DOKTOR :ALI HAGH TALAB-TARBIAT MODARES-TEHRAN

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل اول

مقدمه ای بر مکانیک سیالات

۱. مقدمه

آگاهی از دانش مکانیک سیالات برای مهندسین شیمی لازم می‌باشد. بسیاری از عملیات و فرآیندهای شیمیایی تمام یا قسمتی از آن در فاز مایع اتفاق می‌افتد. به ماده‌ای سیال گفته می‌شود که پیوسته در حال تغییر شکل باشد که میزان یا نرخ تغییر شکل بستگی به نیروی اعمال شده بر سیال دارد. علاوه بر نیرو، سیالیت یک ماده بستگی به خاصیتی از ماده به نام "گرانروی" یا "ویسکوزیته" دارد. مطابق قانون ویسکوزیته نیوتن، تنش برشی با سرعت برشی متناسب می‌باشد، به طوری که ضریب تناسب همان گرانروی یا ویسکوزیته سیال می‌باشد. مباحث و مسایل مربوط به مکانیک سیالات به دو قسمت "مکانیک سیالات ماکروسکوپی" و "مکانیک سیالات میکروسکوپی" تقسیم می‌شود. در مکانیک سیالات ماکروسکوپی، حرکت سیال در مقیاس بزرگ مورد بررسی قرار می‌گیرد. لیکن در مکانیک سیالات میکروسکوپی، در مقیاس کوچک به آنالیز حرکت سیال پرداخته می‌شود.

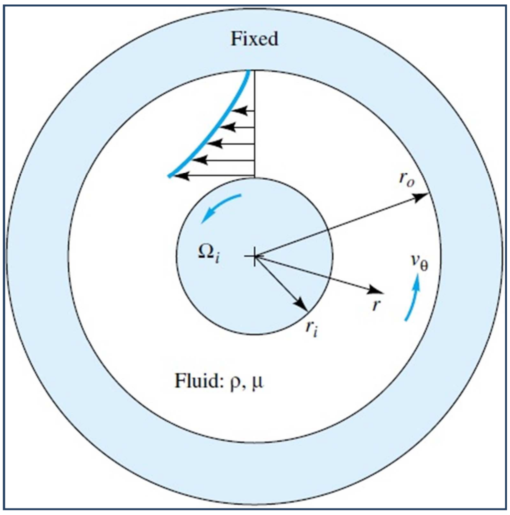
۲. مکانیک سیالات در مهندسی شیمی

آگاهی از دانش مکانیک سیالات برای مهندسین شیمی لازم می‌باشد. بسیاری از عملیات و فرآیندهای شیمیایی تمام یا قسمتی از آن در فاز مایع اتفاق می‌افتد. به عنوان مثال در فرآیندهایی مانند بیو شیمی، انرژی، تخمیر، فرآوری معدن، نفت، دارویی، پلی‌مر و صنایع پسماند و فاضلاب همیشه با فاز مایع و حرکت سیال مواجه می‌باشیم.

سیالات گاز و مایع از اهمیت خاصی برخوردارند. از لحاظ اقتصادی و فنی مناسب است که مواد به شکل گاز و یا مایع تبدیل شوند به طوری که عملیات با چنین سیالاتی مناسب‌تر از جامدات است. حتی ذرات کاتالیست جامد را در بسترهای سیال به‌صورت سیالیت مورد استفاده قرار داده می‌شود. هم چنین در انتقال زغال‌سنگ برای مسافت‌های دور از محیط سیال استفاده می‌شود.

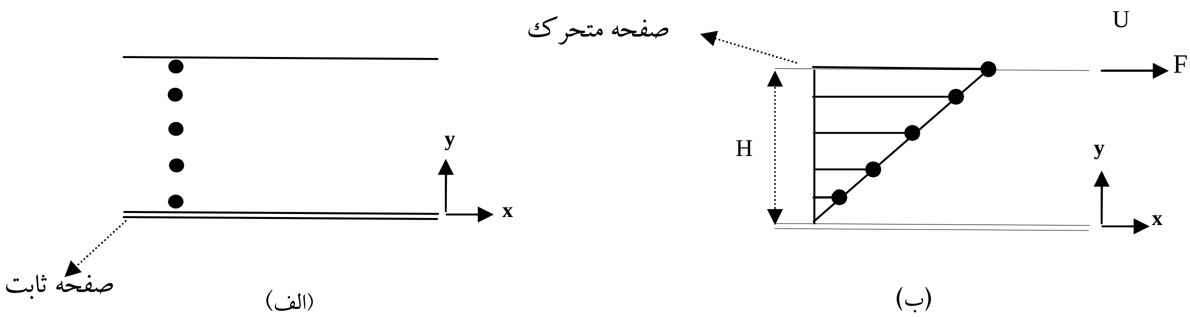
۳. مفاهیم عمومی در مکانیک سیالات

در ابتدا ممکن است که سؤال شود "سیال چیست؟ ". در مکانیک سیالات به سیال کلمه لاتین "fluid" اطلاق می‌شود. سیال ماده‌ای است که دائماً و پیوسته تحت تأثیر "نیروی برشی" یا مماسی قرار می‌گیرد. به عبارتی به ماده‌ای سیال گفته می‌شود که پیوسته در حال تغییر شکل باشد که میزان یا نرخ تغییر شکل بستگی به نیروی اعمال شده بر سیال دارد. علاوه بر نیرو، سیالیت یک ماده بستگی به خاصیتی از ماده به نام "گرانروی" یا در لاتین "ویسکوزیته" دارد. جامدات هم زمانی که تحت تاثیر یک نیروی برشی قرار گیرند تغییر شکل می‌دهند. لیکن به علت ارتجاعی بودن مواد جامد مقدار انرژی یا نیروی وارده بر آنها ذخیره شده به طوری که سیالیت آنها متوقف می‌گردد. لیکن نیروی اعمال شده بر مایعات و یا گازها تلف شده و به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود. تا آنجا که به مایعات نیرو وارد شود سیالیت خود را حفظ می‌کنند. مثال‌های متعددی می‌توان برای حرکت سیال تحت نیروی برشی ارائه نمود. به عنوان مثال یک ظرف دو جداره که از دو استوانه متمرکز ساخته شده است، را در نظر بگیرید به طوری که سیالی مانند آب و یا روغن در آن ریخته شود. مطابق شکل ۱-۱ اگر استوانه داخلی با سرعت زاویه‌ای ثابت (v_θ) بچرخد و استوانه خارجی ثابت باشد، به چنین جریانی، جریان برشی گفته می‌شود.



شکل ۱-۱ جریان برشی میان دو استوانه هم مرکز که استوانه داخلی با سرعت زاویه ای v_θ در حال چرخش است

مثال دیگر "جریان برشی ساده" را در نظر می‌گیرد. در اینجا سیال ما بین دو صفحه صلب موازی قرار می‌گیرد. مطابق شکل ۲-۱، صفحه پایینی ثابت و صفحه‌ی بالایی با سرعت ثابت U تحت تاثیر نیروی F حرکت می‌کند.



شکل۲-۱ جریان برشی ساده : الف) قبل از اعمال نیرو ب) پس از اعمال نیروی F بر صفحه فوقانی

مطابق شکل ۲-۱ (الف)، در ابتدا سیال در حالت ثابت و ایستا بوده و هیچگونه نیروی برشی برآن اعمال نمی‌گردد. لیکن مطابق شکل ۲-۱ (ب) زمانیکه تحت نیروی F قرار گرفت نیروی برشی بر سیال اعمال شده به طوری که لایه سیال چسبیده به صفحه متحرک با سرعت U همراه با صفحه حرکت می‌کند. حرکت لایه‌های سیال بر یکدیگر تاثیر گذاشته به طوری که هر لایه از سیال لایه زیرین خود را به حرکت در می‌آورد. بدین وسیله حرکت یا مومنتوم از صفحه بالایی به صفحه پایینی مطابق شکل "ب" منتقل می‌شود. اگر مساحت هر صفحه به صورت "A" در نظر گرفته شود، تنش برشی به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{\text{نیروی برشی اعمال شده}}{\text{مساحت سطح تماسی سیال و صفحه}} \qquad (۱-۱)$$

τ: تنش برشی[۱]

در این‌جا "نرخ یا سرعت برشی" به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

[1] shear stress

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{U}{H} = \frac{\text{سرعت صفحه متحرک}}{\text{فاصله ما بین دو صفحه}} \qquad (۱-۲)$$

کرنش[۲] :γ

سرعت برشی[۳] :$\dot{\gamma}$

مطابق قانون ویسکوزیته نیوتن، تنش برشی با سرعت برشی متناسب می‌باشد. به طوری که ضریب تناسب همان گرانروی یا ویسکوزیته سیال می‌باشد که به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \text{ قانون ویسکوزیتهٔ نیوتن} \qquad (۱-۳)$$

که μ ویسکوزیته سیال نامیده می‌شود. بعد گرانروی یا ویسکوزیته به صورت $\mu[=]\ M/LT$ بیان می‌شود که در این جا در سیستم CGS، گرانروی به صورت $g/cm.s$ (پویز[۴]) یا در سیستم انگلیسی به صورت $lb_m/ft.hr$ نشان داده می‌شود. به عنوان مثال گرانروی آب در $۲۵\ ^\circ C$، ۰/۰۱ p (یکصدم پویز) می‌باشد.

امروزه در علم رئولوژی[۵] خواص رئولوژیکی سیالات که ویسکوزیته یکی از آن خواص می‌باشد، با استفاده از دستگاه‌های پیچیده مانند رئومتر[۶] اندازه‌گیری می‌شود.

در شرایطی که گرانروی و نیروهای گرانشی همزمان در حرکت سیال مؤثر هستند از پارامتر دیگری به نام گرانروی سینماتیکی به صورت ذیل استفاده می‌شود:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\text{ویسکوزیتهٔ سیال}}{\text{دانسیتهٔ سیال}} \qquad (۱-۴)$$

که واحد آن (L^2/T)، (cm^2/s) می‌باشد. ویسکوزیته مایعات بر حسب دما به صورت ذیل ارائه شده است:

---

[2] Strain
[3] Shear Rate
[4] Poise
[5] Rheology
[6] Rheometer

$$\mu = e^{(a+b\ln T)} \qquad (۱-۵)$$

$\mu[=]$ سانتی پویز

$T[=]k$ یا R

$a\ \&\ b$: ثوابت تجربی

در حالی که برای محاسبه ویسکوزیته گازها از رابطه ذیل استفاده می‌شود:

$$\mu = \mu_0 (\frac{T}{T_0})^n \qquad (۱-۶)$$

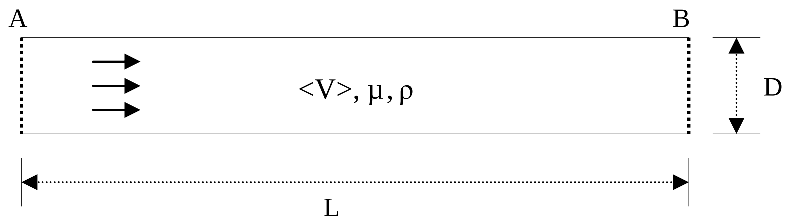
μ_0: گرانروی در دمای مرجع T_0

n: یک ثابت تجربی

۴. مکانیک سیالات ماکروسکوپی و میکروسکوپی

مباحث و مسایل مربوط به مکانیک سیالات به دو قسمت "مکانیک سیالات ماکروسکوپی[۷]" و "مکانیک سیالات میکروسکوپی[۸]" تقسیم می‌شود. در مکانیک سیالات ماکروسکوپی، حرکت سیال در مقیاس بزرگ مورد بررسی قرار می‌گیرد. لیکن در مکانیک سیالات میکروسکوپی، در مقیاس کوچک به آنالیز حرکت سیال پرداخته می‌شود. در مقیاس بزرگ مربوط به حرکت سیالات، به اموری مانند موازنه جرم، انرژی و مومنتوم حول یک سامانه بزرگ پرداخته می‌شود. به عنوان مثال، حرکت سیال در یک لوله که از نقطه A به نقطه B جریان دارد، مورد توجه قرار می‌گیرد. طول لوله و قطر لوله داده شده است. از طرفی خواص سیال مانند گرانروی و دانسیته آن معین می‌باشد. در این حالت مقدار افت فشار در لوله برای محاسبه قدرت پمپ لازم می‌باشد. با استفاده از معادله برنولی و ضریب اصطکاک در لوله‌ها می‌توان افت فشار و در نتیجه قدرت پمپ را محاسبه نمود. بنابراین این یک مساله مکانیک سیالات ماکروسکوپی است که در صنعت دارای کاربرد وسیعی می‌باشد. در شکل ۳-۱ به صورت شماتیک حرکت سیال در لوله توصیف شده است:

[7] Macroscopic
[8] Microscopic

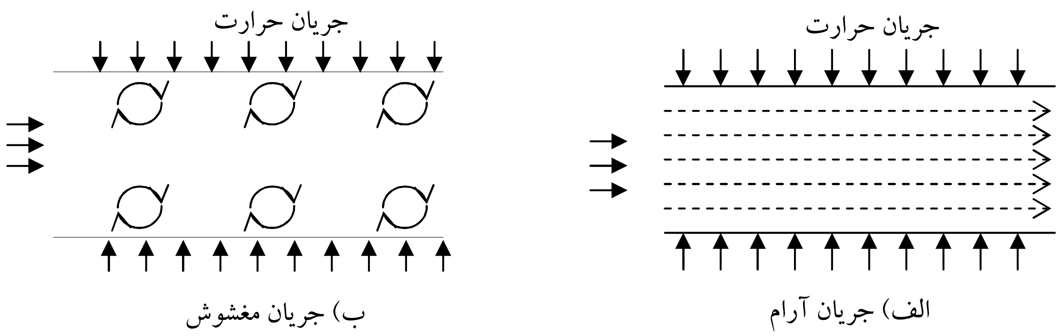


شکل ۳-۱ نمونه‌ای از مسایل مکانیک سیالات ماکروسکوپی: حرکت سیالی با مشخصات فیزیکی مشخص در لوله‌ای به قطر D و طول L

$$\Delta P = f\,(L, D, \rho, \mu, <V>) \qquad (۱-۷)$$

که در این جا ΔP : افت فشار در لوله، L : طول لوله، μ : گرانروی سیال، ρ : دانسیته سیال و $<V>$: سرعت متوسط سیال در لوله است.

مکانیک سیالات میکروسکوپی به امور مربوط به مکانیسم حرکت سیال در مقیاس کوچک می‌پردازد. در این مباحث، رژیم جریان مانند جریان آرام و یا جریان مغشوش (متلاطم) از اهمیت خاصی برخوردار است. به عنوان مثال حرکت سیال را در دو لوله به صورت آرام و مغشوش مطابق شکل ۴-۱ در نظر بگیرید. همان گونه که ملاحظه می‌شود هر دو لوله تحت شار حرارتی از بیرون قرار دارد. در شکل "الف" که جریان آرام است انتقال حرارت در سیال داخل لوله به صورت تدریجی و آرام انجام می‌شود. لیکن در لوله "ب" که جریان مغشوش است انتقال حرارت در سیال خیلی سریع انجام می‌گیرد. بدین ترتیب همان گونه که ملاحظه شد رژیم جریان در انتقال حرارت نقش بسزایی دارد.



شکل ۴-۱ نمونه ای از مسایل مکانیک میکروسکوپیک: الف)رژیم جریان آرام در لوله ب)رژیم جریان مغشوش در لوله

در مثال دیگر حرکت سیال را اطراف یک ذره کاتالیست در بستر ثابت مطابق شکل ۵-۱ ملاحظه می‌نمایید. حرکت سیال اطراف ذره کروی به صورت آرام مطابق شکل "الف" و مغشوش مطابق شکل "ب" توصیف می شود. همان گونه که ملاحظه می شود در جریان آرام، خطوط جریان چسبیده به سطح ذره در لایه مرزی زودتر از سطح جدا می شود. در شکل "ب" که جریان مغشوش است لایه مرزی دیرتر از سطح کره جدا شده و گردابی در عقب کره به وجود می آورد. اگر جریان حامل واکنشگر ها باشد می توان نتیجه گرفت در حالت مغشوش واکنش ها بهتر انجام می شود. چون فرصت تماس سیال با سطح کاتالیست بیشتر می شود.

(الف) (ب)

شکل ۵-۱ رژیم جریان عبوری از ذرات کاتالیست کروی و نقطه جدایش خطوط جریان چسبیده به سطح ذرات:

الف)جریان آرام ب)جریان مغشوش

از دو مثال مذکور می توان نتیجه گرفت که حرکت میکروسکوپی سیال در انتقال حرارت و جرم نقش موثری دارد. بنابراین در مکانیک سیالات میکروسکوپی به اموری که مربوط به جزییات حرکت سیال می باشد، پرداخته می‌شود. معمولاً آموزش مکانیک سیالات ماکروسکوپی در چارچوب آموزشی دوره کارشناسی مهندسی و آموزش مکانیک سیالات میکروسکوپی در دوره کارشناسی ارشد می‌باشد.

در فصول آینده به مسایل مکانیک سیالات مانند اصول بنیادی مکانیک سیالات، حرکت سیالات بسیار لزج (ویسکوز)، جریان پتانسیلی، جریان مرزی، جریان سیالات غیرنیوتنی و جریان مغشوش پرداخته خواهد شد.

۵. خلاصه(جمع بندی)

سیالات گاز و مایع از اهمیت خاصی برخوردارند. از لحاظ اقتصادی و فنی مناسب است که مواد به شکل گاز و یا مایع تبدیل شوند به طوری که عملیات با چنین سیالاتی مناسب‌تر از جامدات است. جامدات زمانی که تحت تاثیر یک نیروی برشی قرار گیرند تغییر شکل می‌دهند. لیکن به علت ارتجاعی بودن مواد جامد مقدار انرژی یا نیروی وارده بر آنها ذخیره شده به طوری که سیالیت آنها متوقف می‌گردد. در حالی که نیروی اعمال شده بر مایعات و یا گازها تلف شده و به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود. در مکانیک سیالات ماکروسکوپی به اموری مانند موازنه جرم، انرژی و مومنتوم حول یک سامانه بزرگ پرداخته می‌شود. اما در مکانیک سیالات میکروسکوپی به اموری که مربوط به جزییات حرکت سیال است، پرداخته می‌شود و در آن رژیم جریان مانند جریان آرام و یا جریان مغشوش (متلاطم) از اهمیت خاصی برخوردار است.

۶. پرسش‌های پایان درس

– سیالیت یک ماده به چه عواملی بستگی دارد؟

ج: نیروی اعمال شده بر سیال و ویسکوزیته سیال

– قانون ویسکوزیته نیوتن چگونه بیان می شود؟

ج: مطابق این قانون، تنش برشی با سرعت برشی متناسب بوده و ضریب تناسب آن ویسکوزیته سیال می‌باشد.

– گرانروی سینماتیکی چیست ؟

ج: نسبت ویسکوزیته سیال به دانسیته سیال

– گرانروی مایعات و گازها در دماهای مختلف با چه روابطی قابل بیان است؟

ج: با روابط (۵-۱) و (۶-۱) بیان می شود.

– در مکانیک سیالات، تفاوت دیدگاه‌های ماکروسکوپی با دیدگاه میکروسکوپی در چیست؟

ج: در مقیاسی که حرکت سیال مورد بررسی قرار می گیرد.

– در مکانیک سیالات قوانین پایستگی اساسی کدامند؟

ج: پایستگی جرم، پایستگی مومنتوم و پایستگی انرژی

– افت فشار یک سیال درون یک لوله تابع چه پارامترهایی است؟

ج: طول و قطر لوله، دانسیته و ویسکوزیته و سرعت سیال

– جریان مغشوش و جریان آرام در مکانیک سیالات چگونه و با چه معیاری تعریف می شوند؟

ج: با استفاده از عدد بی بعد رینولدز (Re) تعریف می شود که برای جریان های داخلی و جریان های خارجی گستره متفاوتی دارد. البته هریک از جریانهای آرام و مغشوش ویژگی های منحصر به فرد خود را دارند.

۷. فهرست منابع درس

- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid mechanics for chemical engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, *Transport phenomena*, second edition, J. Wiley.
- Morton M. Denn, 1980, *Process Fluid mechanics*, first edition, prentice Hall.
- Frank M. White, 2003, *Fluid Mechanics*, second edition, McGraw-Hill.
- Ronald Darby, 2001, *Chemical Engineering Fluid Mechanics*, second edition, CRC Press.
- Noel De Nevers, 2004, *Fluid Mechanics for Chemical Engineers*, first edition, McGraw-Hill.

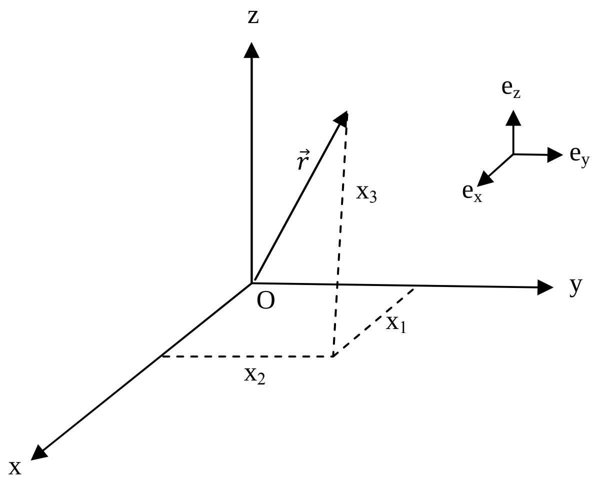
مکانیک سیالات پیشرفته

فصل دوم

حساب بردارها در مکانیک سیالات

۱. مقدمه‌ای بر آنالیز برداری

در مکانیک سیالات کمیت‌های فیزیکی مختلفی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این کمیت‌ها را می‌توان به سه نوع اسکالری (عددی)، برداری و تنسوری تقسیم بندی نمود. در این‌فصل به دستگاه مختصات دکارتی[1] می‌پردازیم. مطابق شکل(۱-۲۱)، یک بردار مکانی را می‌توان در دستگاه دکارتی به سه صورت ذیل توصیف کرد:



شکل۱-۲: دستگاه مختصات دکارتی

$$\vec{r} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} \text{ یا } \vec{r} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z} \qquad (۲-۱)$$

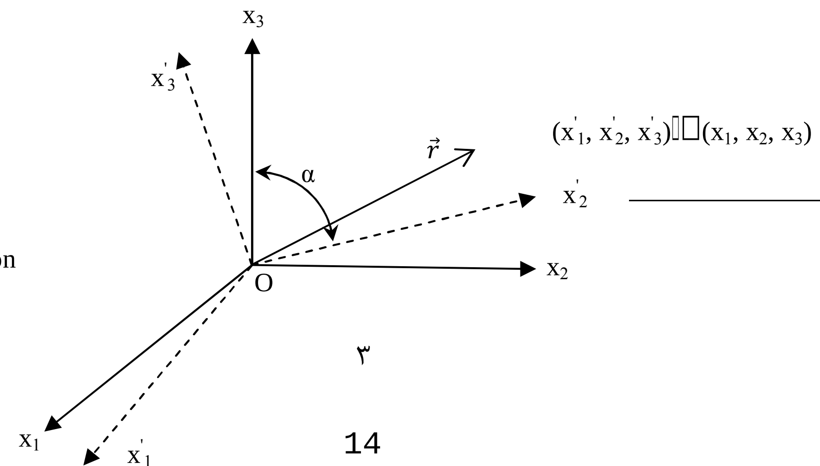
$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \qquad (۲-۲)$$

که به صورت اندیسی خواهیم داشت:

$$\vec{r} = x_i \qquad i=1,2,3 \qquad (۲-۳)$$

۲. تبدیل متعامد[2] دستگاه مختصات

دستگاه مختصات دکارتی را می‌توان به صورت xyz(یا $x_1x_2x_3$) مطابق شکل ذیل توصیف کرد:



---
[1]Cartesian
[2]Orthogonal Transformation

شکل۲-۲: دستگاه مختصات کارتزین ($\mathbf{x_1, x_2, x_3}$) که در اثر دوران حو ل مبدا مختصات جدید ($\mathbf{x'_1, x'_2, x'_3}$) را می‌دهد.

همان‌گونه که در شکل(۲-۲) ملاحظه می‌شود، دستگاه مختصات در اثر چرخش از حالت $x_1x_2x_3$ به حالت$x'_1x'_2x'_3$تبدیل می‌شود. به طوری که همواره هر سه محور بر هم عمود بوده و فقط حول نقطهO چرخش دارد. اگر بردار مکانی $\vec{r}$ را در نظر بگیریم که در دستگاه مختصات قدیم به صورت (x_1,x_2,x_3) نمایش داده می‌شود، پس از چرخش دستگاه مختصات، بردار مذکور در دستگاه مختصات جدید به صورت $\overrightarrow{r'} = \left(x'_1, x'_2, x'_3\right)$ نشان داده می شود.

حال این سؤال مطرح است که چگونه مختصات جدید را از مختصات قدیم به دست آوریم. قبل از پاسخ به این سؤال لازم است که جهت‌های کسینوسی را توضیح دهیم. جهت کسینوسی به صورت کسینوس زاویه مابین محورهای مختصات جدید و قدیم تعریف می‌شود. اگر زاویه α را در شکل (۲-۲) ملاحظه کنید، جهت کسینوسی به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$l_{23} = \cos\alpha \qquad (۲-۴)$$

که در این جا زاویه α زاویه مابین محور جدید ۲ و محور قدیم ۳ می‌باشد که در اندیس پایین نویس "l" نشان داده شده است. به طور کلی جهت‌های کسینوسی را به صورت ذیل می‌توان تعریف نمود:

$$l_{ij} = \cos A \quad i=1,2,3 \ \& \ j=1,2,3 \qquad (۲-۵)$$

که A زاویه مابین دو محور جدید i و قدیم j می‌باشد.

بنابراین می‌توان جهت‌های کسینوسی را به صورت یک ماتریس ۳×۳ به صورت ذیل نشان داد:

$$l_{ij} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \tag{۲-۶}$$

به عبارتی در تبدیل متعامد دستگاه دکارتی ۹ جهت کسینوسی موجود می‌باشد. حال چگونه می‌توان مختصات جدید یک بردار را در دستگاه مختصات جدید از دستگاه مختصات قدیم محاسبه نمود. این عمل از طریق معادله زیر به دست می‌آید:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} l_{ij} x_j \tag{۲-۷}$$

به عنوان مثال مختصات x'_1 از رابطه ذیل محاسبه می‌شود:

$$x'_1 = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + l_{13}x_3 \tag{۲-۸}$$

و بقیه مختصات x'_2 و x'_3 مشابه رابطه بالا محاسبه می‌شوند، مشروط به این که جهت‌های کسینوسی موجود باشد. حال به کمیت‌های اسکالری و برداری می‌پردازیم.

۳. کمیت‌های اسکالر

یک تابع اسکالر در فضا به تابعی گفته می‌شود که در هر نقطه از فضا با مقدار عددی آن توصیف می‌شود. کمیت‌هایی مانند دما، فشار و سایر خواص ترمودینامیکی از نوع کمیت اسکالر می‌باشند. یک میدان اسکالری را به صورت ذیل نمایش می‌دهیم:

$$m = m(x_1, x_2, x_3) \tag{۲-۹}$$

که m می‌تواند هر کمیتی اسکالر در فضا بر حسب مختصات مکانی باشد. اگر دستگاه مختصات تحت چرخش متعامد قرار گیرد، مقدار کمیت m در دستگاه جدید به صورت ذیل ارائه می‌شود:

$$m' = m'(x'_1 x'_2 x'_3) \tag{۲-۱۰}$$

به عنوان مثال اگر مقدار m به صورت میدان دمای T در فضا در نظر گرفته شود، ملاحظه می‌گردد که در اثر چرخش دستگاه مختصات، مقدار دما نباید تغییر کند. پس می‌توان نوشت:

$$T(x_1, x_2, x_3) = T'(x'_1, x'_2, x'_3) \tag{۲-۱۱}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که کمیت اسکالر کمیتی است که در اثر تبدیل متعامد دستگاه مختصات مقدار آن تغییر نمی‌نماید.

۴. کمیت برداری

کمیت برداری کمیتی است که دارای دو مشخصه "اندازه" و "جهت" باشد. به عنوان مثال بردار سرعت $\vec{v}$ دارای دو مشخصه اندازه و جهت بوده که اندازه آن به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$\vec{v} = v(v_1, v_2, v_3) \tag{۲-۱۲}$$

$$|\vec{v}| = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2} \tag{۲-۱۳}$$

مثال‌های دیگر کمیت برداری عبارت است از: نیرو $(\vec{F})$، مومنتم خطی $(m\vec{v})$ و شتاب $(\vec{a})$.

کمیت برداری به صورت‌های مختلف بیان می‌شود. به عنوان مثال بر حسب بردارهای واحد به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\vec{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2} + v_3\overrightarrow{e_3} \tag{۲-۱۴}$$

و نمایش اندیسی آن عبارت است از:

$$v_i = (v_1, v_2, v_3) \tag{۲-۱۵}$$

میدان برداری، تابعی برداری از مختصات بردار مکانی در فضا می‌باشد که در هر نقطه در فضا دارای جهت خاصی می-باشد. به عنوان مثال میدان برداری سرعت به صورت‌های ذیل نمایش داده می شود:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) \tag{۲-۱۶}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3) \tag{۲-۱۷}$$

اگر میدان برداری $\vec{a}$ در دستگاه مختصات دکارتی $x_1x_2x_3$ موجود باشد، با تبدیل متعامد دستگاه مختصات میدان برداری مذکور به میدان برداری $\vec{a}'$ تبدیل خواهد شد. حال این سؤال مطرح می‌شود که چگونه میدان برداری جدید $\vec{a}'$ از میدان برداری $\vec{a}$ به دست می‌آید.

همان گونه که قبلاً توضیح داده شد، تبدیل متعامد دستگاه مختصات از طریق جهت‌های کسینوسی حاصل می‌شود.

بنابراین میدان برداری جدید از طریق ذیل محاسبه می‌شود:

$$a_i' = l_{ij}a_j \qquad (۲-۱۸)$$

$$a_i' = (a_1', a_2', a_3') \qquad (۲-۱۹)$$

به عنوان مثال

$$a_1' = l_{11}a_1 + l_{12}a_2 + l_{13}a_3 \qquad (۲-۲۰)$$

به همین ترتیب مؤلفه‌های a_2' و a_3' مشابه رابطه بالا قابل محاسبه اند.

۵. جبر بردارها[۳]

اگر دو بردار $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ داده شده باشند، خواص جبری بردارها به صورت‌های مختلف ذیل ارائه می‌شود:

۱-۵. جمع و تفریق بردارها

حاصل جمع و تفریق بردارها، یک بردار می‌شود:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \vec{C} \qquad (۲-۲۱)$$

$$a_i \pm b_i = c_i \qquad i=1,2,3 \qquad (۲-۲۲)$$

۲-۵. ضرب بردارها

۱-۲-۵. ضرب داخلی و یا اسکالر بردارها[۴]

---

[3]Vector Algebra
[4]Dot or Scalar Product

حاصل ضرب اسکالر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عبارت است از کمیت اسکالری که از طریق ذیل محاسبه می‌شود:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (۲-۲۳)$$

از طرفی ضرب داخلی دو بردار را می‌توان به صورت ذیل محاسبه نمود:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |A||B|\cos\alpha \qquad (۲-۲۴)$$

که زاویه α، زاویه مابین دو بردار می‌باشد. با توجه به این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \qquad (۲-۲۵)$$

۲-۲-۵. ضرب برداری یا ضربدری بردارها[5]

حاصل ضرب برداری دو بردار ، کمیتی برداری است که از طریق دترمینان دو بردار به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (۲-۲۶)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e_1} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{e_2} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e_3}$$

باید توجه داشت که قانون جابجایی ضرب برداری دو بردار عبارت است از:

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\left(\vec{B}\times\vec{A}\right) \qquad (۲-۲۷)$$

همچنین ضرب برداری دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\vec{n}\sin\theta \qquad (۲-۲۸)$$

که $\vec{n}$ بردار واحد عمود بر صفحه شامل دو بردار مذکور می‌باشد.

۳-۲-۵. ضرب عدد اسکالر در یک بردار

حاصل ضرب اسکالر با یک بردار، کمیتی اسکالر است. پس ضرب کمیت اسکالر m در بردار A به صورت ذیل نوشته می شود:

---

[5]Vector or Cross Product

$$m\vec{A} = ma_1\vec{e_1} + ma_2\vec{e_2} + ma_3\vec{e_3} \quad (۲-۲۹)$$

۳-۵. حساب بردارها[۶]

عملیات حساب بردارها متنوع می‌باشد، به طوری که پنج عملیات مهم در حساب بردارها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این عملیات عبارت است از: ۱-اپراتور نابلا[۷] و لاپلاس[۸]، ۲- گرادیان[۹] ، ۳- دیورژانس[۱۰]، ۴- کرل[۱۱]، ۵- مشتق ماده[۱۲].

حساب بردارها که به صورت متنوع شامل عملیات بالا می‌باشد، به شرح ذیل توضیح داده می‌شود:

۱-۳-۵. مشتق یک میدان برداری

مشتق یک بردار، حاصلش یک بردار می‌باشد که از مشتق گیری مولفه های بردار به دست می آید.

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \frac{\partial a_i}{\partial u}\vec{e_i} = \frac{\partial a_1}{\partial u}\vec{e_1} + \frac{\partial a_2}{\partial u}\vec{e_2} + \frac{\partial a_3}{\partial u}\vec{e_3} \quad (۲-۳۰)$$

۲-۳-۵. اپراتور دیفرانسیل دل[۱۳]

این اپراتور که کمیتی برداری است، به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e_3} \quad (۲-۳۱)$$

به اپراتور "∇"، نابلا نیز گفته می‌شود.

۳-۳-۵. گرادیان یک کمیت اسکالر

گرادیان یک کمیت اسکالر، کمیتی است برداری که به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\vec{e_i} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\vec{e_1} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\vec{e_2} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\vec{e_3} \quad (۲-۳۲)$$

که در این جا میدان اسکالری ϕ، به صورت $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$ ارائه می‌شود.

---

[6] Vector Calculus
[7] Nabla
[8] Laplace
[9] Gradient
[10] Divergence
[11] Curl
[12] Material Derivation
[13] Del Operator

باید توجه داشت که اپراتور ∇ زمانی که به صورت گرادیان روی یک کمیت اسکالر عمل می‌نماید، درجه تنسوری کمیت اسکالر، به بردار ارتقا می یابد. بعد از معرفی تنسور بیش تر به این موضوع پرداخته خواهد شد.

۴-۳-۵. دیورژانس یک میدان برداری

دیورژانس یک بردار، کمیتی است اسکالر که از ضرب داخلی $\vec{\nabla}$ در آن بردار به دست می‌آید و می‌تواند به صورت ذیل بیان گردد:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \qquad (۲-۳۳)$$

دیورژانس را به صورت ماتریسی نیز می‌توان بیان کرد:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \qquad (۲-۳۴)$$

مفهوم فیزیکی دیورژانس عبارت است از معیار چگونگی واگرا شدن یک میدان برداری.

۵-۳-۵. لاپلاسین یک کمیت اسکالر

لاپلاسین یک کمیت اسکالر عبارت است از دیورژانس گرادیان آن کمیت به صورتی که حاصل آن یک کمیت اسکالری می‌باشد.

