation هم باید همان زاویه‌ی را با هم داشته باشند که قبل از آن داشته باشند.



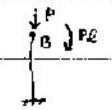
هر چقدر هم B عمودی بیاد پایین یا بالا، A هم همونقدر میره!

فرض می‌کنیم A نسبت به B تغییر مکان محوری ندارد!

در جدول دفتا برای تیرهای مستقیم داریم پس باید نسبت به نقاطی که شکستگی داریم، نسبی بنویسیم و بریم جلو.

$\delta_{A_H} = \delta_{A/B_H} + \delta_{B_H}$

EI وقتی نوشتیم یعنی سختی محوری اینقدر زیاده که با A کاری نداریم.

δ_{B_H} :  $\Rightarrow \delta_{B_H} = \dfrac{(P\ell)(2\ell)^2}{2(2EI)}$

$\delta_{A/B_H} = 0 \Rightarrow \delta_{A_H} = \delta_{B_H}$ ✓

↳ می‌آییم نگاه می‌کنیم تغییر مکان افقی نسبی از نوع عرضیه یا محوری، بعد حسابش می‌کنیم.

$\delta_{A_V} = \delta_{A/B_V} + \underbrace{\delta_{B_V}}_{0}$

چون A نداشته روی تیر (سطح مقطع نداره) پس δ_{B_V} قابل صرف نظر کردنه!

$\delta_{A/B_V} = \ell\theta_B + \delta_{A/B\ \text{anch}}$

$\theta_B = \dfrac{(P\ell)(2\ell)}{(2EI)}$

$\Rightarrow \delta_{A/B_V} = $ ✓

$\delta_{A/B\ \text{anch}} = \dfrac{P(2\ell)^3}{3(2EI)}$

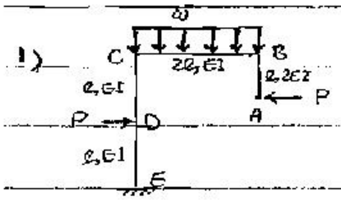
عید سعید مبارک! اولین هفته بعد از عید ۲ تا کوئیز و تحویل تمرین داریم!

STAEDTLER

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

۸۸ / ۱ / ۲۶

1) 

Find : δ_{A_H} , δ_{A_V} 　 جهت مثبت 　 $+\rightarrow$ 　 $\downarrow +$

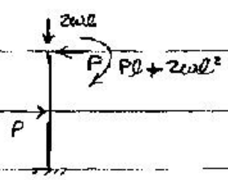
θ_A

$\delta_{A_H} = \delta_{A,B_H} + \delta_{B,C_H} + \delta_{C_H}$

$\delta_{A,B_H} = \ell\theta_B + \delta_{A,B\ \mathrm{anch}}$

$\delta_{B,C_H} = 0$ 　 برای B,C نیروی محوری داریم ولی چون AE زیاده از δ اش صرف نظر می‌کنیم.

$$\delta_{C_H} = \frac{P\ell^3}{3EI} + \ell \cdot \frac{P\ell^2}{2EI} + (P\ell + 2\omega\ell^2)\frac{(2\ell)^2}{2EI} - \frac{P(2\ell)^3}{3EI}$$

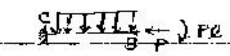


اینجا چون طول CE یکنواخت و EI داره هر جاش می‌تونیم مستقیم برای C بنویسیم ولی اگر یکنواخت نبود، باید یه بار برای D می‌نوشتیم و بعد برای C.

(مثلاً از C تا D، EI و از D تا E، 2EI بود)

$$\theta_B = \theta_{B,C} + \theta_C$$

$$\theta_{B,C} = \theta_{B,C\ \mathrm{anch}} = \frac{-\omega(2\ell)^3}{6EI} - \frac{(P\ell)(2\ell)}{EI}$$

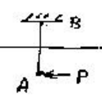


$$\theta_C = \frac{-P\ell^2}{2EI} - \frac{(P\ell + 2\omega\ell^2)(2\ell)}{EI} + \frac{P(2\ell)^2}{2EI}$$

$\Rightarrow \theta_B = \checkmark$

دقت کن که برای تعیین علامت θ ها هنگام محاسبه‌ی θ_C، جهتی را مثبت گرفتیم که در نتیجه‌ی اون θ، تغییر مکان A، مثبت باشد.

$$\delta_{A/B\ \mathrm{anch}} = \frac{-P\ell^3}{3(2EI)}$$



در هر لحظه علامت θ ها رو چک کن که تغییر مکان مثبت می‌دهد یا منفی!

$\delta_{A_V} = \delta_{A,B_V} + \delta_{B,C_V} + \delta_{C_V}$

$\delta_{A,B_V} = 0$ 　 (محوری)

$\delta_{B,C_V} = 2\ell\theta_C + \delta_{B,C\ \mathrm{anch}}$ 　 , 　 $\delta_{B,C\ \mathrm{anch}} = \dfrac{\omega(2\ell)^4}{8EI} + \dfrac{(P\ell)(2\ell)^2}{2EI}$

$\delta_{C_V} = 0$ 　 (محوری)

$$\theta_A = \theta_{A,B} + \theta_{B,C} + \theta_C \quad , \quad \theta_{A,B} = \theta_{A,B\ \mathrm{anch}} = \frac{-P\ell^2}{2EI}$$

STAEDTLER

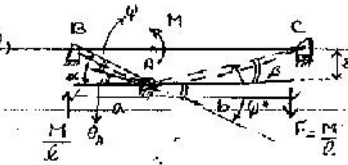
● روش لولا کردن ، این هم یک روش نقطه‌ای کلی است . به بیان کلی ، می‌بایست تغییر شیب را لحاظ کنیم .

ولی اینجا باید deflection ها را لحاظ کنیم .

از آنجایی که کتاب شیب به خط واصل لولاها داده ، باید حواسمون جمع باشه!

این روش یه ذره حل هندسی و بازی با زوایا داره!

2)



حالا با شکل جدید منحنی کاری نداریم ، مهم فرضیه که برای شیب و تغییر مکان در نظر مورد نظر می‌کنیم . اگر همه‌ی محاسبات رو درست انجام بدیم ، اگر حتی فرض ما غلط بود ، جواب منفی در میاد . همین!

اول یه فرض برای تغییر مکان و شیب نقطه می‌کنیم . توی نقطه یه لولا می‌گذاریم و خط واصل لولاها رو رسم می‌کنیم ، چون می‌خواهیم معین سیستم رو ببریم ، باید عکس العمل‌ها رو محاسبه کنیم و روی لولای جدید بگذاریم . حالا از دو طرف δ را محاسبه می‌کنیم .

θای که جدول به ما می‌دهد زاویه‌ی بین خط مماس با خط واصل است .

$\alpha \rightarrow$ زاویه بین خط واصل جدید با خط افقی   زاویه بین خط مماس و واصل $\leftarrow \psi$

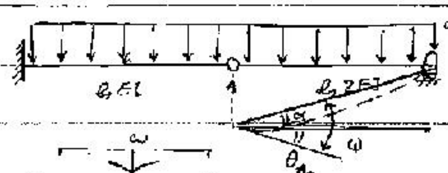
$\delta_A = \alpha . a$ $\delta_A = \beta . b$

$\alpha = \theta_A + \psi$ $\beta = \psi^* - \theta_A$

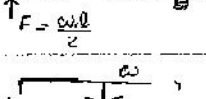
$\psi = \frac{(M.a/\ell)a}{3EI}$ $\psi^* = -\frac{(M.b/\ell)b}{3EI}$

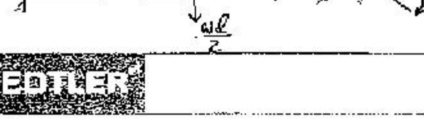
$$\delta_A = \alpha.a = \beta.b \Rightarrow a\left(\theta_A + \frac{\frac{Ma^2}{\ell}}{3EI}\right) = b\left(\frac{\frac{Mb^2}{\ell}}{3EI} - \theta_A\right) \Rightarrow \theta_A = \checkmark \ , \ \delta_A = \checkmark$$

3)



Find : $\Delta\theta_A$

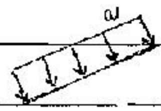




$$\delta_A = \frac{\omega\ell^4}{8EI} + \frac{(\frac{\omega\ell}{2})\ell^3}{3EI}$$

$$\theta_{A-} = \frac{\omega\ell^3}{6EI} + \left(\frac{\omega\ell}{2}\right)\frac{\ell^2}{2EI}$$

SUBJECT :
Year (   ) Month (   ) Date (   )



$$\theta_{A_+} = \psi - \alpha$$

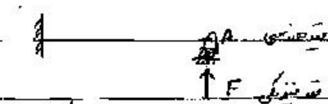
$$\psi = \frac{w l^3}{24(2EI)} , \alpha = \frac{\delta_A}{l} \Rightarrow \theta_{A_+} = \checkmark$$

$$\Delta\theta_A = \theta_{A_+} - \theta_{A_-} = \checkmark$$

● حالا مسائل نامعین استاتیکی :

یک حلقه‌ی بسته سه درجه نامعین است.

هر قید هندسی اضافی یه قید فیزیکی اضافه وارد دستگاه می‌کند که آن هم یک درجه به نامعینی اضافه می‌کند.



قید هندسی در واقع تعبیر جبری قید فیزیکی است و یک معادله‌ی اضافی به ما می‌دهد که آن را رابطه‌ی سازگاری می‌نامند.

وقتی می‌خوای یه سیستم نامعین رو حل کنی، اول باید نامعینی رو رفع کنی. پس هرجا قید هندسی دیدی، به جاش یه قید فیزیکی بگذار و معادله‌ی اضافی رو هم بنویس و قید هندسی رو کلاً بردار.