به عنوان مثال اگر $F = F(x_1, x_2, x_3)$ یک کمیت اسکالر باشد، لاپلاس آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2 F = \nabla \cdot \nabla F = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \qquad (۲-۳۵)$$

۶-۳-۵. کرل یک بردار

کرل به معنی چرخش است. به عبارتی کرل معیاری است از چگونگی چرخش یک میدان برداری. حاصل کرل یک بردار، یک بردار است که از ضرب خارجی بردار "دل" و بردار مربوطه به دست می‌آید. اگر بردار $\vec{B}$ داده شود، کرل $\vec{B}$ به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\mathrm{Curl}\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (۲-۳۶)$$

$$= \left(\frac{\partial b_3}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2}{\partial x_3}\right)\vec{e_1} - \left(\frac{\partial b_3}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_3}\right)\vec{e_2} + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\right)\vec{e_3}$$

۷-۳-۵. انتگرال یک بردار

انتگرال یک میدان برداری نسبت به یک متغیر اسکالر، یک میدان برداری است. اگر میدان برداری $\vec{A} = \vec{A}(u)$ داده شده باشد، انتگرال بردار مذکور به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\int_a^b \vec{A}(u)\, du = \left[\int_a^b a_i(u)\, du\right] e_i \qquad i=1,2,3 \quad (۲-۳۷)$$

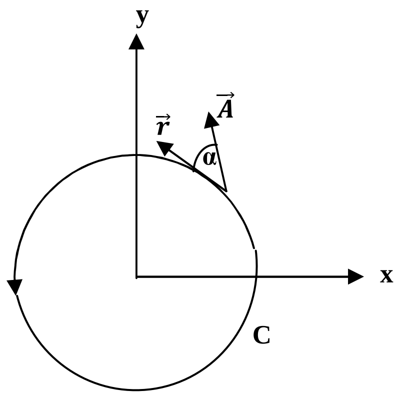
۸-۳-۵. انتگرال خطی یک بردار

انتگرال خطی یک بردار در طول یک منحنی که دارای بردار مکانی $\vec{r} = \vec{r}(x_i)$ می‌باشد، به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$\oint_{p_1}^{p_2} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_C A_i\, dx_i \quad (۲-۳۸)$$

$$\overrightarrow{dr} = (dx, dy, dz) \quad (۲-۳۹)$$

که C یک منحنی بسته می‌باشد.



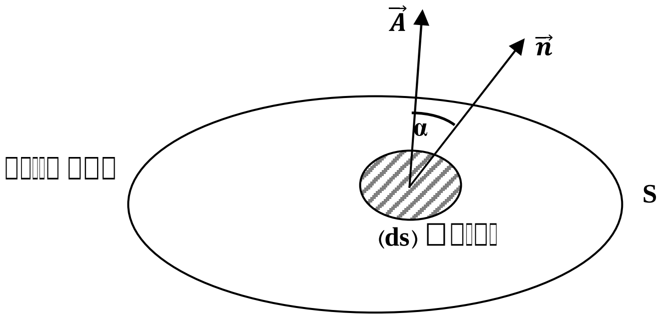
شکل۳-۲: انتگرال خطی یک بردار در طول منحنی**C**

۶. شار[۱۴] در مکانیک سیالات

شار در مکانیک سیالات برداری است که جهت و نرخ عبور یک کمیت مقداری گذرنده از سطح مقطع یک سیستم یا حجم کنترل[۱۵]را مشخص می‌نماید. نحوه عبور یا انتقال این کمیت از طریق هدایت یا نفوذ بوده و مقدارش بر واحد سطح تعیین می‌شود. به عنوان مثال شار جرم، شار مومنتم و شار انرژی را می‌توان نام برد. مثال دیگر شار حجمی است که عبور حجم سیال را بر واحد سطح نشان می‌دهد ،به طوری که بعد آن سرعت است یعنی $\left(\frac{m^3/s}{m^2}\right)$ که معادل بعد سرعت یعنی $\left(m/_{s}\right)$ می‌باشد.

اگر شار برداری را به صورت کلی S نشان دهیم، به عنوان مثال مطابق شکل(۴-۲)، حجم کنترلی را در نظر بگیرید که کمیت A از المان سطحی ds عبور می‌کند. کمیت A می‌تواند سرعت سیال یا دبی جرمی یا هر کمیت دیگری باشد. بردار واحد خروجی عمود بر المان به صورت $\vec{n}$ نشان داده شده است. شار بردار $\vec{A}$ از المان مذکور به صورت $dS = \vec{A}\cdot\vec{n}ds$ نشان داده می‌شود. در این جا شار S را می‌توان از طریق $\left|\vec{A}\cos\alpha\, ds\right|$ محاسبه نمود. آن گاه کل شار از انتگرال سطحی روی حجم کنترل از رابطه ذیل محاسبه می‌شود.

$$\iint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{ds} = \int_S \vec{A}\cdot\vec{n}ds \qquad (۲-۴۰)$$



شکل۴-۲: حجم کنترلی که شار**S** از المان سطحی ds عبور می‌کند

[۱۴]Flux
[۱۵]Control Volume

۱-۶. نظریه دیورژانس گوس[۱۶]

این نظریه ارتباط مابین انتگرال حجمی و سطحی را از یک حجم کنترل به صورت ذیل نشان می‌دهد:

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}dV=\iint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{ds}=\iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}ds \qquad (۲-۴۱)$$

۲-۶. نظریه استوکس[۱۷]

حجم کنترلی را که در بخش قبل به آن اشاره شد، در نظر بگیریم،که دارای سه مشخصه حجم، سطح و هر نوع منحنی بسته‌ای روی سطح (تراز)[۱۸] می‌باشد. اگر فلاکس یا شار $\vec{A}$ را که از المان $\overrightarrow{ds}$ در حجم کنترل عبور می‌نماید، در نظر بگیریم، رابطه انتگرالی ذیل مابین شار برداری $\vec{A}$ برقرار خواهد بود:

$$\int_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{dr}=\iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}ds=\iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\overrightarrow{ds} \qquad (۲-۴۲)$$

که "C" منحنی بسته روی سطح حجم کنترل می‌باشد. انتگرال اول در سمت چپ معادله بالا "انتگرال خطی" است و بقیه انتگرال‌ها، سطحی خواهند بود.

[16]Divergence Theorem Of Gauss
[17]Stokes Theorem
[18]Contour

۷. خلاصه (جمع بندی)

یک کمیت اسکالر کمیتی است که در اثر تبدیل متعامد دستگاه مختصات مقدار آن تغییر نمی کند. میدان برداری، یک تابع برداری از مختصات بردار مکانی در فضا می‌باشد که در هر نقطه در فضا دارای جهت خاصی می‌باشد. حاصل جمع و تفریق بردارها، یک بردار می‌شود. حاصل ضرب اسکالر با یک بردار، مقدارش اسکالر است. مشتق یک بردار، حاصلش برداری است که از مشتق گیری مولفه های بردار به دست می آید. دیورژانس یک بردار، کمیتی است اسکالر که از ضرب داخلی دو بردار $\vec{\nabla}$ و بردار داده شده بدست می‌آید. لاپلاسین یک کمیت اسکالر عبارتست از دیورژانس گرادیان آن کمیت که حاصل آن یک کمیت اسکالری می‌باشد. انتگرال یک میدان برداری نسبت به یک متغیر اسکالر، یک میدان برداری است. شار در مکانیک سیالات یک بردار است که جهت و نرخ عبور یک کمیت مقداری را که از سطح مقطع یک سیستم یا حجم کنترل شده عبور می کند، مشخص می‌نماید.

۸. پرسش های پایان درس

۱- نشان دهید که روابط زیر برای بردارها برقرار است:

$$\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}.\vec{\mathbf{u}}$$

$$(\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{v}}.\vec{\mathbf{w}})$$

$$\vec{\mathbf{u}}.\{\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}\} = (\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}}) + (\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{w}})$$

ج: با شروع از یک سمت معادله و نوشتن بردارها به فرم مولفه ای با اعمال روابط ریاضی و جبری برداری، طرف دیگر معادله حاصل می شود.

۲- سطح یک صفحه ای را با مساحت S را در نظر بگیرید که جهت آن با بردار یکه(واحد) n به سمت پایین است در نظر بگیرید. سیالی با دانسیته ρ با سرعت متوسط v از روی این سطح در حال جریان است. سرعت جرمی جریان (W) گذرنده از این سطح را بر اساس پارامترهای مساله به دست آورید.

ج: از تعریف سرعت جریان جرمی استفاده شود و نیز از تعریف بردار سطح.

۳- نیروی ثابت F بر جسمی که با سرعت V حرکت می کند و لزوما با نیروی وارده هم راستا نیست، وارد می‌شود. نشان دهید که کار انجام شده روی جسم در واحد زمان عبارتست از: W=(F.V)

ج: از تعریف کار یعنی نیرو ضرب در راستای جابجایی استفاده شود.

۴- نشان دهید که:

$$([\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}].[\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}]) + (\vec{\mathbf{v}}.\vec{\mathbf{w}})^2 = \mathbf{v}^2\mathbf{w}^2$$

ج: همانند مساله اول عمل شود.

۵- صحت رابطه زیر را بررسی کنید.

$$[\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\nabla}\vec{\mathbf{v}}] = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\vec{\mathbf{v}}) - [\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{v}})]$$

ج: همانند مساله اول عمل شود.

۶- بردارهای زیر را در نظر بگیرید.

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{w}=\begin{bmatrix}1\\0\\3x\end{bmatrix}$$

محاسبه کنید:

الف) ضرب اسکالر دو بردار$(\vec{v}.\vec{w})$

ب) ضرب برداری دو بردار $(\vec{v}\times\vec{w})$

ج: از تعریف ارائه شده برای ضرب اسکالر و ضرب داخلی در متن درس استفاده شود.

۷- دیورژانس، کرل و گرادیان میدان برداری زیر را (که برای سرعت در جهت x نوشته شده است) بنویسید:

$$v_x=\frac{3}{2k_1}\left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right)-\frac{1}{2k_2}\left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right)^3$$

ج: از تعریف دیورژانس، کرل و گرادیان که در متن درس اشاره شده است، استفاده شود.

۸- اگر داشته باشیم :

$$\vec{u}=3y^2e_x-xe_y+5e_z \qquad \vec{v}=xe_x+(y-z)e_y \qquad \vec{a}=5x^3-y+yz$$

مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $\vec{u}.\vec{v}$ ب) $\vec{u}\times\vec{v}$ ج) $\nabla\times\vec{v}$ د) $\nabla\vec{a}$ ه) $\nabla^2\vec{a}$ و) $\nabla.\vec{u}$

ج: از تعریف روابط و جبر برداری ارائه شده در متن درس استفاده شود.

۹. فهرست منابع درس

- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid mechanics for chemical engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, *Transport phenomena*, second edition, J. Wiley.

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل سوم

حساب تنسورها در مکانیک سیالات

۱. مقدمه

در فصل قبل بیان شد که کمیت‌های فیزیکی به سه دسته اسکالر، برداری و تنسوری قابل تقسیم‌اند. هم‌چنین در آن فصل،کمیت‌های اسکالر و کمیت‌های برداری معرفی شد و حساب و جبر بردارها به همراه مفاهیم مرتبط با بردارها که در مکانیک سیالات بسیار مورد استفاده قرار می گیرند، معرفی و تشریح گردید. در این فصل قصد داریم ضمن بیان جبر و حساب تنسورها به معرفی مفاهیم تنسوری مورد استفاده در مکانیک سیالات بپردازیم.

۲. تنسور کارتزین یا دکارتی

همان گونه که قبلا اشاره شد، از ضرب دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هر کدام با سه مؤلفه، ۹ جفت حاصل‌ضرب از مؤلفه‌های دو بردار حاصل می‌شود که سه جفت آن از ضرب داخلی دو بردار و شش جفت آن از ضرب خارجی دو بردار حاصل می شود:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}:\quad a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 \text{(سه جفت)}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}:\quad a_1b_2, a_1b_3, a_2b_1, a_2b_1, a_2b_3, a_3b_2 \text{(شش جفت)}$$

با این حال، نوع دیگری از ضرب دو بردار وجود دارد که منجر به نه زوج حاصل‌ضرب مذکور می‌شود که در ادامه بیان می‌شود.

۱-۲. تعریف تنسور

تنسور کارتزین یا دکارتی از حاصل ضرب دایادیک[1] دو بردار به وجود می‌آید. ضرب دایادیک دو بردار نوع سومی از حاصل ضرب دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد که به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\overrightarrow{AB} = (a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3})(b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) \qquad (۳-۱)$$

در این جا حاصل ضرب دایادیک دو بردار به صورت یک آرایه[2] نوشته می‌شود که جفت بردارهای واحد در دستگاه دکارتی در این آرایه نشان داده نشده است:

---

[1] Dyadic
[2] Array

$$\overrightarrow{A}\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} \qquad (۳-۲)$$

حال اگر فرض نماییم که $a_ib_j = c_{ij}$، پس آرایه مذکور به صورت ذیل نمایش داده می‌شود:

$$\underline{C} = C_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad (۳-۳)$$

که این آرایه یا ماتریس ، c_{ij}، تنسور کارتزین (دکارتی) درجه دوم نامیده می‌شود.

از طرفی تنسور دکارتی درجه دوم را به شکل دیگری نیز می‌توان توضیح داد. اگر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را در دستگاه مختصات دکارتی ملاحظه کنیم که به صورت اندیسی به شکل A_i و B_j نشان داده شوند، در اثر تبدیل متعامد دستگاه مختصات، دو بردار مذکور به صورت $\acute{A}_p$ و $\acute{B}_q$ در دستگاه مختصات جدید نمایش داده می‌شوند. در این حالت روابط ذیل مابین بردارهای مذکور در دو دستگاه برقرار خواهد بود:

$$\acute{A}_p = l_{pi}A_i \quad ; \quad l_{pi}: \vec{A} \text{ جهت‌های کسینوسی بردار} \qquad (۳-۴)$$

$$\acute{B}_q = l_{qj}B_j \quad ; \quad l_{qj}: \vec{B} \text{ جهت‌های کسینوسی بردار} \qquad (۳-۵)$$

حال با ضرب دایادیک دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ خواهیم داشت:

$$\acute{A}_p\acute{B}_q = l_{pi}l_{qj}A_iB_j \qquad (۳-۶)$$

اگر فرض کنیم $C_{ij} = A_iB_j$ و $\acute{C}_{pq} = \acute{A}_p\acute{B}_q$، پس می‌توان نوشت:

$$\acute{C}_{pq} = l_{pi}l_{qj}C_{ij} \qquad (۳-۷)$$

که $\underline{C} = C_{ij}$ یک تنسور دکارتی درجه دوم می‌باشد که در اثر تبدیل متعامد از رابطه بالا پیروی می‌نماید. در بخش‌های بعدی توضیح داده خواهد شد که تنسور تنش در معادله حرکت سیالات از ضرب دایادیک بردار نیرو و بردار عمود بر سطح حاصل می‌شود.

در نهایت می‌توان سه کمیت اسکالری، برداری و تنسوری را به صورت ذیل خلاصه نمود که کمیتهای اسکالری، برداری و تنسوری به ترتیب کمیتهای تنسوری درجه صفر، درجه یک و درجه دو می باشند. در ادامه به خواص تنسورها پرداخته می‌شود.

۲-۲. ترانهاده[۳] یک تنسور درجه دوم

اگر جای ستون یک تنسور با سطر متناظر آن جابجا شود، تنسور جدید ترانهاده تنسور اول نامیده می‌شود.

به عنوان مثال ترانهاده تنسور C^T به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\underline{C}^T:\ C_{ij}^T = C_{ji} \qquad (۳-۸)$$

$$C_{ij}^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} \qquad (۳-۹)$$

۲-۳. تنسور متقارن[۴]

اگر ترانهاده یک تنسور با خودش برابر باشد به آن تنسور متقارن گویند که در مثال بالا خواهیم داشت:

$$\underline{C}^T = \underline{C} \quad \text{یا} \quad C_{ij} = C_{ji} \qquad (۳-۱۰)$$

۲-۴. تنسور نامتقارن۵

به تنسوری گفته می شود که ترانهاده آن برابر منفی آن تنسور باشد: $C_{ji} = -C_{ij}$ یا $\underline{C}^T = -\underline{C}$

۲-۵. تنسور واحد[۶]

اگر مولفه های قطری یک تنسور برابر یک بوده و بقیه مولفه های آن صفر باشد به آن تنسور واحد گفته می شود. تنسور واحد به شکل های مختلف نشان داده می شود:

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۳-۱۱)$$

---

[3] Transpose
[4] Symmetric
[5] Asymmetric
[6] Unit

یا

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{۳-۱۲}$$

که δ_{ij} ، کرونکر دلتا[۷] نامیده می شود.

۲-۶. تنسور ایزوتروپیک[۸]

حاصل ضرب یک کمیت اسکالر و تنسور واحد را تنسور ایزوتروپیک گویند.

$$m\underline{I} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \tag{۳-۱۳}$$

$$m = m(x, y, z)\ (\text{اسکالر}) \tag{۳-۱۴}$$

به عنوان مثال تنسور فشار مایعات یا گازها یک تنسور ایزوتروپیک می باشد.

۳. حساب تنسورها[۹]

۳-۱. جمع تنسورها

حاصل جمع دو تنسور $\underline{A}$ و $\underline{B}$ یک تنسور می باشد.

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{C} \tag{۳-۱۵}$$

$$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij} \tag{۳-۱۶}$$

۳-۲. ضرب یک بردار در یک تنسور

حاصل ضرب یک بردار در یک تنسور ، یک بردار می باشد. به عنوان مثال اگر ضرب بردار $\vec{a}$ را در تنسور $\underline{B}$ در نظر بگیریم:

$$\vec{a}.\underline{B} = \vec{C} \tag{۳-۱۷}$$

$$a_i B_{ij} = C_i \tag{۳-۱۸}$$

---

[7] Kroneker Delta
[8] Isotropic
[9] Tensor Calculus

که مولفه های بردار حاصل به صورت ذیل به دست می آیند:

$$C_1 = a_1B_{11} + a_1B_{12} + a_1B_{13} \qquad (۳-۱۹)$$

$$C_2 = a_2B_{21} + a_2B_{22} + a_2B_{23} \qquad (۳-۲۰)$$

$$C_3 = a_3B_{31} + a_3B_{32} + a_3B_{33} \qquad (۳-۲۱)$$

هم چنین حاصل ضرب یک تنسور در یک بردار نیز یک بردار است:

$$\underline{B}.\vec{a} = \vec{D} \qquad (۳-۲۲)$$

$$B_{ij}a_j = D_j \qquad (۳-۲۳)$$

۳-۳. حاصل ضرب دو تنسور

ضرب دو تنسور $\underline{\sigma}$ و $\underline{\tau}$ به دو صورت تعریف شده است که یک نوع آن به ضرب اسکالری[۱۰] یا ضرب دو نقطه ای معروف است و دیگری به ضرب تنسوری[۱۱] یا یک نقطه ای، که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

۱-۳-۳. ضرب اسکالری یا دو نقطه ای

اگر دو تنسور $\underline{\sigma}$ و $\underline{\tau}$ داده شود، ضرب اسکالری این دو تنسور به صورت ذیل است:

$$\underline{\sigma} : \underline{\tau} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij}\tau_{ij} \qquad (۳-۲۴)$$

که حاصل چنین ضربی یک کمیت اسکالر می باشد. به عنوان مثال اگر تنسوری نرخ کرنش را برای یک جریان برشی ساده به صورت ذیل تعریف نماییم:

$$\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۳-۶۷)$$

حاصل ضرب اسکالری تنسور مذکور در خودش به صورت ذیل به دست می آید:

$$(\underline{\Delta} : \underline{\Delta}) = \sum_i^3 \sum_j^3 \Delta_{ij}\Delta_{ij} = 2\,\dot{\gamma}^2 \qquad (۳-۲۵)$$

---

[10] Scalar Product
[11] Tensor Product

۲-۳-۳. ضرب تنسوری یا نقطه ای دو تنسور

از ضرب تنسوری دو تنسور $\underline{\sigma}$ و $\underline{\tau}$، یک تنسور به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\tau} = \underline{\Omega} \tag{۳-۲۶}$$

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ip}\tau_{pj} \tag{۳-۲۷}$$

که هر کدام از اندیس ها مقادیر ۱، ۲ و ۳ را اختیار می کند. به عنوان مثال مولفه Ω_{11} به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\Omega_{11} = \sigma_{1p}\tau_{p1} = \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{13}\tau_{31} \tag{۳-۲۸}$$

که حاصل ضرب دو تنسور به صورت کامل به شکل ذیل نوشته می شود

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{21} & \Omega_{31} \\ \Omega_{12} & \Omega_{22} & \Omega_{32} \\ \Omega_{13} & \Omega_{23} & \Omega_{33} \end{pmatrix} \tag{۳-۲۹}$$

۳-۴. مقدار اسکالر یک تنسور

همان گونه که مقدار یا اندازه یک بردار از جذر حاصل ضرب اسکالر آن بردار در خودش به دست می آید، مقدار یک تنسور نیز از ضرب اسکالر تنسور در ترانهاده خودش مطابق رابطه زیر به دست می آید. به عنوان مثال مقدار تنسور $\underline{\tau}$ عبارتست از:

$$|\underline{\tau}| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\underline{\tau}:\underline{\tau}^{T}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}{\tau_{ij}}^{2}\right)} \tag{۳-۳۰}$$

برای مثال مقدار تنسور $\underline{\Delta}$ از رابطه ذیل محاسبه می شود:

$$|\underline{\Delta}| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\underline{\Delta}:\underline{\Delta}^{T}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(2\,\dot{\gamma}^{2}\right)} = \dot{\gamma} \tag{۳-۳۱}$$

۴. نامتغیرهای یک تنسور[12]

همان گونه که برای یک بردار ، مقدار عددی آن از ریشه ضرب داخلی بردار در خودش به دست می آید که به آن نامتغیر آن بردار می گویند. برای تنسورها نیز سه "نامتغیر"عددی وجود دارد که به صورت I، II و III نشان داده می-شود. برای مثال نامتغیرهای تنسور $\underline{\sigma}$، عبارتست از:

$$I = \mathrm{tr}\,\underline{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{۳-۳۲}$$

$$II = \mathrm{tr}\underline{\sigma}^2 = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3}\sigma_{ij}\sigma_{ij} \tag{۳-۳۳}$$

$$III = \mathrm{tr}\underline{\sigma}^3 = \det(\underline{\sigma}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \tag{۳-۳۴}$$

نامتغیر یک بردار یا نامتغیرهای عددی یک تنسور مستقل از دستگاه مختصات می باشند. علامت " tr " به صورت " اثر[13] " یک تنسور تعریف می‌شود. به عبارتی اثر یک تنسور جمع مولفه‌های قطری آن تنسور می‌باشد.

۵. خلاصه (جمع بندی)

تنسور کارتزین یا دکارتی از حاصل ضرب دایادیک دو بردار به وجود می‌آید. حاصل جمع و نیز حاصل تفریق دو تنسور $\underline{A}$ و $\underline{B}$، یک تنسور می‌باشد. از ضرب یک بردار در یک تنسور ، یک بردار حاصل می‌شود. از ضرب دو نقطه ای دو تنسور، یک کمیت اسکالر حاصل می شود. از ضرب تک نقطه ای دو تنسور یک بردار حاصل می شود. اندازه یک تنسور از ضرب اسکالر تنسور در ترانهاده خودش به دست می‌آید. نامتغیرهای عددی یک تنسور مستقل از دستگاه مختصات می باشد.

[12] Invariant
[13] trace

۶. پرسش‌های پایان درس

۱- اگر α یک تنسور متقارن و β یک تنسور نامتقارن باشد، نشان دهید که $(\beta:\alpha)=0$

ج: از تعریف تنسورهای متقارن و نامتقارن و نیز ضرب دو نقطه‌ای دو تنسور که در متن ذکر شد، استفاده شود.

۲- صحت روابط زیر را بررسی کنید.

$$[s\underline{\delta}:\nabla\vec{v}] = s(\nabla.\vec{v})$$

$$[\vec{u}\vec{v}:\underline{\tau}] = \left(\vec{u}.\left(\vec{v}.\underline{\tau}\right)\right)$$

ج: با استفاده از جبر تنسورها، و نیزمولفه های برداری و تنسوری، از یک سمت معادله به سمت دیگر برسید.

۳- نشان دهیدکه اگر $\boldsymbol{\tau}$ یک تنسور متقارن باشد آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\left(\underline{\tau}:\nabla\vec{v}\right) = \left(\nabla.\left[\underline{\tau}.\vec{v}\right]\right) - \left(\vec{v}.\left[\nabla.\underline{\tau}\right]\right)$$

ج: همانند مساله قبلی عمل شود و نیز از مفهوم تنسور متقارن که در متن درس بیان شد، استفاده شود.

۴-اجزای یک تنسور متقارن $\boldsymbol{\tau}$ ونیز بردار v با مولفه های ذیل را داریم.

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

حال مقادیر زیر را به دست آوردید:

الف) $[\underline{\tau}.\vec{v}]$ ب) $[\vec{v}.\underline{\tau}]$ ج) $[\underline{\tau}:\underline{\tau}]$

ج: از مفاهیم جبر و حساب تنسوری که در متن شرح داده شد، استفاده شود.

۵- ضرب تنسوری دو بردار $(\vec{V}\,\vec{W})$ حاصل از بردارهای زیر را به دست آورید.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3x \end{bmatrix}$$

ج: همانند مساله قبل عمل شود.

۶- نشان دهید که رابطه $(\underline{A}.\underline{B})^T = (\underline{B}^T.\underline{A}^T)$ برای هر دو تنسور دلخواه A و B برقرار است.

ج: همانند مساله دوم عمل شود.

۷- هرگاه دو تنسور A و B متقارن باشند، چه رابطه ای بین برقرا است.

ج: با استفاده از تعریف تنسور متقارن، و نیز با کمک مولفه های تنسوری، ضرب نقطه ای دو تنسور را انجام داده و آن گاه می توان به رابطه بین دو ترم اولیه پی برد.

۷. فهرست منابع درس

- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid mechanics for chemical engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, *Transport phenomena*, second edition, J. Wiley.

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل چهارم

مکانیک سیالات پیوسته و سینماتیک سیالات

۱. مقدمه

در فصل اول اهمیت مکانیک سیالات مورد بررسی قرار گرفت و تفاوت بین حالت‌های یک ماده یعنی سیال و جامد توضیح داده شد و توضیح داده شد که جامدات زمانی که تحت نیرو یا تنش برشی قرار می گیرند، مقاومت می کنند و تغییر شکل آن‌ها به صورت خمش یا تغییر شکل استاتیکی است. لیکن مایعات در مقابل تنش برشی نمی‌توانند مقامت کنند بلکه دائما تغییر شکل داده تا زمانی که نیروی برشی از روی آن‌ها برداشته شود. حال به مفهوم مکانیک سیالات پیوسته یا سیالات پیوسته[1] می‌پردازیم.

در توصیف حرکت سیال دو روش وجود دارد، یک روش را مکانیک سیالات پیوسته می‌نامند و به روش دوم مکانیک آماری اطلاق می گردد. معیار استفاده از مکانیک سیالات پیوسته با عدد نودسن بیان می‌شود. در شرایطی که عدد نودسن برای یک سیال از مقدار ۰/۱ بیش‌تر باشد در این حالت نمی‌توان از مکانیک پیوسته استفاده کرد. از مکانیک آماری برای محاسبه ویسکوزیته، ضریب هدایت حرارتی و ضرایب انتقال جرم گازهای سبک استفاده می‌شود.

سیالی که دانسیته آن نسبت به زمان تغییر نماید به آن سیال تراکم پذیر گویند لیکن سیالی که دانسیته آن ثابت بوده و مستقل از زمان و دما باشد به آن سیال غیر تراکمی گویند. مرز بین تراکم پذیری و تراکم ناپذیری با عدد ماخ به عنوان معیار مطرح می‌شود. در شرایطی که $\mathrm{Ma} \leq ۰/۳$ تراکم پذیری سیال قابل اغماض است.

در مکانیک سیالات یافتن میدان سرعت به عنوان اولین پارامتر برای توصیف حرکت سیال محسوب می‌شود. سینماتیمک سیالات به توصیف حرکت سیال بدون در نظر گرفتن منشا حرکت که معمولا نیرو می‌باشد، می‌پردازد. الگوهای توصیف حرکت سیال از طریق مجموعه‌ای از خطوط تعیین می‌شود که به این خطوط، خطوط سینماتیک گفته می‌شود.

---
[1] Continuum Fluid

۲. سیال پیوسته

در توصیف حرکت سیال دو روش ارائه شده است که عبارتند از: مکانیک سیالات پیوسته[۲] و مکانیک‌آماری[۳] . در مکانیک سیالات پیوسته سیال به صورت ماده‌ای همگن توصیف شده است که حالت ها و رفتارش بر حسب متغیرهای میدانی پیوسته مانند سرعت، دانسیته و ... توصیف می‌شود. به عبارتی دیگر سیال از یک ماده و یا یک محیط پیوسته تشکیل شده است که در آن حرکت مولکول‌های تشکیل دهنده مد نظر نیست بلکه حرکت پیوسته و توده‌ای سیال مورد توجه می‌باشد. در هر نقطه از توده سیال متغیرهای میدانی مقدار مشخصی دارند به طوری که تغییرات متغیرهای میدانی پیوسته و به تدریج می‌باشد. برخی از متغیرهای میدانی در مکانیک سیالات پیوسته به صورت های ذیل نشان داده می شوند:

بردار سرعت $\vec{v}=\vec{v}(x, y, z, t)$

دانسیته $\rho=\rho(x, y, z, t)$

فشار دینامیکی $P=P(x, y, z, t)$

پس در مکانیک سیالات پیوسته که تغییرات در خواص متغیرهای میدانی تدریجی می‌باشد، از حساب دیفرانسیل برای آنالیز حرکت سیال استفاده می شود.

سؤالی که ممکن است مطرح شود این است که آیا گازها به عنوان محیط پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرند ؟ در پاسخ به این سوال باید به حالت یا فشار سیال گاز توجه نمود. یکی از پارامترهای مهم در حرکت گازها، مسیر پویش آزاد[۴] گاز است. در فشارهای زیر اتمسفریک، که فشار گاز خیلی پایین است، مسیر پویش آزاد گاز از اندازه سیستم چندین برابر بزرگتر است به طوری که مکانیک سیالات پیوسته قابل استفاده نیست.

---

[2] Continuum Mechanics
[3] Statistical Mechanics
[4] Mean Free Path

سوال بعدی این است که مرز بین مکانیک سیالات پیوسته و مکانیک آماری چیست؟ این سوال توسط نودسن[5] جواب داده شده است. معیار استفاده از مکانیک سیالات پیوسته با عدد نودسن بیان می‌شود که به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$K_n = \frac{\text{متوسط پویش آزاد مولکول ها}}{\text{بعد مشخصه جریان یا اندازه سیستم}} \qquad (۴-۱)$$

به طور کلی سه حالت ممکن است وجود داشته باشد:

مکانیک سیالات پیوسته $\quad K_n <$ ۰/۰۱

مکانیک آماری $\quad K_n >$ ۰/۱

روش مرکب و خاص $\quad$ ۰/۰۱ $< K_n <$ ۰/۱

متوسط پویش آزاد مولکول‌ها برای گازهای ایده آل با نسبت T/P متناسب است به طوری که با اطمینان می‌توان از مکانیک سیالات پیوسته برای توصیف حرکت سیال استفاده نمود.

۳. مکانیک آماری

در شرایطی که عدد نودسن برای یک سیال از مقدار ۰/۱ بیش‌تر باشد در این حالت نمی‌توان از مکانیک پیوسته استفاده کرد. در این حالت به علت فشار کم، فاصله بین مولکول‌ها زیاد بوده به طوری که دانسیته سیال پیوسته نمی‌باشد. هم‌چنین حالت سیال به صورت پیوسته و توده‌ای نیست به گونه‌ای که حرکت مولکول‌های سیال بیش‌تر مورد توجه می‌باشد. در مکانیک آماری فرض می‌شود که ماده متحرک یا سیال از تعدادی مولکول تشکیل شده است و حرکت سیال از قوانین دینامیک یعنی مکانیک حرکت نیوتنی پیروی می‌کند. در این روش از ترکیب قوانین دینامیک نیوتنی و تئوری احتمالات[6] برای به دست آوردن سرعت متوسط سیال و تغییر سایر خواص مانند دانسیته و غیره استفاده می‌شود. مکانیک آماری روش بسیار مفیدی برای توصیف حرکت سیالات گازی سبک و تک اتمی می‌باشد.

[5] Knudsen
[6] Probability Theory

از مکانیک آماری برای محاسبه ویسکوزیته، ضریب هدایت حرارتی و ضریب انتقال جرم گازهای سبک استفاده می-شود. روش مکانیک آماری برای گازهای چند اتمی و مایعات به خوبی توسعه نیافته است لذا هنوز برای این دسته از سیالات مکانیک آماری قابل استفاده نمی‌باشد. باید توجه داشت که در مایعات نیز تحت شرایط خاص ممکن است مکانیک سیالات پیوسته جوابگو نباشد.

۴. تراکم پذیری[۷]

تراکم پذیری در سیالات به معنی تغییر در دانسیته سیال نسبت به زمان است. سیالی که دانسیته آن نسبت به زمان تغییر نماید به آن سیال تراکم پذیر گویند. لیکن سیالی که دانسیته آن ثابت بوده و مستقل از زمان و دما باشد به آن سیال غیر تراکمی[۸] گویند. پس تراکم پذیری در اثر ۱) تغییر فشار و ۲) تغییر دما به وجود می‌آید. تغییرات فشار باعث تغییر در دانسیته سیال می‌شود در حالی که تغییرات در سرعت باعث تغییرات در فشار می‌گردد. به عبارتی می‌توان نوشت که:

تغییر در دانسیته → تغییر در فشار → تغییر در سرعت

ارتباط بین سرعت و فشار در حوزه دینامیک حرکت می‌باشد ولی ارتباط بین فشار و دانسیته در حوزه ترمودینامیک (معادله حالت) می‌باشد. بنابراین توصیف حرکت سیالات غیر تراکمی از حل هم‌زمان معادلات حرکت دینامیکی و معادلات حالت ترمودینامیکی به دست می‌آید.

اکنون سوالی که مطرح است این است که مرز بین تراکم پذیری و تراکم ناپذیری چیست و چگونه تعیین می‌شود. در این‌جا عدد ماخ[۹] به عنوان معیار مطرح می‌شود که تعریف آن به صورت ذیل است:

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c} \qquad (۴\text{-}۲)$$

سرعت مشخصه سیال : v

سرعت صوت در سیال : c

---

[7] Compressibility
[8] Incompressible
[9] Mach Number

در شرایطی که $Ma \leq ۰/۳$ تراکم پذیری سیال قابل اغماض است به طوری که در این حالت دانسیته سیال ثابت فرض شده و فقط از معادلات دینامیک حرکت نیوتنی یا غیر نیوتنی برای توصیف حرکت سیال استفاده می‌شود.

۵. سینماتیک[۱۰] یا الگوهای حرکت سیال

قبل از توصیف الگوهای حرکت سیال لازم است که ابتدا به توضیح میدان سرعت[۱۱] بپردازیم. در مکانیک سیالات یافتن میدان سرعت به عنوان اولین پارامتر برای توصیف حرکت سیال محسوب می‌شود. تغییرات فشار در حرکت سیال از محاسبه تغییرات میدان سرعت در بستر حرکت سیال به دست می‌آید. در حقیقت سرعت یک تابع میدان برداری از مختصات مکان و زمان می‌باشد به طوری که دارای سه مولفه بوده و به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\vec{v}(x,y,z,t) = u(x,y,z,t)\overrightarrow{e_1} + v(x,y,z,t)\overrightarrow{e_2} + w(x,y,z,t)\overrightarrow{e_3} \qquad (۴-۳)$$

که در این جا u، v و w مولفه های برداری سرعت یعنی v_x، v_y و v_z هستند.

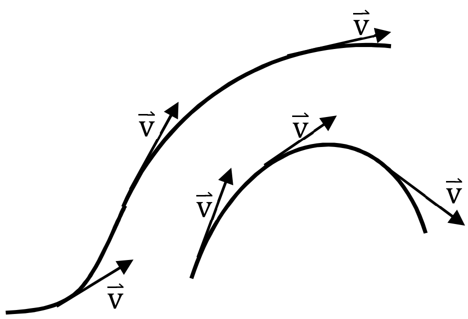
حال به توصیف الگوهای حرکت سیال می‌پردازیم. مکانیک سیالات موضوعی شدیداً تصویری است. سینماتیک به توصیف حرکت سیال بدون در نظر گرفتن منشا حرکت که معمولا نیرو می‌باشد، می‌پردازد. در سینماتیک به چگونگی تصویربرداری از نحوه حرکت سیال پرداخته می‌شود. به عنوان مثال، حرکت آب در یک رودخانه را در نظر بگیرید. آب از مسیر دره‌ها و زمین‌های نسبتا مسطح عبور می‌کند . حال سوالی که وجود دارد این است که چگونه می‌توان تغییرات مسیر آب و نیز تغییرات سرعت آب در فواصل مشخص را تعیین کرد. بنابراین الگوهای توصیف حرکت سیال از طریق مجموعه‌ای از خطوط تعیین می‌شود. به این خطوط، خطوط سینماتیک گفته می‌شود که عبارتند از: خط جریان[۱۲]، خط مسیر[۱۳]، خط سری ذرات[۱۴]و خط زمان[۱۵]. حال به توصیف هر یک از این خطوط سینماتیکی می‌پردازیم.

---

[10] Kinematic
[11] Velocity Field
[12] Streamline
[13] Pathline
[14] Streakline
[15] Timeline

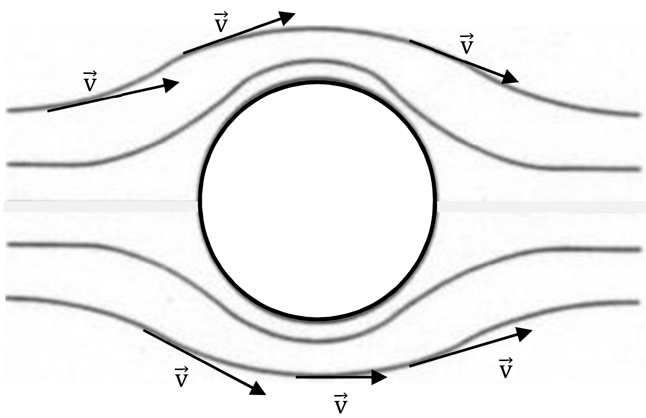
۱-۵. خط جریان

خط جریان خطی در فضا است که در هر نقطه و هر لحظه به بردار سرعت در آن نقطه مماس می‌باشد. به عبارتی خط جریان یک خط موهومی و غیر واقعی است که هیچ وقت خط جریان دیگری نمی‌تواند آن را قطع نماید. نمونه‌ای از چند خط جریان در فضا، در شکل (۱-۴) نشان داده شده است.



شکل ۱-۴: خطوط جریان فرضی

در مثال دیگری می‌توانید خطوط جریان را مانند سیال پایدار در اطراف یک کره توپر مشاهده نمایید (شکل ۲-۴).

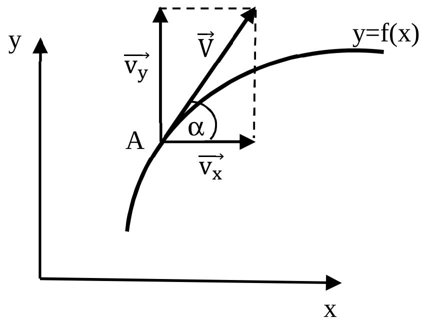


شکل ۲-۴: خطوط جریان اطراف کره توپر

چند خط جریانی که یک منحنی بسته را شکل می دهند به لوله جریان[16] معروفند.

[16] Stream Tube

سؤالی که در این جا مطرح می‌شود این است که اگر مولفه‌های میدان بردار سرعت داده شود، چگونه می‌توان خط جریان را به دست آورد. مطابق شکل (۳-۴)، اگر بردار سرعت در یک نقطه به صورت دو بعدی معین شود، آن گاه خط جریان y=f(x) در نقطه A بر بردار سرعت مماس می شود.



شکل ۳-۴: منحنی خط جریان در صفحه x-y

از طرفی اگر بردار سرعت در صفحه به صورت $\vec{v} = (v_x\, , v_y)$ نشان داده شود آن‌گاه ضریب زاویه‌ای بردار مماس به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} \qquad (۴-۴)$$

با جابجایی عبارت‌های معادله بالا خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \qquad (۴-۵)$$

با انتگرالگیری از معادله (۵-۴) معادله خط جریان به صورت $f(x,y) = 0$ به دست می‌آید. عموماً در فضای سه بعدی با داشتن مولفه‌های سرعت می توان منحنی خط جریان را از رابطه ذیل به دست آورد:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \qquad (۴-۶)$$

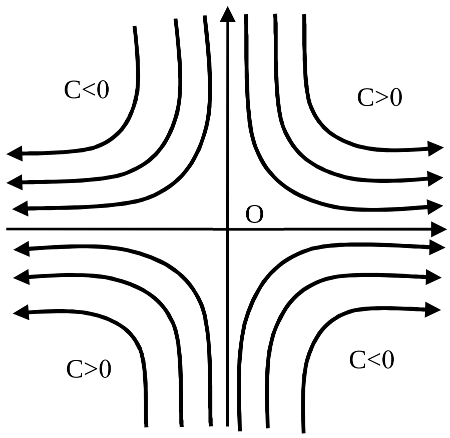
به عنوان مثال اگر مولفه‌های سرعت در یک جریان دو بعدی به صورت ذیل داده شود:

$$\begin{aligned} v_x &= -Ky \\ v_y &= Kx \end{aligned} \qquad (۴-۷)$$

با استفاده از معادله (۵-۴) تابع جریان به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\frac{dx}{-Ky} = \frac{dy}{Kx} \qquad \therefore \qquad y = \frac{C}{x} \tag{۴-۸}$$

که معادله (۸-۴) معادله منحنی هذلولی است که به عنوان تابع جریان برای مثال مذکور می‌باشد. C ، ثابت انتگراسیون است که می‌تواند مثبت یا منفی باشد. شکل (۴-۴) تابع جریان مثال مذکور را نشان می دهد.



شکل ۴-۴: منحنی جریان برای سیال سکونی

در مثال مذکور تابع جریان، یک جریان سکونی[۱۷] را نشان می‌دهد . با توجه به شکل جریان سکونی برای بالای محور x یا پایین آن صادق است.

۲-۵. خط مسیر

خط مسیر مکان هندسی تمام نقاطی است که یک ذره خاص در یک بازه زمانی معین از آن نقاط عبور کرده است. بنابراین خط مسیر حرکت یک ذره را در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ نشان می‌دهد. به عبارتی دیگر خط مسیر یک خط واقعی است که بستگی به نوع ذره داشته و به سرعت محلی ذره بستگی دارد. اگر مولفه‌های سرعت ذره را بر حسب مختصات ذره داشته باشیم خط مسیر از رابطه ذیل به دست می‌آید:

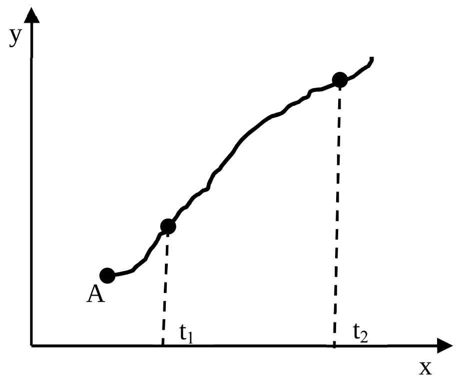
$$\frac{dx_j}{dt} = v_j(x_1, x_2, x_3, t) \tag{۴-۹}$$

که (x_1, x_2, x_3) مختصات ذره در زمان t می‌باشد. با انتگرالگیری از معادله بالا معادلات پارامتری خط مسیر به شکل زیر به دست می‌آید:

[17] Stagnation Flow

$$x = x(t)$$
$$y = y(t) \qquad (۴-۱۰)$$
$$z = z(t)$$

با حذف پارامتر t می‌توان منحنی خط مسیر را به دست آورد.

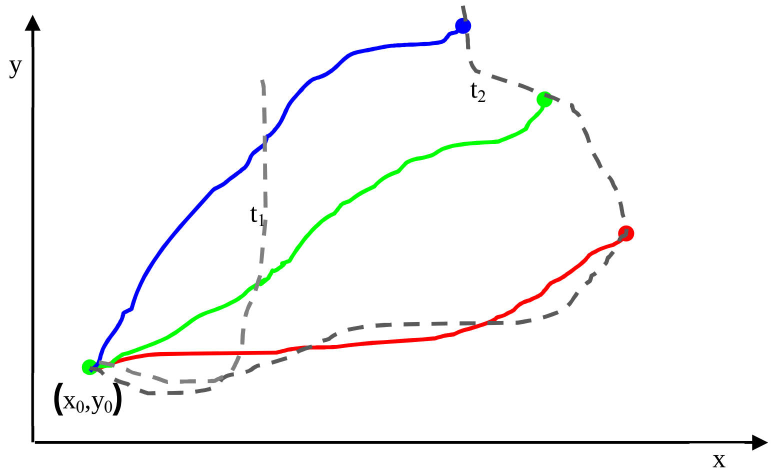


شکل ۵-۴: خط مسیر برای یک ذره در یک جریان دو بعدی

۳-۵. خط سری ذرات

خط سری عبارتست از مکان هندسی تمام ذرات در زمان t که قبلا از یک نقطه معین در زمان t_0 عبور کرده‌اند. به عبارتی دیگر خط سری عبارتست از خط موقت اتصالی بین کلیه ذرات که در بستر سیال قبلا از نقطه معینی عبور کرده‌اند.

در حقیقت خط سری یک منحنی طی شده به عنوان مثال دود یک سیگار است که به طور پیوسته از دهان ثابت فرد سیگاری به هوا رها می‌شود. یا خطی است که توسط یک تزریق کننده رنگ به داخل سیالی مانند آب پیوسته تزریق می‌گردد. منحنی مسیر رنگ در بستر حرکت سیال را خط سری گویند.



شکل ۶-۴: خطوط مسیر هر ذره (خطوط رنگی) و خطوط سری ذرات (خطوط خط چین)

شکل (۶-۴) خطوط مسیر و خطوط سری را برای حرکت ذرات سیال در یک بستر جریان دو بعدی نشان می‌دهد. همان گونه که در شکل نشان داده شده است، تمام ذرات از نقطه (x_0,y_0) در زمان t عبور کرده‌اند. هر ذره در یک مسیر خاص در زمان‌های t_1 و t_2 نشان داده شده است. هم‌چنین خطوط سری نیز در زمان‌های t_1 و t_2 برای تمامی ذرات نشان داده شده است. باید توجه داشت که سه خط جریان، مسیر و سری برای سیالات ناپایدار از هم تفکیک می‌شوند. لیکن اگر سیال پایدار[۱۸] باشد، هر سه خط بر یکدیگر منطبق خواهند شد. در مکانیک سیالات به خصوص در حالات پایدار، خطوط جریان از اهمیت ویژه‌ای برای توصیف حرکت سیال برخوردارند.

۴-۵. خط زمان

مجموعه ای از ذرات در یک لحظه یا در یک زمان داده شده در فضا تشکیل یک خط یا یک منحنی می دهند. به این منحنی، خط زمان اطلاق می گردد. حال با یک مثال، چگونگی به دست آوردن معادلات خط های جریان و مسیر برای سیالات ناپایدار می پردازیم. مولفه‌های یک سیال به صورت ذیل داده شده است:

$$v_x = x(1 + 2t) \qquad (۴-۱۱)$$

[18] Steady State

$$v_y = y$$
$$v_z = 0$$

که t زمان می‌باشد. حال خواسته شده است که تابع جریان و تابع مسیر را برای سیال مذکور به دست آورید. برای به دست آوردن تابع جریان از یک متغیر کمکی به نام s به صورت ذیل استفاده می‌شود:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = ds \quad (۴-۱۲)$$

که می‌توان نوشت:

$$\frac{dx}{ds} = v_x = x(1 + 2t) \quad (۴-۱۳)$$

$$\frac{dy}{ds} = v_y = y \quad (۴-۱۴)$$

بعد از انتگرالگیری از معادلات (۱۳-۴) و (۱۴-۴) خواهیم داشت:

$$x = C_1 \exp([1 + 2t]s) \quad (۴-۱۵)$$

$$y = C_2 \exp(s) \quad (۴-۱۶)$$

که معادلات (۱۵-۴) و (۱۶-۴) معادلات پارامتری خط جریان می‌باشند. ثابت های C_1 و C_2 را ثابت‌های انتگراسیون گویند.

حال فرض کنید که خط جریان از نقطه (۱،۱) عبور کرده و به طور دلخواه مقدار $s = 0$ را قرار می‌دهیم. پس با اعمال مختصات این نقطه در معادلات (۱۵-۴) و (۱۶-۴) مقادیر ثابت‌ها یعنی $C_1 = C_2 = 1$ خواهد بود به طوری که خواهیم داشت:

$$x = \exp([1 + 2t]s)$$
$$y = \exp(s) \quad (۴-۱۷)$$

حال فرض می‌کنیم که خط جریان در زمان $t = 0$ از نقطه (۱،۱) عبور می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$x = \exp(s)$$
$$y = \exp(s) \quad (۴-۱۸)$$

ملاحظه می‌شود که با حذف s از معادله (۴-۱۸) تابع جریان y=x در زمان t=0 حاصل می‌شود. حال می خواهیم تابع مسیر یک ذره را در بستر سیال مذکور به دست آوریم. لذا می توان نوشت:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = x(1+2t) \qquad \frac{dy}{dt} = v_y = y \tag{۴-۱۹}$$

که با حل معادلات (۴-۱۹) خواهیم داشت:

$$x = C_1 \exp([1+2t]t) \qquad y = C_2 \exp(t) \tag{۴-۲۰}$$

معادلات (۴-۲۰) معادلات پارامتری خط مسیر ذرات بر حسب t می‌باشند. حال اگر فرض کنیم که خط مسیر ذره قبلا در زمان t=0 از نقطه (۱،۱) عبور کرده است پس $C_1= C_2=1$ خواهد بود. پس خواهیم داشت:

$$x = \exp([1+2t]t) \qquad y = \exp(t) \tag{۴-۲۱}$$

با حذف پارامتر t از معادلات (۴-۲۱) معادله خط مسیر به صورت $x = y^3$ به دست می‌آید.

۶. توصیف اویلری[۱۹] و لاگرانژی[۲۰]

اصول اولیه و اساسی دینامیک حرکت از قانون نیوتن برای اجسام و ذرات صلب شروع گردید. در مکانیک جامدات روش لاگرانژی را برای توصیف حرکت یک ذره یا یک جسم استفاده می کنند. اگر قانون دوم حرکت نیوتن را برای یک جسم که به صورت سیستم بسته[۲۱] می‌باشد، به صورت ذیل بنویسیم:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{۴-۲۲}$$

که در این معادله، $\vec{F}$ نیروی دینامیک و m جرم جسم صلب و $\frac{d\vec{v}}{dt}$ شتاب جسم مورد نظر است، به علت ثابت بودن جرم جسم ، می‌توان این معادله را به صورت ذیل نوشت:

[19] Eulerian
[20] Lagrangian
[21] Closed System

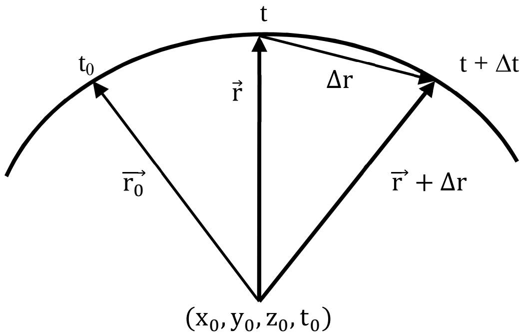
$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \qquad (۴-۲۳)$$

که $m\vec{v}$ را مقدار اندازه حرکت خطی[22] گویند. به عبارتی معادله (۲۳-۴) به قانون بقای اندازه حرکت خطی مشهور است. در روش لاگرانژی برای توصیف حرکت اجسام یا ذرات از معادله (۲۳-۴) استفاده می‌شود. لیکن این گونه توصیف از حرکت سیال در مکانیک سیالات مناسب نیست. چون در آنالیز مسائل در مکانیک سیالات با میدان جریان مواجه هستیم. به عبارتی در مکانیک سیالات پیوسته به تفسیر متغیرهای میدانی[23] مانند میدان سرعت $\vec{v}(x, y, z, t)$ و میدان فشار $P(x, y, z, t)$ نیاز داریم، یعنی تغییرات مولفه‌های سرعت و فشار بر حسب زمان در هر نقطه از بستر سیال مورد توجه است و تغییرات فشاری یعنی $P(t)$ که یک ذره تجربه می‌کند برای سیالات پیوسته مدنظر نمی باشد. به این توصیف از حرکت سیال توصیف اویلری گویند. پس می‌توان توصیف لاگرانژی و اویلری را به صورت ذیل خلاصه کرد:

۱-۶. توصیف لاگرانژی

در توصیف لاگرانژی سیستم بسته بوده و جرم آن ثابت می‌باشد. در این حالت مرزهای سیستم بسته است و فقط می‌تواند تبادل انرژی و مومنتوم با محیط داشته باشد. قانون دوم حرکت نیوتن مستقیما برای سیستم لاگرانژی قابل اعمال است. در سیستم لاگرانژی محاسبه تغییرات کل متغیرها مانند فشار بر حسب زمان انجام می‌شود. در حقیقت در این روش، ناظر به دنبال ذره حرکت می‌کند به طوری که تغییرات متغیر(ها) همراه با ذره تجربه و اندازه گیری می‌شود.

[22] Linear Momentum
[23] Field Variable



شکل ۷-۴: حرکت لاگرانژی ذره A

در روش لاگرانژی تغییرات متغیرها مانند دما و فشار نسبت به یک نقطه مبدا (x_0 , y_0 , z_0 , t_0) اندازه گیری می‌شود. به عنوان مثال حرکت یک ذره سیال را در شکل (۷-۴) ملاحظه کنید. همان گونه که مشاهده می‌شود ذره A در مبدا دارای مختصات $\vec{r_0}(x_0, y_0, z_0, t_0)$ می‌باشد. در اثر حرکت ذره روی خط مسیر در زمان t مختصات آن با بردار $\vec{r}(x_0, y_0, z_0, t)$ نسبت به مبدأ (x_0, y_0, z_0) مشخص می گردد. ملاحظه می‌شود که بردار مکانی $\vec{r}$ برای توصیف حرکت ذره در بستر جریان به صورت ذیل ارائه می‌شود:

$$\vec{r} = \vec{r}(r_0, t) \tag{۴-۲۴}$$

که مختصات دکارتی ذره مورد نظر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= r_1(x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= r_2(x_0, y_0, z_0, t) \\ z &= r_3(x_0, y_0, z_0, t) \end{aligned} \tag{۴-۲۵}$$

بردار سرعت و شتاب ذره مورد نظر نیز به روش ذیل محاسبه می‌شود:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)_{r_0} = \vec{v}(r_0, t) \tag{۴-۲۶}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{r_0} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{a}(r_0, t) \tag{۴-۲۷}$$

۲-۶. توصیف اویلری

۱- در توصیف اویلری سیستم به صورت حجم کنترل[۲۴] در نظر گرفته می‌شود. به طوری که تبادل جرم، انرژی و مومنتوم در حجم کنترل انجام می‌گیرد.

۲- با استفاده از توصیف اویلری متغیرهای میدانی مانند سرعت $\vec{v}(x,y,z,t)$ و فشار $P(x,y,z,t)$ در هر نقطه از بستر سیال به صورت محلی و جابجایی اندازه گیری می‌شود.

۳- در توصیف اویلری نمی‌توان مستقیما از قانون دوم نیوتن استفاده کرد. لیکن، قانون دوم نیوتن تنها قانون دینامیکی است که برای حرکت سیال باید اعمال گردد.

۴- در توصیف اویلری ناظر به دنبال سیال حرکت نمی‌کند بلکه حجم کنترل در فضایی که سیال از آن عبور می‌کند مورد بررسی قرار می‌گیرد.

پس به طور خلاصه می‌توان گفت که در توصیف لاگرانژی سیستم بسته و اختیاری است و در توصیف اویلری سیستم باز و به صورت حجم کنترل است. سوالی که مطرح است این است که چگونه قانون دوم نیوتن که برای حرکت لاگرانژی جامدات صادق است، می‌تواند برای توصیف اویلری سیالات به کار رود. با استفاده از حساب دیفرانسیل دو ابزار برای تبدیل توصیف حرکت سیال از لاگرانژی به اویلری وجود دارد که عبارتند از: یکی، اپراتور مشتق ماده[۲۵] و دیگری، تئوری انتقال رینولدز[۲۶]. در ادامه به معرفی و نحوه استفاده از این دو ابزار می‌پردازیم.

۷. اپراتور مشتق ماده

قبل از توضیح مشتق ماده لازم است که به گونه‌های مختلف مشتق‌های زمانی بپردازیم. در حساب جبری، سه نوع مشتق زمانی معرفی شده است که به ترتیب عبارتند از: مشتق زمانی جزیی[۲۷] $\frac{\partial}{\partial t}$، مشتق زمانی کل[۲۸] $(\frac{d}{dt})$ و مشتق زمانی ماده[۲۹] $(\frac{D}{Dt})$. حال به توصیف هر یک از مشتقات مذکور می‌پردازیم.

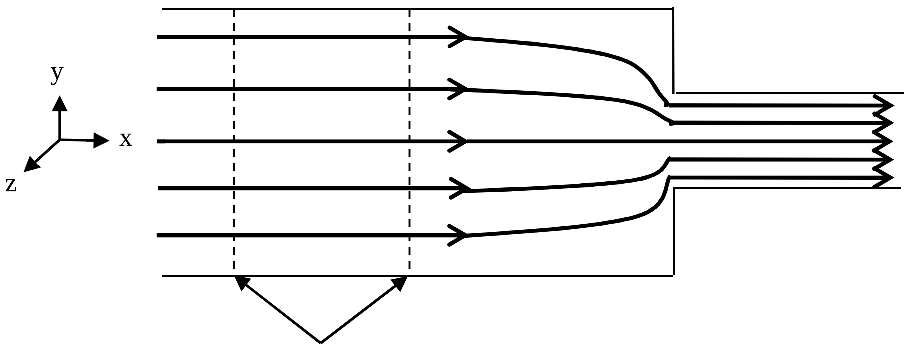
---

[24] Control Volume
[25] Material Derivative Operator
[26] Reynolds Transport Theorem
[27] Partial Time Derivative

۱-۷. مشتق زمانی جزیی

در این مشتق تغییرات یک متغیر، در نقطه‌ای که مختصات آن مشخص است، محاسبه می‌شود. به عنوان مثال فرض کنید که در زیر یک پل عابر پیاده قرار داریم و تعداد خودروهای عبوری از زیر پل را بر حسب زمان می شماریم. نتیجه شمارش خودروها را بر حسب زمان به صورت $(\partial N(x,y,z,t)/\partial t)_{x,y,z}$ نشان می‌دهیم که N تعداد خودروها در زمان t می‌باشد.

در مثال دیگر، حرکت سیال را به صورت پایدار در یک کانال همگرا مطابق شکل (۸-۴) در نظر بگیرید که در آن خطوط جریان نشان داده شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود به علت نزدیک شدن سیال به کانال باریک، شتاب آن به تدریج افزایش می‌یابد، چرا که دبی جریان همواره در طول کانال ثابت است. حال اگر ناظری در هر نقطه از کانال حرکت کند و سرعت سیال را در هر نقطه با جریان سنج[30] رصد نماید، دیده می‌شود که سرعت سیال در هر نقطه از کانال با گذشت زمان ثابت است اما سرعت سیال از نقطه‌ای به نقطه ای دیگر در طول کانال در حال تغییر است. به همین دلیل تغییرات سرعت سیال را در هر نقطه از کانال به صورت $\frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t}$ نشان می‌دهیم که در این حالت چون حرکت سیال پایدار است، می توان نوشت: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$



شکل ۸-۴: حرکت سیال پایدار درون یک کانال همگرا

[28] Total Time Derivative
[29] Material or Substantial Time Derivative
[30] Flowmeter

۲-۷. مشتق زمانی کل

به طور کلی اگر متغیری به صورت $\alpha=\alpha(x,y,z,t)$ داشته باشیم، با استفاده از حساب دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$d\alpha = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)dz \qquad (۴-۲۸)$$

پس در هر لحظه تغییرات زمانی کل متغیر α به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_{x,y,z} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)_{y,z,t}\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)_{x,z,t}\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)_{x,y,t}\frac{dz}{dt} \qquad (۴-۲۹)$$

که $\frac{d\alpha}{dt}$ را مشتق زمانی کل α می‌نامند.

در مثال حرکت سیال در یک کانال اگر $\alpha = v_x$ ، مشتق زمانی کل سرعت در جهت حرکت سیال عبارتست از:

$$\frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\right)_{x,y,z} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{y,z,t}\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{x,z,t}\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{x,y,t}\frac{dz}{dt} \qquad (۴-۳۰)$$

از طرفی چون $v_x= v_x(x)$ می باشد، پس خواهیم داشت:

$$\frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{y,z,t}\frac{dx}{dt} \qquad (۴-۳۱)$$

چون شتاب سیال به صورت $a_x = dv_x/dt$ تعریف می‌شود، با توجه به تعریف $v_x= dx/dt$ خواهیم داشت:

$$a_x = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{y,z,t} v_x \qquad (۴-۳۲)$$

پس مشتق زمانی کل متغیر α به صورت ذیل خواهد بود:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_{x,y,z} + V_x\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)_{y,z,t} + V_y\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)_{x,z,t} + V_z\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)_{x,y,t} \qquad (۳-۳۳)$$

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt}$$

که V_x، V_y و V_z مولفه‌های سرعت ناظر می‌باشند.

برای نشان دادن مشتق زمانی کل معادله (۳۳-۴) را به صورت ذیل می‌نویسیم:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \alpha \qquad (۴-۳۴)$$

$\frac{d\alpha}{dt}$: مشتق زمانی کل

$\frac{\partial \alpha}{\partial t}$: مشتق زمانی جزیی

$\vec{V} \cdot \nabla \alpha$: مشتق جابجایی

۳-۷. مشتق زمانی ماده

همان گونه که در قسمت قبل توضیح داده شد مشتق زمانی کل یک متغیر از دو بخش مشتق زمانی جزیی و مشتق جابجایی تشکیل شده است. هم چنین بیان شد که سرعت های V_x، V_y و V_z مولفه‌های سرعت ناظر همراه سیال می‌باشد. به عنوان مثال فردی را در نظر بگیرید که با قایق در بستر رودخانه در حال قایقرانی است. به طوری که مولفه‌های سرعت قایق به ترتیب V_x، V_y و V_z است. از طرفی مولفه‌های سرعت آب رودخانه v_x، v_y و v_z خواهد بود. همان گونه که ملاحظه می‌شود مولفه‌های سرعت قایق با مولفه‌های سرعت آب رودخانه متفاوت می‌باشد. حال اگر موتور قایق خاموش شود به طوری که قایق همراه با آب رودخانه حرکت نماید، سرعت قایق برابر سرعت آب رودخانه خواهد بود. در این حالت خواهیم داشت: $v_x= V_x$، $v_y= V_y$ و $v_z= V_z$. بنابراین معادله (۴-۳۳) را به صورت ذیل می‌توان نوشت:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + v_x\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) + v_y\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) + v_z\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) \qquad (۴-۳۵)$$

که اگر به صورت برداری بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \alpha \qquad (۴-۳۶)$$

رابطه (۴-۳۶) را مشتق زمانی ماده گویند. حال اگر α به صورت مولفه سرعت در نظر گرفته شود خواهیم داشت:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_i \qquad i = 1,2,3 \qquad (۴-۳۷)$$

در معادله (۴-۳۷) مشتق Dv_i/Dt عبارتست از شتاب کل سیال در توصیف لاگرانژی، لیکن در قسمت راست معادله که از دو عبارت $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ و $\vec{v} \cdot \nabla v_i$ تشکیل شده است، توصیف حرکت سیال به صورت اویلری بیان می‌شود. به عبارتی رابطه

مشتق ماده (۳۷-۴) ابزاری برای تبدیل سرعت لاگرانژی به سرعت‌های اویلری است. بنابراین توصیف اویلری به صورت سرعت موضعی (جزئی) و سرعت جابجایی نشان داده شده است.

۸. تئوری انتقال رینولدز

برای تبدیل از آنالیز لاگرانژی (سیستمی) به آنالیز اویلری (حجم کنترل) به یک ابزار یا رابطه ریاضی نیاز داریم تا بتوان توصیف حرکت ذرات سیال را از توصیف سیستمی به توصیف حرکت سیال بر حسب متغیرهای میدانی در چارچوب اویلری تبدیل نماییم. در قسمت قبل از ابزار مشتق ماده در حساب دیفرانسیلی برای تبدیل الگوی لاگرانژی به الگوی اویلری استفاده شد. در این‌جا در چارچوب حجم کنترل از " تئوری انتقال رینولدز" استفاده می‌شود. بنابراین لازم است که ابتدا این تئوری شرح داده شود.

ابتدا به توصیف انتگرال حجمی یک سیستم بسته در چارچوب لاگرانژی می پردازیم. مطابق شکل (۷-۴) حرکت لاگرانژی (سیستمی) یک سیستم ، $V_{sys}(t)$ را در نظر بگیرید. خواص فیزیکی سیستم مذکور را به صورت $\alpha=\alpha\ (x_0, y_0, z_0, t_0)$ در نظر بگیرید. با استفاده از انتگرال حجمی مشتق زمانی لاگرانژی[31] برای سیستم اختیاری بسته به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_s(t)} \alpha(x_0, y_0, z_0, t)dv \qquad (۴-۳۸)$$

حال اگر α را به صورت دانسیته سیستم یعنی $\rho=\rho\ (x_0, y_0, z_0, t_0)$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_s(t)} \rho(x_0, y_0, z_0, t)dV \qquad (۴-۳۹)$$

[31] Lagrangian Time Derivative

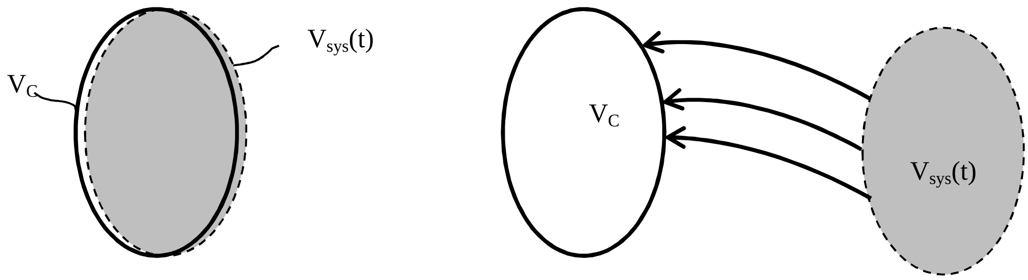
در این جا انتگرال حجمی بر روی دانسیته سیستم ، تغییرات کل زمانی جرم سیستم را نشان می دهد. از طرفی جرم سیستم در مختصات لاگرانژی ثابت می‌باشد، پس تغییرات جرمی سیستم نسبت به زمان صفر خواهد شد. بنابراین رابطه حجمی (۳۹-۴) به صورت ذیل نوشته می شود.

$$\frac{d}{dt}\int_{V_s(t)} \rho(x_0, y_0, z_0, t)dV = \frac{dm_s(t)}{dt} = 0 \qquad (۴-۴۰)$$

در مثالی دیگر اگر $\alpha = \rho\vec{v}$ باشد، که $\rho\vec{v}$ بردار مومنتوم خطی در واحد حجم بوده و در آن $\vec{v} = \vec{v}(x_0, y_0, z_0, t)$ بردار سرعت سیال می باشد، در این حالت انتگرال حجمی مومنتوم به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_s(t)} \rho\vec{v}dV = \frac{dM_{sys}}{dt} \qquad (۴-۴۱)$$

که M_{sys} مومنتوم کل سیستم لاگرانژی است.



شکل ۹-۴: توصیف حرکت سیستم لاگرانژی در انطباق با توصیف اویلری

معادله (۴۱-۴) تغییرات کل زمانی کل مومنتوم سیستم لاگرانژی را توصیف می کند. سوالی که مطرح است این است که چگونه می توان تغییرات زمانی کل در توصیف لاگرانژی را به تغییرات زمانی اویلری یعنی تغییرات در حجم کنترل تبدیل نمود. در این جا مطابق شکل (۹-۳) سیستم لاگرانژی را با حجم کنترل مشاهده می‌کنید. این شکل نشان می‌دهد که سیستم لاگرانژی به صورت $V_{sys}(t)$ در حال حرکت به طرف حجم کنترل (سیستم اویلری) می باشد. حجم کنترل را به صورت V_c نشان می‌دهیم. سیستم لاگرانژی در زمان t بر حجم کنترل منطبق می‌شود (شکل ۸-۴، ج) . اگر تغییرات زمانی کل لاگرانژی را به صورت ذیل بنویسیم:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{sys}(t)} \alpha(t)dV = \lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\int_{V_{sys}(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t)dV - \int_{V_{sys}(t)} \alpha(t)dV\right]\right\} \qquad (۴-۴۲)$$

معادله (۴-۴۲) با استفاده از تعریف مشتق تغییرات زمانی کل سیستم لاگرانژی را نشان می‌دهد. با اضافه کردن و کم کردن عبارت $\int_{V_{sys}(t)} \alpha(t+\delta t)dV$ به سمت راست معادله (۴-۴۲) می توان به دو عبارت ذیل دست یافت:

$$\lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\int_{V_{sys}(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t)dV - \int_{V_{sys}(t)} \alpha(t+\delta t)dV\right]\right\} \qquad \text{عبارت (۱)}$$

$$\lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\int_{V_{sys}(t)} \alpha(t+\delta t)dV - \int_{V_{sys}(t)} \alpha(t)dV\right]\right\} \qquad \text{عبارت (۲)}$$

عبارت های ۱و ۲ به صورت زیر قابل ساده شدن هستند:

$$\lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{1}{\delta t}\int_{V_{sys}(t+\delta t)-V_{sys}(t)} \alpha(t+\delta t)dV\right] = \int_{A_C} \alpha(t)(\vec{n}.\vec{v})dA \qquad \text{عبارت (۱)}$$

$$\int_{V_{sys}(t)} \lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}[\alpha(t+\delta t)-\alpha(t)]\right\}dV = \int_{V_C}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)dV \qquad \text{عبارت (۲)}$$

در عبارت ۱ انتگرال حجمی به انتگرال سطحی تبدیل شده است به طوری که A_C مساحت حجم کنترل را نشان می‌دهد. هم‌چنین بردار $\vec{n}$ بردار واحد عبوری خارجی در المان سطحی dA می‌باشد. حال با جایگزین کردن عبارت‌های ۱و ۲ در معادله (۴-۴۲) خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{sys}(t)} \alpha(t)dV = \int_{A_C} \alpha(t)(\vec{n}.\vec{v})dA + \int_{V_C}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)dV \qquad (۴-۴۳)$$

در معادله (۴-۴۳) عبارت اول نمایان‌گر شار کمیت α از سطح حجم کنترل است و عبارت دوم تجمع کمیت α را در حجم کنترل نشان می‌دهد.

حال با استفاده از قضیه گوس عبارت اول را که انتگرال سطحی است، به انتگرال حجمی تبدیل می‌کنیم، که خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{sys}(t)} \alpha(t)dV = \int_{V_C} \nabla\cdot(\alpha\vec{v})dV + \int_{V_C}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)dV \qquad (۴-۴۴)$$

و در نهایت معادله (۴-۴۴) به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{sys}(t)} \alpha(t) dV = \int_{V_C} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{v})\right) dV \qquad (۴-۴۵)$$

معادله (۴-۴۵) به عنوان معادله "تئوری انتقال رینولدز" معروف است. همان گونه که معادله مذکور نشان می‌دهد تغییرات زمانی کل کمیت α در توصیف لاگرانژی به تغییرات جزیی زمانی و تغییرات جابجایی در توصیف اویلری تبدیل شده است. معادله (۴-۴۵) شکل برداری تئوری انتقال رینولدز می‌باشد. شکل اندیسی معادله مذکور به صورت ذیل است:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{sys}(t)} \alpha(t) dV = \int_{V_C} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha v_i)\right) dV \qquad (۴-۴۶)$$

که v_i مولفه‌های سرعت می‌باشند.