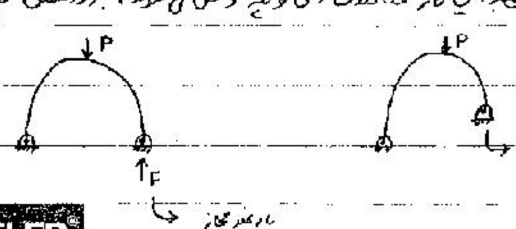
اگر مجهول دیگری هم در مسئله بود، به کمک معادلات تعادل استاتیکی آن را برحسب قیود فیزیکی بالا بدست می‌آوریم.

در آخر یه دستگاه n معادله n مجهول حل می‌کنیم.

بعضی از قیدها رو نمی‌شود حذف کرد و به جاش قید فیزیکی گذاشت. تعبیر جبری اش اینه که اگه این کار رو بکنیم، معادلات دی‌کوپله می‌شوند و یه جواب غلط برای قید فیزیکی درمی‌یاد. و تعبیر فیزیکی اش اینه که وقتی برش می‌داریم، سیستم ناپایدار می‌شود.

و قید فیزیکی‌ات exact مشخص می‌شود

اگر دیدی وقتی یک قید رو برمی‌داری و در نتیجه این کار معادلات دی‌کوپله و حل می‌شوند، برداشتن قیدت کار غلطیه!



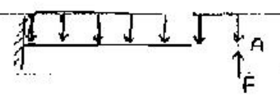
اینجا می‌توانی قیدت رو برداری، قید فیزیکی و معادلات اضافی رو بگذاری!

ولی نیروی افقی رو می‌تونیم بذاریم!

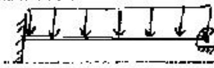
SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year : Month : Date :

4)



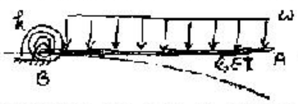
$+ \ \delta_{A_V} = 0$



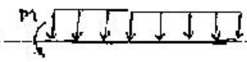
$$\delta_{A_V} = \frac{\omega \ell^4}{8EI} - \frac{F\ell^3}{3EI} = 0 \Rightarrow F = \frac{3}{8}\omega \ell$$

۸۸/۱/۳۱

1)



$\Rightarrow$



محاسبه δ_A و θ_A با ...!

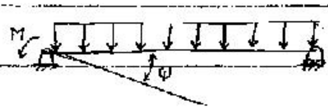
روش ۱: تحلیلی

$$M = \frac{\omega\ell^2}{2} \rightarrow \theta_{\text{فنر}} = \theta_B = \frac{M}{k} = \frac{\omega\ell^2}{2k}$$

$$\delta_A = \delta_B + \ell\theta_B + \delta_{A/B \text{ arch}} = 0 + \ell \cdot \frac{\omega\ell^2}{2k} + \frac{\omega\ell^4}{8EI}$$

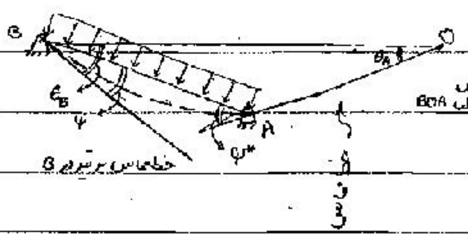
$$\theta_A = \theta_B + \theta_{A/B \text{ arch}} = \frac{\omega\ell^2}{2k} + \frac{\omega\ell^3}{6EI}$$

روش ۲: لولا کردن



$$\theta_B = \frac{\omega\ell^2}{2k}$$

$$\psi = \frac{\omega\ell^3}{24EI} - \frac{\left(\frac{\omega\ell^2}{2}\right)\ell}{3EI} = -\frac{\omega\ell^3}{8EI}$$

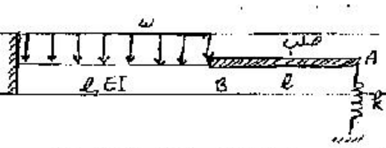


$$\delta_A = \ell(\theta_B - \psi) = \ell\left(\frac{\omega\ell^2}{2k} + \frac{\omega\ell^3}{8EI}\right) = \ell\frac{\omega\ell^2}{2k} + \frac{\omega\ell^4}{8EI}$$

زاویه خارجی مثلث BOA

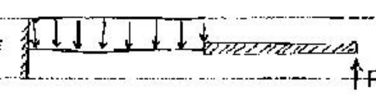
$$\theta_A = \psi^* - (\theta_B - \psi) = \left[\frac{\omega\ell^3}{24EI} - \frac{\left(\frac{\omega\ell^2}{2}\right)\ell}{6EI}\right] - \left[\frac{\omega\ell^2}{2k} - \left(\frac{\omega\ell^3}{24EI} - \frac{\left(\frac{\omega\ell^2}{2}\right)\ell}{3EI}\right)\right]$$

2)



نیروی فنر مطلوب است! ... نامعین است.

$=$



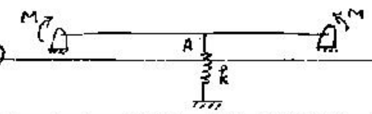
$+ \ \delta_A = \delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{k}$

جهت δ_A و F علامت را تعیین می‌کند.

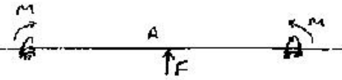
$$\delta_A = \left[\frac{\omega\ell^4}{8EI} + \ell \cdot \frac{\omega\ell^3}{6EI}\right] + \left[-\frac{F\ell^3}{3EI} - \frac{(F\ell)\ell^2}{2EI} - \ell\left(\frac{F\ell^2}{2EI} + \frac{(F\ell)\ell}{EI}\right)\right]$$

SUBJECT :

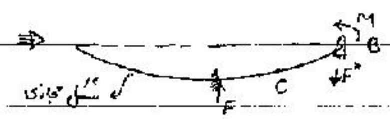
Year (   ) Month (   ) Date (   )

3) 

مفروض است که شیب وسط صفر است!

=  $\delta_A \overset{\downarrow\oplus}{} = \frac{F}{k}$

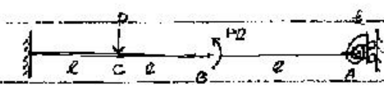
جالب!

$\Rightarrow$ 

شکل مجازی

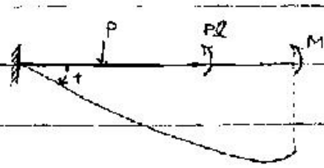
$\underset{\text{شکل اصلی}}{\delta_A} \overset{\downarrow\oplus}{} = \underset{\text{شکل مجازی}}{\delta_B} \overset{\uparrow\oplus}{}$ $\quad \underset{\text{شکل اصلی}}{\delta_C} = \underset{\text{مجازی}}{\delta_B} - \underset{\text{مجازی}}{\delta_C}$

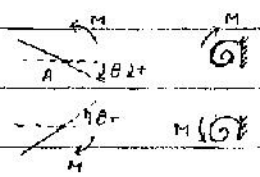
استاتیک $F^* = \frac{F}{2}$ $\qquad = \frac{M(\ell/2)^2}{2EI} - \frac{F^*(\ell/2)^3}{3EI} = \frac{F}{k} \Rightarrow F = \checkmark$

4) 

یک درجه نامعین

مطلوب است δ_A !





$\theta_A = \theta_{\text{فنر}} = \frac{M}{k}$

$\underbrace{\theta_A = \theta_{\text{فنر}}}_{\text{رابطه سازگاری}} = \frac{M}{k}$

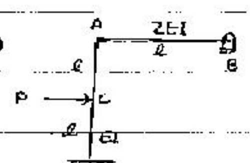
$$\theta_A = \frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{(P\ell)(2\ell)}{EI} - \frac{M(3\ell)}{EI} = \frac{M}{k}$$

وقتی فنر در تیر قرار می‌گیرد تیر سخت‌تر می‌شود پس θ و δ و ... باید کمتر شود.

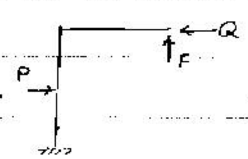
پس M سمت راست و M سمت چپ باید مختلف العلامه باشند که در یک طرف با هم جمع شوند.

$$M = \frac{-\frac{3}{2}P\ell^2/EI}{1/k + 3\ell/EI}$$

اگر منفی باشد، M بزرگتر می‌شود و θ بزرگتر، پس باید مثبت باشد

5) 

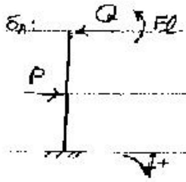
R_B مطلوب است!