۹. قانون بقای جرم[۳۲] و معادله پیوستگی[۳۳]

قانون بقای جرم از موازنه جرم برای یک سیستم ماکروسکوپیک به دست می‌آید. ابتدا این قانون را برای یک سیستم لاگرانژی تعریف می‌کنیم، سپس با استفاده از تئوری انتقال رینولدز، این قانون را در سیستم اویلری توصیف می‌کنیم.

در سیستم لاگرانژی قانون بقای جرم به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{sys}(t)} \rho dV = 0 \qquad (۴-۴۷)$$

$$\rho = \rho(x_0, y_0, z_0, t)$$

حال با استفاده از تئوری انتقال رینولدز معادله لاگرانژی (۴۷-۳) را در سیستم اویلری نشان می‌دهیم:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{sys}(t)} \rho dV = \int_{V_C} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v})\right) dV = 0 \qquad (۴-۴۸)$$

چون حجم کنترل ثابت و معین می‌باشد، معادله (۴-۴۸) زمانی برقرار است که عبارت داخل انتگرال برابر صفر گردد، یعنی:

---

[32] Conservation of Mass
[33] Continuity Equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \qquad (۴-۴۹)$$

معادله (۴-۴۹) شکل برداری معادله پیوستگی است، که شکل اندیسی آن عبارت است از:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2,3 \qquad (۴-۵۰)$$

در حالتی که سیال غیر تراکمی باشد، (ثابت=ρ) ، معادله پیوستگی به صورت ذیل در می‌آید:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \qquad (۴-۵۱)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (۴-۵۲)$$

معادله پیوستگی بیان شده در معادله (۴-۴۹)، در مختصات دکارتی است. این معادله در دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی نیز قابل بیان است که در ادامه به آن می‌پردازیم.

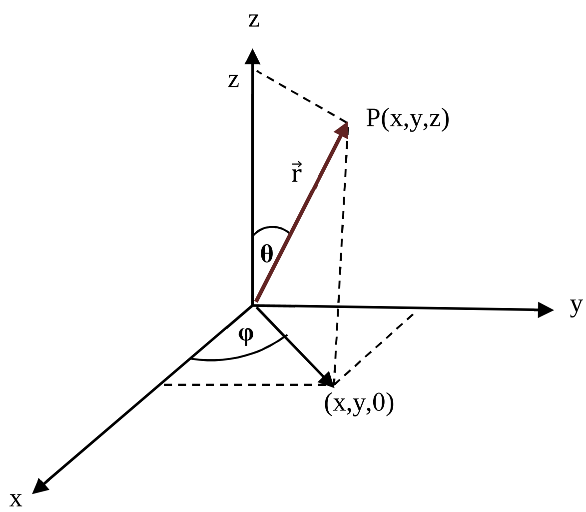
دستگاه مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی برای بردار $\vec{r}$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) \qquad (۴-۵۳)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(r, \theta, z) \qquad (۴-۵۴)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(r, \theta, \varphi) \qquad (۴-۵۵)$$

در شکل (۴-۱۰) توصیف بردار $\vec{r}$ را در سه دستگاه مذکور مشاهده می‌کنید. مختصات هر دستگاه قابل تبدیل به دستگاه دیگر است. روابط مثلثاتی لازم برای تبدیل مختصات دکارتی به استوانه‌ای عبارتست از:



شکل ۱۰-۴: توصیف بردار در سه دستگاه دکارتی، استوانه‌ای و کروی

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\
\overrightarrow{e_r} &= \cos\theta\, e_x + \sin\theta\, e_y \\
\overrightarrow{e_\theta} &= -\sin\theta\, e_x + \cos\theta\, e_y \\
\overrightarrow{e_z} &= \overrightarrow{e_z}
\end{aligned}
\tag{۴-۵۶}
$$

برای تبدیل مختصات دکارتی به کروی نیز از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi \\
y &= r\sin\theta\sin\varphi \\
z &= r\cos\theta \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\
\varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}
\tag{۴-۵۷}
$$

$$\vec{e_r} = \sin\theta\cos\varphi\, e_x + \sin\theta\sin\varphi\, e_y + \cos\theta e_z$$
$$\vec{e_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\, e_x + \cos\theta\sin\varphi\, e_y - \sin\theta\, e_z \qquad (۴-۵۸)$$
$$\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\, e_x + \cos\varphi\, e_y$$

حال معادله پیوستگی در سه دستگاه مختصات مذکور به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

۱) دستگاه دکارتی

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \qquad (۴-۵۹)$$

۲) دستگاه استوانه‌ای

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \qquad (۴-۶۰)$$

۳) دستگاه کروی

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial\varphi} = 0 \qquad (۴-۶۱)$$

معادله پیوستگی در مختصات دکارتی به صورت دیگر نیز نوشته می‌شود که در آن عبارت‌های معادله پیوستگی با استفاده از مشتق بیان می‌شود یعنی:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \qquad (۴-۶۲)$$

که با اعمال رابطه اخیر در معادله پیوستگی برای مختصات دکارتی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (۴-۶۳)$$

که عبارت‌های اول و دوم در معادله (۶۳-۳) همان مشتق ماده برای دانسیته است که در معادله (۳۷-۴) به آن پرداختیم.

پس خواهیم داشت:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla\cdot\vec{v}) = 0 \qquad (۴-۶۴)$$

که برای سیال غیرتراکمی که ρ در آن ثابت است، معادله پیوستگی به صورت $\nabla\cdot\vec{v} = 0$ در می‌آید.

۱۰. توابع جریان

در قسمت‌های قبل به الگوی جریان سیال پرداختیم و نشان دادیم که با خطوط جریان می‌توان حرکت سیال را توصیف کرد. در این‌جا به توابع جریان می‌پردازیم. توابع جریان در دو حالت یکی برای جریان دو بعدی[۳۴] و دیگری برای جریان متقارن[۳۵] وجود دارد که در ادامه به شرح این دو حالت می‌پردازیم.

۱۰-۱. تابع لاگرانژی در جریان‌های دو بعدی

در جریان دو بعدی مولفه‌های سرعت به صورت $v_x = v_x(x,y)$ و $v_y = v_y(x,y)$ نشان داده می‌شود. از طرفی معادله پیوستگی در جریان دو بعدی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \qquad (۴-۶۵)$$

حال اگر یک تابع پیوسته اسکالر به صورت $\psi=\psi(x,y)$ تعریف گردد، دیفرانسیل کامل این تابع به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$d\psi = Mdx + Ndy \qquad (۴-۶۶)$$

$$M = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_y \qquad (۴-۶۷)$$

$$N = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_x \qquad (۴-۶۸)$$

تابع ψ زمانی کامل خواهد بود که داشته باشیم:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x \qquad (۴-۶۹)$$

با مقایسه رابطه (۶۹-۳) با معادله (۶۵-۴) خواهیم داشت: $M=-v_y$ و $N=v_x$. لذا می‌توان رابطه (۶۶-۴) را به صورت زیر نوشت:

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy \qquad (۴-۷۰)$$

[34] Two Dimension Flow
[35] Axisymmetric

و با استفاده از روابط (۶۷-۴) و (۶۸-۴) می توان نوشت:

$$v_y = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_y$$
$$v_x = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_x \qquad (۴-۷۱)$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که برای یک جریان دو بعدی، یک تابع پیوسته و اسکالر به صورت $\psi=\psi(x,y)$ وجود دارد که می‌توان با کمک آن مولفه‌های سرعت را از رابطه (۷۱-۴) به دست آورد. به تابع ψ تابع جریان **لاگرانژی** گویند. حال اگر تابع جریان ψ برابر با مقداری ثابت باشد (ثابت $=\psi$) می‌توان نوشت:

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy = 0 \qquad (۴-۷۲)$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi = \frac{v_y}{v_x} \qquad (۴-۷۳)$$

از طرفی اگر معادله (۷۳-۴) را با معادله (۴-۴) مقایسه نماییم، در این حالت تابع جریان ثابت برابر با خط جریان خواهد بود. به عبارتی هر تابع جریان ثابت یک خط جریان را در جریان دو بعدی نشان می‌دهد.

۲-۱۰. تابع جریان استوکس در جریان متقارن

در یک جریان متقارن در دستگاه مختصات استوانه‌ای، مولفه‌های سرعت به صورت $v_r = v_r(r,\theta)$ و $v_\theta = v_\theta(r,\theta)$ نشان داده می‌شود. که در این جریان، تغییرات نسبت به θ، صفر می‌باشد ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$). اگر معادله پیوستگی برای این حالت در دستگاه مختصات استوانه‌ای نوشته شود، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \qquad (۴-۷۴)$$

و از آن‌جا خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = \frac{\partial}{\partial z}(-r v_z) \qquad (۴-۷۵)$$

حال اگر تابع پیوسته اسکالری به صورت $\psi=\psi(r,z)$ تعریف شود، با فرض کامل بودن این تابع خواهیم داشت:

$$d\psi = (rv_z)dr - (rv_r)dz \tag{۴-۷۶}$$

$$v_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_z \qquad v_r = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_r \tag{۴-۷۷}$$

تابع $\psi=\psi(r,\theta)$ را تابع جریان استوکس گویند. به همین ترتیب جریان $\psi=\psi(r,\theta)$ را می توان در دستگاه مختصات کروی نوشت و مولفه‌های سرعت آن را از روابط زیر به دست آورد:

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_r \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_\theta \tag{۴-۷۸}$$

در پایان باید گفت که در جریانات دو بعدی و متقارن با داشتن یک تابع جریان می‌توان مولفه‌های سرعت را به دست آورد. در بخش جریان‌های پتانسیلی و ویسکوز استفاده از تابع جریان را بیش‌تر شرح خواهیم داد.

۱۱. خلاصه(جمع بندی)

در مکانیک آماری فرض می‌شود که ماده متحرک یا سیال از تعدادی مولکول تشکیل شده است و حرکت مولکول از قوانین دینامیک یعنی مکانیک حرکت نیوتنی پیروی می کند. در مکانیک سیالات پیوسته سیال به صورت ماده‌ای همگن توصیف شده است که حالات و رفتارش بر حسب متغیرهای میدانی پیوسته مانند سرعت، دانسیته و ... توصیف می‌شود. تراکم پذیری در اثر تغییر فشار و تغییر دما به وجود می‌آید. توصیف حرکت سیالات غیر تراکمی از حل هم‌زمان معادلات حرکت دینامیکی و معادلات حالت ترمودینامیکی حاصل می‌شود. در شرایطی که $Ma \leq ۰/۳$ تراکم پذیری سیال قابل اغماض است. سرعت یک تابع میدان برداری از مختصات مکان و زمان می‌باشد و از سه مولفه در سه جهت فضایی تشکیل می شود. سینماتیک به توصیف حرکت سیال بدون در نظر گرفتن منشا حرکت که معمولا نیرو می‌باشد، می‌پردازد. در مکانیک سیالات به خصوص در حالات پایدار، خطوط جریان از اهمیت ویژه‌ای برای توصیف حرکت سیال برخوردارند. در دیدگاه لاگرانژی، ناظر به دنبال ذره حرکت می کند اما در دیدگاه اویلری ناظر به دنبال سیال

حرکت نمی‌کند. در توصیف لاگرانژی سیستم بسته و اختیاری است و در توصیف اویلری سیستم باز و به صورت حجم کنترل است. با استفاده از حساب دیفرانسیل دو ابزار برای تبدیل توصیف حرکت سیال از لاگرانژی به اویلری وجود دارد که عبارتند از: یکی، اپراتور مشتق ماده و دیگری، تئوری انتقال رینولدز. مشتق ماده ابزاری برای تبدیل سرعت لاگرانژی به سرعت‌های اویلری است. معادله تئوری انتقال رینولدز تغییرات زمانی کل کمیت α در توصیف لاگرانژی را به تغییرات جزیی زمانی و تغییرات جابجایی در توصیف اویلری تبدیل می کند. هر تابع جریان ثابت یک خط جریان را در جریان دو بعدی نشان می‌دهد. در جریانات دو بعدی و متقارن با داشتن یک تابع جریان می‌توان مولفه‌های سرعت را به دست آورد.

۱۲. پرسش‌های پایان درس

۱- برای یک جریان تراکم ناپذیر دو بعدی که مولفه های سرعت آن در زیر داده شده است، تابع جریان را پیدا کنید.

$$v_r = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$v_\theta = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

ج: از معادلات (۶۶-۳) تا (۶۸-۳) استفاده شود.

۲- برای مساله قبلی، خطوط مسیر جریان را به دست آورید. هم چنین معادله‌ای برای مکان ذره سیال در طول خط مسیر به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

ج: از تعریف ارایه شده برای خط مسیر استفاده شود. مکان هندسی را از تعریف ارائه شده در متن به دست آورید.

۳- یک میدان جریان در مختصات قطبی استوانه ای به صورت زیر مشخص شده است. تابع جریان استوکس را برای این جریان به دست آورید.

$$v_r = -\frac{1.5Ua^3rz}{(r^2+z^2)^{5/2}}$$

$$v_z = \frac{Ua^3(r^2-2z^2)}{2(r^2+z^2)^{5/2}}$$

ج: از مفاهیم و تعاریف ارائه شده در بخش تابع استوکس در جریان متقارن استفاده شود.

۴- برای یک میدان جریان دو بعدی که داری مولفه های سرعت $v_x=1/(1+t)$، $v_y=1$ و $v_z=0$ است، بیان لاگرانژی خطوط مسیر حاصل از حرکت ذرات سیال را بیابید.

ج: از مفاهیم و تعاریف ارائه شده در بخش توصیف لاگرانژی استفاده شود.

۵- مقدار شتاب را در نقطه (۱و۱و۱) برای سرعت $v=(yz+t,\ xz-t,\ xy)$ پیدا کنید.

ج: طبق تعریف شتاب، از سرعت نسبت به زمان مشتق گرفته و آن گاه مقادیر مکان را در معادله شتاب قرار دهید!

۶- رابطه میان مولفه های سرعت در مختصات استوانه ای با مولفه های سرعت در مختصات دکارتی به دست آورید. هم چنین رابطه بین مولفه های سرعت در مختصات کروی را با مولفه های سرعت در مختصات دکارتی به دست آورید.

ج: می توانید از تعریف سرعت و نیز معادلات تبدیل مختصات که در متن ذکر شد، برای مولفه‌های سرعت استفاده نمایید.

۷- برای یک سیال تراکم ناپذیر با میدان های جریان زیر، مقدار مولفه نامعلوم سرعت را به دست آورید.

$$v_x = x^2 + y^2 + a^2 \qquad v_y = -xy - yz - xz \qquad v_z = ?$$

$$v_x = \ln(x^2 + z^2) \qquad v_y = \sin(x^2 + z^2) \qquad v_z = ?$$

$$v_x = ? \qquad v_y = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \qquad v_y = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

ج: با استفاده از معادله پیوستگی ، برای سیالات تراکم ناپذیر، مولفه نامعلوم، تعیین می شود.

۸- برای میدان جریانی با تابع جریان $\psi = A\ln(x^2+y^2)+yS$، میزان دبی جریان خروجی در واحد عرض جریان، در جهت z بین نقاط (1,1,0) و (-1,-1,0) چه میزان است؟

ج: با استفاده از تعریف دبی جریان در واحد عرض، و نیز ارتباط آن با تابع جریان از طریق مولفه های سرعت، مساله را حل نمایید.

۱۳. فهرست منابع درس

- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid mechanics for chemical engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, ***Transport phenomena*, second edition,** J. Wiley.
- Frank M. White, 2003, *Fluid Mechanics*, second edition, McGraw-Hill.
- L. G. Currie, 1974, *Fundamental Mechanics of Fluids*, first edition, McGraw-Hill.
- W. P. Graebel, 2007, *Advanced Fluid Mechanics*, first edition, Elsevier Inc.

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل پنجم

معادلات حرکت و معادله ناویراستوکس

۱. مقدمه

در فصل قبل به توصیف حرکت لاگرانژی و اویلری پرداخته شد و توضیح داده شد که با استفاده از نظریه انتقالی رینولدز می‌توان حرکت سیال را در چارچوب لاگرانژی به چارچوب اویلری تبدیل نمود. در این فصل با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن که در چارچوب لاگرانژی صادق است، و همچنین استفاده از نظریه انتقالی رینولدز، معادلات حرکت یا به عبارتی معادلات مومنتوم به دست آورده می‌شود. هم‌چنین با استفاده از قانون ویسکوزیته نیوتن که در فصل اول به آن پرداخته شد، معادلات حرکت ناویر– استوکس را به دست خواهیم آورد.

۲. قانون دوم نیوتن و معادله حرکت لاگرانژی

در فصل دوم اشاره شد که قانون حرکت دوم نیوتن به صورت برداری و اندیسی به صورت‌های ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \qquad \text{(نمایش برداری)} \tag{۵–۱}$$

$$\frac{d(mv_i)}{dt} = F_i \qquad i = 1,2,3 \qquad \text{(نمایش اندیسی)} \tag{۵–۲}$$

همان گونه که مشاهده می‌شود قانون دوم نیوتن نشان می‌دهد که:

نیروی کل اینرسی (لختی)= تغییرات در مومنتوم سیال

حال قانون حرکت دوم نیوتن در چارچوب لاگرانژی بر حسب انتگرال حجمی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\int_{Vsys(t)} \rho v_i dV = F_i \qquad i = 1,2,3 \tag{۵–۳}$$

که در اینجا v_i مؤلفه‌های سرعت و $\rho = \rho(x_0, y_0, z_0, t)$، یعنی دانسیته سیال بر حسب مل/ حجم می‌باشد. همان‌گونه که معادله (۳–۵) نشان می‌دهد تغییرات کل زمانی مومنتوم سیستم لاگرانژی برابر با نیروی کل اینرسی سیال می‌باشد.

معادله (۳–۵) معادله حرکت سیال در چارچوب لاگرانژی است. پس همان طور که در فصل قبل توضیح داده شد بایستی با استفاده از تئوری انتقالی رینولدز توصیف حرکت سیال را در چارچوب لاگرانژی به چارچوب اویلری تبدیل نماییم.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\int_{Vsys(t)}\rho v_i dV=\int_{V_c}\left[\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{x_j}(\rho v_i v_j)\right]dV=F_i \qquad (۵-۴)$$

در این‌جا ρv_i مومنتوم خطی بر واحد حجم سیال است. باید توجه داشت که معادله (۴-۵) تئوری انتقال رینولدز به شکل اندیسی می‌باشد. شکل برداری معادله مذکور به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\int_{Vsys(t)}\rho\vec{v}dV=\int_{V_c}\left[\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v})\right]dV=\vec{F} \qquad (۵-۵)$$

بنابراین عبارت طرف چپ معادله بالا، معادله حرکت کل مومنتوم سیال را در چارچوب لاگرانژی و عبارت انتگرال دوم، طرف راست معادله، حرکت مومنتوم را در چارچوب اویلری نشان می‌دهد. باید توجه داشت که شار مومنتوم[1] به صورت $\rho v_i v_j$ یا $\rho\vec{v}\vec{v}$ نشان داده می‌شود. همان طور که دیده می‌شود شار مومنتوم حاصل ضرب دیادیک دو بردار سرعت بوده که در حقیقت یک کمیت تنسوری می‌باشد.

برای ادامه کار از معادله اندیسی حرکت یعنی معادله (۴-۵) استفاده می‌کنیم. عبارت‌های داخل انتگرال دوم که در حجم کنترل نوشته شده به صورت ذیل مشتق گیری می‌شود:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)=\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_i\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}+\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad (۵-۶)$$

در این‌جا عبارت‌های دوم و سوم در طرف راست معادله (۴-۶) به صورت ذیل ساده می‌شوند:

$$v_i\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_i\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}=v_i\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}\right]=0 \qquad (۵-۷)$$

ملاحظه می‌شود که حاصل ساده سازی عبارت‌های ۲ و ۳ معادله پیوستگی بوده که برابر صفر می‌گردد. حال عبارت‌های ۱ و ۴ به صورت ذیل ساده می‌گردد:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\rho\frac{Dv_i}{Dt} \qquad (۵-۸)$$

[1]Momentum Flux

به عبارت دیگر حاصل ساده سازی عبارت‌های ۱ و ۴ به صورت مشتق زمانی ماده سرعت[۲] به دست می‌آید. پس از ساده سازی‌های مذکور معادله حرکت مومنتوم یعنی معادله (۴-۵) به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\int_{Vsys(t)} \rho v_i dV = \int_{V_c} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = F_i \qquad (5\text{-}9)$$

۱-۲. نیروی اینرسی، نیروهای سطحی[۳] و جسمی[۴]

نیروهای دینامیکی[۵] در حرکت سیال شامل دو نیروی جسمی و سطحی به صورت ذیل می‌باشد:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_b} + \overrightarrow{F_s}$$

یا (۵-۱۰)

$$\overrightarrow{F_k} = \overrightarrow{F_{k,b}} + \overrightarrow{F_{k,s}} \qquad ; k = 1,2,3$$

که در این‌جا معمولا $\overrightarrow{F_b}$ را نیروی جرمی و $\overrightarrow{F_s}$ را نیروی سطحی می‌نامند.

نیروهای جسمی در حقیقت آن دسته از نیروهایی است که ناشی از اعمال میدان گرانشی[۶] یا میدان مغناطیسی[۷] ثقل زمین بر جرم سیال می‌باشد. پس نیروهای جسمی از دو نوع نیروهای گرانشی[۸] و نیروهای مغناطیسی[۹] تشکیل شده است. در بسیاری از مواقع در حرکت سیال از نیروهای مغناطیسی صرفنظر می‌شود، مگر در موارد خاص که در این‌جا مورد بحث قرار نمی‌گیرد. بنابراین نیروهای جسمی در این‌جا فقط به صورت نیروهای گرانشی ارائه خواهد شد. یعنی خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{F_b} \equiv \text{نیروی گرانشی} \qquad (5\text{-}11)$$

حال به آنالیز نیروی گرانشی در چارچوب اویلری می‌پردازیم. تغییرات نیروی گرانشی ناشی از فاصله گرفتن جرم سیال از سطح زمین می‌باشد. به عبارتی طبق قوانین حرکت دینامیک نیروی گرانشی بر واحد حجم از طریق گرادیان انرژی پتانسیلی به دست می‌آید. بنابراین خواهیم داشت:

---

[2]Material Derivative
[3]Surface Force
[4]Body Force
[5]Dynamic Force
[6]Gravitation
[7]Magnetic
[8]Gravitational Force
[9]Magnetic Force

$$\overrightarrow{F_b} = -\nabla E_p = -\nabla(\rho g h) \qquad (۵-۱۲)$$

که در این رابطه:

$E_p = \rho g h$: انرژی پتانسیل بر حجم واحد

g: شتاب ثقل[۱۰]

h: ارتفاع از سطح زمین

پس نیروی گرانشی کل سیستم به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{F_b} = \int_{V_c} \overrightarrow{F_b} dV = -\int_{V_c} \rho g \nabla h \, dV \qquad (۵-۱۳)$$

در این‌جا ملاحظه می‌شود که نیروی گرانشی یک کمیت برداری است که بر حسب گرادیان فاصله از سطح زمین (کمیت برداری) به دست می‌آید.

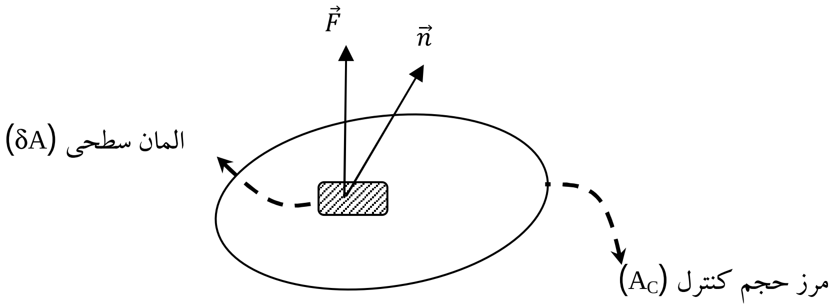
۲-۲. تنسور تنش و نیروهای سطحی

نیروهای سطحی ناشی از اصطکاک لایه‌های سیال می‌باشد که شامل دو بخش است: نیروهای ویسکوز[۱۱] و نیروهای فشاری[۱۲]. به عبارتی منشأ نیروهای سطحی از تنش‌های عمودی و برشی در اثر تغییر شکل[۱۳] دائمی سیال می‌باشد. اگر سیالی در حالت سکون یا ایستا باشد نیروهای ناشی از تنش ناپدید شده و تنها نیروی حاکم بر سیال در حالت سکون نیروهای ناشی از فشار استاتیکی سیال می‌باشد.

برای به دست آوردن نیروهای سطحی، ابتدا لازم است که به تنش‌ها[۱۴] در حرکت سیال پرداخته شود. همان گونه که در فصل اول توضیح داده شد، سیالی که تحت نیروی دینامیکی قرار گیرد تغییر شکل می‌دهد و تا آن‌جایی که اعمال نیروی دینامیکی ادامه پیدا کند، تغییر شکل سیال پیوسته خواهد بود. تغییر شکل به عبارتی مقاومت سیال در برابر نیروهای

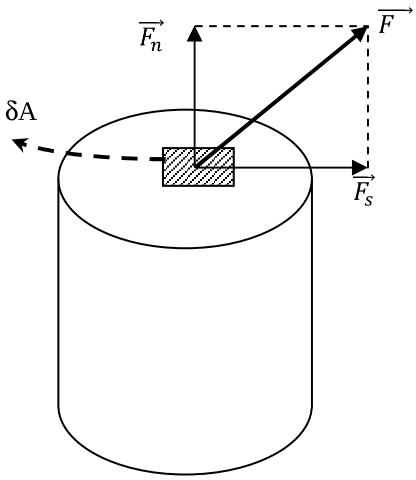
[10] Gravitational Acceleration
[11] Viscose
[12] Pressure
[13] Deformation
[14] Stress

دینامیکی ناشی از نیروهای سطحی مابین لایه‌های سیال می‌باشد. اثرات نیروهای سطحی بر سطوح سیال یا مرزهای جامد به صورت تنش‌های برشی و عمودی نشان داده می‌شوند. یک المان سطحی از سیال را در نظر بگیرید، (شکل (۱-۴)):



شکل ۱-۵: نیروهای سطحی در حجم کنترل

همان‌گونه که در شکل (۱-۵) مشاهده می‌شود، $\vec{F}$ بردار نیروهای سطحی بر واحد حجم بوده که در المان سطحی (δA) عمل می‌نماید و $\vec{n}$ بردار واحد خروجی از المان سطحی می‌باشد.



شکل ۲-۵: تجزیه برداری نیروی سطحی به دو بردار عمودی و برشی

حال اگر بردار نیروی سطحی را مطابق شکل (۲-۵) به دو نیروی عمودی و برشی تجزیه نماییم، به طوری که $\vec{F_s}$ نیروی برشی سطحی و $\vec{F_n}$ نیروی عمودی سطحی باشد می توان تنش‌های برشی[15] و عمودی[16] را به صورت ذیل تعریف کرد:

[15]Shear Stress
[16]Normal Stress

$$\lim_{\delta A \to 0} \frac{|F_s|}{\delta A}$$ تنش برشی:

$$\lim_{\delta A \to 0} \frac{|F_n|}{\delta A}$$ تنش عمودی:

ملاحظه می‌شود که تنش‌های عمودی و برشی در یک نقطه تعریف شده‌اند. البته از یک نقطه بی‌نهایت صفحه عبور می‌نماید که هر صفحه با بردار واحد خروجی آن توصیف می‌گردد. پس به طور کلی می‌توان تنش در یک نقطه را به شکل ذیل نشان داد:

$$\lim_{\delta A \to 0} \left\{\frac{\vec{F}}{\delta A}\right\} = \vec{A}^{(\vec{n})} \quad (۵-۱۴)$$

معادله (۱۴-۵) نمایش بردار تنش می‌باشد، لیکن این معادله مستقیماً قابل استفاده نمی‌باشد، زیرا در یک نقطه بی‌نهایت بردار واحد $\vec{n}$ داریم. در حقیقت از یک نقطه بی‌نهایت صفحه عبور می‌نماید. در این‌جا برای عملی کردن محاسبه تنش فقط سه صفحه عمود بر هم را در سیستم دکارتی مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنابراین بردار تنش یعنی معادله (۱۴-۵) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\underset{t_i}{\rightarrow}^{(\vec{n})} = n_i \underset{t_i}{\rightarrow}^{(\vec{e_j})} \quad (۵-۱۵)$$

معادله (۱۵-۵) بردار تنش را در یک نقطه در توده سیال و بر حسب مؤلفه‌های تنش در دستگاه مختصات نشان می‌دهد. شکل معادله (۱۵-۵) برای نمایش تنش مناسب نیست، لذا تنش را به صورت ذیل نمایش می دهیم:

$$\underset{t_i}{\rightarrow}^{(e_j)} \equiv \sigma_{ij} \quad \text{(نمایش تنش)} \quad (۵-۱۶)$$

i : جهت بردار واحد در دستگاه مختصات که بر المان سطح عمود می‌باشد

j : جهت نیروی وارده بر المان سطح در دستگاه مختصات

در قسمت های بعدی نشان خواهیم داد که معادله (۱۶-۵) یک تنسور درجه دوم است. پس معادله (۱۵-۴) برای بردار تنش سطحی[۱۷] با بردار واحد خروجی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

[17]Surface Stress Tensor

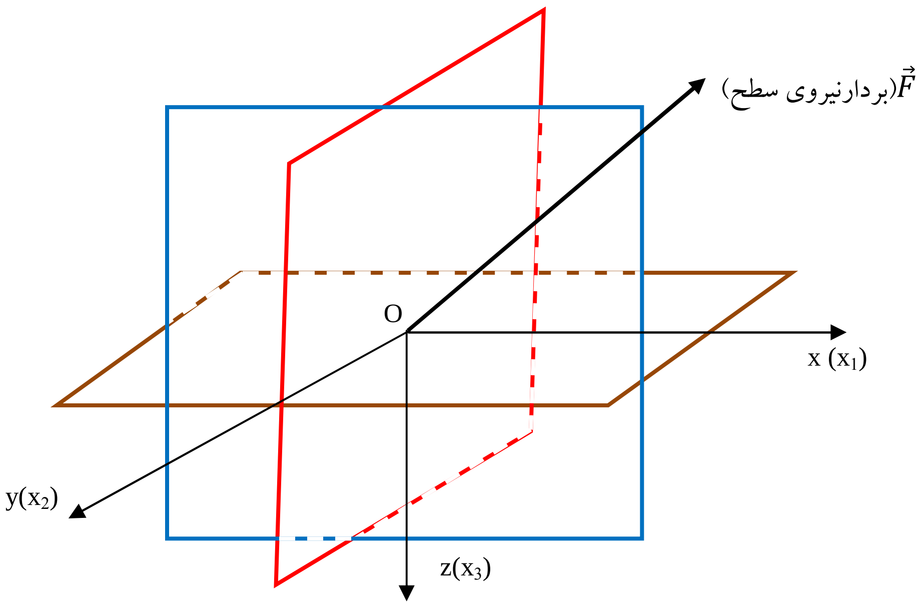
$$t_i^{(\vec{n})} = n_1\sigma_{1i} + n_2\sigma_{2i} + n_3\sigma_{3i} \qquad i=1,2,3$$ (۵–۱۷)

که n_1، n_2 و n_3 مؤلفه‌های بردار واحد می‌باشند. معادله (۵–۱۷) نشان می‌دهد که در هر نقطه در سیال سه مؤلفه نیروهای سطحی به صورت $t_1^{(n)}$، $t_2^{(n)}$ و $t_3^{(n)}$ وجود دارد که هر کدام از این نیروهای سطحی بر حسب سه مؤلفه تنش نوشته می‌شوند. از طرفی ملاحظه می‌شود که دو تا از مؤلفه‌های نیروهای سطحی، برشی بوده و سومی عمودی می‌باشد. بنابراین مجموعه مؤلفه‌های نیروهای سطحی بر حسب نه مؤلفه تنش به دست می‌آیند. مجموعه نه مؤلفه تنش یک آرایه می‌سازد که به این آرایه تنسور تنش گفته می‌شود. پس تنسور تنش را می‌توان به صورت ذیل نمایش داد:

$$\underline{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$ (۵–۱۸)

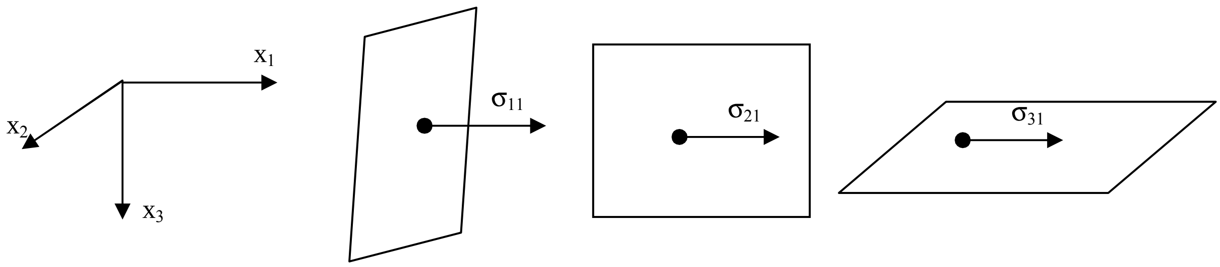
برای فهمیدن اهمیت فیزیکی نه مؤلفه تنش از تنسور تنش مطابق شکل (۳–۵) سه صفحه عمود بر هم در نقطه O را ملاحظه نمایید.حال اگر مؤلفه‌های بردار نیروی سطحی $\vec{F}$ را به صورت F_1، F_2 و F_3 نشان دهیم، مرلفه‌های تنش هر کدام از نیروها در سه صفحه عمود بر هم به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$F_1: \sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31} \qquad F_2: \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23} \qquad F_3: \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$$



شکل ۳–۵: توصیف نیروهای سطحی در نقطه O در سه صفحه عمود بر هم

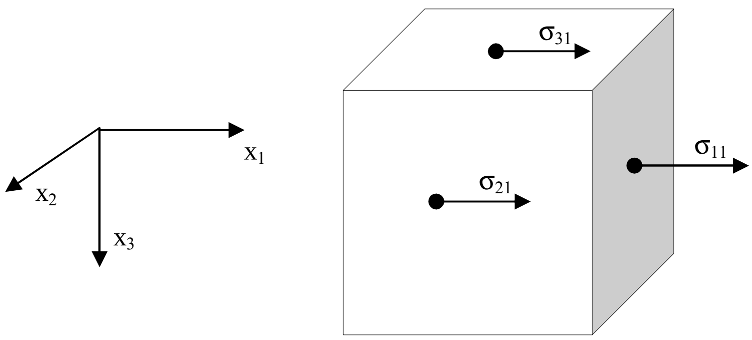
بنابراین به عنوان مثال مؤلفه نیروی سطحی F_1 که در جهت x عمل می‌نماید از سه تنش به صورت ذیل (شکل ۴-۵) ناشی می‌شود:



شکل ۴-۵: مولفه های تنش بردار نیرو در جهت **x**

به همین ترتیب مؤلفه‌های تنش‌ها برای مؤلفه‌های نیروهای سطحی F_2 و F_3 را نیز می‌توان مطابق شکل (۴-۵) توصیف نمود. معمولا برای نمایش تنسور تنش از یک المان مکعبی مطابق شکل (۵-۵) استفاده می‌شود. برای نمونه مؤلفه‌های تنش در جهت نیروی x در این شکل نشان داده شده است.

به همین ترتیب می‌توان مؤلفه‌های تنش را در جهت‌های دیگر دستگاه مختصات نشان داد. از طرف دیگر با استفاده از اصل بقای مومنتوم زاویه‌ای[18] می‌توان نتیجه گرفت که تنسور تنش متقارن است. پس می‌توان نوشت:

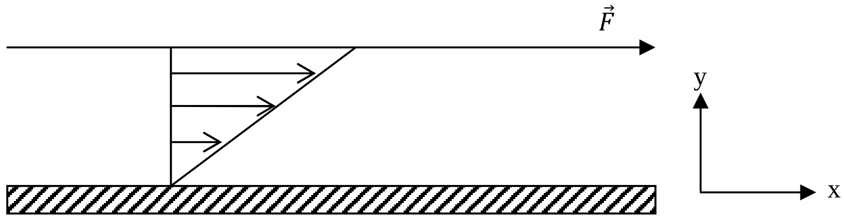


شکل ۵-۵: المان مکعبی برای نمایش مولفه های تنش در جهت **x1**

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (۵-۱۹)$$

برای روشن شدن تنسور تنش مثال حرکت برشی ساده را مطابق شکل (۶-۵) در نظر بگیرید:

[18] Angular Momentum



شکل ۶-۵: حرکت برشی ساده

ملاحظه می‌شود که تنها تنش برشی در این حرکت سیال به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\sigma = \sigma_{21} = \sigma_{12} = \frac{F_x}{A} \tag{۵-۲۰}$$

که F_x مؤلفه نیروی برشی یعنی $\vec{F} = F_x$ می‌باشد و A مساحت سطح تماس با سیال می‌باشد. سایر مؤلفه‌های تنسور تنش صفر خواهد بود. یعنی:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0 \tag{۵-۲۱}$$

بنابراین، تنسور تنش کل در یک جریان برشی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma & 0 \\ \sigma & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{۵-۲۲}$$

۳. نیروهای سطحی بر حسب تنسور تنش

با استفاده از معادله (۱۵-۵) ملاحظه می‌گردد که نیروهای سطحی بر واحد سطح به صورت $\vec{t}^{(\vec{n})}$ نشان داده می‌شود. بنابراین کل نیروهای سطحی برای حجم کنترل به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\overrightarrow{F_s} = \int_{A_c} \vec{t}^{(\vec{n})} dA \tag{۵-۲۳}$$

که A_c مساحت حجم کنترل می‌باشد و $\vec{t}^{(\vec{n})}$ بستگی به جهت بردار واحد عمودی $\vec{n}$ دارد. از طرفی در معادله (۱۵-۵) نیروهای سطحی بر حسب جهت بردارهای واحد در دستگاه دکارتی نوشته شد و نشان داده شد که:

$$\overrightarrow{t_k}^{(\vec{n})} = n_i \sigma_{ik} = \vec{\sigma} . \vec{n} \tag{۵-۲۴}$$

که در معادله (۲۴-۵) نیروهای کل سطحی بر حسب ضرب بردار واحد $\vec{n}$ در تنسور تنش نوشته شده است. بنابراین معادله (۲۳-۵) با استفاده از معادله (۲۴-۵) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\overrightarrow{F_s} = \int_{A_c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dA \qquad (۵-۲۵)$$

حال با استفاده از قضیه دیورژانس گوس انتگرال سطحی را به انتگرال حجمی تبدیل نموده، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{F_s} = \int_{A_c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dA = \int_{V_c} \left(\nabla \cdot \underline{\sigma}\right) dV \qquad (۵-۲۶)$$

۴. معادله حرکت مومنتوم[۱۹]

در بخش قبل معادله حرکت لاگرانژی سیال و تجزیه نیروهای دینامیکی حاکم بر حرکت سیال مورد بررسی قرار گرفت. بنابراین از ترکیب معادلات (۹-۵) و (۱۰-۵) معادله حرکت به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\int_{V_c} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = F_{i,b} + F_{i,s} \qquad (۵-۲۷)$$

شکل برداری این معادله به صورت ذیل است:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \overrightarrow{F_b} + \overrightarrow{F_s} \qquad (۵-۲۸)$$

با جاگذاری برای نیروهای جرمی و سطحی از معادلات (۱۳-۵) و (۲۶-۵) در معادله (۲۸-۵) خواهیم داشت:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = -\int_{V_c} \rho g \nabla h dV + \int_{V_c} \left(\nabla \cdot \underline{\sigma}\right) dV \qquad (۵-۲۹)$$

با جابجایی عبارت‌های طرف راست به طرف چپ و با توجه به این‌که حد انتگرال (V_C) مقدار معینی می‌باشد، می‌توان معادله ذیل را از معادله (۲۹-۵) بدست آورد:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho g \nabla h + \nabla \cdot \underline{\sigma} \qquad (۵-۳۰)$$

شکل اندیسی معادله (۳۰-۵) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ji}\right) \qquad (۵-۳۱)$$

[19] Momentum Equation

به معادلات (۵-۳۰) و (۵-۳۱) معادله حرکت کوشی[20] گفته می‌شود.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود با سه مؤلفه سرعت، سه معادله حرکت خواهیم داشت. به عبارتی در این‌جا تعداد مجهولات به صورت سه مؤلفه سرعت (v_x, v_y, v_z) و نه مؤلفه تنسور تنش است و مجموعا دوازده مجهول خواهیم داشت.

لیکن تعداد معادلات عبارت خواهد بود از سه معادله حرکت و یک معادله پیوستگی که مجموعا چهار معادله موجود می باشد. بنابراین در این حالت حل سیستم با توجه به عدم برابری تعداد مجهولات و معادلات غیر ممکن می‌باشد. پس تنها روش حل این مسئله بیان کردن مؤلفه‌های تنسور تنش بر حسب مؤلفه‌های سرعت می‌باشد. قبل از پرداختن به این موضوع لازم است تنسور تنش را مورد بررسی قرار داده و ماهیت آن را بشناسیم.

ابتدا به حالتی پرداخته می‌شود که سیال در حالت سکون بوده، به طوری که تحت هیچ گونه تنش برشی و یا تغییر شکل قرار نداشته باشد. می‌توان تنسور تنش را برای سیال ایستایی[21] به صورت ذیل نوشت:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \qquad (۵-۳۲)$$

ملاحظه می‌شود که در سیال ایستایی تنها مؤلفه‌های عمودی یا قطری تنسور تنش خودش را به صورت فشار ایزوتروپیک نشان می‌دهد. علامت منفی برای مثبت کردن فشار است که در اینجا فشار از نوع کمپرسی بوده که علامتش منفی است.

حال سیالی را در نظر بگیرید که درابتدا درحالت ایستا بوده و تحت نیروی دینامیکی قرار بگیرد. در این حالت نیروهای دینامیکی باعث تغییر شکل سیال شده و به صورت تنش برشی بر فشار استاتیکی سیال اضافه می‌شوند. به طوری که تنسور تنش کل برای حرکت سیال به صورت برداری به شکل ذیل نوشته می‌شود:

$$\underline{\sigma} = \underline{\tau} - P\underline{I} \qquad (۵-۳۳)$$

$\underline{\sigma}$: تنسور تنش کل[22]

[20]Cauchy
[21]Static Fluid
[22]Total Stress Tensor

$\underline{\tau}$: تنسور تنش ویسکوز[23]

$\underline{I}$: تنسور واحد[24]

تنسور تنش کل یعنی معادله (۵-۳۳) باز شده، به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} = \begin{pmatrix} -P+\tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & -P+\tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & -P+\tau_{33} \end{pmatrix} \qquad (۵-۳۴)$$

که در معادله (۵-۳۴) δ_{ij} دلتای کرونکر[25] گفته می‌شود که به صورت ذیل تعریف شده است:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (۵-۳۵)$$

تنسور تنش ویسکوز، $\underline{\tau}$، به عنوان تنسور تنش اضافی[26] یا تنسور تنش دیادیک[27] نیز اطلاق می‌شود. پس در حالتی که $\underline{\tau} = 0$ باشد، سیال در حالت ایستا بوده و فقط فشار استاتیکی بر آن حاکم خواهد بود. حال با جا گذاری معادله (۵-۳۳) در معادله حرکت (۵-۳۰)، معادله حرکت به صورت ذیل در می‌آید:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho g \nabla h - \nabla P + \nabla \cdot \underline{\tau} \qquad (۵-۳۶)$$

معادله (۵-۳۶) معادله حرکت و یا معادله مومنتوم سیالات نامیده می‌شود، که به صورت سه معادله در دستگاه مختصات دکارتی نشان داده می‌شود:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \qquad (۵-۳۷)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \qquad (۵-۳۸)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \qquad (۵-۳۹)$$

این معادلات نشان می دهد که تعداد متغیرهای سرعت سه بوده و تعداد متغیرهای تنسور تنش ویسکوز، نه می‌باشد که به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

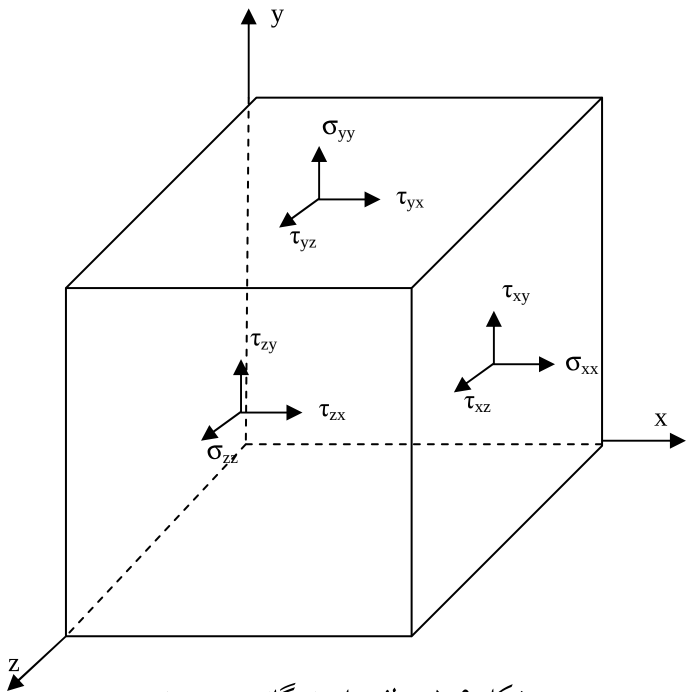
---

[23] Viscose Stress Tensor
[24] Unit Tensor
[25] Kronecker Delta
[26] Extera Stress
[27] Dyadic Stress Tensor

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \tag{۵-۴۰}$$

نه تنسور تنش کل در شکل (۶-۵) نشان داده شده است. از طرفی قبلا نشان داده شد که مشتق ماده برای سرعت در سیالات غیر قابل تراکم به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D(\rho\vec{v})}{Dt} = \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla(\rho\vec{v}) \tag{۵-۴۱}$$



شکل ۶-۵: مولفه های نه گانه تنسور تنش

با جابجایی مناسب عبارت دوم در سمت راست معادله (۴۱-۵) و جاگذاری آن در معادله (۳۶-۵) "معادله حرکت" به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\rho\vec{v}}_{1} = \underbrace{-\rho g\nabla h}_{2}\underbrace{-\nabla P}_{3}\underbrace{-\nabla\cdot\rho\vec{v}\vec{v}}_{4} + \underbrace{\nabla\cdot\tau}_{5} \tag{۵-۴۲}$$

که ترم های موجود در این معادله عبارتند از:

1: نرخ افزایش مومنتوم در حجم کنترل بر واحد حجم

2: نیروی گرانشی سیال در حجم کنترل بر واحد حجم

3: نیروی فشار دینامیکی سیال بر واحد حجم

4: شار نرخ افزایش مومنتوم با جابجایی کل جریان در عبور از سطح بر واحد حجم

5: نیروی ویسکوز سیال یا نرخ افزایش مومنتوم با حرکت نفوذی مولکول ها

۵. معادله ساختاری رئولوژیکی[۲۸]

در قسمت قبل اشاره شد که تعداد مجهولات در معادله حرکت بیشتر از تعداد معادلات حرکت و پیوستگی است. بنابراین لازم است که مولفه های تنسور تنش ویسکوز بر حسب مولفه‌های سرعت نوشته شود. در این حالت لازم است توضیح داده شود که تنش ویسکوز چگونه با نفوذ مولکولی که ناشی از تغییرات سرعت در لایه های سیال است ارتباط دارد. به طور کلی سیالی که تحت نیروی دینامیکی قرار گیرد به سه صورت در سیال حرکت ایجاد می کند که عبارتند از:

۱- حرکت جابجایی، ۲- حرکت چرخشی، ۳- حرکت تغییر شکلی.

حال سؤالی که مطرح می شود این است که تنش‌های ویسکوز به کدام گونه از حرکت‌های مذکور تعلق دارد؟ تغییرات در حرکت سیال را با گرادیان بردار سرعت ($\nabla\vec{v}$) توصیف می کنیم. اگر گرادیان بردار سرعت را به صورت ذیل تجزیه نماییم خواهیم داشت:

$$\nabla\vec{v} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T) + \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} - \nabla\vec{v}^T) \qquad (۵-۴۳)$$

باید توجه داشت که $\nabla\vec{v}^T$ ترانهاده $\nabla\vec{v}$ می‌باشد. هم‌چنین معادله (۴۳-۵) به صورت اندیسی به صورت ذیل نوشته می-شود:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (۵-۴۴)$$

ملاحظه می‌گردد که $\nabla\vec{v}$ و $\nabla\vec{v}^T$ هر کدام یک تنسور درجه دو می‌باشند. حال دو تنسور در معادله (۴۴-۵) به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

[28]Rheological Constitutive Equation

$$\Delta_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{۵-۴۵}$$

$$\Omega_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{۵-۴۶}$$

Ω_{ij}: تنسور چرخشی[۲۹]   ; Δ_{ij}: تنسور تغییر شکل[۳۰]

در این‌جا مؤلفه‌های تنسور تغییر شکل یا تنسور نرخ کرنش به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\Delta_{ij}=\begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y} & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z} & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{۵-۴۷}$$

ملاحظه می‌شود که تنسور نرخ کرنش یک تنسور متقارن می‌باشد. تنسور چرخشی نیز به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\Omega_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_y}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \tag{۵-۴۸}$$

ملاحظه می‌شود که تنسور چرخشی یک تنسور غیر متقارن است.

حال به رابطه ما بین تنسور تنش ویسکوز و تنسور تغییر شکل (نرخ کرنش) می‌پردازیم. به چنین رابطه‌ای معادله ساختاری رئولوژیکی گفته می‌شود و به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\underline{\tau}(t)=\underline{F}[\underline{\Delta}(t)] \tag{۵-۴۹}$$

به چنین رابطه‌ای تابع تنسوری[۳۱] گفته می‌شود. در این حالت اگر $\underline{\Delta}=0$ باشد، $\underline{\tau}=0$ خواهد بود. معادله (۴۹-۵) بیان می نماید که معادله ساختاری به نوع سیال بستگی دارد. از طرفی سیالات دارای بازه وسیعی می‌باشند. در یک دسته بندی

[29] Rotation Tensor
[30] Rate of Deformation Tensor
[31] Functional

گروهی از سیالات نیوتنی[۳۲] و گروهی دیگر غیر نیوتنی[۳۳] می‌باشند. معادله ساختاری برای سیالات نیوتنی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{۵-۵۰}$$

که μ ویسکوزیته (گرانروی) نیوتنی است که برای سیالات نیوتنی تابعی از دما و فشار می‌باشد. بنابراین مؤلفه‌های تنسور تنش ویسکوز در حالت‌های برشی را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\\
\tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{۵-۵۱}$$

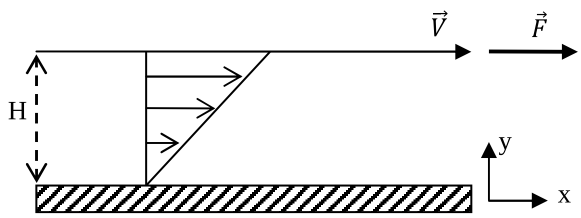
برای تنش‌های عمودی باید توجه داشت که از دو قسمت تشکیل شده‌اند. یک قسمت مربوط به فشار سیال است که به صورت فشاری[۳۴] عمل می‌نماید و قسمت دیگر ناشی از نیروهای ویسکوز سیال است. پس مؤلفه‌-های تنش عمودی به صورت ذیل نوشته می‌شود. باید توجه داشت در حالتی که سیال غیرتراکمی است، با استفاده از معادله پیوستگی،$(\nabla.\vec{v} = 0)$ می باشد.

[32]Newtonian
[33]Non-Newtonian
[34]Compression

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla.v$$
$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla.v \qquad (۵-۵۲)$$
$$\tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\nabla.v$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که تمام مؤلفه‌های تنسور تنش ویسکوز بر حسب گرادیان سرعت نوشته می شوند. به طوری که با جاگذاری این تنسور در معادله حرکت (مومنتوم) معادله ناویر- استوکس به دست می آید. در بخش بعدی به دست آوردن معادله ناویر- استوکس توضیح داده خواهد شد.

در این‌جا برای روشن شدن و فهم تنش‌های ویسکوز و معادله ساختاری جریان ساده برشی[۳۵] را به عنوان مثال ارائه می‌دهیم.



شکل ۷-۵: جریان ساده برشی ناشی از صفحه متحرک در جهت**x**

مطابق شکل در این جریان حرکت صفحه متحرک در جهت x خواهد بود. و نیز تنسور تنش ویسکوز به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۵-۵۳)$$

باید توجه داشت چون $\tau_{yx}=\tau_{xy}$ می باشد، جای آن‌ها را می توان جا بجا نمود همان گونه که در نمایش تانسور ها در این فصل انجام گردید. از طرفی تنسور نرخ کرنش به صورت ذیل نوشته می‌شود:

[35] Simple Shear Flow

$$\Delta_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۵-۵۴}$$

در این‌جا $v_x = v$ و $v_y = v_z = 0$ می‌باشد. همان‌گونه که در فصل اول اشاره شد، نرخ کرنش را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dy} = \frac{V}{H} \tag{۵-۵۵}$$

پس معادله ساختاری سیال نیوتنی به صورت ذیل با استفاده از معادله (۵-۵۱) نوشته می‌شود.

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau = \mu\dot{\gamma} \tag{۵-۵۶}$$

که در این‌جا $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$ خواهد بود.

۶. معادله ناویر- استوکس[۳۶]

در این قسمت با استفاده از قانون ساختاری سیالات نیوتنی و نیز با فرض غیر قابل تراکم بودن سیال می‌توان معادلات حرکت سیال را به دست آورد. پس با جاگذاری معادله (۵-۵۰) در معادله (۵-۳۶) می‌توان معادله حرکت سیالات نیوتنی غیر قابل تراکم را به صورت ذیل به دست آورد:

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = -\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]}_{\text{عبارت ویسکوز}} \tag{۵-۵۷}$$

که با مشتق گیری عبارت‌های ویسکوز به صورت ذیل جابجا و ساده می‌شوند:

$$\text{عبارت ویسکوز}:\ \mu\left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j\,\partial x_i}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)}\right]$$

بر اساس معادله پیوستگی، این ترم صفر است

---

[36]Navier-Stokes Equation

پس با جای‌گذاری عبارت بالا در معادله (۵۷–۵) خواهیم داشت:

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt}=-\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i}-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \qquad (۵۸–۵)$$

شکل برداری معادله (۵۸–۵) به صورت ذیل می باشد:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\rho g\nabla h-\nabla P+\mu\nabla^2\vec{v} \qquad (۵۹–۵)$$

به معادلات (۵۸–۵) و (۵۹–۵) معادله ناویر– استوکس اطلاق می‌گردد. هم اکنون اگر معادله (۵۸–۵) را برای سه مؤلفه سرعت نوشته و آن را باز نماییم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Dv_x}{Dt}&=-\rho g\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\\
\rho\frac{Dv_y}{Dt}&=-\rho g\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)\\
\rho\frac{Dv_z}{Dt}&=-\rho g\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \qquad (۶۰–۵)$$

با بررسی معادلات ناویر– استوکس مشخص می‌شود که تعداد مجهولات چهار بوده و به صورت $v_x(t,x,y,z)$ ، $v_y(t,x,y,z)$ ، $v_z(t,x,y,z)$ و $P(t,x,y,z)$ می‌باشند. بنابراین با منظور کردن معادله پیوستگی ملاحظه می‌گردد که تعداد کل معادلات نیز چهار می‌باشد. پس اکنون می‌توان با استفاده از حساب دیفرانسیل معادلات مذکور را حل نمود و توابع میدانی سرعت و فشار را محاسبه نمود. در فصل بعد چگونگی حل معادلات مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

همانند معادله پیوستگی، معادلات ناویر– استوکس نیز در سه دستگاه مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی ارائه شده‌اند. بنابراین با استفاده از تبدیل متغیرها (که در فصل سوم بیان شد) می‌توان معادلات مذکور را در هر سه سیستم دکارتی، استوانه‌ای و کروی به صورت جداول ذیل نوشت:

جدول ۱-۵: معادلات ناویر-استوکس در مختصات دکارتی

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}-\rho g\frac{\partial h}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}-\rho g\frac{\partial h}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}-\rho g\frac{\partial h}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

جدول ۲-۵: مولفه های تنش ویسکوز در مختصات استوانه ای

جدول ۳-۵: مؤلفه‌های تنش ویسکوز در مختصات کروی

$$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)$$

$$\tau_{\theta\varphi}=\tau_{\varphi\theta}=\mu\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v\varphi}{\sin\theta}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)$$

$$\tau_{\varphi r}=\tau_{r\varphi}=\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right)\right)$$

$$\sigma_{rr}=-P+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{v}$$

$$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)$$

$$\tau_{\theta z}=\tau_{z\theta}=\mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right)$$

$$\tau_{rz}=\tau_{zr}=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{rr}=-P+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{v}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-P+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{v}$$

$$\sigma_{zz}=-P+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{v}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-P+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{v}$$

جدول ۴–۵: معادلات حرکت بر حسب تنسور تنش ویسکوز در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)=-\frac{\partial P}{\partial r}-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z}\right]+\rho g_r$ $\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right)$ $=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{\tau_{\theta r}-\tau_{r\theta}}{r}\right]+\rho g_\theta$ $\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\tau_{\theta z}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz}\right]+\rho g_z$
$\sigma_{\varphi\varphi}=-P+2\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{v}$

جدول ۵-۵: معادلات حرکت بر حسب تنسور تنش ویسکوز در دستگاه مختصات کروی

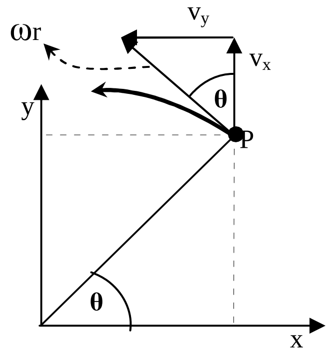
$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\tau_{\theta r}\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial\varphi}-\frac{\tau_{\theta\theta}+\tau_{\varphi\varphi}}{r}+\rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\varphi^2\cot\theta}{r}\right)$$
$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\tau_{r\theta})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta\theta}\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+\frac{\tau_{\theta r}-\tau_{r\theta}}{r}$$
$$-\frac{\cot\theta}{r}\tau_{\varphi\varphi}+\rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{v_\varphi v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\varphi\cot\theta}{r}\right)$$
$$=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi}$$
$$-\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\tau_{r\varphi}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau_{\theta\varphi}\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\tau_{\varphi\varphi}+\frac{\tau_{\varphi r}-\tau_{r\varphi}}{r}\right.$$
$$\left.+\frac{\tau_{\theta\varphi}\cot\theta}{r}+\rho g_\varphi\right)$$

۷.گردابش[۳۷] و سیال غیر چرخشی[۳۸]

در بخش قبل توضیح داده شد که تنسور $\underline{\Omega}$ یک تنسور چرخشی است و مؤلفه‌های این تنسور مطابق ماتریس (۴۸.۴) نشان داده شد. حال به تعریف گردابش و سیال غیر چرخشی می‌پردازیم. گردابش یا چرخشی بودن یک سیال بستگی به سرعت زاویه‌ای[۳۹] سیال دارد. مطابق شکل (۱۰-۵) فرض نماییم که المان سیال در نقطه P حول محور z با سرعت زاویه-ای ω می‌چرخد.



۱۰-۵: حرکت چرخشی المان سیال در نقطه P حول محور z

همان گونه که ملاحظه می‌شود، سرعت خطی[۴۰] مماس بر سرعت زاویه‌ای بوده و مقدار آن $r\omega$ می‌باشد. از طرفی مؤلفه-های سرعت خطی به صورت v_x و v_y مطابق شکل (۱۰-۵) به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
v_x &= -r\omega \sin\theta = -r\omega\frac{y}{r} = -y\omega \\
v_y &= +r\omega \cos\theta = r\omega\frac{x}{r} = -x\omega
\end{aligned}
\qquad (۵\text{–}۶۱)
$$

با مشتق گیری از رابطه‌های (۶۱-۵) می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
\omega &= -\frac{\partial v_x}{\partial y} \\
\omega &= \frac{\partial v_y}{\partial x}
\end{aligned}
\qquad (۵\text{–}۶۲)
$$

پس سرعت زاویه‌ای سیال حول محور z متوسط روابط (۶۲-۵) خواهد بود و بنابراین خواهیم داشت:

[37]Vorticity
[38]Irrotationality
[39]Angular Velocity
[40]Linear Velocity

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \qquad (۵-۶۳)$$

به همین ترتیب سرعت زاویه‌ای حول محورهای x و z نیز به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \qquad (۵-۶۴)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \qquad (۵-۶۵)$$

حال به تعریف گردابش می‌پردازیم. اگر کرل بردار سرعت را به صورت ذیل بنویسیم:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_1} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_3} \qquad (۵-۶۶)$$

ملاحظه می‌شود که کرل بردار سرعت برداری است که آن را به صورت $\vec{\xi} = \nabla \times \vec{v}$ نشان می‌دهیم. همان گونه که در معادله (۶۶-۵) ملاحظه می‌شود، مؤلفه‌های بردار $\vec{\xi}$ دو برابر سرعت‌های زاویه‌ای سیال حول محورهای مختصات می-باشند. بردار $\vec{\xi}$ را بردار گردابش[۴۱] می گویند. حال اگر گردابش برابر صفر باشد ($\vec{\xi}=0$)، سیال را غیر چرخشی می گویند. به عبارتی به سیالی غیر چرخشی می‌گویند که کرل بردار سرعت آن صفر باشد. به بیان دیگر در هر سیال غیر چرخشی سرعت زاویه‌ای یا نرخ چرخش[۴۲] برابر با صفر خواهد بود. با توجه به معادله (۶۶-۵) مؤلفه‌های بردار گردابش به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \xi_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \xi_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned} \qquad (۵-۶۷)$$

روابط (۶۷-۵) مؤلفه‌های تنسور چرخشی $\underline{\Omega}$ می‌باشند.

[41]Vorticity Vector
[42]Rate of Rotation

۸. خلاصه(جمع بندی)

شار مومنتوم حاصل ضرب دیادیک دو بردار سرعت بوده و یک کمیت تنسوری می‌باشد.نیروهای جرمی از دو نوع نیروهای گرانشی و نیروهای مغناطیسی تشکیل شده است. طبق قوانین حرکت دینامیک نیروی گرانش بر واحد حجم از طریق گرادیان انرژی پتانسیلی به دست می‌آید.در بسیاری از مواقع در حرکت سیال از نیروهای مغناطیسی صرف نظر می-شود.اثرات نیروهای سطحی بر سطوح سیال یا مرزهای جامد به صورت تنش‌های برشی و عمودی نشان داده می-شوند.مجموعه مؤلفه‌های نیروهای سطحی بر حسب نه مؤلفه تنش به دست می‌آیند که آرایه حاصل از آن را تنسور تنش گویند.تمام مؤلفه‌های تنسور تنش ویسکوز بر حسب گرادیان سرعت می تواند بیان شود.تنها نیروی حاکم بر سیال در حالت سکون نیروهای ناشی از فشار استاتیکی سیال می‌باشد.گردابش یا چرخشی بودن یک سیال بستگی به سرعت زاویه‌ای[43] سیال دارد.به سیالی غیر چرخشی می گویند که کرل بردار سرعت آن صفر باشد.

[43] Angular Velocity

۹.پرسش های پایان درس

۱– نشان دهید که برای یک سیال تراکم ناپذیر، بین بردار سرعت u و بردار سرعت گردابش ω، رابطه زیر برقرار است:

$$\nabla \cdot [(u \cdot \nabla)u] = \frac{1}{2}\nabla^2(u \cdot u) - u \cdot (\nabla^2 u) - \omega \cdot \omega$$

ج: با استفاده از تعریف مولفه های سرعت مماسی بر حسب سرعت خطی، از یک طرف معادله آغاز کرده تا به طرف دوم معادله برسید.

۲–در مختصات استوانه ای، مولفه های سرعت برای جریان همگن حول یک استوانه عبارتست از:

$$u_r = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$u_r = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

در این رابطه U سرعت سیال نزددیک شونده به سیال است و a شعاع استوانه است. اگر اثرهای تراکم پذیری و ویسکوزیته ناچیز باشد، مقدار فشار، $P(r,\theta)$، در هر نقطه در داخل سیال در غیاب هر نوع نیروی جرمی را تعیین کنید. مقدار فشار در نقطه ای دور از استوانه را برابر P_0 قرار دهید. حال با استفاده از معادله به دست آمده برای فشار مقدار فشار را در سطح استوانه ($r=a$) به دست آورید.

ج:ابتدا معادله ناویر استوکس را برای سیستم استوانه ای (در دو جهت r و θ) نوشته آن گاه با استفاده از فرضیات مساله، معادله را ساده نمایید. آنگاه با استفاده از شرط مرزی فشار، مقدار فشار بر حسب پارامترهای مساله به دست می‌آید.

۳–میدان سرعت زیر را در نظر بگیرید. تحت چه شرایطی این میدان می تواند جوابی برای معادله ناویر–استوکس باشد.

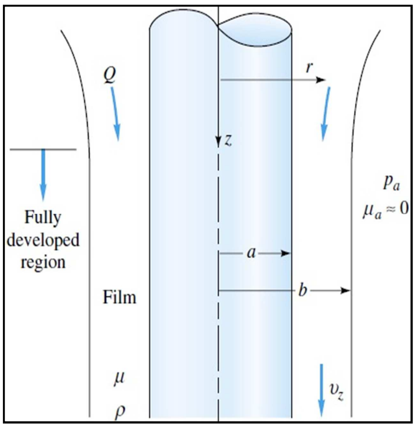
$$u = a(x^2 - y^2) \quad ; \quad v = -2axy \quad ; \quad w = 0$$

ج: معادله ناویر استوکس را نوشته (در سه جهت) آن گاه مولفه های سرعت داده شده را در معادله قرار دهید تا شرط لازم برای برقراری معادله، به دست آید.

۴– اگر میدان سرعت در مثال قبلی در معادله ناویر استوکس صدق کند، با فرض $g_x=0$، $g_y=0$ و $g_z=-g$ معادله توزیع فشار را به دست آورید.

ج: با استفاده از معادلات به دست آمده در قسمت قبلی، مقادیر g_i را جایگذاری کرده و آنگاه معادلات را برای فشار، p ، حل نمایید.

۵- یک لایه فیلمی از سیالی ویسکوز از یک لوله استوانه ای با شعاع داخلی a وشعاع فیلم خارجی b، به سمت پایین جاری شده است (شکل مقابل). در فاصله ای از بخش فوقانی لوله استوانه ای سرعت فیلم سیال به مقدار حدی خود رسیده[۴۴] و ثابت می ماند یعنی: $v_z=v_z(r)$ ،$v_\theta=v_r=0$. با فرض این که هوا هیچ گونه مقاومت تنشی در حرکت فیلم سیال به وجود نمی آورد، معادله دیفرانسیلی v_z را تعیین نمایید. هم چنین شرایط مرزی مناسب برای حل این معادله دیفراسیلی را به دست آورید و در نهایت با حل معادله، نشان دهید که توزیع سرعت فیلم سیال چگونه خواهد بود. هم چنین نشان دهید که شعاع فیلمی b با نرخ جریان حجمی کل فیلم، Q، چه رابطه ای دارد؟



شکل مربوط به مساله ۵

ج: با استفاده معادله پیوستگی و معادله ناویراستوکس در مختصات استوانه ای، معادله حاکم برای به دست آوردن v_z به دست می آید. حال با فرضیات داده شده در مساله و نیز شکل مساله، شرایط مرزی لازم برای حل معادله به دست می آید. حال با داشتن معادله دیفرانسیلی حاکم و نیز شرایط مرزی آن، می توان مولفه سرعت را به دست آورد. رابطه بین دبی حجمی سیال با شعاع فیلمی، از انتگرالگیری برای دبی حجمی در لایه فیلمی به راحتی به دست می آید.

۶- گردابش مربوط به میدان های سرعت زیر را به دست آورید.

الف: $V=(-yG/(x^2+y^2)\,,\,xG/(x^2+y^2)\,,\,0\,)$; ب: $V=(-y\Omega\,,\,x\Omega\,,\,0)$

ج: با استفاده از تعریف گردابش، که در متن درس ارائه شد، مقادیر مربوط به مولفه سرعت هر میدان را قرار دهید تا گردابش مربوط به هر میدان به دست آید.

[44] Fully Developed Region

۷- در جدول‌های ۴-۵ و ۵-۵، معادله حرکت در مختصات استوانه ای و کروی بر حسب تنسور تنش بیان شده است. با استفاده از این معادلات و با کمک فرضیات لازم، این معادلات را به صورت معادلات ناویر-استوکس در این مختصات بیان نمایید.

ج: فرضیات مربوط به معادله حرکت ناویر استوکس را در معادلات حرکت مزبور اعمال نمایید تا معادله ناویر استوکس مربوط به این مختصات به دست آید.

۱۰. فهرست منابع درس

- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid mechanics for chemical engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, *Transport phenomena*, second edition, J. Wiley.
- Frank M. White, 2003, *Fluid Mechanics*, second edition, McGraw-Hill.
- L. G. Currie, 1974, *Fundamental Mechanics of Fluids*, first edition, McGraw-Hill.
- W. P. Graebel, 2007, *Advanced Fluid Mechanics*, first edition, Elsevier Inc.

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل ششم

حل معادلات ناویر- استوکس برای سیالات ویسکوز

۱. مقدمه

در فصل قبل معادلات حرکت و پیوستگی در مختصات دکارتی، استوانه ای و کروی حاصل شدند. هم چنین معادلات ناویر- استوکس برای سیالات نیوتنی و غیرتراکمی به دست آمدند. تمام آزمایش ها نشان می دهد که معادلات ناویر- استوکس معادلات بنیادی حاکم بر حرکت سیالات نیوتنی می باشند. متاسفانه حل تحلیلی معادلات ناویر-استوکس برای بسیاری از مواقع مشکل و یا غیرممکن است. لیکن خوشبختانه با فرض های ساده شونده برای بسیاری از جریانات می توان معادلات ناویر-استوکس را اعمال نمود. در این فصل به چگونگی اعمال این معادلات در حل حرکت سیالات ویسکوز پرداخته خواهد شد.

معادله ناویر-استوکس یک معادله غیرخطی دیفرانسیلی جزیی می باشد که تاکنون حل تحلیلی برای آن پیشنهاد نشده است. بنابراین برای اعمال این معادله بر سیالات واقعی نیاز به حل تحلیلی کامل این معادله می باشد که متاسفانه وجود ندارد. پس با ساده سازی این معادله و حذف بعضی از عبارت های آن برای سیالات خاص می توان این معادله را با استفاده از روش تحلیلی و حل معادلات عادی دیفرانسیلی جواب های مناسب برای آن به دست آورد. لیکن نمی توان ثابت کرد که جواب هایی که به دست می آید، منحصر به فرد می باشد. چون هیچ گونه نظریه ای وجود ندارد که بتوان جواب به دست آمده را با آن ارزیابی نمود. با روش خاص و بدون بعد کردن معادله ناویراستوکس نشان خواهیم داد که چگونه معادلات ناویر-استوکس قابل ساده شدن بوده و می توان جواب های مناسبی برای بعضی از حرکت سیالات مانند سیالات خزشی ، لایه مرزی و سیالات پتانسیلی به دست آورد.