$\Rightarrow$  $+ \begin{cases} \delta_{B_H} = 0 \\ \delta_{B_V} = 0 \end{cases}$

دو درجه نامعین

$\delta_{B_H} = \delta_{B/A_H} + \delta_{A_H} = 0 + \delta_{A_H}$ $\Rightarrow$ $+\downarrow \overset{+}{\leftarrow}$ F, Q ✓

$\delta_{Bv} = \delta_{B/Av} + \delta_{Av} = (\ell\theta_A + \delta_{B/A\ \text{anch}}) + 0$

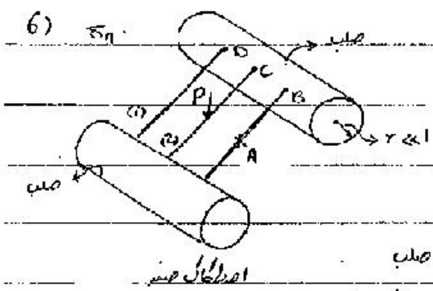


$$\delta_{A_H} = \frac{Q\,(2\ell)^3}{3EI} + \frac{(F\ell)\,(2\ell)^2}{2EI} - \left[\frac{P\ell^3}{3EI} + \ell\cdot\frac{P\ell^2}{2EI}\right]$$

$$\theta_A = \frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{Q(2\ell)^2}{2EI} - \frac{(F\ell)(2\ell)}{GI}$$

$$\delta_{B/A\ \text{anch}} = -\frac{F\ell^3}{3(2EI)}$$

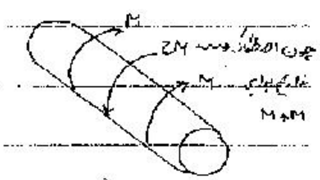
6) δ_A:

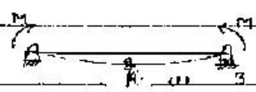


اگر صلب نباشد، G داشته باشد، از ۲ صرف نظر کنیم، اصطکاک وجود
داشته باشد، دو جسم که به هم جوش خورند خمشی روی یکی پیچشی روی دیگری

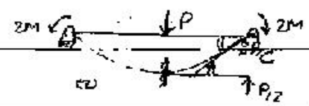
صلب $\Leftarrow \theta_C = \theta_B$ تقارن $\Rightarrow M_B = M_C$

اصطکاک صفر $\Rightarrow M_B = \frac{1}{2} M_C$





شیب وسط صفره! $\Rightarrow$ تقارن MA



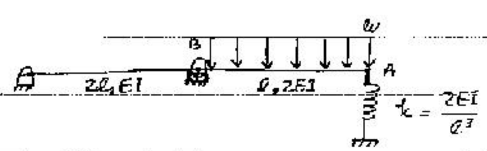
$$\theta_C = \frac{(P/2)(\ell/2)^2}{2EI} - \frac{(2M)(\ell/2)}{EI}$$

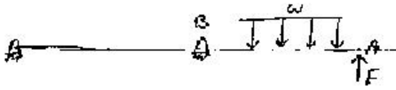
$$\theta_B = \frac{M\ell}{3EI} + \frac{M\ell}{6EI}$$

$\Rightarrow M = \frac{3}{8}P\ell$ $\qquad \delta_A = \frac{M(\ell/2)^2}{2EI} = \frac{3}{64}\frac{P\ell^3}{EI}$

۸۸/۲/۲

۱) مثال کوئیز شماره ۳: θ_A را بیابید





$\delta_A = \delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{k} = \frac{F\ell^3}{2EI}$

$$\theta_B = \frac{\left(\frac{w\ell^2}{2} - F\ell\right)(2\ell)}{3(EI)}$$

SUBJECT :

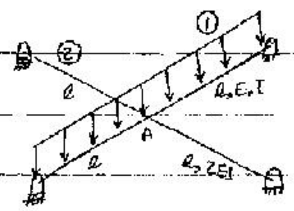
Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\delta_A = \delta_B + \ell\theta_B + \delta_{A/B\,anch} \Rightarrow F = \checkmark$$

$$\theta_A = \theta_B + \theta_{A/B\,anch} = \frac{\left(\frac{w\ell^2}{2} - F\ell\right)(2\ell)}{3(EI)} + \frac{w\ell^2}{6(2EI)} - \frac{F\ell^2}{2(2EI)}$$

△

2) تماس دارند، جوش نخورده‌اند. $\delta_A = ?$



اگر جوش خورده باشند، θ_{A_1} با θ_{A_2} برابر است. (البته اگر تیر ② دیوار باشد) لنگر خمشی روی ① برابر است با لنگر پیچشی روی ②

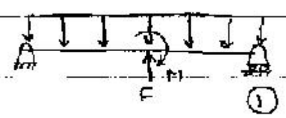
* کلاً دو تا تیر که به هم جوش بخورند، لنگر خمشی روی یکی از تیرها، لنگر پیچشی روی دیگری است.

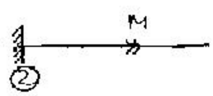
اما در سؤال گفته تماس دارند، جوش نخورده‌اند:

$$\delta_{A_{\text{بالایی}}} = \delta_{A_{\text{پایینی}}} \quad \downarrow \oplus$$

$$\delta_{A_{\text{بالایی}}} = \frac{5w(2\ell)^4}{384\,EI} - \frac{F(2\ell)^3}{48EI} = \frac{F(2\ell)^3}{48(2EI)} \Rightarrow F = \checkmark \Rightarrow \delta_A = \checkmark$$

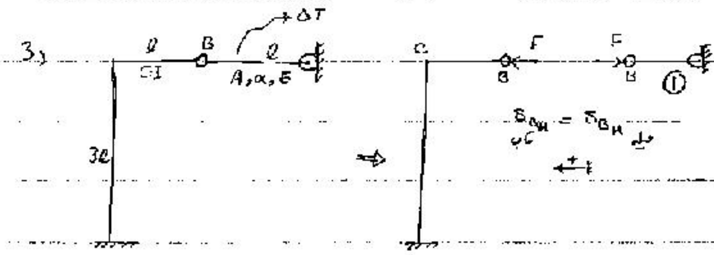
اگر جوش شده باشند و انتهای تیر ② با تکیه‌گاه مفصل باشد، هیچ لنگری بینشان رد و بدل نمی‌شود. اما اگر با تکیه‌گاه دیوار باشد، لنگر و برش هر دو منتقل می‌شود.





SUBJECT : حل تمرین مقاومت مصالح ۲
Year : Month : Date :

3)



δ_{B_H} و δ_{B_V} ؟

$$\delta_{B_H}\ (\text{پ‌ک}) = \delta_{B_H}\ (\text{میله})$$

افزایش طول میله ① به علت تغییر دما باعث می‌شود آزادانه B را به چپ براند. از آنجا که میله ① لولا شده است و به دیوار، نمی‌تواند تحمل کند و در نتیجه به B نیروی محوری وارد می‌شود. پس فقط در C، نیروی افقی داریم. اگر به جای لولا دیوار بود فرق می‌کرد. اینجا فقط تکیه در اینجا افقی است.

$$\delta_{B_H} = \delta_{B/C_H} + \delta_{C_H} = 0 + \delta_{C_H}$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{C_H} = \frac{F(2\ell)^3}{3EI} \\ &\delta_{B_H}\ (\text{میله}) = \alpha\ell\Delta T - \frac{F\ell}{AE} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{8}{3}\frac{F\ell^3}{EI} = \alpha\ell\Delta T - \frac{F\ell}{AE} \Rightarrow F = \checkmark$$

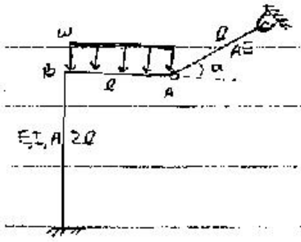
$$\delta_{B_V} = \delta_{B/C_V} + \delta_{C_V} = \delta_{B/C_V} = \ell\theta_C + \delta_{B/C\,\text{axial}}$$

$\theta \downarrow$

$$\theta_C = \frac{F(2\ell)^2}{2EI}$$

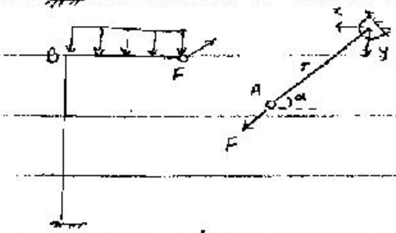
$$\delta_{B/C\,\text{axial}} = 0$$

4) اگر تغییر مکان‌های سازه در نقطه‌ی A چه جوری خواهد بود؟



برای ارتباط بین F و δ افقی و عمودی تیر که میله، دانش تو هندسه وقت هندسی بسیار سخت، الان جبرشو بدست می‌آریم.

به مرجع مختصات انتخاب می‌کنیم.



$$(X_A, Y_A) \Rightarrow (\underbrace{X_A + dX_A}_{\delta_{A_H}},\ \underbrace{Y_A + dY_A}_{\delta_{A_V}}) \quad \downarrow \oplus$$

قبل از بارگذاری

$\leftarrow \oplus$

توی دیفرانسیل وقتی مقدار $f(x)$ را در x_0 داشتیم و می‌خواستیم در $x_0+\Delta x$ مقدارش رو بدست بیاریم، از $f(x)$ دیفرانسیل می‌گرفتیم و می‌نوشتیم: $f(x+\Delta x) = f'(x).\Delta x$ که مثل بسط تیلور نوشتیم!