۲. ساده سازی و حل معادلات ناویر – استوکس

معادلات ناویر استوکس در شکل برداری آن به صورت ذیل به دست آمد:

$$\underbrace{\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}}_{\text{عبارت اینرسی}} = \underbrace{-\nabla P}_{\text{عبارت فشار}} + \underbrace{\rho\vec{g}}_{\text{عبارت گرانشی}} + \underbrace{\mu\nabla^2\vec{v}}_{\text{عبارت ویسکوز}} \qquad (۶-۱)$$

همان گونه که ملاحظه می شود معادله ناویر–استوکس یک معادله غیرخطی دیفرانسیلی جزیی[1] می باشد که تاکنون حل تحلیلی برای آن پیشنهاد نشده است. بنابراین برای اعمال این معادله بر سیالات واقعی نیاز به حل تحلیلی کامل این معادله می باشد که متاسفانه وجود ندارد. پس با ساده سازی این معادله و حذف بعضی از عبارت‌های آن برای سیالات خاص می‌توان این معادله را با استفاده از روش تحلیلی و حل معادلات عادی دیفرانسیلی جواب های مناسب برای آن به دست آورد. لیکن نمی‌توان ثابت کرد که جواب‌هایی که به دست می‌آید، منحصر به فرد می باشد. چون هیچ گونه نظریه ای وجود ندارد که بتوان جواب به دست آمده را با آن ارزیابی نمود. با روش خاص و بدون بعد کردن معادله ناویراستوکس نشان خواهیم داد که چگونه معادلات ناویر–استوکس قابل ساده شدن بوده و می توان جواب های مناسبی برای بعضی از حرکت سیالات مانند سیالات خزشی ، لایه مرزی و سیالات پتانسیلی به دست آورد.

۳. روش‌های ساده سازی معادلات ناویر–استوکس

روش های حل معادلات ناویر استوکس را به سه گروه ذیل می‌توان تقسیم کرد:

۱) حل کامل[2]

۲) حل تقریبی[3]

۳) حل عددی[4]

۱-۳. حل معادلات کامل برای سیالات ویسکوز

معادلات ناویر–استوکس دارای چهار عبارت اینرسی، ویسکوز، فشار و گرانشی می باشد. با ساده سازی و حذف عبارت اینرسی می توان معادلات را ساده نمود به طوری که با استفاده از حساب دیفرانسیل جواب های تحلیلی مناسب برای بسیاری از جریان سیالات ویسکوز در مجاری مختلف به دست آورد. در این جا فرض های ساده سازی به صورت های ذیل اعمال می شود.

[1] Non-Linear Partial Differential Equation
[2] Exact Solution
[3] Approximation Solution
[4] Numerical Solution

الف) فرض اغماض اثرات انتهایی[5]

با این فرض که تغییرات در انتهای جریان سیال در بعضی از شکل های هندسی مانند لوله، کانال قابل اغماض می باشد. بنابراین از عبارت های جابجایی در عبارت اینرسی در معادله ناویر استوکس صرف‌نظر می شود. به عنوان مثال در حرکت سیال در یک لوله که در جهت z جریان دارد، از ترم $(\partial/\partial z)$ صرف‌نظر می شود. این ساده سازی زمانی اعمال می شود که جریان کاملا توسعه یافته باشد. این فرض در مثالی در قسمت بعدی این فصل به آن پرداخته خواهد شد.

ب) فرض تقارن[۶]

در حرکت سیال در شکل های هندسی متقارن مانند لوله، کره و یا استوانه ، جریان متقارن بوده به طوری که می توان از تغییرات در جهت θ صرف نمود. یعنی فرض می کنیم که $\partial/\partial\theta=0$.

ج) فرض حالت پایداری[۷]

در سیالات آرام[۸] چون شرایط مرزی ثابت بوده و زمان در آنها دخالت ندارد. می توان جریان را پایدار فرض نمود و از عبارت $\partial/\partial t=0$ صرف‌نظر نمود. در سیالات متلاطم[۹] فرض های تقارن و پایداری قابل اعمال کردن نمی‌باشد.

۲-۳. حل تقریبی معادلات ناویر- استوکس

شکل عمومی سرعت برای حرکت سیالات در مجاری با شکل‌های هندسی مختلف بستگی به خواص فیزیکی مانند ویسکوزیته، دانسیته و یا سرعت جریان ندارد. در فصل شش اثرات این متغیرها در گروه های بدون بعد نشان داده خواهد شد. معمولا اثرات ویسکوزیته و سرعت جریان را در عدد بدون بعد رینولدز[۱۰] نشان می‌دهند. حرکت سیالات در بازه وسیعی از عدد رینولدز قرار دارد. لیکن دو محدوده در مکانیک سیالات مورد توجه خاص قرار دارد که تقریب ها در دو حالت ذیل مورد استفاده قرار می گیرد.

[5]No End Effect
[6]Axial Symmetry
[7]Steady State
[8]Laminar Flow
[9]Turbulent Flow
[10]Reynolds

الف) تقریب جریان خزشی[11]

در این تقریب جریان سیال بسیار کند و آرام بوده به طوری که عدد رینولدز کوچک تر از یک مـی باشـد ($Re<1$). در اینجا عبارت اینرسی از معادله ناویر استوکس حذف می شود. جریان‌هایی مانند جریان حرکـت مـواد مـذاب پلـی مرهـا، جریان محلول های سوسپانسیون ها ، حرکت در مخازن یا محیط های متخلخل در این گروه قـرار دارنـد. بـرای سـیالات خزشی نیوتنی معادلات حرکت به صورت ذیل استفاده می شود:

$$-\nabla P+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{v}\simeq 0 \qquad \left(Re=\frac{\rho<v>D}{\mu}\ll 1\right) \tag{۶-۲}$$

ب) تقریب جریان غیر لزجی[12]

در شرایطی که سرعت جریان بسیار بزرگ‌تر از یک می‌باشد، ($Re>>1$) در این حالت عبـارت ویسـکوز قابـل اغمـاض خواهد بود. به عبارتی در حرکت سیالاتی مانند جریان پتانسیلی[13] نیروهای اینرسـی حـاکم بـوده و از نیروهـای ویسـکوز صرف نظر می‌شود. جریان‌هایی مانند دینامیک گازها در لوله ها، حرکت پرنده ها مانند هواپیما و حرکت موشک را مـی توان مثال‌هایی از جریان غیرلزجی (پتانسیلی) نام برد. در این حالت معادله حرکت ناویر- استوکس به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\nabla P+\rho\vec{g} \qquad (Re\gg 1) \tag{۶-۳}$$

این معادله اویلر[14] نامیده می شود. با انتگرال گیری از این معادله، معادله برنولی[15] به دست می آید. در فصـل هـای بعـدی تقریب های مذکور با استفاده از معادله بدون بعد ناویر- استوکس توضیح داده خواهد شد.

۳-۳. حل عددی معادله ناویر استوکس

در شرایطی که نتوان از فرضیات ساده شونده و یا تقریب‌های خزشـی و غیـر لزجـی اسـتفاده کـرد، لازم اسـت معـادلات ناویر-استوکس را به طور کامل حل نمود. در این حالت همان گونه که قبلا اشاره شد، نمی تـوان از روش هـای تحلیلـی

[11]Creeping Flow Approximation
[12]Inviscid Flow Approximation
[13]Potential Flow
[14]Euler
[15]Bernoulli

استفاده نمود. بنابراین لازم است از روش های آنالیز عددی بهره برد. در دینامیک سیالات محاسباتی[۱۶] روش های مختلفی برای حل معادلات ناویر–استوکس پیشنهاد شده است مانند روش تفاضل محدود[۱۷]، المان محدود[۱۸] و ... . در این خصوص نرم افزارهای پیشرفته مانند FLUENT و COMSOL تهیه و به بازار عرضه شده است. با استفاده از این نرم افزارها سیالات پیچیده مانند حرکت مواد مذاب پلی مرها ، پیش گویی هوا و غیره قابل حل می باشد. در این نوشتار به علت محدودیت به روش های عددی پرداخته نخواهد شد.

۴. روش حل کامل سیالات ویسکوز

روش عمومی برای حل کامل معادله ناویر– استوکس با استفاده از فرض های ساده شونده به صورت زیر است.

۱) ابتدا لازم است که فرضیات منطقی مانند جریان غیرتراکمی پایدار[۱۹] و نیوتنی بودن سیال انجام شود. فرض هایی مانند پایداری، تقارن و اغماض اثرات انتهایی نیز ابتدا لازم است اعمال گردد.

۲) اثرات نیروهای گرانشی[۲۰] در حرکت سیال مهم می باشد. معمولا سیال در مجاری بسته که دارای مرزهای جامد باشند، نیروهای گرانشی در عبارت فشار ادغام می‌شوند. نقش نیروهای گرانشی در مجاری بسته مانند لوله ها ، کانال ها و غیره به عنوان ارتفاع استاتیکی[۲۱] به صورت ρgh عمل می نماید. در این حالت، ارتفاع استاتیکی به صورت زیر، به فشار دینامیکی اضافه می شود:

$$\overline{P} = P + \rho gh$$

که به $\overline{P}$ فشار هیدرودینامیکی[۲۲] می گویند. پس در این حالت معادله ناویر–استوکس به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla\overline{P} + \mu\nabla^2\vec{v} \qquad (۶\text{–}۴)$$

[16] Computational Fluid Dynamics (CFD)
[17] Finite Difference
[18] Finite Element Method (FEM)
[19] Steady Incompressible Flow
[20] Gravity Forces
[21] Static Head
[22] Hydrodynamic Pressure

۳) لازم است معادلات ساده شده ناویر-استوکس و پیوستگی در دستگاه مختصاتی متناسب بامجاری و شکل هندسی سیال نوشته شوند. در ساده سازی، عبارت هایی که با فرضیات در نظر گرفته شدند، حذف شده و یا مساوی صفر قرار داده می شوند. در این حالت معادلات ناویر- استوکس به صورت چند عبارت به دست خواهند آمد. این معادلات به صورت معادلات دیفرانسیل عادی بوده که با استفاده از روش تحلیلی قابل حل می باشند.

۴) با انتگرال گیری از معادلات عادی دیفرانسیلی، روابطی به دست می آیند که دارای ثابت های انتگراسیون خواهند بود. معمولا فشار به صورت P=P(x,y,z) می‌باشد که با فرض های ساده شونده برای بعضی جریان ها در مجاری خاص تغییرات فشار به صورت یک بعدی در نظر گرفته خواهد شد.

۵) اعمال شرایط مرزی[۲۳] برای به دست آوردن ثابت ها لازم می باشد. معمولا شرایط مرزی برای فشار در نقاط خاص قبلا ارائه شده است. شرایط مرزی برای سرعت به صورت های مختلف در هر مساله متفاوت می باشد. به عنوان مثال برای حرکت سیال در مجاری بسته مانند کانال ها و لوله‌ها، سرعت در سطح جامد یعنی در دیواره لوله و یا کانال صفر در نظر گرفته می شود. به این فرض شرط عدم لغزش[۲۴] در مرز جامد می گویند. در حرکت سیالات آزاد (یکنواخت) در مجاری اطراف اشیای در حال سکون مانند حرکت سیال آزاد اطراف کره یا استوانه معمولا سرعت سیال در فاصله دور از شئ که همان سرعت سیال آزاد است به عنوان شرط مرزی برای سرعت استفاده می شود. در شرایطی که یک سیال در تماس با یک سیال دیگر باشد، سرعت در سطح تماس دو سیال یکسان خواهند بود.

در سطح مشترک ما بین دو سیال، شرایط مرزی یعنی پیوستگی در تنش برشی مابین دو سیال مهم می باشند. در این حالت تنش برشی در مرز مشترک ما بین دو سیال به صورت شرط مرزی ذیل استفاده می شود:

$$\left[\mu_1 \frac{dv_1}{dy}\right]_{y=y_0} = \left[\mu_2 \frac{dv_2}{dy}\right]_{y=y_0}$$

که μ_1و μ_2 ویسکوزیته دو سیال، v_1 و v_2 پروفیل سرعت دو سیال خواهند بود. هم چنین y_0 مختصات سطح مشترک می باشد.

[23]Boundary Condition (B.C.)
[24]No-Slip Condition

۵. انواع جریان ویسکوز

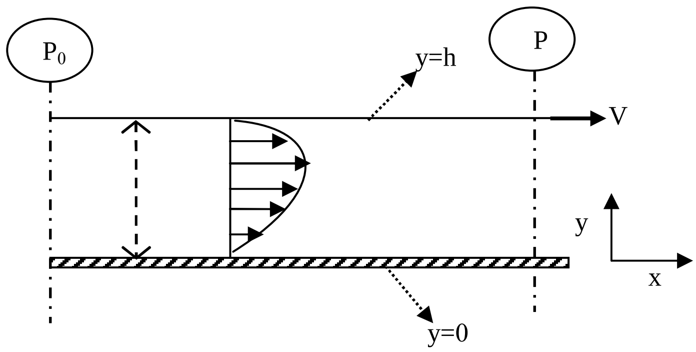
دو دسته از جریان های ویسکوز وجود دارند که به شرح ذیل به آن اشاره می شود.

۵-۱. جریان فشاری پویزله[۲۵]

در این جریان‌هاحرکت سیال ناشی از فشار اعمال شده بر سیال بوده به طوری که مرزهـای مجـاری حرکـت سـیال ثابـت بوده و سیال تحت اختلاف فشار حرکت می کند. مانند جریان حرکت سیال در یک لوله یا کانال.

۵-۲. جریان برشی کوئت[۲۶]

در جریان‌های برشی یا درگ[۲۷] ، سیال در مجاری حالت سکون داشته به طوری که مرزهای جامد حرکت می‌نماینـد. در این حالت، حرکت سیال از طریق نیروهای برشی از صفحه جامد شروع شده و به صـورت حرکـت نفـوذی مولکـول‌هـا، مومنتوم از لایه‌ای به لایه دیگر سیال منتقل می‌شود. به عنوان مثال حرکت جریان برشی ما بین دو صـفحه مـوازی مسـطح جامد که یکی متحرک بوده و دیگری در سکون بوده در نظر بگیرید. این مسئله در فصل‌های قبلی تحـت جریـان برشـی ساده به اندازه کافی به آن پرداخته شد. لیکن مجددا به طور کامل در اینجا مورد بررسی قرار می گیرد.



شکل ۱-۶: حرکت سیال در یک جریان برشی(کوئت)

[25]Poiseuille Flow
[26]Couette Flow
[27]Drag

۶. حرکت سیال نیوتنی در جریان برشی (جریان کوئت)

مطابق شکل (۱–۶) حرکت سیال نیوتنی بین دو صفحه موازی را در نظر می‌گیریم. توزیع فشار و پروفیل سرعت در این جریان خواسته شده است. برای حل این مسئله و برای به دست آوردن پروفیل سرعت لازم است که مراحل ذیل انجام شود.

۱) فرضیات اولیه مانند ثابت = ρ، ثابت = μ و ثابت = T، ابتدا در نظر گرفته می‌شود.

۲) معادله پیوستگی در مختصات دکارتی برای این سیال نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \qquad (۶–۵)$$

نظر به اینکه سرعت صفحه بالایی فقط در جهت x می‌باشد، بنابراین $v_y=v_z=0$ خواهد بود. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0 \qquad (۶–۶)$$

بنابرین با توجه به اینکه $v_x=v_x(y)$ بوده پس می‌توان نتیجه گرفت که $dv_x/dx=0$ می‌باشد.

۳) معادلات ناویر– استوکس در مختصات دکارتی برای این جریان به صورت ذیل نوشته می‌شود.

$$\rho\frac{Dv_x}{Dt}=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \qquad (۶–۷)$$

$$0=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial y} \qquad (۶–۸)$$

$$0=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial z} \qquad (۶–۹)$$

در اینجا فرض می‌شود که جریان پایدار بوده و از اثرات انتهایی صرف نظر می‌شود، به طوری که $Dv_x/Dt=0$ می‌باشد.

از طرفی طبق معادلات (۸–۶) و (۹–۶) ملاحظه می‌شود که $P=P(x)$ بوده، پس معادلات مذکور به شکل ذیل نوشته می‌شوند.

$$-\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0 \qquad (۶–۱۰)$$

$$\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}=\frac{d\bar{P}}{dx} \qquad (۶–۱۱)$$

۴) حال با دو مرتبه انتگرال‌گیری از معادله (۱۰-۶) خواهیم داشت:

$$v_x = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{d\bar{P}}{dx}\right)y^2 + c_1 y + c_2 \tag{۶-۱۲}$$

که c_1 و c_2 ثابت‌های انتگراسیون هستند. برای پیدا کردن این ثابت‌ها نیاز به شرایط مرزی می‌باشد.

۵) شرایط مرزی در این مسئله به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} y &= 0 \quad ; \quad v_x = 0 \\ y &= h \quad ; \quad v_x = V \end{aligned} \tag{۶-۱۳}$$

پس با اعمال این شرایط مرزی در معادله (۱۲-۶) پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$v_x = V\left(\frac{y}{h}\right) - \frac{h^2}{2\mu}\frac{d\bar{P}}{dx}\left[\left(\frac{y}{h}\right) - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \tag{۶-۱۴}$$

۶) برای به دست آوردن دبی حجمی برای جریان کوئت بین دو صفحه خواهیم داشت:

$$Q = wh\langle v_x\rangle = \int_0^w \int_0^h v_x\, dydz = wh\int_0^1 v_x d\left({}^{y}\!/_{h}\right) \tag{۶-۱۵}$$

پس با جا گذاری معادله (۱۴-۶) در معادله (۱۵-۶) و انتگرال‌گیری می توان نوشت:

$$Q = \frac{1}{2}whV - \frac{wh^3}{12\mu}\frac{d\bar{P}}{dx} \tag{۶-۱۶}$$

که در اینجا w عرض صفحات بوده و $\langle v_x\rangle$ متوسط سرعت سیال می‌باشند. در شرایطی که فاصله ما بین دو صفحه خیلی کم و در حدود کمتر از یک اینچ باشد، می‌توان از افت فشار صرف نظر نموده، به طوری که پروفیل سرعت خطی بوده و به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$v_x = V\left(\frac{y}{h}\right) \tag{۶-۱۷}$$

که به این پروفیل خطی در فصل‌های قبل نیز اشاره شده است.

از طرفی دیگر اگر فاصله ما بین دو صفحه زیاد باشد، تغییرات فشار با انتگرال گیری از رابطه (۱۶-۶)، به صورت ذیل به دست می‌آید:

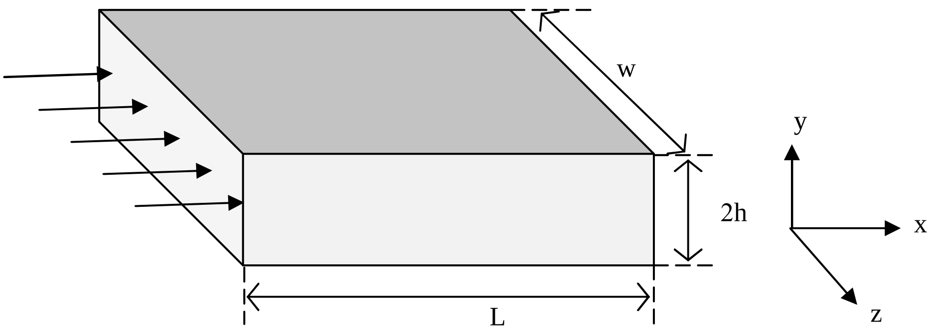
$$\int_{P_0}^{P} d\bar{P} = \int_0^x \left(\frac{1}{2}whV\frac{12\mu}{wh^3} - \frac{12\mu Q}{wh^3}\right)dx = \int_0^x \left(\frac{6\mu V}{h^2} - \frac{12\mu Q}{wh^3}\right)dx \tag{۶-۱۸}$$

$$\bar{P} = \bar{P_0} + \left(\frac{3\mu V}{h^2} - \frac{6\mu Q}{wh^3}\right)x$$

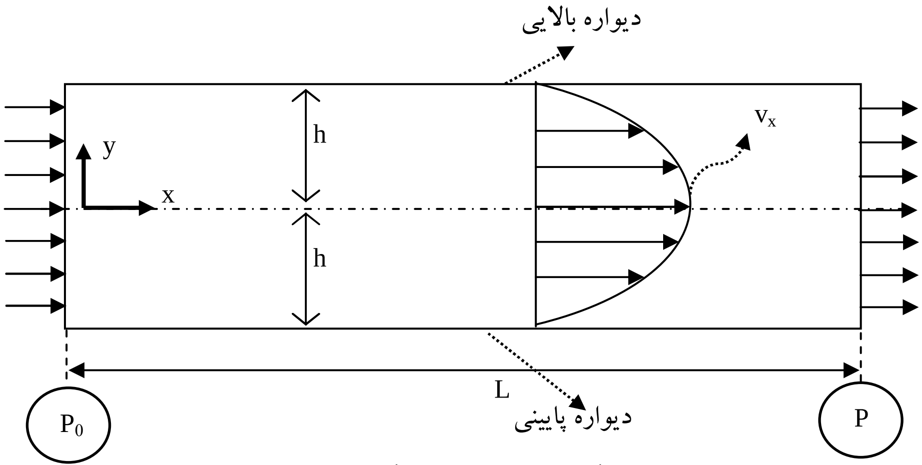
که P_0 فشار در ابتدای صفحه یا فشار اتمسفر می‌باشد.

۷. حرکت سیال نیوتنی ما بین دو صفحه مسطح موازی یا در یک داکت

حرکت سیال نیوتنی ما بین دو صفحه مسطح موازی را مطابق شکل (۲-۶) در نظر بگیرید.



شکل ۲-۶: جریان در یک کانال با عرض کم (h/w<<1)



۳-۶: شکل هندسی سیال در یک داکت

۱) فرضیات : جریان پایدار می‌باشد; سیال نیوتنی و تراکم ناپذیر است ($\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$).

۲) اثرات انتهایی قابل اغماض می‌باشند، یعنی ($\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$) فرض می‌شود. به عبارتی سیال کاملا توسعه یافته است و $v_y = v_z = 0$ خواهد بود؛ یعنی سیال فقط در جهت x حرکت می‌نماید.

۳) با توجه به اینکه عرض صفحات خیلی زیاد می‌باشد، پس از تغییرات در جهت z صرف نظر می‌شود یعنی ($\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$).

۴) مجرای حرکت سیال بسته خواهد بود و نیروهای گرانشی در جهت y می‌باشند، بنابراین از فشار هیدرودینامیکی به صورت $\overline{P} = P + \rho g h$ استفاده می‌شود.

۵) از شرایط مرزی عدم لغزش در صفحات مرزی استفاده می‌شود. پس:

$$y = \pm h \ ; \ v_x = 0$$

۶) معادله پیوستگی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

چون $v_y = v_z = 0$ می‌باشد، پس ساده شده، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{۶-۱۹}$$

چون $\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$ و $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ پس $v_x = v_x(y)$، یعنی سرعت تابعی از y می‌باشد.

۷) معادلات مومنتوم که به صورت ناویر-استوکس نوشته می‌شوند به شکل زیر ساده خواهند شد:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \tag{۶-۲۰}$$

$$0 = \frac{\partial \overline{P}}{\partial y} \qquad \text{یا} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \tag{۶-۲۱}$$

$$0 = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial z} \qquad \text{یا} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{۶-۲۲}$$

در این‌جا با توجه به اینکه $\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial z} = 0$ می‌باشد، پس $\overline{P} = \overline{P}(x)$ خواهد بود. بنابراین معادله دیفرانسیلی حرکت سیال به صورت ذیل نوشته خواهد شد.

$$\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} \tag{۶-۲۳}$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} = \frac{d\overline{P}}{dx} \tag{۶-۲۴}$$

حال با فرض اینکه افت فشار فقط در جهت x می‌باشد، می‌توانیم فرض کنیم که:

$$\frac{d\overline{P}}{dx} = k \quad (\text{ثابت}) \tag{۶-۲۵}$$

پس با انتگرال‌گیری از رابطه (۲۵-۶) به صورت ذیل خواهیم داشت:

$$\int_{P_0}^{P} dP = \int_0^L k dx \quad \text{یا} \quad P - P_0 = kL \tag{۶-۲۶}$$

بنابراین افت فشار با استفاده از معادله (۲۶-۶) به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\frac{d\overline{P}}{dx} = -\frac{\Delta P}{L} = k \tag{۶-۲۷}$$

لذا معادله حرکت (۲۳-۶) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\frac{\Delta P}{L} \tag{۶-۲۸}$$

حال با انتگرال‌گیری از این معادله، پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست می آید:

$$\int d\left(\frac{dv_x}{dy}\right) = \int -\frac{\Delta P}{L\mu} dy + C_1 \tag{۶-۲۹}$$

$$\frac{dv_x}{dy} = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta P}{L} y + C_1 \tag{۶-۳۰}$$

پس با انتگرال‌گیری مجدد خواهیم داشت:

$$v_x = \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{\Delta P}{L}\right) y^2 + C_1 y + C_2 \tag{۶-۳۱}$$

که C_1 و C_2 دو ثابت انتگراسیون می‌باشند و با استفاده از شرایط مرزی به دست می‌آیند.

۸) شرایط مرزی برای به دست آوردن ثابت‌های انتگراسیون به صورت ذیل ارائه می‌شوند:

$$y = 0 \quad : \quad \frac{dv_x}{dy} = 0 \qquad\qquad y = h \quad : \quad v_x = 0 \tag{۶-۳۲}$$

ملاحظه می‌شود که در مرکز وسط ما بین دو صفحه تنش برشی صفر می‌باشد، یعنی ($\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} = 0$) و در صفحات تنش برشی ماکزیمم می‌باشد، به طوری که سرعت سیال در آن صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین با استفاده از شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = +\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{\Delta P}{L}\right) \tag{۶-۳۳}$$

پس شکل نهایی پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست خواهد آمد:

$$v_x = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)(h^2 - y^2) \qquad (۶-۳۴)$$

که $\Delta P = P_0 - P$ می‌باشد.

۹) شار جریان حجمی در کانال

برای به دست آوردن دبی حجمی سیال بر واحد عرض کانال از طریق ذیل عمل می گردد:

$$dQ = v_x dy$$

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_{-h}^{h} v_x dy = \int_{-h}^{h} \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)(h^2 - y^2)dy \qquad (۶-۳۵)$$

$$Q = \frac{2h^3}{3\mu}\left(\frac{\Delta P}{L}\right) \qquad (۶-۳۶)$$

سرعت متوسط نیز از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$\langle v_x \rangle = \frac{Q}{\text{مساحت مقطع سطح}^{28}} = \frac{Q}{2h} = \frac{h^2}{3\mu}\left(\frac{\Delta P}{L}\right) \qquad (۶-۳۷)$$

۱۰) توزیع تنش برشی در کانال

توزیع تنش برشی از رابطه ذیل به دست می آید:

$$\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \qquad (۶-۳۸)$$

که با مشتق‌گیری از پروفیل سرعت (رابطه ۳۱-۶) خواهیم داشت:

$$\tau_{yx} = -y\left(\frac{\Delta P}{L}\right) \qquad (۶-۳۹)$$

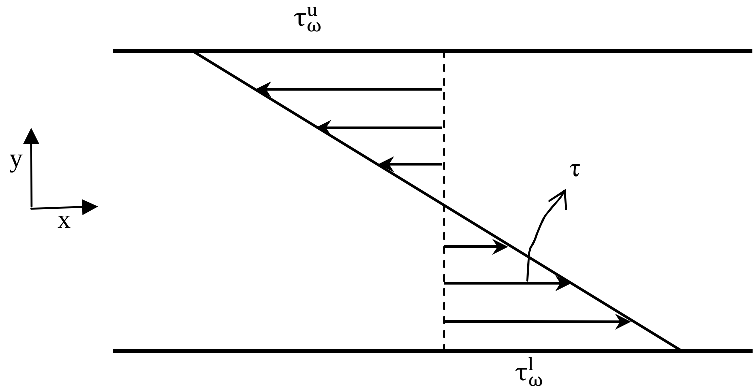
حال اگر با استفاده از معادله (۳۹-۶) تنش برشی در روی دیواره های بالا و پایین را بنویسیم (یعنی در $y=\pm h$)

$$\tau_\omega^u = -h\left(\frac{\Delta P}{L}\right) \quad ; \quad y = h \qquad (۶-۴۰)$$

$$\tau_\omega^l = +h\left(\frac{\Delta P}{L}\right) \quad ; \quad y = -h \qquad (۶-۴۱)$$

که بالانویس‌های u و l به معنی بالایی وپایینی می باشند. شکل (۴-۶) توزیع تنش را بین دو صفحه موازی نشان می‌دهد:

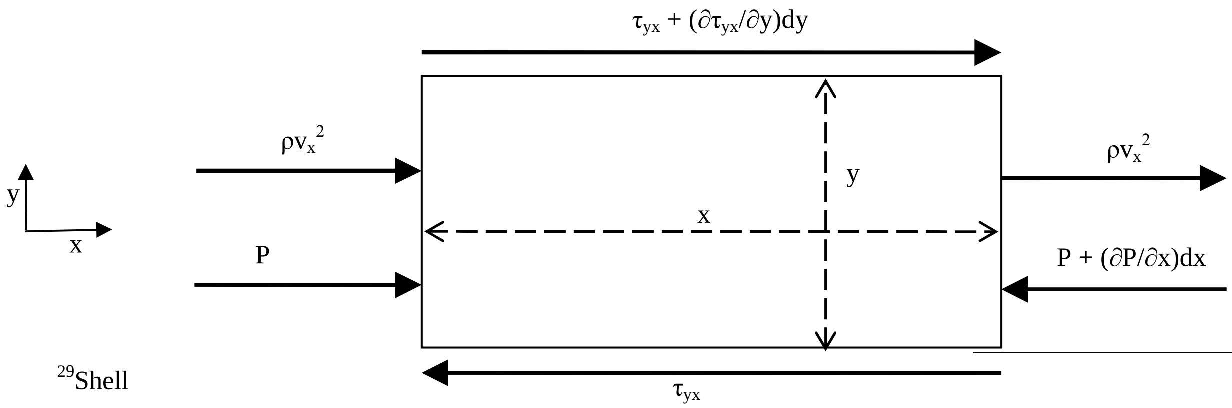
[28] Cross Sectional Area



شکل ۴-۶: توزیع تنش برشی در حرکت فشاری بین دو صفحه موازی

۸. حرکت سیال نیوتنی بین دو صفحه موازی با استفاده از موازنه مومنتوم

دو روش عمومی برای تحلیل حرکت سیالات توسعه داده شده است. روش اول کـه سـاده تـر اسـت از معـادلات حـاکم ناویر- استوکس استفاده می شود. در روش دوم از موازنه مومنتوم روی یک المان حجم استفاده می شود. در قسمت قبل از روش اول استفاده گردید، در این قسمت از روش موازنه مومنتوم استفاده می شود. مطابق شکل (۵-۶) اگر یک المان[۲۹] المان[۲۹] دیفرانسیلی را در توده سیال بین دو صفحه در نظر بگیرید، طول و عرض المان dx و dy بوده و عمـق آن dz مـی باشد.



[29]Shell

۱۶

شکل ۵-۶: موازنه مومنتوم بر روی المان سیال

۱) ابتدا برآیند موازنه مومنتوم جابجایی را در جهت x می نویسیم که خواهد بود:

$$\Delta F_I = [\rho\, v_x^2\, dy\, dz]_{in} - [\rho\, v_x^2\, dy\, dz]_{out}$$ برآیند مومنتوم جابجایی[30]

ملاحظه می شود که واحد ρv^2، مومنتوم خطی یا نیروی لختی بر واحد سطح می باشد، پس ضرب آن در مساحت سطح المان (dydz) کل مومنتوم ورودی و خروجی برآیند نیروهای لختی از المان به دست خواهد آمد.

۲) موازنه نیروهای فشاری در المان به صورت زیر است:

$$\Delta F_P = [P\, dy\, dz]_{in} - \left[\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right)\, dy\, dz\right]_{out}$$ برآیند نیروهای فشار[31]

۳) موازنه تنش برشی مطابق شکل بر روی المان به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$\Delta F_\tau = \left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right)\, dx\, dz\right]_{in} - \left[\tau_{xy}\, dx\, dz\right]_{out}$$ برآیند نیروهای تنش برشی[32]

ملاحظه می‌شود که واحد تنش برشی نیرو بر واحد سطح است که با ضرب آن در مساحت المان (dx dz) مقدار کل نیروی برشی در ورودی و خروجی المان به دست می آید.

۴)موازنه نیروهای کل بر المان به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\Delta F_I + \Delta F_P + \Delta F_\tau = 0 \qquad (۶-۴۲)$$

با جایگذاری عبارت های بالا در معادله (۴۲-۶) و تقسیم آن بر حجم المان (dx dydz)خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (۶-۴۳)$$

[30]Net Convective Momentum
[31]Net Pressure Force
[32]Net Shear Force

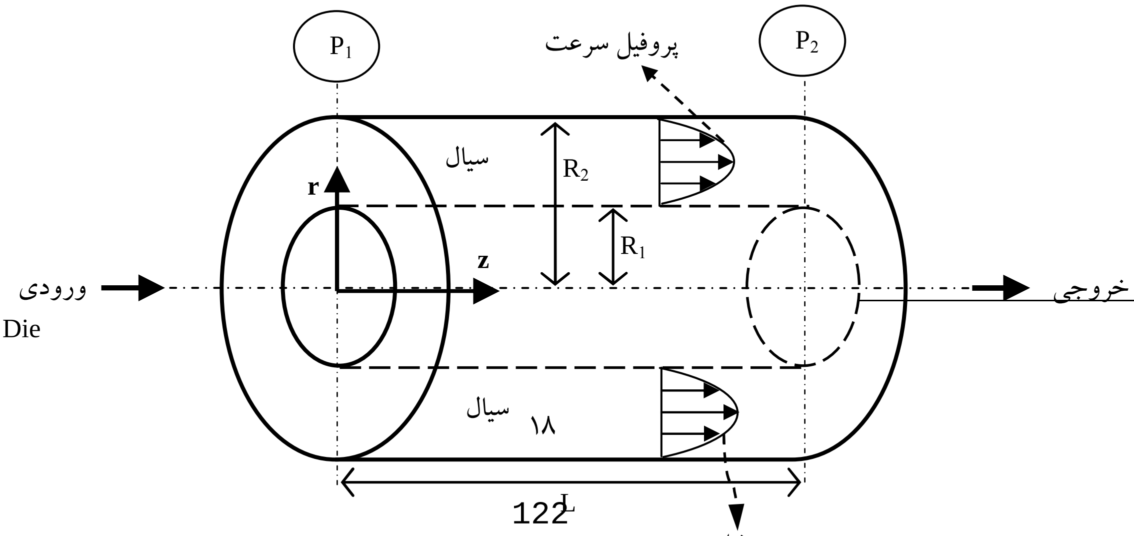
باید توجه داشت که چون سیال پایدار است، بنابراین $\Delta F_I=0$ می شود. با جایگذاری $\tau_{yx}=\mu(\partial v_x/\partial y)$ در معادلـه (۴۳-۶)، معادله دیفرانسیلی سرعت به دست می‌آید که این معادله قبلا از طریق معادلات ناویر-استوکس به دست آمد:

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\frac{\Delta P}{L} \qquad (۶\text{-}۴۴)$$

۹. حرکت سیال نیوتنی در قالب دو استوانه متمرکز[33]

برای ارائه مثالی برای حرکت سیالات نیوتنی در مختصات استوانه ای، حرکت سیالی را در میان دو استوانه متمرکـز، کـه یکی درون دیگری قرار دارد، مورد بررسی قرار می دهیم. این شکل هندسی کاربرد وسیعی در صنایع پلاستیک به ویـژه فرآیند شکل‌دهی پلی‌مرها دارد.