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در اینجا هم داریم : $r^2 = \overset{*}{X}^2 + \overset{*}{Y}^2$

r: طول میله در حالت کلی — $\overset{*}{X}, \overset{*}{Y}$: مختصات کلی A

پس حالا یه دیفرانسیل از رابطه‌ی بالا می‌گیریم و کمیت‌های دیفرانسیلی و غیردیفرانسیلی ظاهر شده رو براساس معادل‌های فیزیکی جایگذاری می‌کنیم.

$$2r\,dr = 2\overset{*}{X}_A\, d\overset{*}{X}_A + 2\overset{*}{Y}_A\, d\overset{*}{Y}_A$$

$$\ell\,\Delta\ell = (\ell\cos\alpha)\,\delta_{A_H} + (\ell\sin\alpha)\,\delta_{A_V}$$

$\Delta\ell$: در جهت افزایش مثبت است

$$\Delta\ell = \ell\cos\alpha\ \delta_{A_H} + \ell\sin\alpha\ \delta_{A_V} \quad , \ \Delta\ell = \frac{F\ell}{AE}$$

$$\delta_{A_H} = \delta_{A/B_H} + \delta_{B_H}$$

$$\delta_{A/B_H} = \frac{(-F\cos\alpha)\,\ell}{AE}$$

$F\sin\alpha - w\ell$, $F\cos\alpha$, $F\ell\sin\alpha - \frac{w\ell^2}{2}$

$$\delta_{B_H} = \frac{(-F\cos\alpha)(2\ell)^3}{3EI} + \frac{(F\ell\sin\alpha - w\ell^2/2)(2\ell)^2}{2EI}$$

$$\Rightarrow \delta_{A_H} = \checkmark$$

$$\delta_{A_V} = \delta_{A/B_V} + \delta_{B_V}$$

$$\delta_{B_V} = \frac{(w\ell - F\sin\alpha)(2\ell)}{AE}$$

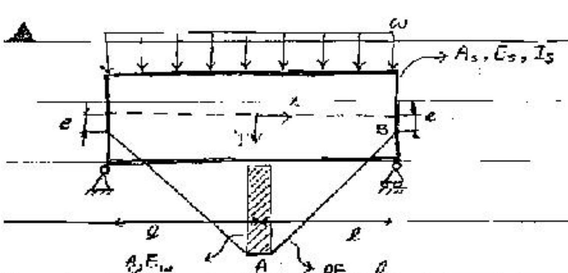
$$\delta_{A/B_V} = \ell\,\theta_B + \delta_{A/B\ \text{canti}} \quad , \ \theta_B = \frac{(F\cos\alpha)(2\ell)^2}{2EI} + \frac{(\frac{w\ell^2}{2} - F\ell\sin\alpha)(2\ell)}{EI}$$

$$\delta_{A/B\ \text{canti}} = \frac{w\ell^4}{8EI} - \frac{(F\sin\alpha)\ell^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow \delta_{A_V} = \checkmark$$

$$\theta_A = \theta_{A/B} + \theta_B$$

$$\theta_{A/B} = \theta_{A/B\ \text{canti}}$$



S) نیروی کابل ؟ (یه تیر به کابل به همین چی داریم)

اسم طول کابل در حالت کلی را ℓ_c^* که گذاشتیم. پس داریم:

$$\ell_c^{*2} = (y_A^* - y_B^*)^2 + (x_A^* - x_B^*)^2$$

صفر

$$\ell_c^*\, d\ell_c^* = (y_A^* - y_B^*)(dy_A^* - dy_B^*) + x_B^*\, dx_B^*$$

«رابطه‌ی سازگاری»

SUBJECT حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year / Month / Date / /

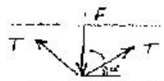
$\ell^*_{c_{\text{اولیه}}} = \ell_c \quad , \quad d\ell^*_{c_{\text{اولیه}}} = \Delta \ell_c$ $\qquad T =$ کشش کابل

$x^*_{B_{\text{اولیه}}} = \ell \quad , \quad dx^*_{B_{\text{اولیه}}} = \frac{1}{2}\, \delta_{H_{\text{تیر}}}$ $\qquad \Delta \ell_c = \frac{T \ell_c}{A E_c}$

$y^*_{A_{\text{اولیه}}} = \sqrt{\ell_c^2 - \ell^2} \quad , \quad dy^*_{A_{\text{اولیه}}} = \delta_{\text{محوری چوب}}$

$y^*_{B_{\text{اولیه}}} = e \quad , \quad dy^*_{B_{\text{اولیه}}} =$ خیز تیر سمت بالا

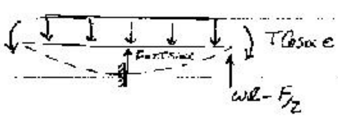
دقت کنید که دستگاه را چسبانده ایم روی تیر، پس به جای اینکه برای یکی از تکیه‌گاه‌ها، جابجایی صفر و برای دیگری کل تغییر طول افقی تیر را بنویسیم، برای هرکدام نصف جابجایی برای یافتن این جابجایی افقی را می‌بینیم. پس $dx^*_{B_{\text{اولیه}}} = \frac{1}{2}\delta_{H_{\text{تیر}}}$. از طرفی اگر دستگاه را روی تیر نچسبانده بودیم، $dy^*_{A_{\text{اولیه}}}$ برای مجموع deflection محوری تیر و تغییر طول محوری چوب بود ولی دستگاهی که روی تیر چسبیده ترم اول را نمی‌بیند.



$F = 2T\sin\alpha$

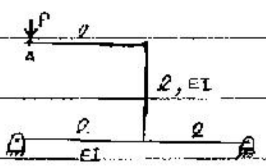
$$\delta_{\text{محوری چوب}} = \frac{-(2T\sin\alpha)\sqrt{\ell_c^2 - \ell^2}}{A E_w}$$

$$\delta_{H_{\text{تیر}}} = \frac{-(T\cos\alpha)(2\ell)}{A E_s}$$

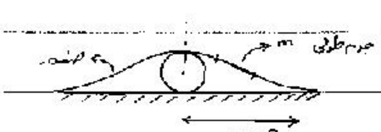


$$dy^*_B = -\left[\frac{(w\ell - F/2)(\ell)^3}{3 E_s I_s} - \frac{(e T\cos\alpha)\ell^2}{2 E_s I_s} - \frac{w \ell^4}{8 E_s I_s} \right]$$

بالا رفتن تیر = (پایین رفتن تیر) × منفی



6) مطلوبست δ_A را !



7) x را بیابید!

فاصله‌ی روی زمین نشستن!

SUBJECT :
Year ( ) Month ( ) Date ( )

● تقارن و پادتقارن صفحه‌ای

مسئله‌ای متقارن است که:

1) تقارن هندسی داشته باشیم یعنی صفحه‌ی تقارن هندسی وجود داشته باشد.

2) تقارن بارگذاری داشته باشیم.

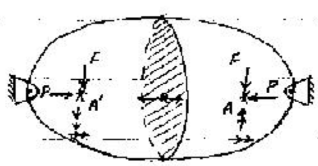
تقارن در بارگذاری یعنی

1) نیروهای اعمال شده در نقاط متناظر، در صورتیکه موازی صفحه تقارن باشند، باید مساوی و هم جهت باشند و در صورتیکه عمود بر صفحه‌ی تقارن وارد شده باشند، باید مساوی و مختلف‌الجهت باشند.

« صفحه‌ی تقارن برای نیروها نقش آینه را ایفا می‌کند »

2) گشتاورهای وارد شده در نقاط متناظر، در صورتی که موازی صفحه‌ی تقارن باشند، مساوی و مختلف‌الجهت اند و در صورتی که عمود بر صفحه‌ی تقارن باشند، مساوی و هم جهت اند.

« صفحه‌ی تقارن برای گشتاورها، برعکس آینه عمل می‌کند »



در مسئله‌ی متقارن، صفحه‌ی تقارن هندسی بر صفحه‌ی تقارن بارگذاری منطبق است و در کل صفحه‌ی تقارن نامیده می‌شود.

متقارن بودن مسئله وقتی برای ما مفید است که ما با نقاط واقع در صفحه‌ی تقارن کار داشته باشیم.

نتایج تقارن:

1) نتایج تغییر مکانی: تغییر مکان عمودی نقاط واقع در صفحه‌ی تقارن، در صورت پیوستگی در صفحه‌ی تقارن صفر است.

2) نتایج بارگذاری: نیروهای برشی و گشتاور پیچشی در صورت پیوستگی در صفحه تقارن، صفر اند.

STAEDTLER

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲
Year ( ) Month ( ) Date ( )

پادتقارن در بارگذاری :

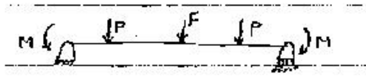
۱) صفحه پادتقارن برای نیروها برعکس آینه عمل می‌کند.

۲) صفحه پادتقارن برای گشتاورها مثل آینه عمل می‌کند.

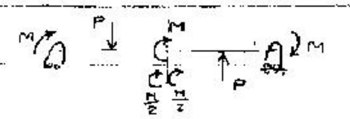
نتایج پادتقارن :

۱) در صورت پیوستگی، تغییرمکان داخل صفحه تقارن صفر است.

۲) در صورت پیوستگی، نیروی محوری و گشتاورهای خمشی صفرند.



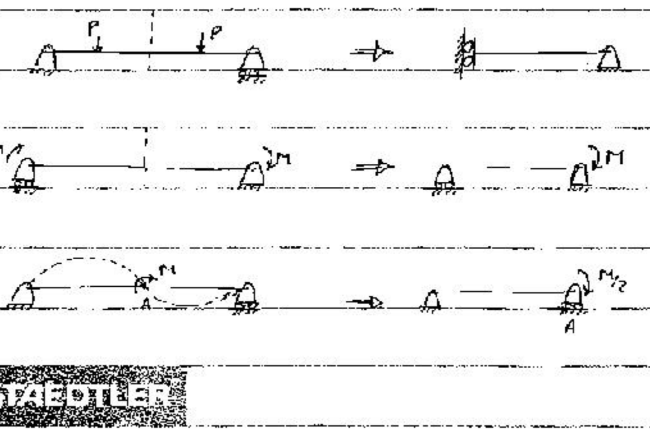
متقارن



پادتقارن

می‌توانیم با کمک سوپرپوزیشن جوری تغییر دهیم که تبدیل به یک مسئله‌ی متقارن و یک مسئله پادتقارن شود.

شیب پیدا کردن یعنی حرکت عمود بر صفحه. به خاطر همین مثلاً در شکل مسئله‌ی متقارن بالا، اگر deflection رو بکشیم، شیب نقطه وسط تیر، صفر می‌ماند.

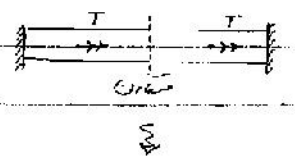


$$\theta_A = \frac{(M/2)(l/2)}{3EI}$$

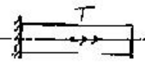
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۸،۲،۳



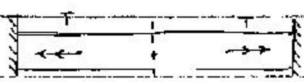
مثلاً اینجا به کمک خاصیت تقارن، مسأله‌ی درجه نامعین را تبدیل به مسأله‌ی معین می‌کنیم



در پیچش اگر مقطع دایره‌ای باشد، مقطع فقط سرجاش می‌پیچه ولی اگر غیردایره‌ای باشد، دچار اعوجاج هم می‌شه و حرکت محوری خواهد داشت.

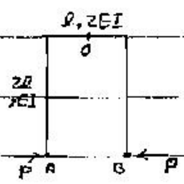
پس اینجا اصلاً نیروی محوری نداریم تو مقطع چون مقطع دایره‌ای است و اعوجاج نخواهد داشت.

حالا همون بالاییه ولی پادمتقارنه!



اون وسط الان ∅ اش صفره!

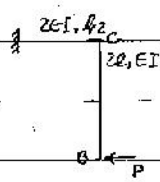
مثال شماره ۱ : δ_{AB_H}



با توجه به تقارن، می‌دونیم O در جهت افقی تغییر مکان نداره و چون ما تغییر مکان در راستای افقی را می‌خواهیم، دستگاه مرجع (ناظر) را می‌گذاریم روی O!

دستگاه را اگر روی صفحه‌ی تقارن نمی‌گذاشتیم، دیگه نمی‌تونستیم بگیم دو طرفو حساب می‌کنیم.

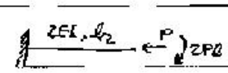
اون طرف هم مثل همینه!



$$\xleftarrow{\oplus} \delta_{A,B_H} = 2\,\delta_{B_H}$$

$$= 2\left[\delta_{B/C_H} + \delta_{C_H}\right]$$

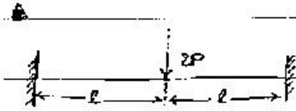
$$= 2\left[2l\theta_C + \delta_{B/C\ arch} + 0\right]$$



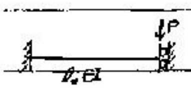
$$\theta_C = \frac{(2Pl)(l/2)}{(2EI)}$$

$$\delta_{B/C\ arch} = \frac{P(2l)^3}{3EI}$$

مثال شماره ۲ : مسأله دو درجه نامعین:



حالا به کمک تقارن دو درجه نامعینیش کم می‌شه!



حالا این دومی رو حل می‌کنیم:

$, \theta_A = 0$ • معادله سازگاری

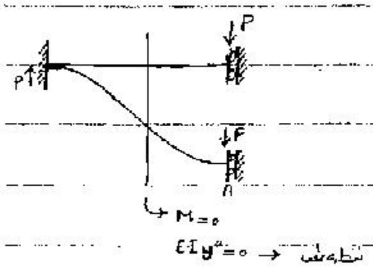
معادله سازگاری هندسی

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲
Year: Month: Date:

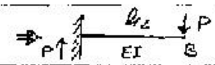
$$\theta_A = \frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{M\ell}{EI} = 0 \Rightarrow M = \frac{P\ell}{2} \qquad \delta_A = \frac{P\ell^3}{3EI} - \frac{(P\ell/2)\,\ell^2}{2EI} = \frac{P\ell^3}{12EI}$$

این δ همه رو مثل $\frac{P\ell^3}{3EI}$ و اینها، به خاطر بسپار!

اگر خواستی بعد از deformation سیستم، از تقارن یا پادتقارن استفاده کنی، می‌توانی از نتایج تغییر مکانی استفاده کنی!



مثلاً مسأله روبرو بعد از deformation پادتقارن است!

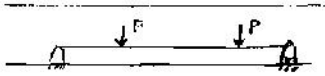


حالا با یک شبه‌تقارن زدن، همون یک درجه نامعینی را هم از بین بردیم!

اما اگه رابطه‌ی هندسی بین δ های این نقطه‌ی اخیر با نقاطی که δ ی آنها را می‌خواهیم نداشته باشیم، به درد نمی‌خورد!

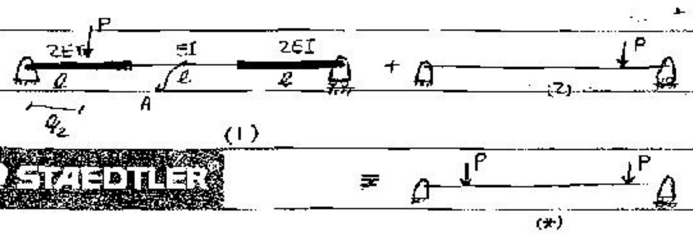
یک مسأله هم چنین حالتی: تغییر مکان صفحه‌ی تقارن هندسی، نصف تغییر مکان انتهای تیره! چون اگر ناظر روی صفحه‌ی تقارن باشد، تغییر مکان دو طرف تیر مقدار مساوی و در جهت برابر δ (تغییر مکان تیر از دید ناظر مرجع!) است.

$$\delta_A = 2\delta_B = 2\left(\frac{P(\ell/2)^3}{3EI}\right) = \frac{P\ell^3}{12EI}$$



در مورد روبرو هم، چون شکل داده، بعد از هم جای جایی اصلی می‌توانیم از تقارن / پادتقارن استفاده کنیم ولی در راستاهای مستقل دیگر (مثلاً محوری) از همون اول می‌شه از تقارن یا پادتقارن استفاده کنیم.

در مسائلی که تقارن هندسی دارد ولی تقارن بارگذاری ندارد، بسته به نیازمون مسأله رو تقارن یا پادتقارن از نظر بارگذاری می‌کنیم و حلش می‌کنیم.



(روش تقارن کردن) $\delta_A = ?$

SUBJECT :

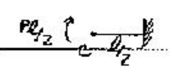
Year ( ) Month ( ) Date ( )

پس میایم مسئله (2) را با (1) جمع می‌کنیم که به (*) منجر می‌شود

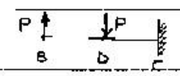
اگر از پشت کاغذ به (2) نگاه کنیم به این نتیجه می‌رسیم که $\delta_{A_1} = \delta_{A_2}$ پس $\delta_{A_*} = \delta_{A_1} + \delta_{A_2} = 2\delta_{A_1}$

$\Rightarrow \delta_{A_1} = \frac{1}{2}(\delta_{A_*})$

$\uparrow \delta_B = \delta_C + \ell\,\theta_C + \delta_{B/C\ \text{canch}}$



$$\Rightarrow \delta_B = \frac{(Pl/2)(l/2)^2}{2EI} + \ell\left[\frac{(Pl/2)(l/2)}{EI}\right] + \frac{(Pl/2)(l/2)^2}{2(2EI)} + l/2 \cdot \frac{(Pl/2)(l/2)}{(2EI)}$$

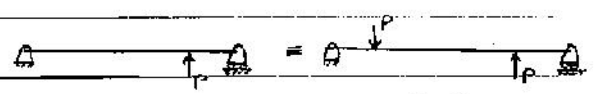


$$+ \frac{P(l/2)^3}{3(2EI)} = \delta_{A_*}$$

استفاده متقارن کردن ، پیوسته آمدن «تیر» در صورت تقارن است . (نقطه صفر و نقطه در نقطه‌ی وسط)

محدودیت این کار هم در این است که برای نقاط دیگر تیر و برای خصوصیت‌های دیگر مثل شیب ، کاربرد ندارد و نمی‌شه ازش استفاده کرد.

θ_A در مسئله قبل (پادمتقارن کردن)

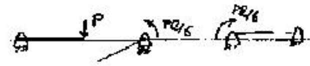
(1) + 

(3) (**)

این بار (1) با (3) جمع می‌کنیم که منجر به مسئله‌ی پادمتقارن ** می‌شود . این بار داریم:

$\theta_{A_1} = \theta_{A_3} \Rightarrow \theta_{A_{**}} = 2\theta_{A_1} \Rightarrow \theta_{A_1} = \frac{1}{2}\theta_{A_{**}}$

پس حالا مسئله‌ی (**) وسط رو لولا می‌کنیم و حل می‌کنیم:



$\psi_1 = \frac{Pl^2}{16(2EI)} + \frac{(Pl/6)l}{3(2EI)}$ $\psi_2 = \frac{(Pl/6)(l/2)}{3(EI)}$ $\psi_3 = \frac{(Pl/6)(l/2)}{6EI}$

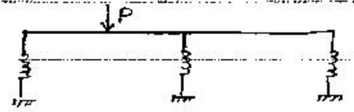
SUBJECT حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year : Month : Date :

$$\theta_{A_{??}} = \frac{\delta_c}{\ell/2} + \psi_3$$

$$(\psi_1 + \theta_c)\ell = \delta_c = (\psi_2 + \theta_c)\ell/2 \Rightarrow \delta_c \checkmark,\ \theta_c \checkmark$$

⑤ اولین سوال جلسه بعد:



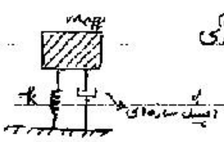
۸۸/۲/۷

* بار ضربه‌ای

۱) جرم سازه را صرف نظر می‌کنیم

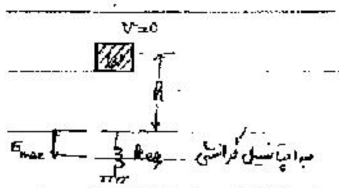
۲) اتلاف انرژی ← ضریب استهلاک و پتانسیل سازه‌ای و... را صرف نظر می‌کنیم ← بقای انرژی

برخورد کاملاً پلاستیک است $e=0$



۳) رفتار سازه ← سازه و مواد را خطی فرض می‌کنیم

$$E_1 = W(h + \delta_{max})$$



$$E_2 = \frac{1}{2} k_{eq} \delta_{max}^2$$

$$\rightarrow \delta_{max} = \left(\frac{W}{k} + \sqrt{\left(\frac{W}{k}\right)^2 + \left(\frac{2hW}{k}\right)}\right) \qquad \delta_{st} = \frac{W}{k}$$

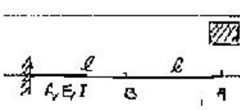
$$\delta_{max} = \delta_d = \delta_{st} \pm \sqrt{\delta_{st}^2 + 2h\delta_{st}}$$

ما δ را در جهت پایین مثبت گرفتیم، پس + برای δ که زیر طول آزاد و − برای δ بالای طول آزاد است (دو جواب داریم) در نتیجه در رابطه‌ی بالا ما علامت + را نگه می‌داریم.