شکل (۶-۶) قالبی را که از دو استوانه متمرکز تشکیل شده است، نشان می دهد. مطابق شکل، شـعاع هـای اسـتوانه هـای داخل و خارج به ترتیب R_1 و R_2 و طول قالب L می باشد. مراحل بـه دسـت آوردن پروفیـل سـرعت و دبـی حجمـی بـه صورت ذیل است:



[33] Annular Die

شکل ۶-۶: حرکت سیال نیوتنی بین دو استوانه هم مرکز

۱) سیال غیر تراکمی هم دما و نیوتنی فرض می‌شود. با توجه به این که شکل هندسی سیال استوانه است، پس از مختصات استوانه ای (r,θ,z) برای آنالیز حرکت سیال استفاده می شود.

۲) با توجه به این که حرکت سیال یک بعدی در جهت z است، بنابراین $v_r = v_\theta = 0$ خواهد بود.

۳) معادله پیوستگی در مختصات استوانه ای برای سیال مذکور نوشته می شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, r\, v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\, v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\, v_z) = 0 \qquad (۶-۴۵)$$

که بعد از ساده‌سازی معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (۶-۴۶)$$

که رابطه (۴۶-۶) همان فرض اغماض از اثرات انتهایی است. بنابراین با توجه به این که سرعت مستقل از z و θمی باشد، پس $v_r = v_r(r)$ خواهد بود.

۴) از فرض تقارن محوری ، $\partial/\partial\theta = 0$، استفاده می کنیم و معادله ناویر- استوکس را در دستگاه مختصات استوانه‌ای در جهت z به صورت ذیل نوشته و ساده می‌نماییم:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] \qquad (۶-۴۷)$$

با استفاده از فرض حالت پایداری، $(\partial/\partial t = 0)$ و این که $v_r = v_\theta = 0$ و $\partial/\partial z = 0$؛ بیشتر عبارت‌های معادله (۴۷-۶) حذف شده و معادله ساده شده به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] = 0 \qquad (۶-۴۸)$$

معادلات ناویر-استوکس در جهت‌های r و θ ساده شده و بیش‌تر عبارت‌های آن حذف خواهند شد و تنها عبارت‌های ذیل باقی می‌مانند:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} = 0 \tag{۶-۴۹}$$

بنابراین در این حالت $\bar{P} = \bar{P}(z)$ خواهد بود. پس عبارت فشار به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = -\frac{d\bar{P}}{dz} = \frac{\bar{P}_2 - \bar{P}_1}{L} \tag{۶-۵۰}$$

با دو مرتبه انتگرال‌گیری از رابطه (۶-۵۰) معادله پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست خواهد آمد:

$$v_z = -\frac{1}{4\mu}\left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z}\right) r^2 + C_1 \ln r + C_2 \tag{۶-۵۱}$$

که C_1 و C_2 ثابت‌های انتگراسیون هستند و با استفاده از شرایط مرزی به دست می‌آیند.

۵) شرایط مرزی در این سیال به صورت ذیل تعیین می‌شوند:

$$r = R_1 \quad : \quad v_z = 0 \qquad r = R_2 \quad : \quad v_z = 0 \tag{۶-۵۲}$$

با اعمال شرایط مرزی در معادله (۶-۵۱)، ثابت‌های C_1 و C_2 و شکل نهایی پروفیل سرعت به دست می‌آیند:

$$C_1 = \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z}\right)\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\left({R_2}/{R_1}\right)} \qquad C_2 = \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z}\right) R_2^2 - C_1 \ln R_2 \tag{۶-۵۳}$$

بنابراین با جایگذاری C_1 و C_2 در معادله (۶-۵۱) خواهیم داشت:

$$v_z = \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z}\right)\left[\frac{\ln\left({r}/{R_2}\right)}{\ln\left({R_2}/{R_1}\right)}(R_2^2 - R_1^2) + (R_2^2 - r^2)\right] \tag{۶-۵۴}$$

شکل (۶-۶) پروفیل سرعت را نشان می‌دهد.

۶) دبی حجمی سیال با استفاده از المان حجمی استوانه‌ای با شعاع‌های داخلی r و خارجی r+dr به صورت $dQ = v_z 2\pi r dr$ نوشته می‌شود که با انتگرال گیری دبی حجمی کل به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_{R_1}^{R_2} v_z 2\pi r dr \qquad (۶-۵۵)$$

با جایگذاری پروفیل سرعت یعنی معادله (۶-۵۴) در معادله بالا و انتگرال‌گیری، دبی حجمی کل به دست می‌آید:

$$Q = \frac{\pi(R_2^2 - R_1^2)}{8\mu}\left(-\frac{\partial \overline{P}}{\partial z}\right)\left[R_2^2 + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\left({R_2}/{R_1}\right)}\right] \qquad (۶-۵۶)$$

توجه شود که در انتگرال‌گیری از انتگرال غیر معین ذیل استفاده می‌شود:

$$\int r \ln r \, dr = \frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4} \qquad (۶-۵۷)$$

از طرفی در شرایطی که $R_1 \to 0$ میل کند، قالب به شکل یک لوله با شعاع $R = R_2$ در خواهد آمد که دبی آن به شکل ذیل نوشته می‌شود:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(-\frac{\partial \overline{P}}{\partial z}\right) \qquad (۶-۵۸)$$

که معادله (۶-۵۸) به قانون هیگن-پویزله[۳۴] معروف است.

۱۰. حرکت سیالات نیوتنی در جریان‌های دو بعدی[۳۵]

حرکت سیالات تراکم ناپذیر و نیوتنی در کانال‌ها که فاصله ما بین دو صفحه آن کم نباشد، در مختصات دکارتی به صورت دو بعدی می‌باشد. هم چنین حرکت سیالات اطراف کره و استوانه در مختصات استوانه‌ای و یا کروی، به صورت دو بعدی تحلیل می شود.

در این قسمت حرکت سیال را در کانالی به صورت دو بعدی در مختصات دکارتی مورد آنالیز قرار می‌دهیم. در این‌جا مؤلفه‌های سرعت به صورت $v_x = v_x(t,x,y)$ ، $v_y = v_y(t,x,y)$ و فشار $\overline{P} = \overline{P}(t,x,y)$ خواهد بود. فرض نماییم

[34]Hagen-Poiseuille Law
[35]Two-Dimensional Flow

که سیال حالت پایدار دارد و $v_z = 0$ می‌باشد. بنابراین معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس را به صورت ذیل می-نویسیم:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (۶-۵۹)$$

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \qquad (۶-۶۰)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) \qquad (۶-۶۱)$$

ملاحظه می‌شود که در این‌جا سه مجهول و سه معادله داریم. از طرفی حل این گونه معادلات به روش تحلیلی مشکل و یا غیر ممکن می‌نماید. لیکن همان گونه که قبلا در فصل دوم اشاره شد می‌توان با استفاده از توابع جریان، دو معادله ناویر-استوکس را تبدیل به یک معادله نموده و آن را با استفاده از روش عددی حل نمود. در این‌جا اگر از دو طرف معادله ((۶-۶۰) و (۶-۶۱) به ترتیب به صورت $\frac{\partial}{\partial y}$ و $\frac{\partial}{\partial x}$ یعنی ضربدری[۳۶] مشتق بگیریم و سپس دو معادله را از هم کم کنیم، عبارت‌های فشار به صورت ذیل حذف خواهند شد:

$$\frac{\partial^2 \overline{P}}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 \overline{P}}{\partial x\, \partial y} = 0 \qquad (۶-۶۲)$$

در این جا معادله ای که از جمع دو معادله مذکور حاصل می شود بعد از ساده‌سازی به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \xi_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \xi_z}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2}\right] \qquad (۶-۶۳)$$

که در این معادله ξ_z گردابش[۳۷] حول محور z می باشد. در فصل چهارم، به صورت ذیل تعریف گردید:

$$\xi_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \qquad (۶-۶۴)$$

از طرفی با استفاده از تعریف تابع جریان لاگرانژی خواهیم داشت:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (۶-۶۵)$$

---

[36]Cross Differentiation
[37]Vorticity

پس با جایگذاری روابط (۶-۶۵) در (۶-۶۴) می‌توان نوشت:

$$\xi_z = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi \qquad (۶-۶۶)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه (۶-۶۶) در معادله (۶-۶۳) به معادله دیفرانسیلی درجه چهارم ذیل می‌رسیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 \psi = \frac{\mu}{\rho}\nabla^4 \psi \qquad (۶-۶۷)$$

معادله (۶-۶۷) یک معادله غیرخطی اسکالر دیفرانسیل جزیی از درجه چهار است. در حالت پایدار، از عبارات طرف چپ معادله صرف‌نظر می‌شود و معادله به صورت ذیل ساده می‌شود:

$$\nabla^4 \psi = 0 \qquad (۶-۶۸)$$

برای حل معادله (۶-۶۸) نیاز به چهار شرط مرزی داریم. معادله مذکور در مختصات استوانه‌ای و کروی نیز موجود است و در کتاب پدیده‌های انتقال برد و همکاران[۳۸] ارائه شده است.

معادله (۶-۶۸) را می‌توان به شکل دیفرانسیلی زیر نیز نوشت:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \qquad (۶-۶۹)$$

[38] Transport Phenomena ; Bird, Stewart, Lightfoot

۱۱. خلاصه(جمع بندی)

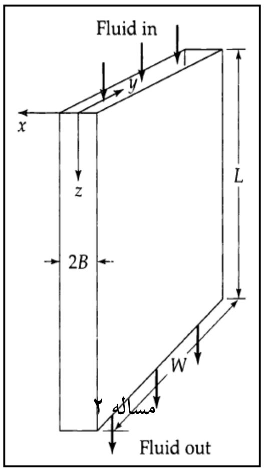
روش های حل معادلات ناویر- استوکس را به سه گروه ذیل می‌توان تقسیم کرد: حل کامل، حل تقریبی، حل عددی. در روش حل کامل می توان از فرضیاتی چون اغماض اثر انتهایی، تقارن و حالت پایداری استفاده کرد. در روش حل تقریبی از تقریب هایی چون تقریب جریان خزشی و تقریب جریان غیرلزجی استفاده کرد. معمولا برای حرکت سیال در مجاری های بسته که دارای مرزهای جامد باشند، نیروهای گرانشی در عبارت فشار ادغام می شوند. در شرایطی که نتوان از فرضیات ساده شونده و یا تقریب های خزشی و غیر لزجی استفاده کرد، لازم است معادلات ناویر-استوکس را به طور کامل حل نمود. معمولا شرایط مرزی برای حل معادلات حرکت با توجه به هندسه و شرایط حرکت سیال تعیین می شود. دو روش عمومی برای تحلیل حرکت سیالات توسعه داده شد. روش اول استفاده از معادلات حاکم ناویر- استوکس است، روش دوم استفاده از موازنه مومنتوم روی یک المان حجمی. حرکت سیالات تراکم ناپذیر و نیوتنی در کانال‌ها که فاصله ما بین دو صفحه آن کم نباشد، در مختصات دکارتی به صورت دو بعدی می‌باشد. حرکت سیالات تراکم ناپذیر و نیوتنی در کانال‌ها که فاصله ما بین دو صفحه آن کم نباشد، در مختصات دکارتی به صورت دو بعدی می‌باشد. حرکت سیالات اطراف کره و استوانه در مختصات استوانه‌ای و یا کروی، به صورت دو بعدی تحلیل می شود.

۱۲. پرسش های پایان درس

۱- محلولی آبی که دارای ٪۶۰ وزنی ساکاروز است، از فضای بین دو استوانه هم مرکز[39] با طول ۲۷ فوت و شعاع داخلی ۰/۴۹۵ اینچ و شعاع خارجی ۱/۱ اینچ، در دمای ۲۰ درجه سانتیگراد در جریان است. در این شرایط، دانسیته محلول ۸۰/۳ lb/ft^3 و ویسکوزیته آن ۱۳۶/۸ $lb_m/ft.hr$ است. دبی حجمی محلول را زمانی که اختلاف فشار ایجاد شده psi ۵/۳۹ است، محاسبه کنید.

ج: از معادله سرعت مربوط به حرکت سیال بین دو استوانه استفاده کرده و با جایگذاری مقادیر داده شده، مقدار دبی سیال قابل محاسبه است.

۲- یک سیال نیوتنی در یک رژیم جریان آرام از یک شکاف باریک، که از دو دیوار موازی که فاصله میان آنها ۲B است تشکیل شده است، در حال عبور است. اگر B<<W باشد، می توان از اثرات انتهایی صرف نظر کرد (شکل مقابل).



- با نوشتن یک موازنه مومنتوم تنش τ_{xz} و پروفیل سرعت v_z را برای این سیال به دست آورید.
- نشان دهید نسبت سرعت میانگین سیال با سرعت بیشینه سیال چه میزان خواهد بود.
- نشان دهید که معادله هیگن-پویزله برای این سیال به چه صورت خواهد بود؟

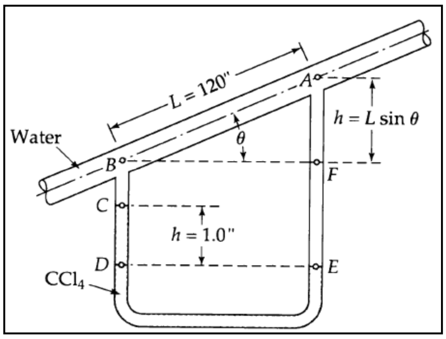
ج: از معادلات پیوستگی و نیز معادلات مومنتوم در سه جهت استفاده کرده با ساده سازی معادلات، با استفاده از فرضیات مساله، تنش و پروفیل سرعت خواسته شده محاسبه می گردد. با استفاده از معادله سرعت به دست آمده، مقدار سرعت بیشینه و نیز سرعت میانگین را می توان محاسبه کرد. معادله هیگن پویزله برای این مساله نیز با در اختیار داشتن معادله گردایان فشار که از معادلات حرکت به دست می آید و نیز تعریف دبی سیال، قابل استخراج است.

[39] Annular

۳–چنانچه یک لوله حاوی دو استوانه متحدالمرکز[40] بسیار باریک باشد، ممکن است با تقریب خوبی، آن را به صورت یک شکاف نازک در نظر بگیریم. حال با این توصیف، دبی جرمی جریان گذرنده از چنین لوله‌ای که دارای شعاع خارجی R و شعاع داخلی R(1-ε) است، (ε عددی کوچک است) را با استفاده از روابط به دست آمده از مساله قبل به دست آورید.

ج: با استفاده از معادلات حرکت حاکم بر دو صفحه موازی و یا اعمال فرضیات این مساله بر پاسخ مساله قبل، دبی جریان گذرنده از میان دو استوانه متحدالمرکز بسیار باریک به دست می آید.

۴–دبی جرمی سیال عبوری از یک جریان سنج موئینه[41] را که در شکل زیر نشان داده شده است، به دست آورید. سیال گذرنده از لوله شیب‌دار، آب در دمای ۲۰ درجه سانتیگراد می باشد و سیال موجود در مانومتر تتراکلریدکربن با دانسیته ۱/۵۹۴ g/Cm^3. قطر لوله موئینه ۰/۰۱۰ اینچ است. *راهنمایی*: تنها اندازه گیری h و L برای محاسبه دبی جریان کافی است و نیازی به اندازه گیری زاویه شیب (θ) نیست. چرا؟

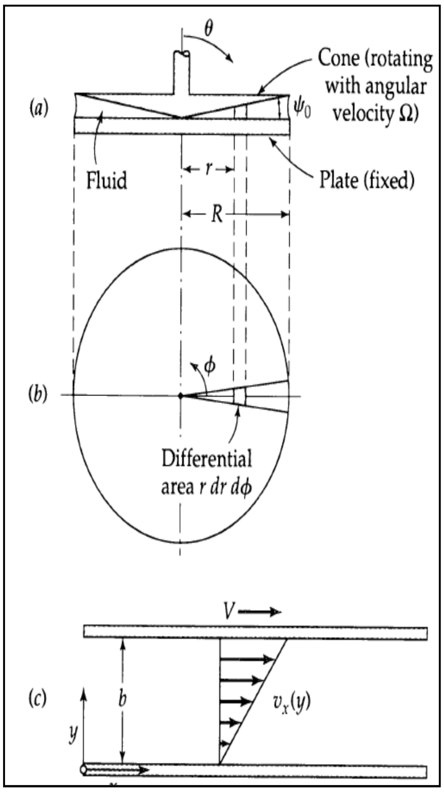


مساله۴

ج: خوا فیزیکی آب در دمای داده شده را از مراجع به دست آورید. آن گاه معادلات پیوستگی و معادله حرکت ناویر استوکس را برای این مساله را با اعمال فرضیات درست، بنویسید. سپس مقادیر فشاری که بامانومتر نشان داده می شود، در معادله حرکت اعمال نمایید. با داشتن دیگر مقادیر فیزیکی، به راحتی می توان پروفیل سرعت را نوشته و در نهایت، مقدار دبی عبوری را با استفاده از پروفیل سرعت محاسبه نمود.

[40] Annulus
[41] Capillary Flow Meter

۵–ویسکومتر مخروط–و–صفحه (شکل زیر)، شامل یک صفحه صاف ساکن و یک مخروط وارونه است به طوری که تنها نوک مخروط با صفحه تماس دارد. مایعی که ویسکوزیته آن باید اندازه گیری شود، در فضای خالی میان مخروط و صفحه قرار داده می شود. مخروط با سرعت زاویه ای مشخص Ω می چرخد و گشتاور T_z لازم برای گردانـدن مخـروط اندازه گیری می شود.



مساله ۵

-معادله‌ای برای ویسکوزیته سیال بر حسب Ω، T_z و ψ_0 (زاویه میان صفحه و مخروط)، به دست آورید. مقدار زاویه ψ_0 در نمونه های تجاری، حدود ۱ درجه است.

-اگر بتوان توزیع سرعت سیال در فضای خالی میان مخروط و صفحه را با جریان سیال میان دو صفحه موازی تقریب زد، که صفحه فوقانی با سرعت ثابت حرکت می کند، پروفیل سرعت سیال در این ویسکومتر به دست آورید. در اینجا داریم: $V=r\Omega$ ، $b=r\sin\psi_0$

-با استفاده از توزیع سرعت به دست آمده، تنش برشی این سیستم را به دست آورید. با استفاده از تنش به دست آمده، بیان کنید که چرا این نوع ویسکومترها مطلوبند؟

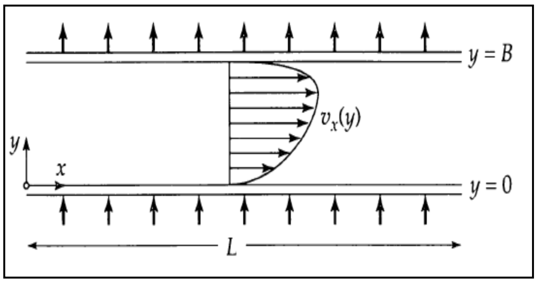
-مقدار گشتاور مورد نیاز برای چرخاندن مخروط را بر حسب μ، Ω، ψ_0 و R به دست آورید.

ج: از تعریف گشتاور استفاده کرده آنگاه پارامتراهای مربوطه را در تعریف قرار دهید. بدین ترتیب ویسکوزیته به صورت تابعی از پارامترهای مساله به دست می آید. در قسمت دوم با کمک مختصات کروی، معادله حرکت حاکم بر مساله به دست می آوریم. سپس با استفاده از شرایط مرزی حاکم بر سیستم، پروفیل سرعت به دست می‌آید. در قسمت سوم، با استفاده از تعریف تنش برشی، مقدار سرعت را از قسمت قبلی جایگذاری می کنیم. در نهایت، با در اختیار داشتن پروفیل سرعت، به آسانی با کمک تعریف گشتاور، مقدار گشتاور به دست می آید.

۶-برای اندازه گیری ویسکوزیته سیالی از یک ویسکومتر مخروط-و-صفحه، با شعاع ۱۰ Cm و زاویه ψ_0 برابر با ۰/۵ درجه استفاده شده است به طوری که گشتاور لازم برای چرخاندن مخروط آن با سرعت چرخشی ۱۰ rad/min ، برابر ۴۰۰۰۰ dyn.Cm است، ویسکوزیته این سیال چه میزان است؟

ج: از رابطه گشتاور به دست آمده در قسمت قبل استفاده کرده و مقادیر مساله را در رابطه جایگذاری می نماییم.

۷-سیالی در جهت مثبت x، از یک لوله تخت با طول L، پهنای W و ضخامت B (که L>>W>>B) در حال عبور است. این لوله دارای جداره های متخلخل در y=0 و y=B است لذا همواره یک جریان عرضی ثابت با سرعت $v_y=v_0$ در همه نقاط لوله وجود دارد (شکل روبرو).

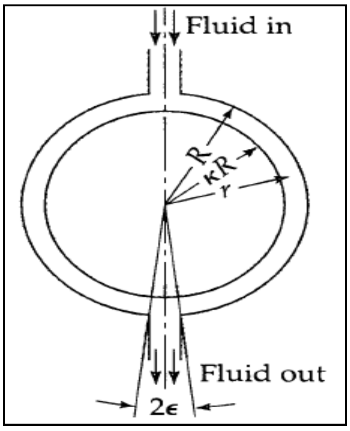


مساله ۷

این چنین جریان هایی برای فرآیندهای جداسازی بسیار پر اهمیت هستند. با کنترل درست جریان عرضی، می توان ذرات بزرگتر را در مجاورت جداره بالایی تغلیظ کرد.

- پروفیل سرعت v_x را برای این سیستم به دست آورید.
- دبی جرمی سیال در جهت x را به دست آورید.
- نشان دهید، وقتی جریان عرضی وجود نداشته باشد، دبی جرمی این سیستم همانند مساله ۲ خواهد بود.

ج: با کمک معادلات پیوستگی و معادله حرکت ناویر استوکس، و اعمال فرضیات لازم و نیز با استفاده از شرایط مرزی حاکم بر مساله، پروفیل سرعت در جهت x به دست می آید. با استفاده از تعریف دبی جرمی و نیز پروفیل سرعت، دبی جرمی سیال در جهت x به دست می آید.



۸-یک سیال به شدت نیوتنی از فضای میان دو کره هم مرکز جریان دارد (شکل زیر). انتظار می رود که دبی جرمی سیال در این سیستم را به صورت تابعی از اختلاف فشار اعمال شده به دست آورید. از اثرات انتهایی چشم پوشی کرده و فرض کنید که v_θ، فقط به r و θ بستگی داشته و دیگر مولفه های سرعت برابر صفر هستند.(راهنمایی: فرض کنید که جریان به دلیل ویسکوزیته بالای سیال خزشی است. هم چنین از معادلات پیوستگی و معادله ناویر-استوکس در جهت θ استفاده نمایید.)

ج: ابتدا معادله پیوستگی و معادله ناویر استوکس در جهت θ با اعمال فرضیات حاکم بر مساله نوشته و به این ترتیب پروفیل سرعت سیال به دست می آید. آن گاه از تعریف دبی جرمی استفاده کرده و پروفیل به دست آمده را در رابطه قرار داده و به این ترتیب دبی جرمی سیال به دست می آید.

۱۳. فهرست منابع درس

- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid mechanics for chemical engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, *Transport phenomena*, second edition**,** J. Wiley.
- Frank M. White, 2003, *Fluid Mechanics*, second edition, McGraw-Hill.
- L. G. Currie, 1974, *Fundamental Mechanics of Fluids*, first edition, McGraw-Hill.
- W. P. Graebel, 2007, *Advanced Fluid Mechanics*, first edition, Elsevier Inc.

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل هفتم

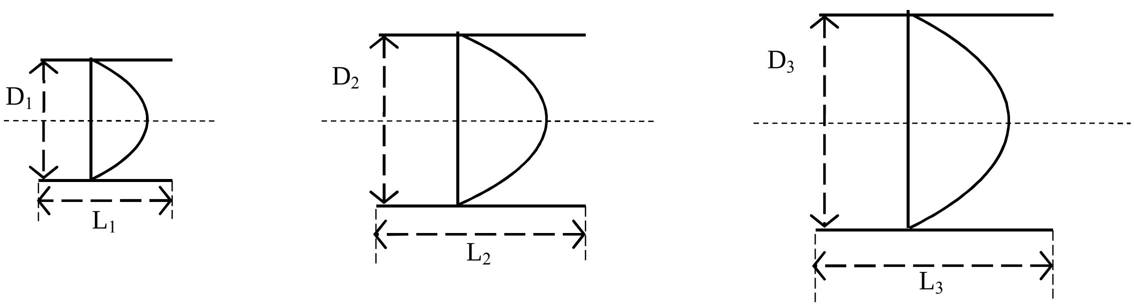
آنالیز ابعادی و شبیه سازی

۱. مقدمه

آنالیز ابعادی در مکانیک سیالات دارای اهمیت خاص می‌باشد، زیرا روابط بین متغیرها را بیان می‌نماید. روابط تجربی بین متغیرها معمولاً از طریق داده‌های آزمایشگاهی به دست آمده است. در حرکت سیالات معمولاً دو گروه از متغیرها وجود دارد. یک گروه از متغیرها مربوط به خواص سیال می‌باشد، مانند دانسیته، ویسکوزیته، کشش سطحی و غیره. گروه دیگر مربوط به ابعاد و شکل هندسی مجاری سیال و نیروهای دینامیکی می‌باشد. بعضی از متغیرها مستقل از یکدیگرند و برخی به هم وابسته‌اند. در آنالیز ابعادی رابطه‌هایی مانند گروه‌های بدون بعد بین متغیرهای وابسته به وجود می‌آید که دارای مفهوم فیزیکی می‌باشند. از کاربردهای آنالیز ابعادی در سیالات می‌توان از دو کلاس ذیل نام برد:[۱]

الف- جواب عمومی برای معادلات حرکت، به خصوص معادله ناویر استوکس

حرکت سیال در مجاری مختلف با شکل هندسی متشابه اما با ابعاد مختلف معمولاً دارای پروفیل سرعت یکسان می‌باشد. برای مثال حرکت سیال در یک لوله دارای پروفیل سهموی می‌باشد. حال در چند لوله با ابعاد مختلف، مثلاً با قطرهای متفاوت، پروفیل سرعت همواره به صورت سهمی خواهد بود.



شکل ۱-۷: پروفیل سرعت یکسان برای حرکت سیال در داخل لوله با ابعاد مختلف

برای مثال، شکل (۱-۷) را ملاحظه نمایید. سه لوله با ابعاد و قطرهای متفاوت نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در هر سه لوله پروفیل سرعت به صورت سهمی می‌باشد. بنابراین یک پروفیل سرعت عمومی به صورت سهمی

1

در حرکت سیال در لوله وجود دارد. پس هدف از آنالیز ابعادی به دست آوردن یک حل و جواب عمومی برای حرکت سیال در مجاری با شکل‌های هندسی متشابه می‌باشد.

ب- رابطه همبستگی[2] بین داده‌های آزمایشگاهی

بسیاری از پدیده‌ها در مکانیک سیالات به طور پیچیده به مجاری با شکل های هندسه مختلف و پارامترهای جریان بستگی دارد. برای مثال نیروی درگ (اصطکاک) بر یک کره توپر را که در مسیر جریان یکنواخت قرار دارد، در نظر بگیرید. واضح است نیروی دینامیکی ناشی از جریان سیال بر روی کره تابعی از متغیرهایی چون خواص سیال (نظیر دانسیته (ρ) و ویسکوزیته (μ)) ، ابعاد کره مانند قطر کره (D) و سرعت جریان (v) می باشد. پس می‌توان نیروی درگ را به صورت ذیل نوشت:

$$F = f(D, v, \rho, \mu) \qquad (۷-۱)$$

البته در این جا از پارامترهایی مانند زبری سطح کره صرف نظر شده است. اگر از ما خواسته شود که یک سامانه‌ی آزمایشگاهی طراحی نماییم که نیروی درگ را با تغییر چهار متغیر مذکور بررسی کند، معمولاً لازم است همیشه یک متغیر تغییر نماید و بقیه متغیرها ثابت بمانند. به عنوان مثال اگر سرعت را در بازه‌ی وسیعی ده مرتبه تغییر دهیم و به همین ترتیب در هر زمان یک متغیر را ثابت و بقیه متغیرها را ده مرتبه تغییر دهیم، حدود $۱۰^۴$ آزمایش را باید انجام دهیم که اثرات چهار متغیر را برای اندازه گیری نیروی F بررسی کنیم. همان گونه که ملاحظه می‌شود انجام این تعداد آزمایش از نظر اقتصادی گران تمام می‌شود. ولی خوشبختانه لازم نیست این تعداد آزمایش انجام شود! با استفاده از آنالیز ابعادی می‌توان ضریب درگ را بر حسب یک گروه بدون بعد مانند عدد رینولدز از طریق آزمایش اندازه گیری نمود و به صورت یک منحنی به شکل ذیل آن را ارائه کرد:

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = f\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right) \qquad (۷-۲)$$

[2] Correlation relation

پس به جای 10^4 آزمایش، کافی است طبیعت تابع مذکور را با دقت بالا با ده تست بررسی کنیم. به عنوان مثال کافی است ده کره با قطرهای مختلف تهیه شود، لیکن سایر متغیرها ثابت باقی بمانند. به عبارتی با تغییر اندازه قطر کره فقط پارامتر $\rho v D/\mu$ تغییر می‌کند.

در بعضی از مواقع ممکن است شکل هندسی مجاری سیال ساده نبوده بلکه دارای پیچیدگی خاصی باشد؛ مانند حرکت سیال در رودخانه‌ها، حرکت سیال از جریان سنج سوزنی[3]، حرکت سیال اطراف یک هواپیما وغیره. در بسیاری از این مواقع یک راه حل تحلیلی برای توصیف حرکت سیال وجود ندارد. اما خوشبختانه با یک‌سری از تست‌های دقیق آزمایشگاهی می‌توان داده‌های مناسبی تولید کرد که بتوان با استفاده از گروه‌های بدون بعد، حرکت سیال را در مجاری با هندسه‌های پیچیده توصیف نمود.

۲. آنالیز ابعادی معادلات ناویر – استوکس

از دیگر کاربردهای آنالیز ابعادی، مقیاس سازی[4] فرآیندها است. گاهی در آزمایشگاهی فرآیندی طراحی می‌شود و اطلاعات و یا داده‌های آزمایشگاهی تهیه می‌شود. حال چگونه می‌توان از این داده‌ها برای طراحی همان فرآیند در مقیاس صنعتی بهره برد؟ به هر حال ابعاد دستگاه‌ها در فرآیند صنعتی ممکن است چندین برابرِ همان فرآیند در ابعاد آزمایشگاهی باشد. با استفاده از آنالیز ابعادی و با روش شبیه سازی[5] می‌توان فرآیندها را در مقیاس صنعتی طراحی کرد. در این فصل به این نکته نیز اشاره خواهد شد و چگونگی شبیه سازی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

برای ساده سازی در این جا ابتدا از معادله ناویر– استوکس شروع می‌کنیم. سیالی را با دانسیته و ویسکوزیته ثابت در نظر بگیرید. پس معادلات پیوستگی و ناویر– استوکس به شکل ذیل برای این سیال نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (۷-۳)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right] \qquad (۷-۴)$$

---

[3] Orifice Meter
[4] Scaling
[5] Similarity

اولین مرحله برای بدون بعد کردن معادلات، نرمال کردن و یا بدون بعد کردن تمام متغیرهای وابسته و غیر وابسته می‌باشد. متغیرهای فیزیکی مانند طول، عرض، قطر و غیره را معمولاً با مشخصه‌های طولی سیال بدون بعد می‌نمایند. به عنوان مثال مشخصه "L" را به صورت ضریب مقیاس یا مشخصه طولی[۶] در نظر می‌گیرند. برای متغیر سرعت نیز یک مشخصه سرعت[۷] مانند "U" تعیین می‌کنند. این مشخصه ممکن است سرعت جریان آزاد یا سرعت متوسط باشد. برای فشار دو گونه مشخصه فشار[۸] می‌توان انتخاب کرد که بستگی به رژیم جریان دارد. در جریانات مغشوش که سرعت بالا است و ممکن است ویسکوزیته سیال پایین باشد و معمولاً نیروهای اینرسی[۹] یا لختی حاکم است، مشخصه فشار به صورت ρU^2 در نظر گرفته می‌شود. از طرفی دیگر در سیالات با ویسکوزیته بالا که حرکت سیال خزشی است، مشخصه فشار ممکن است به صورت $\mu U/L$ در نظر گرفته شود. در حالت اول انرژی سینتیک حاکم بوده و در حالت دوم نیروهای ویسکوز یا برشی غالب خواهند بود.

بنابراین با تعیین مشخصه‌های مذکور تمام متغیرها و عبارت‌های معادله ناویر- استوکس به صورت ذیل نرمال (بدون بعد) می‌شوند:

$$v_i^* = \frac{v_i}{U} \qquad ; \qquad x_i^* = \frac{x_i}{L} \qquad ; \qquad h^* = \frac{h}{L} \tag{۷-۵}$$

که در این جا $x_i = Lx_i^*$ و $v_i = Uv_i^*$ خواهد بود. هم چنین بالا نویس "*" به معنی نرمال شده متغیر مذکور می‌باشد، یعنی v_i^* مؤلفه سرعت بدون بعد و x_i^* متغیر بدون بعد برای x و y و z هستند. به همین ترتیب متغیر زمان به صورت ذیل نرمال می‌شود:

$$t^* = \frac{t}{(L/U)} = \frac{tU}{L} \tag{۷-۶}$$

که در این جا $t = {}^{L}\!/_{U}\, t^*$ می‌باشد. فرض می‌کنیم که سیال مغشوش بوده و فشار بدون بعد به صورت ذیل نوشته شود:

$$P^* = \frac{P}{\rho U^2} \tag{۷-۷}$$

[6] Characteristic Length
[7] Characteristic Velocity
[8] Characteristic Pressure
[9] Inertia Force

که $P=\rho U^2 P^*$ خواهد بود. هم چنین $D/Dt^*=(L/U)D/Dt$ می‌باشد. بـا اعمـال متغیرهـای بـدون بعـد در معادلـه نـاویر–استوکس می‌توانیم بنویسیم:

$$\left(\frac{\rho U^2}{L}\right)\frac{Dv_i^*}{Dt^*}=-\frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*}-\rho g\frac{\partial h^*}{\partial x_i^*}+\frac{U\mu}{L^2}\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*}\right] \tag{۷–۸}$$

با ساده سازی و تقسیم کردن هر دو طرف معادله (۸–۷) بر $\rho U^2/L$ خواهیم داشت:

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*}=-\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*}-\frac{gL}{U^2}\frac{\partial h^*}{\partial x_i^*}+\frac{\mu}{\rho UL}\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*}\right] \tag{۷–۹}$$

همان گونه که در معادله (۹–۷) دیده می‌شود، تمام عبارت‌ها بدون بعد می‌باشـند. اگـر بـه دو عبـارت gL/U^2 و $\mu/\rho UL$ دقت کنید، با اعمال ابعاد متغیرها در آن‌ها به بدون بعد بودن آن‌ها پی خواهید برد.