⚠ اینجا هم با تغییر مکان‌های کوچک سروکار داریم.

می‌توانیم به جای اینکه بار ضربه‌ای را مستقیماً در نظر بگیریم، δ_{max} داریم و به جایش نیروی دینامیکی $F_d = k\delta_{max}$ را بگذاریم. در نتیجه می‌توانیم با یک سیستم دینامیکی، کاملاً استاتیکی برخورد کنیم.

⑦ توجه: توجه به اینکه در استاتیکی برخورد فنر می‌کنیم



در واقعیت برای یک همچین سیستمی می‌باید آزمایش می‌کنیم با بار و تغییر مکان‌های مختلف و بعد شیب خط حاصل از این نقاط تجربی را می‌گیرند k.

$P = \underbrace{\ }_{k} \times \delta$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

ولی ما چون رابطه‌ی بین δ و P را داریم، خیلی راحت k را از همان روابط بدست می‌آوریم.

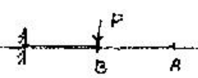
حالا که k را حساب کردیم، فنر را موجی داریم و یک فنر معادل به جایش می‌گذاریم.

$$\delta_A = \frac{P(2l)^3}{3EI} = \frac{8Pl^3}{3EI} \Rightarrow P = \frac{3EI}{8l^3}\delta_A \Rightarrow k_{eq_{Av}} = \frac{3EI}{8l^3}$$

به جای استفاده از روابط می‌توانیم یک بار واحد یک نیوتنی بگذاریم، δ را بدست بیاوریم. k می‌شه $\frac{1}{\delta}$!

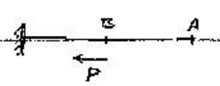
$$F = k\delta \Rightarrow \delta = \frac{1}{k}F \ , \quad F = 1\,N \Rightarrow \delta = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{1}{\delta}$$

وقتی می‌خواهی سختی سازه رو حساب کنی، به غیر از اون بار واحد، هیچ بار دیگه‌ای نباید روی سازه‌ات باشد!



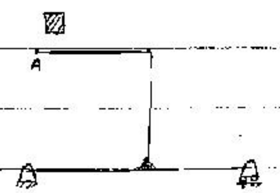
$k_{eq_{Bv}} = \frac{3EI}{l^3}$

$k_{eq_{AH}} = \frac{AE}{2l}$



$k_{eq_{BH}} = \frac{AE}{l}$

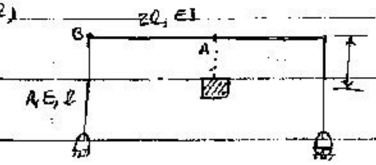
1)



روی این خط کنید 1 اگر بخواهید $\delta_{A_{max}}$ را پیدا کنید.

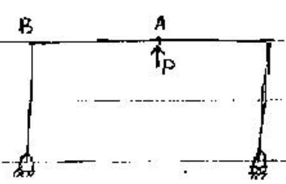
در کدام جهت باید فنر کنیم؟

2)

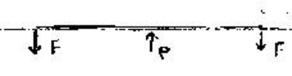


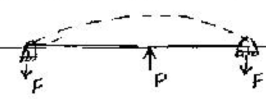
سرعت لحظه‌ی برخورد : v

$\delta_{A_{max}} = ?$ $\sigma_{max} = ?$



به خاطر تقارن، نقطه‌ی B فقط بالا می‌آید؛ چون اگر افقی هم حرکت کند، نقطه‌ی متناظر قرینه‌اش هم باید حرکت کند و مستلزم این است که تیر افقی تغییر طول بده ولی A نداده که این کار رو بکنه! پس در B یه F به خاطر تغییر طول محورهای عمودی، به تیر افقی وارد می‌شود.



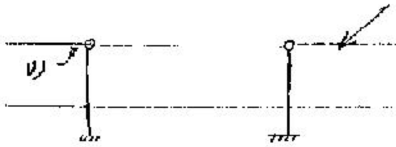


SUBJECT : حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year ( ) Month ( ) Date ( )

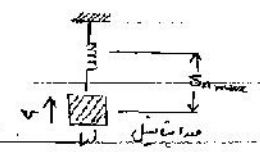
$$2F = P \Rightarrow F = P/2 \Rightarrow \delta_{\text{میله}} = \frac{(P/2)\,l}{AE}$$

اگر به جای لولا ها دیوار داشتیم هم خمش به وجود می‌آمد در میله‌های عمودی، به خاطر همان استدلال بالا!



$$\delta_A = \delta_{\text{میله}} + \frac{P(2l)^3}{48EI} \Rightarrow k = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{l}{2AE} + \frac{l^3}{6EI}}$$

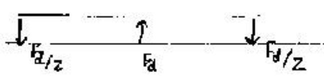
حالا می‌ریم سراغ بررسی بار ضربه‌ای، برای این کار بقای انرژی را اساس کار قرار می‌دهیم:



$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2$$
$$E_2 = \frac{1}{2}k\,\delta_{max}^2 + W\delta_{max} \Rightarrow \delta_{max} = \checkmark$$

$$F_d = k\,\delta_{max} = \checkmark$$

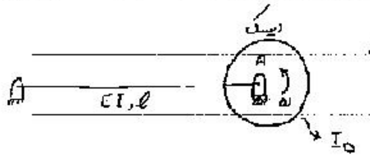
چون بارگذاری فقط قسمت (1) روی میله‌هاست، جایی ماکزیمم می‌شود که M ماکزیمم باشد.



$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\cdot c}{I} = \frac{M_{max}}{S}$$
$$M_{max} = \frac{F_d}{2}\cdot\frac{2l}{2} = \frac{F_d l}{2}$$

برای میله‌ها $\rightarrow \sigma_{max} = \frac{F_d/2}{A}$

3) لنگر ضربه‌ای: دیسک داره می‌چرخه، یه دفعه وصلش می‌کنیم به تیر!



$\theta_{A_{max}} = ?$

هر لنگری که دیسک به تیر وارد کند، تیر هم عکس‌العمل همان را اعمال می‌کند!

$$\theta_A = \frac{(1)\,l}{3EI} \Rightarrow k_A = \frac{3EI}{l}$$

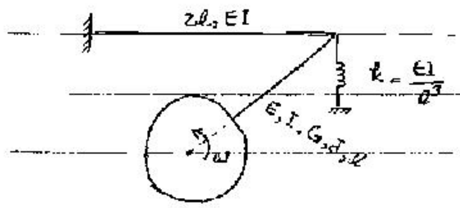
E_1 درست قبل از برخورد و E_2 را برای ماکزیمم deflection می‌نویسیم.

$$E_1 = \frac{1}{2}I_o\omega^2$$
$$E_2 = \frac{1}{2}k_{eq}\theta^2$$
$$E_1 = E_2 \Rightarrow \theta_{max} = \omega\sqrt{\frac{I_o}{k}} = \omega\sqrt{\frac{I_o l}{3EI}}$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

۴) سؤال ترم قبل: δ_{max} فنر چقدر است؟



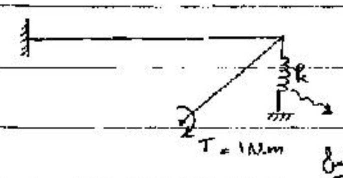
⚠ تذکر: شکل 3D است. دیسک داره پیچش می‌ره!

چون داره می‌چرخه، یه دفعه با تماس‌ها جور می‌شوند، به عبارت دیگر

می‌کنه، دیگر می‌پیچونه!

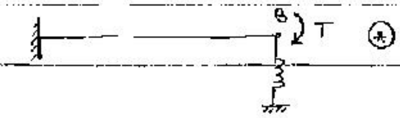
مسئله یک درجه نامعین است.

گشتاور پیچشی در A، می‌شه خمشی در B!



این فنره الان هست ولی هیچ نیرویی وارد نمی‌کنه که بخوایم بنویسیم

یا ندارمش!

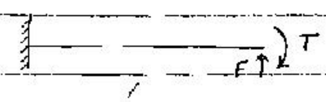


$$\theta_A = \theta_{A,B} \pm \theta_B \qquad \varphi_{A,B} = \frac{Tl}{GJ}$$

φ_{AB} : پیچش میله AB

شیب B "خمشی"

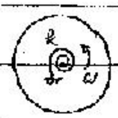
برای θ_B باید از شکل ⊛ استفاده کنیم



$$+ \quad \delta_B = \frac{F}{k} = \frac{Fl^3}{EI}$$ " سازگاری "

$$\delta_B = \frac{T(2l)^2}{2EI} - \frac{F(2l)^3}{3EI} = \frac{Fl^3}{EI} \Rightarrow T = \frac{11}{6} F.l \Rightarrow F = \frac{6}{11}\frac{T}{l}$$

$$\theta_B = \frac{T(2l)}{EI} - \frac{\left(\frac{6}{11} T/l\right)(2l)^2}{2EI} = \frac{10}{11}\frac{Tl}{EI} \Rightarrow \theta_A = \checkmark \xrightarrow[T=1N.m]{} k_{\theta_A} = \frac{1}{\theta_A} = \checkmark$$



$$E_1 = \frac{1}{2} I_D \omega^2 \quad , \quad E_2 = \frac{1}{2} k_{\theta_A eq}\, \theta_{max\,A}^2$$

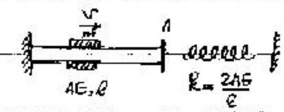
$$E_1 = E_2 \Rightarrow \theta_{max} = \omega\sqrt{\frac{I_D}{k_{\theta_A eq}}} \Rightarrow M_d = k_{\theta_A}\theta_A$$

حالا دوباره همون سیستم رو حل می‌کنیم ولی به جای T می‌گذاریم M_d.

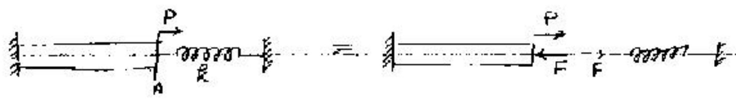
$$\Rightarrow F_{فنر} = \frac{6}{11}\frac{M_d}{l} \Rightarrow \delta_{max} = \frac{\frac{6}{11} M_d/l}{k_{فنر}}$$

SUBJECT : حل تمرین مقاومت مصالح ۲
Year : Month : Date :

۸۸,۲,۹

1) 

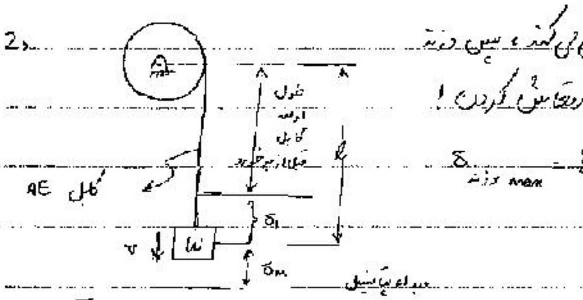
بین تکیه‌گاه و میله اصطکاک نداریم . $\delta_{A_{max}} = ?$



$$\delta_A = \frac{F}{k} = \frac{F\ell}{2AE} \to \frac{(P-F)\ell}{AE} = \frac{F\ell}{2AE} \to F = \tfrac{2}{3}P \to \delta_A = \frac{(\frac{2P}{3})\ell}{2AE} = \frac{P\ell}{3AE} \to \underset{\text{سیستم}}{k_{eq}} = \frac{3AE}{\ell}$$

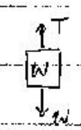
یا می‌توانستیم بگیم سختی میله $\frac{AE}{\ell}$ است و چون جابجایی مطلقش با اونیکی فنر برابره با هم موازیند و k_{eq} میشه مجموع سختی هردو .

$$E_1 = \tfrac{1}{2} m v^2 \qquad E_1 = E_2 \Rightarrow \delta_{A_m} = v\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$$
$$E_2 = \tfrac{1}{2} k_{eq}\, \delta_{A_m}^2$$

2) 

وزنه با سرعت ثابت داره می‌ره پایین ، چرخ یک دفعه قفل می‌کنه ، پس وزنه یک کوچولو می‌ره پایین‌تر بعد شروع می‌کنه به ارتعاش کردن !

$\delta_{\text{وزنه}\ max} = ?$



تعادل وزنه قبل از برخورد : $T = W$ انرژی کرنشی کابل هست $U_{\text{کابل}} = \frac{T^2}{2k} = \frac{W^2\ell}{2AE}$

$$\delta_1 = \frac{T\ell}{AE} = \frac{W\ell}{AE}$$

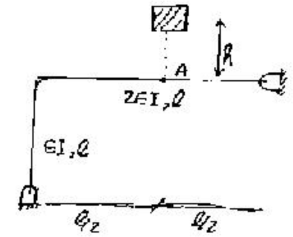
$$E_1 = U_{\text{کابل}} + \tfrac{1}{2}\frac{W}{g}v^2 + W\delta_m = \frac{W^2\ell}{2AE} + \tfrac{1}{2}\frac{W}{g}v^2 + W\delta_m$$

چون انرژی را نمی‌شه نسبت به مکان سوپرپوز کرد ، پس انرژی کرنشی‌ها را باید برای δ از حالت آزاد بنویسیم .

$$E_2 = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{AE}{\ell}\cdot(\delta_1 + \delta_2)^2 = \tfrac{1}{2}\frac{AE}{\ell}\left(\frac{W\ell}{AE} + \delta_m\right)^2$$

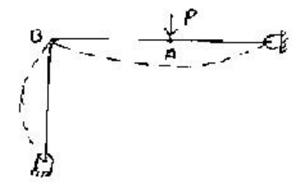
$\Rightarrow \delta_m = \checkmark$

3)



$\delta_{A\,max} = ?$

قشنگ دارش رو حل کنید، مزه داره !

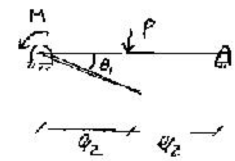


چون میله‌ی محوری AE نداره، پس B نمی‌تونه حرکت افقی داشته باشه، از طرفی میله‌ی افقی هم AE نداره، پس حتی حرکت افقی هم نداره، پس سر جاش می‌مونه !

می‌شود با متقارن کردن هم حلش کرد، اگر هر دو میله EI بودند.

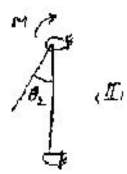
یه P روی میله‌ی محوری هم می‌گذاشتیم، بعد گشتاور خمشی را با یه حساب می‌کردیم و نصفش را می‌گذاشتیم تو میله افقی و خیلی بهتر حلش می‌کردیم. (صفحه‌ی تقارن ۴۵ درجه \ است)

حالا همین مسئله خودمون :



(I)

$\theta_1 = \theta_2$ « سازگاری »



(II)

$\Rightarrow M = ?$

تا اینجا روش حل رو گفتیم، حالا بریم سراغ حساب کتاب !!

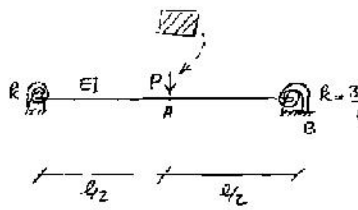
$$\theta_1 = \frac{P\ell^2}{16(2EI)} - \frac{M\ell}{3(2EI)}$$

$$\xrightarrow{\theta_1 = \theta_2} \quad M = \frac{P\ell}{16}$$

$$\theta_2 = \frac{M\ell}{3(EI)}$$

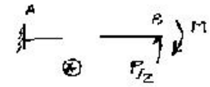
$$\delta_A = \frac{P\ell^3}{48(2EI)} - \underbrace{\cdots}_{M\text{ اثر}} \Rightarrow k_{eq} = ?$$

4)



lamp

$\theta_{B\,max} = ?$



$+ \; \theta_{B} = \frac{M}{k}$ +

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

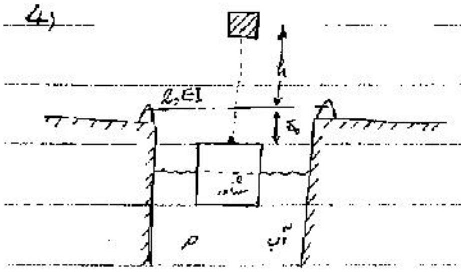
Year: Month: Date: ( )

$$\delta_{B*}: \quad \theta_{B*} = \frac{(P/2)(l/2)^2}{2EI} - \frac{M(l/2)}{EI} = \frac{Ml}{3EI} \Rightarrow M = \frac{3}{40}Pl$$

$$\delta_A = \delta_{B*} = \frac{(P/2)(l/2)^3}{3EI} - \frac{(3/40\,Pl)(l/2)^2}{2EI} \Rightarrow k_{eq}\ \checkmark$$

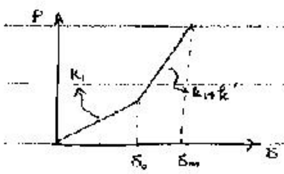
تبدیل انرژی $\Rightarrow \delta_{A_m}\ \checkmark \rightarrow F_d = k_{eq}\,\delta_{A_m} \rightarrow \theta_{B_{max}} = \theta_{B*}\Big|_{P=F_d}\ \checkmark$

4)



تا وقتی که δ_0 رو پر نکرده، فقط تیر رو حساب می‌کنیم ولی بعد از اون شناور هم

اضافه می‌شه، که می‌شن دو تا فنر موازی!



مساحت زیر نمودار: انرژی فنر

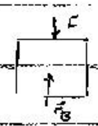
$$E_1 = W(\delta_m + h)$$

$$E_2 = S = \frac{1}{2}k_1\delta_0^2 + \frac{1}{2}(\delta_m - \delta_0)\big((k_1+k')(\delta_m-\delta_0) + 2k_1\delta_0\big)$$

$$= \frac{1}{2}k_1\delta_m^2 + \frac{1}{2}k'(\delta_m - \delta_0)^2$$ یا انرژی فنر + انرژی شناور

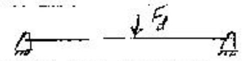
$$k_1 = \frac{48EI}{l^3}$$

$k' \Rightarrow$ برای محاسبه‌ی سختی معادل شناور:



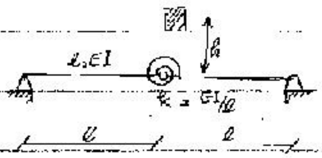
$$F - F_B = \rho V g = \rho A x g = (\rho A g)x = k'x$$

$F_d = k\,\delta_m \rightarrow$

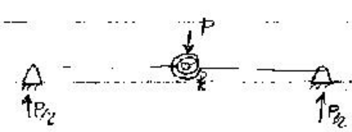


حالا از این سیستم استفاده می‌کنیم برای تحلیل های بعد از فرارفتن δ_0!

5)



W/P



مسئله متقارن و دو سر مفصل است.

$$M = \frac{Pl}{2}$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

حالا با لولا کردن :

$$\text{تغییر شیب}_{c-c}\ \text{از}\ \text{تغییر شیب}_{c-c} = \theta = 2\alpha = \frac{M}{k} = \frac{Ml}{EI} = \frac{Pl^2}{2EI} \Rightarrow \alpha = \frac{Pl^2}{4EI}$$

$$\psi = \frac{Ml}{3EI} = \frac{Pl^2}{6EI} \Rightarrow \delta_A = l(\alpha+\psi) = l\left[\frac{Pl^2}{4EI} + \frac{Pl^2}{6EI}\right] = \frac{15}{12}\frac{Pl^3}{EI}$$

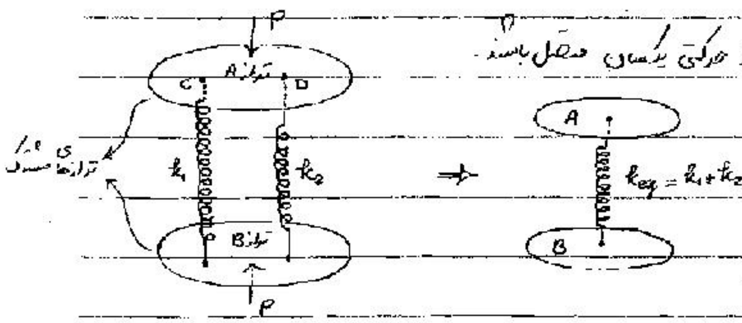
$$\Rightarrow k_{eq} = \frac{12}{5}\frac{EI}{l^3}$$

۸۸/۹/۱۰

« فنر کردن »

* تراز حرکتی : به مجموعه نقاطی که در راستای مشخص تغییرمکان یکسان دارند، یک تراز حرکتی می‌گوییم .

* فنرهای موازی : هرکدام از سرهایشان به تراز حرکتی یکسان متصل باشند .



رابطه‌ی روبه‌رو برای تعادل بدست می‌آید :

که این رابطه را با توجه به این موضوع در

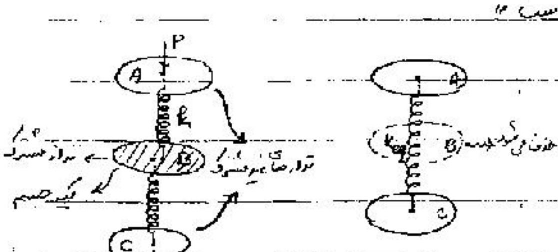
آوردیم که نقاط C و D هردو بر روی یک

جسم هستند و بعد برای آن جسم تعادل نوشتیم .

$$F_1 = \frac{k_1}{k_{eq}} \cdot P \qquad F_2 = \frac{k_2}{k_{eq}} \cdot P$$

(نیروها بنسبت سختی‌ها ، تقسیم می‌شوند)

می‌گوییم : « تغییرمکان‌های فنرها در راستای ترازها برابر است »



* فنرهای سری : یک سرشان به یک تراز مشترک وصل شده و

دو سر دیگرشان به ترازهای غیرمشترک وصل است .

الزامی ندارد که بر روی تراز مشترک ، دقیقاً در یک نقطه به هم وصل

شده باشند ولی در هر حال باید این تراز مشترک را یک جسم بتوان درنظر گرفت .

SUBJECT حل تمرین مقاومت ۲

Year: Month: Date:

در ترکیب فنرهای سری، موازی، فقط مجازیم بارها را در جاهایی که در شکل‌های صفحه‌ی قبل نشان داده‌ام، داشته باشیم، در غیر اینصورت روابط صادق نیستند.

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \qquad F_1 = F_2 = P$$

$$\delta_1 = \frac{P}{k_1} \qquad \delta_2 = \frac{P}{k_2} \Rightarrow \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

از فنر کردن به دو روش می‌توانیم استفاده کنیم: ۱. هر عضو مجموعه را به تنهایی تبدیل به فنر کنیم و بعد شروع کنیم به تحلیل!!

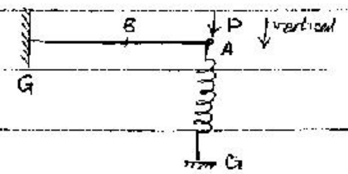
۲. بعد از تبدیل اعضا به فنر، آنها را به صورت فنرهای سری موازی در نظر بگیریم و مسئله را ساده‌تر کنیم.

حالا الگوریتم حل مسئله:

۱) راستای مطلوب مسئله را تعیین می‌کنیم

۲) در راستای یاد شده، چند تراز حرکتی در نظر می‌گیریم (که در حالت 2D این ترازها هر کدام یک "نقطه" اند)

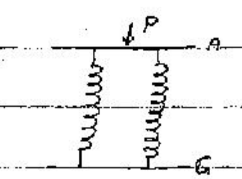
۳) سازه را از محل ترازها جدا می‌کنیم ← تراز مناسب ترازی است که بخش‌های جدا شده از سازه توسط آن تراز، در محل جدایش، تنها روی یک درجه آزادی همانندی یکدیگر تأثیر داشته باشند (یا به بیان دیگر همدیگر را تنها در یک درجه آزادی مقید می‌کنند)



مثلاً اینجا فنره قیدی روی شیب تیر نمی‌گذارد و تنها جهت را مقید می‌کند

اینقدر پیچ!

امّا مثلاً نمی‌توانیم از B هم ببریم و B رو هم یک تراز حرکتی در نظر بگیریم

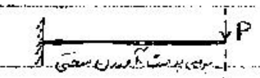


چون هم تغییر مکان عمودی سازه به هم وابسته می‌شه، هم شیبش!

این مرحله خیلی مهم است و باید مناسب بودن ترازها را حتماً کنترل کنیم!

۴) بخش‌هایی از سازه که بین دو تراز قرار دارند، با حفظ شرایط مرزی آنها در محل‌های جدایش، سختی آنها را در راستای مسئله به دست می‌آوریم

مثلاً در همان سازه‌ی بالا، برای تیر افقی، برای انتهای سمت چپ، دیوار بودن را رعایت می‌کنیم و برای انتهای سمت راست، حرکت عمودی و اینکه تغییر شیب مجاز است



تذکر ۱: در اینگونه مسائل می‌بایست کل سازه تحت تنها یک بار قرار گرفته باشد و اگر چند بار بود باید سوپر پوزیشن کرد.

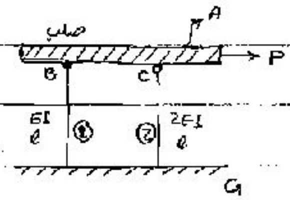
تذکر ۲: نقطه‌ی اعمال بار می‌بایست جزء ترازهای حرکتی باشد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

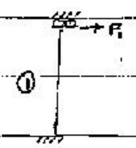
5) از تراز اعمال بار حرکت کرده و تمام مسیرهای ممکن جهت رسیدن به زمین را بررسی می‌کنیم. در تمام این مسیرها با تشکیل فنرهای سری و موازی، ترازهای اضافی را حذف کرده تا در نهایت به یک فنر معادل بین زمین و نقطه‌ی اعمال بار برسیم.

! می‌گه در هنگام تشخیص ترازها باید به کمک یک تحلیل تخمین اولیه، حدسی در مورد تغییرمکان نقاط بزنیم، تا بفهمیم کدام نقاط را می‌توان یک تراز در نظر گرفت.

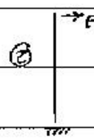


مثال:

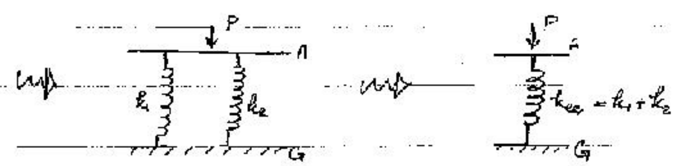
در نقطه C اگر دقت کنی علاوه بر اینکه تغییرمکان افقی، شیبش هم صفر می‌ماند (چون جوش خورده) ولی این قیدی که روی شیب هست جزء قیودی نیست که در مرحله سوم الگوریتم گفته شد. چون وجود بارگذاری و تغییرات باعث نمی‌شود این قید از چیزی جلوگیری کند (از تغییر به چیزی) همش همون صفر می‌مونه!



$$k_1 = \frac{12EI}{\ell^3}$$



$$k_2 = \frac{3(2EI)}{\ell^3}$$



$$\Rightarrow \delta_A = \frac{P}{k_{eq}} \Rightarrow F_1 = \frac{k_1}{k_{eq}} \cdot P$$

حالا که δ به دست آمد، می‌توانیم برگردیم سراغ ① را به تنهایی تحلیل کنیم و با حل کردن یک مسئله نامعین، به خواسته‌ها و مجهولات برسیم.

با سری موازی کردن یا مستقیم جواب را بدست می‌آوریم، یا به مسئله‌ی ساده‌تری می‌رسیم و با استفاده از آن، جواب راحت‌تر بدست می‌آید.

STAEDTLER