این دو عبارت یا دو گروه بدون بعد، ترکیبی از متغیرهای سیال هسـتند کـه دارای مفهـوم فیزیکـی خـاص مـی‌باشـند. در حرکت سیال، معمولاً نیروهای اینرسی، گرانشی و ویسکوز حاکم هستند، به طوری که در جریان سیال، کسر هر یـک از این نیروها نسبت به یکدیگر مهم می‌باشد. نسبت هر یک از این نیروها با عناوین خاص معرفی شده‌اند. به عنوان مثال عدد رینولدز[10] به صورت ذیل تعریف شده است:

$$Re=\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}}=\frac{\text{نرخ تغییرات مومنتوم}}{\text{نیروی ویسکوز}} \tag{۷–۱۰}$$

اگر مشخصه نیروهای اینرسی و ویسکوز را در تعریف بالا جاگذاری نماییم، خواهیم داشت:

$$Re=\frac{\rho U^2}{\mu\frac{U}{L}}=\frac{\rho UL}{\mu} \tag{۷–۱۱}$$

معادله (۱۱–۷) تعریف عدد رینولدز خواهد بود. به همین ترتیب برای عدد فرود[11] خواهیم داشت:

$$Fr=\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی گرانشی}}=\frac{\rho U^2}{\rho gL} \tag{۷–۱۲}$$

پس عدد فرود به صورت ذیل تعریف می‌شود:

[10] Reynolds Number
[11] Frude Number

$$Fr = \frac{U^2}{gL} \qquad (۷-۱۳)$$

حال با استفاده از تعاریف (۷-۱۱) و (۷-۱۳) برای اعداد رینولدز و فرود، می‌توان معادله ناویر- استوکس بدون بعد را به صورت ذیل نوشت:

(شکل بدون بعد اندیسی معادله ناویر- استوکس)

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} - \frac{1}{Fr}\frac{\partial h^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*}\right] \qquad (۷-۱۴)$$

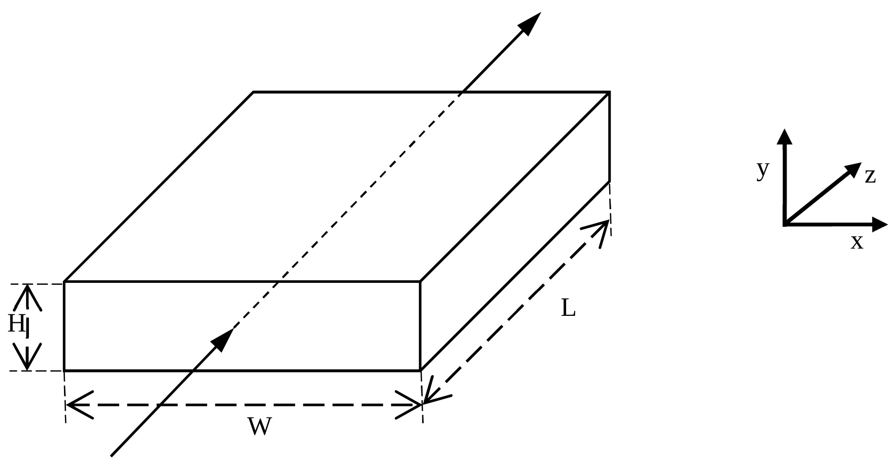
(شکل برداری بدون بعد معادله ناویر-استوکس)

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\nabla P^* - \frac{1}{Fr}\nabla h^* + \frac{1}{Re}\nabla^2 v^*$$

بنابراین از معادله (۷-۱۴) استنباط می‌شود که در حرکت سیالات که نیروهای ویسکوز و گرانشی حاکم هستند، همیشه دو گروه بدون بعد رینولدز و فرود به عنوان مشخصه‌های حرکت سیال مورد توجه خواهد بود.

۳. معادلات بدون بعد حرکت سیالات ویسکوز در مجاری بسته

حرکت سیال ویسکوز را در یک کانال[12] که عرض آن کم است، در نظر بگیرید. در این جا داکت یا کانال مستطیلی شکل بوده و جریان به صورت آرام و پایدار می‌باشد.



شکل ۷-۲: حرکت سیال در یک داکت

در این مثال متغیرهای طولی به صورت L، W و H می‌باشند و متغیرهای سیال ρ و μ هستند. چون سیال در مجاری بسته حرکت می‌کند، نیروی گرانشی به صورت ρgh به فشار اضافه شده است به طوری که برای این جریان، معادله ناویر- استوکس به صورت بدون بعد ذیل نوشته می‌شود:

[12] Duct

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\frac{\partial \overline{P}^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*}\right]$$ (شکل بدون بعد اندیسی)

(۷-۱۵)

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\nabla\overline{P}^* + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v}$$ (شکل بدون بعد برداری)

که $\overline{P} = P + \rho gh$، فشار هیدرواستاتیکی بوده و به صورت $P^* = \overline{P}/_{\rho U^2}$ بدون بعد شده است. در این جا عدد رینولدز به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$Re = \frac{\rho\langle v\rangle D_H}{\mu} \qquad (۷-۱۶)$$

که $\langle v\rangle$، سرعت متوسط در داکت بوده و D_H، قطر هیدرولیکی می‌باشد و به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$D_H = 2R_H = 2\frac{\text{مساحت سطح مقطع عمود بر جریان}}{\text{محیط تر شده توسط سیال}} \qquad (۷-۱۷)$$

چون ابعاد داکت در این جا مهم است، بنابراین مؤلفه‌های سرعت بدون بعد و فشار بدون بعد به صورت ذیل به گروه‌های بدون بعد وابسته می‌باشد:

$$v_i^* = f\left(x^*, y^*, z^*, \frac{W}{H}, Re\right)$$

(۷-۱۸)

$$\overline{P}^* = f\left(x^*, y^*, z^*, \frac{W}{H}, Re\right)$$

۴. معادله بدون بعد ناویر- استوکس برای سیالات تراکمی (اثرات تراکم پذیری در حرکت سیالات)

در حرکت سیالاتی که فشار آن‌ها بر اثر تراکم پذیری[۱۳] تغییر می‌نماید، فشار اهمیت ویژه‌ای دارد، به طوری که به فشار مشخصه نیاز خواهیم داشت تا آن را بدون بعد نماییم. در حرکت چنین سیالاتی از معادلات مومنتوم و معادله حالت ترمودینامیکی به صورت کوپلی[۱۴] یا جفتی استفاده می‌شود. در این حالت برای بدون بعد کردن معادله ناویر- استوکس برای فشار از رابطه بدون بعد ذیل استفاده می‌شود:

$$P^+ = \frac{P}{P_0} \qquad (۷-۱۹)$$

[13] Compressibility
[14] Coupling

که P_0، فشار در نقطه خاصی در میدان جریان است. معمولاً P_0 را به سرعت صوت مربوط می‌نمایند. مثلاً برای گاز ایده-آل سرعت صوت به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$C_0 = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} \qquad ; \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \tag{۷-۲۰}$$

که ρ_0، با استفاده از معادله حالت ایده‌آل از P_0 به دست می‌آید. C_p و C_v به ترتیب ظرفیت های گرمایی گاز ایده‌آل در فشار ثابت و در حجم ثابت می‌باشند. بنابراین فشار بدون بعد به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$P_0 = \frac{\rho_0 C_0^2}{\gamma} \tag{۷-۲۱}$$

$$\frac{P_0}{\rho_0 U^2} = \frac{C_0^2 \rho_0}{\rho_0 U^2 \gamma} = \frac{C_0^2}{\gamma U^2} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{U_0^2} \tag{۷-۲۲}$$

که M_0، عدد ماخ[۱۵] می‌باشد و به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$M_0 = \frac{U}{C_0} \tag{۷-۲۳}$$

و U مشخصه سرعت سیال است. پس معادله بدون بعد ناویر-استوکس در نهایت به صورت ذیل به دست می‌آید:

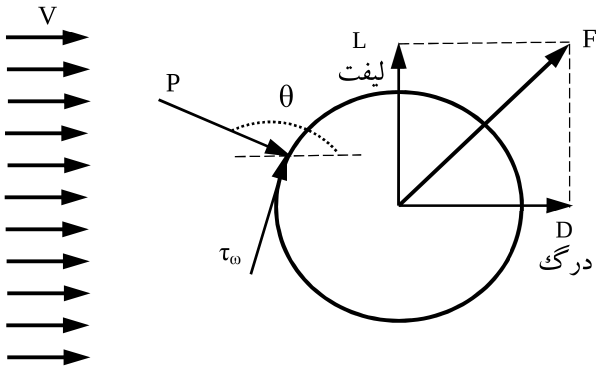
$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = \frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\partial(P/P_0)}{\partial U_i^*} - \frac{1}{Fr}\frac{\partial h^*}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*}\right] \tag{۷-۲۴}$$

۵. درگ[۱۶] و لیفت[۱۷]

حرکت سیال بر اجسام غوطه‌ور[۱۸] یا حرکت اجسام غوطه‌ور در سیال همیشه با مقاومت فشاری و اصطکاک همراه است. در حرکت سیال بر روی یک شئ صلب، معمولاً نیرویی دینامیکی از سوی سیال بر مرزهای شئ وارد می شود. مطابق شکل (۳-۷)، حرکت جریانی یکنواخت را بر روی یک شئ صلب ملاحظه کنید.

---

[15] Mach Number
[16] Drag
[17] Lift
[18] Immersed



شکل ۳-۷: نیروی دینامیکی، نیروی درگ و نیروی لیفت

همان طورکه نشان داده شده است، نیروی دینامیکی $\vec{F}$ دارای دو مؤلفه می‌باشد که مؤلفه نیروی موازی جریان آزاد را نیروی درگ (D) و مؤلفه نیروی عمود بر جریان آزاد را لیفت (L) گویند. جریان آزاد با V نشان داده شده است. حال سؤالی قابل طرح است که ماهیت نیروی دینامیکی چیست؟ به عبارتی سیال در حال حرکت به واسطه داشتن ویسکوزیته و فشار، دو نوع نیروی برشی و فشاری بر مرز جسم جامد وارد می‌کند. مطابق شکل بالا نیروی برشی ناشی از تنش‌های ویسکوز (τ_w) در دیواره بوده و نیروی فشاری ناشی از فشار سیال بر سطح شئ می‌باشد. پس می‌توان توضیح داد که:

نیروهای برشی ← تنش برشی ← ویسکوزیته و گرادیان سرعت در مرز شئ

نیروهای فشار ← فشار سیال ← حرکت دینامیکی سیال

پس درگ ناشی از دو اثر تنش برشی و نیروی فشار به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$D = D_f + D_p \qquad (۷-۲۵)$$

که D_f، درگ اصطکاکی و D_p، درگ فشار است. چون درگ باید در کل سطح شئ محاسبه شود، پس خواهیم داشت:

$$D_f = \int_S \tau_w \sin\Phi \, dS$$
$$D_p = -\int_S P\cos\Phi \, dS \qquad (۷-۲۶)$$

که S مساحت کل سطح شئ است که با استفاده از هندسه عمومی به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$dS = R^2 \sin\Phi \, d\theta d\Phi \qquad (۷-۲۷)$$

زاویه بین خط عمودی بر المان سطح و جهت جریان :Φ

زاویه بین شعاع در هر نقطه از مرز شئ و محور z :θ

درگ اصطکاکی[۱۹] به عنوان درگ اصطکاک پوسته‌ای[۲۰] یا مقاومت سطحی[۲۱] نیز نامیده می‌شود. درگ فشار به عنوان درگ شکلی[۲۲] یا درگ فرمی[۲۳] نیز معرفی شده است. ضریب درگ[۲۴] به صورت روابط ذیل تعریف می‌شود:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \qquad (۷-۲۸)$$

که A مساحت سطح تصویر شئ بر صفحه عمود بر جریان می‌باشد. به عنوان مثال برای یک کره، A، مساحت دایره‌ای است که از تصویر کره بر روی سطح عمود بر جریان به دست می‌آید. متعاقباً ضرایب درگ اصطکاکی و درگ فشار به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$C_f = \frac{D_f}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_f}$$
$$C_D = \frac{D_p}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_p} \qquad (۷-۲۹)$$

که A_f و A_p، به شکل شئ بستگی دارند. معمولاً A_f مساحت واقعی سطح شئ و یا به عبارتی مساحت سطح تر شده[۲۵] می‌باشد. لیکن A_p، مساحت تصویر شئ در صفحه عمود بر حرکت سیال می‌باشد. پس خواهیم داشت:

$$C_D = C_f + C_p \qquad (۷-۳۰)$$

ضریب لیفت را معمولاً تفکیک نمی‌کنند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

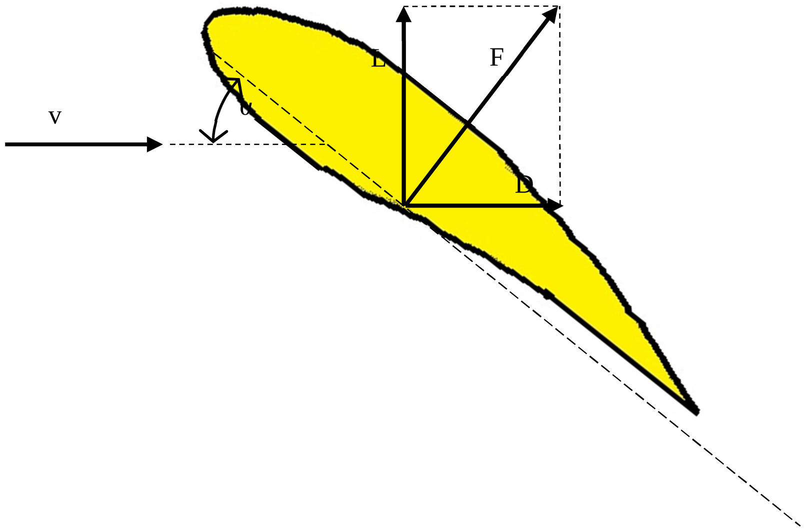
$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \qquad (۷-۳۱)$$

19 Frictional
20 Skin-Frictional
21 Surface Resistence
22 Shape
23 Form Drag
24 Drag Coefficient
25 Wetted

که A مساحت مشخصه[26] است و در این‌جا بزرگ‌ترین مساحت تصویر شئ بر صفحه عمود بر جهت جریان می باشد.

به عنوان مثال حرکت یک جریان آزاد مانند باد با سرعت U را بر روی یک ایرفویل[27] مطابق شکل (۴-۷) ملاحظه نمایید.

در این شکل نیروی درگ (D)، موازی جریان آزاد (U) و نیروی لیفت (L)، عمود بر جریان آزاد خواهد بود. در این حالت نشان داده شده است که نیروی های درگ و لیفت با تغییر زاویه آلفا زیاد یا کم می شوند.



شکل ۴-۶: حرکت جریان آزاد بر سطح مقطع یک ایرفویل

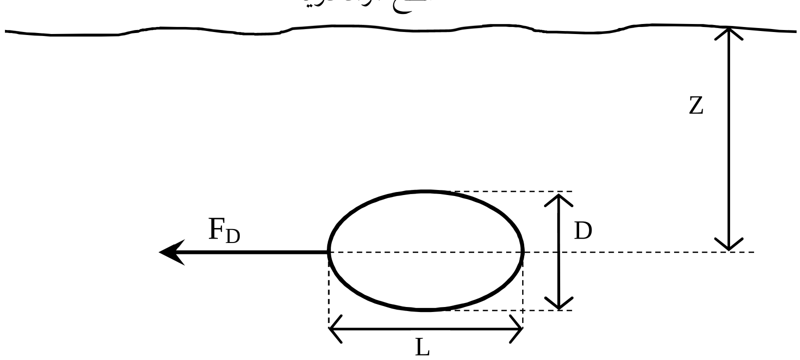
۶. ضریب درگ در مجاری با سطوح آزاد[28]

در حرکت سیالات در مجاری که دارای سطوح آزاد می‌باشند، مانند جریان آب در کانال‌های باز، حرکت قایق و کشتی در دریا و حرکت زیردریایی که به سطح دریا نزدیک باشد، معمولاً اثرات ویسکوزیته و نیروهای گرانشی بر سرعت و فشار حاکم بر جریان تأثیر دارد. همان طور که در معادله بدون بعد ناویر-استوکس نشان داده شد، گروه‌های بدون بعد رینولدز و فرود برای تحلیل حرکت سیال مورد استفاده قرار می گیرد. برای مثال یک زیردریایی را که دارای ابعاد طول و عرض است، مطابق شکل (۵-۷) در نظر بگیرید. نیروی دینامیکی درگ (F_D) بر حرکت زیردریایی حاکم می‌باشد.

[26] Characteristic Area
[27] Airfoil
[28] Free Surface

در این جا از گروه‌های بدون بعد به صورت‌های Z/L، L/D، Fr و Re برای توصیف حرکت سیال استفاده می‌شود. پس ضریب درگ در این حالت به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$C_D = f\left(Re, Fr, \frac{L}{D}, \frac{Z}{L}\right) \tag{۷-۳۲}$$



شکل ۵-۷: حرکت یک زیر دریایی در اقیانوس

همان گونه که ملاحظه می‌شود، ارتفاع و یا فاصله زیردریایی از سطح آزاد به صورت Z نشان داده شده است. اگر زیردریایی را یک کره فرض کنیم، ضریب درگ به صورت ذیل خواهد بود:

$$C_D = f\left(Re, Fr, \frac{Z}{L}\right) \tag{۷-۳۳}$$

در شرایطی که زیردریایی از سطح دریا بسیار فاصله بگیرد، به طوری که $Z/L \gg 1$ باشد، در این حالت شرایط حرکت زیردریایی مانند حرکت در یک مجرای بسته خواهد بود، به طوری که نیروهای گرانشی تأثیر چندانی بر حرکت سیال اطراف زیردریایی نخواهد داشت. بنابراین خواهیم داشت:

$$C_D = f\left(Re, \frac{L}{D}\right) \tag{۷-۳۴}$$

۷. آنالیز ابعادی و مقیاس سازی[۲۹]

استفاده از آنالیز ابعادی برای به دست آوردن گروه‌های بدون بعد در مقیاس سازی فرآیندها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این‌جا از داده‌های آزمایشگاهی برای طراحی فرآیندهای صنعتی استفاده می‌شود. در قوانین مقیاس سازی[۳۰] از داده‌های یک مدل ساده برای طراحی فرآیند در مقیاس بزرگ[۳۱] استفاده می‌شود که بدین صورت قابل بیان است:

$$\text{مدل ساده} \xrightarrow{\text{قانون مقیاس سازی}} \left(\text{نمونه بزرگ}\right) \text{نمونه شبیه ساز}$$

این عمل که با استفاده از قانون مقیاس سازی یک نمونه بزرگ طراحی شود، شبیه سازی گفته می‌شود. اصول شبیه سازی معمولاً بر سه اصل ذیل استوار است:

۱. شبیه سازی هندسی[۳۲]

۲. شبیه سازی سینماتیکی[۳۳]

۳. شبیه سازی دینامیکی[۳۴]

در شبیه سازی هندسی، مدل ساده و نمونه شبیه سازی شده دارای شکل یکسان، لیکن ابعاد مختلف هستند. به عنوان مثال دو کره توپر با قطرهای D_m و D_p را در نظر بگیرید. این دو کره از نظر هندسی متشابه خواهند بود و "نسبت مقیاس"[۳۵] آن ها به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\text{نسبت مساحت} = \frac{A_m}{A_p} = \frac{D_m^2}{D_p^2} = L_r^2 \qquad (۷-۳۵)$$

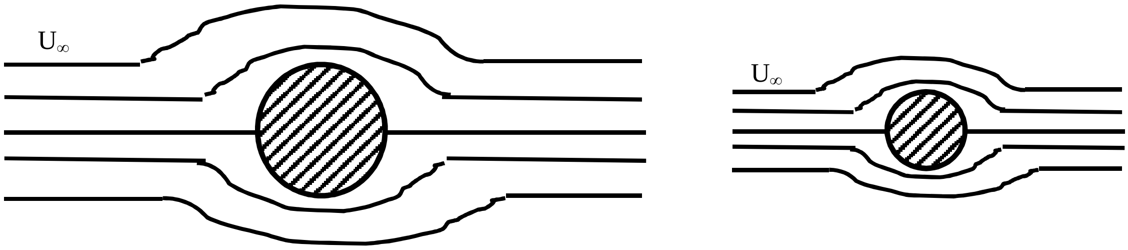
$$\text{نسبت حجم} = \frac{V_m}{V_p} = \frac{D_m^3}{D_p^3} = L_r^3 \qquad (۷-۳۶)$$

که A_m و A_p، مساحت‌های سطح کره مدل و کره شبیه سازی شده می‌باشند. L_r، نیز نسبت مقیاس نامیده می‌شود.

---

[29] Scaling
[30] Scaling Law
[31] Big Prototype
[32] Geometrically Similarity
[33] Kinematically Similarity
[34] Dynamic Similarity
[35] Scale Ratio

در شبیه سازی سینماتیکی، دو جریان سیال زمانی از نظر سینماتیکی شبیه هستند که خطوط جریان در دو سیال از نظر هندسی شبیه یا متشابه باشند. به عنوان مثال شکل (۶-۷) حرکت جریان آزاد را در اطراف دو کره با قطرهای D_m و D_p نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که خطوط جریان اطراف دو کره از نظر هندسی متشابه هستند.



ب) نمونه شبیه سازی شده با قطر D_p الف) نمونه مدل با قطر D_m

شکل ۶-۷: حرکت جریان آزاد در اطراف کره با قطر D_m و D_p

با توجه به این که خطوط جریان به بردارهای سرعت در هر نقطه مماس هستند، بنابراین زمانی دو جریان سینماتیکی متشابه هستند که نسبت‌های سرعت در هر نقطه متناظر در دو جریان یکسان باشند.

$$\text{نسبت سرعت} = v_r = \frac{v_m}{v_p} = \frac{l_m/t_m}{l_p/t_p} = \frac{l_m/l_p}{t_m/t_p} = \frac{l_r}{t_r}$$

$$\text{نسبت شتاب} = a_r = \frac{a_m}{a_p} = \frac{l_m/t_m^2}{l_p/t_p^2} = \frac{l_r}{{t_r}^2} \qquad (۷-۳۷)$$

t_r، نسبت زمانی در دو جریان مدل ساده و نمونه شبیه ساز است و کمیتی مهم می‌باشد، به خصوص در جریان‌های ناپایدار مانند حرکت امواج و سایر پدیده‌های ناپایدار.

بالاخره در شبیه‌سازی دینامیکی، نسبت نیروها در هر نقطه متناظر مدل ساده و نمونه شبیه ساز، یکسان خواهد بود. عموماً می‌توان نتیجه گیری کرد که اگر دو سیال مدل و نمونه شبیه ساز از نظر دینامیکی متشابه باشند، الزاماً از نظر سینماتیکی متشابه هستند و در نتیجه تشابه هندسی نیز دارند.

تشابه هندسی ← شبیه سازی سینماتیکی ← شبیه سازی دینامیکی

برای تحلیل شبیه سازی دینامیکی لازم است که نیروهای حاکم بر حرکت سیال در مدل و نمونه شبیه ساز مورد بررسی قرار گیرد. نیروی کل حاکم (نیروی دینامیکی شتاب) بر حرکت سیال، برآیند نیروهای ذیل می‌باشد:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_P} + \overrightarrow{F_v} + \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_c} + \overrightarrow{F_t} \quad (۷-۳۸)$$

در این جا $\vec{F} = -\vec{F}_i$ می‌باشد که F_i، نیروی اینرسی است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{F}_i + \overrightarrow{F_P} + \overrightarrow{F_v} + \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_c} + \overrightarrow{F_t} = 0 \quad (۷-۳۹)$$

F_v: نیروی ویسکوز ; F_P: نیروی فشار[۳۶] ; F_i: نیروی اینرسی

F_t: نیروی کشش سطحی ; F_c: نیروی فشاری[۳۷] ; F_g: نیروی گرانشی

حال زمانی تشابه دینامیکی بین سیال مدل و سیال نمونه شبیه ساز برقرار است که نسبت هر کدام از نیروها در هر نقطه متناظر در مجرای سیال یکسان باشد:

$$\frac{(F_P)_m}{(F_P)_p} = \frac{(F_v)_m}{(F_v)_p} = \frac{\left(F_g\right)_m}{\left(F_g\right)_p} = \frac{(F_i)_m}{(F_i)_p} \quad (۷-۴۰)$$

که زیر نویس m نمایان گر مدل و زیر نویس p نشان دهنده نمونه شبیه ساز می‌باشد. در این‌جا نیروهای گرانشی، فشاری و کشش سطحی برای نمونه مدل و نمونه شبیه ساز، یکسان می‌باشند، پس با جابجایی صورت و مخرج کسرهای معادله (۷-۴۰) می‌توان روابطی به شکل ذیل نوشت:

$$\frac{(F_i)_m / (F_v)_m}{(F_i)_p / (F_v)_p} = 1 \quad (۷-۴۱)$$

نسبت نیروی اینرسی به نیروی ویسکوز قبلاً به عنوان عدد رینولدز معرفی شد، بنابراین معادله (۷-۴۱) را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$(Re)_m = (Re)_p \quad (۷-۴۲)$$

[36] Pressure Force
[37] Compressive Force

به عبارتی دو سیال زمانی از نظر دینامیکی مشابه هستند که عدد رینولدز در مدل و نمونه شبیه ساز، یکسان باشد. به همین ترتیب برای حرکت سیالات در مجاری که دارای سطح آزاد می‌باشند، لازم است رابطه ذیل بین اعداد فرود برقرار باشد:

$$(\mathrm{Fr})_m = (\mathrm{Fr})_p \qquad (۷-۴۳)$$

قبلاً توضیح داده شد که عدد فرود نسبت نیروی اینرسی به نیروی گرانشی است. حال به تعریف گروه‌های بدون بعد دیگری می‌پردازیم. در این جا عدد اویلر[۳۸] به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Eu} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی فشار}} = \frac{\rho L^2 v^2}{P L^2} \qquad (۷-۴۴)$$

بنابراین عدد اویلر به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\mathrm{Eu} = \frac{\rho v^2}{P} \qquad (۷-۴۵)$$

گاهی در بعضی از مراجع، ضریب فشار[۳۹] را به صورت ذیل تعریف می‌کنند:

$$\mathrm{PC} = \frac{\Delta P}{\rho v^2} \qquad (۷-۴۶)$$

بنابراین ضریب فشار می‌تواند عکس عدد اویلر باشد. باید توجه داشت که در برخی از مراجع این دو ضریب، یکسان و مانند رابطه (۴۶-۷) تعریف می‌شوند. به هر حال زمانی که سطح آزاد داشته باشیم، علاوه بر نیروی گرانشی، نیروی فشار نیز در تشابه دو سیال مدل و نمونه مؤثر است و شبیه سازی دینامیکی زمانی برقرار است که داشته باشیم:

$$(\mathrm{Eu})_m = (\mathrm{Eu})_p \qquad (۷-۴۷)$$

در حرکت سیالات در بسترهایی که کشش سطحی نقش تعیین کننده دارد، مانند حرکت سیال در لوله‌های مویینه[۴۰] و محیط‌های متخلخل[۴۱]، نسبت نیروی کشش سطحی در مدل و نمونه مورد اهمیت است. پس لازم است یک گروه بدون بعد دیگر به صورت ذیل تعریف کنیم:

---

[38] Euler
[39] Pressure Coefficient
[40] Capillary
[41] Porous Media

$$We = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}} = \frac{\rho L^2 v^2}{\gamma L} \tag{۷-۴۸}$$

که We به عنوان عدد وبر[42] شناخته می‌شود. γ، کششش سطحی بر واحد طول می‌باشد. بنابراین عدد وبر به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$We = \frac{\rho L v^2}{\gamma} \tag{۷-۴۹}$$

در حالتی که تشابه دینامیکی برای مدل و نمونه برقرار باشد، لازم است که:

$$(We)_m = (We)_p \tag{۷-۵۰}$$

به عنوان نتیجه گیری لازم است توضیح داده شود که شبیه سازی در مکانیک سیالات بستگی به عوامل متعددی دارد. زمانی مدل ساده و نمونه شبیه سازی را می‌توان مقیاس سازی نمود که هر سه اصل شبیه سازی یعنی هندسی، سینماتیکی و دینامیکی برقرار باشند و برای شبیه سازی دینامیکی برابری گروه های بدون بعد برای مدل ساده و نمونه شبیه ساز لازم می باشد.

۸. ضریب اصطکاک در لوله‌ها[43]

جریان سیال نیوتنی و غیر تراکمی در حالت پایدار را در یک لوله طولانی ملاحظه نمایید. همان گونه که در شکل (۷-۷) مشاهده می‌شود، سیال در یک مجرای بسته حرکت کرده و به واسطه نیروهای ویسکوز در طول لوله افت فشار خواهیم داشت. با توجه به شکل هندسی سیال، گروه‌های بدون بعد در این جا به صورت ذیل به دست می‌آیند:

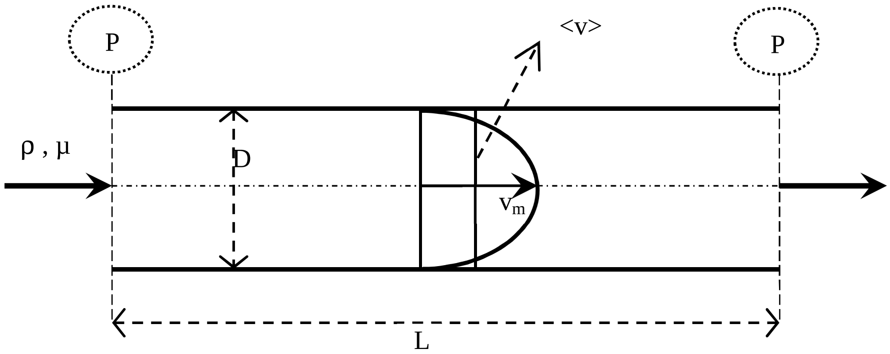
$$l_r = \frac{L}{D} \qquad \text{نسبت هندسی}$$

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} \qquad \text{عدد رینولدز} \tag{۷-۵۱}$$

$$PC = \frac{|\Delta P|}{\rho \langle v \rangle^2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho \langle v \rangle^2} \qquad \text{ضریب فشار}$$

---

[42] Weber
[43] Friction Factor



شکل ۷-۷: حرکت سیال در لوله

که $\langle v\rangle$، سرعت متوسط در لوله و ΔP، افت فشار می‌باشد. حال می‌توان با استفاده از قضیه پی[۴۴] نوشت:

$$PC = f\left(Re, \frac{L}{D}\right) \tag{۷-۵۲}$$

پس با جایگذاری رابطه (۷-۵۱) در (۷-۵۲) خواهیم داشت:

$$\frac{|\Delta P|}{\rho\langle v\rangle^2} = f\left(Re, \frac{L}{D}\right) \tag{۷-۵۳}$$

از طرفی چون افت فشار با طول لوله متناسب است، لیکن با عکس قطر نسبت مستقیم دارد. به عبارتی برای لوله‌های طولانی افت فشار بیش‌تر است و برای لوله‌های با قطر زیاد افت فشار کم‌تر می‌باشد. پس می‌توان رابطه (۷-۵۳) را به صورت ذیل نوشت:

$$\frac{|\Delta P|}{\rho\langle v\rangle^2} = \frac{L}{D} f(Re) \tag{۷-۵۴}$$

حال ضریب اصطکاک فانینگ[۴۵] را به صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$f = \frac{|\Delta P|}{2\rho\langle v\rangle^2}\frac{D}{L} \tag{۷-۵۵}$$

که عدد دو در معادله (۷-۵۵) به صورت قراردادی است. بنابراین در لوله‌های صاف ضریب اصطکاک بر حسب عدد رینولدز به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$f=f(Re) \tag{۷-۵۶}$$

از طرفی اگر لوله‌ای دارای زبری باشد، عدد بدون بعد دیگری برای اثر زبری نیز در معادله بالا لحاظ می‌شود:

---

[44] Pi Theorem
[45] Fanning friction factor

$$f = f\left(Re, {}^{\varepsilon}\!/_{D}\right) \qquad (۷–۵۷)$$

که ε، درجه زبری سطح لوله است. در کتاب‌ها و مراجع مربوط به مکانیک سیالات تغییرات ضریب اصطکاک را بر حسب عدد رینولدز و ${}^{\varepsilon}\!/_{D}$ به صورت دیاگرام مودی[۴۶] نشان می‌دهند. برای حالتی که سیال آرام[۴۷] باشد، سرعت متوسط و ضریب اصطکاک فانینگ به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\langle v\rangle = \frac{|\Delta P|R^2}{8\mu L} \qquad (۷–۵۸)$$

$$f = \frac{|\Delta P|}{2\rho\langle v\rangle^2}\frac{D}{L} = \frac{16}{\rho\langle v\rangle\frac{D}{\mu}} = \frac{16}{Re} \qquad (۷–۵۹)$$

که رابطه (۵۹–۷) برای حالتی که $Re < 2100$ باشد صادق است. برای حالت‌های دیگر ضریب اصطکاک برای لوله های صاف از روابط ذیل محاسبه می‌شود:

$$f = 0.079Re^{-1/4} \qquad 4000 \le Re \le 10^5 \qquad (۷–۶۰)$$

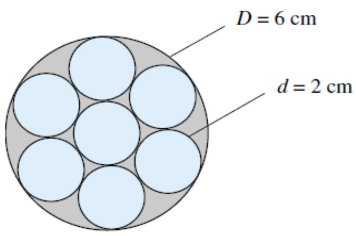
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0.4 \qquad Re \ge 10^5 \qquad (۷–۶۱)$$

[46] Moody
[47] Laminar

۹. خلاصه(جمع‌بندی)

حرکت سیال در مجاری با شکل هندسی متشابه اما ابعاد مختلف، معمولا با پروفیل سرعت یکسان می‌باشد. برای فشار دو گونه مشخصه فشار می‌توان انتخاب کرد که بستگی به رژیم جریان دارد. در حرکت سیال، معمولا نیروهای اینرسی، گرانشی و ویسکوز حاکم هستند، و کسر هر یک از این نیروها نسبت به یکدیگر مهم می‌باشد. در حرکت سیالاتی که نیروهای ویسکوز و گرانشی حاکم هستند، همیشه دو گروه بدون بعد رینولدز و فرود به عنوان مشخصه‌های حرکت سیال مورد توجه خواهد بود. در حرکت سیالاتی که فشار آن‌ها بر اثر تراکم پذیری تغییر می‌نماید، از معادلات مومنتوم و معادله حالت ترمودینامیکی به صورت همزمان استفاده می‌شود. در حرکت سیالات در مجاری که دارای سطوح آزاد می‌باشند، معمولاً ویسکوزیته و نیروهای گرانشی بر سرعت و فشار حاکم بر جریان تأثیر دارد. در شبیه سازی هندسی، نمونه مدل و نمونه شبیه سازی شده دارای شکل یکسان، لیکن ابعاد مختلف هستند. زمانی دو جریان سینماتیکی متشابه هستند که نسبت‌های سرعت در هر نقطه متناظر در دو جریان یکسان باشند. دو سیال زمانی از نظر دینامیکی متشابه هستند که گروه های بدون بعد در مدل و نمونه شبیه ساز، یکسان باشد. اگر دو سیال مدل و نمونه شبیه ساز از نظر دینامیکی مشابه باشند، الزاماً از نظر سینماتیکی نیزمتشابه بوده و در نتیجه تشابه هندسی نیز خواهند داشت.

۱۰. پرسش‌های پایان درس



۱- همان طور که در شکل می‌بینید، سطح مقطع یک لوله با قطر ۶ سانتی‌متر نشان داده شده است که در آن ۷ لوله نازک با قطر ۲ سانتی‌متر قرار دارد. اگر هوا با دبی m^3/hr ۱۵۰ و در دمای ۲۰ درجه سانتی‌گراد و فشار ۱ اتمسفر، در این لوله ها عبور داده شود، افت فشار هوا را به ازای واحد طول محاسبه نمایید.

ج: ابتدا معادله افت فشار در لوله را به دست می آوریم (می توان از معادلات به دست آمده در فصل های قبل نیز استفاده کرد) آن گاه دبی عبوری از هر لوله را به دست آورده آن گاه مقادیر مساله را در رابطه افت فشار قرار می دهیم تا مقدار افت فشار در هر لوله به دست آید.

۲-معادله دیفرانسیلی برای سیال غیرویسکوز گازی در صفحه xy به صورت ذیل داده شده است که در آن ϕ پتانسیل سرعت و a سرعت صوت در گاز است. با استفاده از طول مشخصه L و سرعت ورودی برای صوت a_0 به عنوان پارامتری برای تعریف متغیرهای بی بعد، معادله زیر را بی بعد نمایید.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}(u^2+v^2)+(u^2-a^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+(v^2-a^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+2uv\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}=0$$

ج: با همان روشی که در متن درس برای بی بعد سازی استفاده شده است، این معادله را بی بعد نمایید.

۳- ارتفاعی (h) که مایع می تواند در یک لوله موئینه صعود بالارود، به قطر لوله d، گرانش g، دانسیته سیال $\boldsymbol{\rho}$، تنش سطحی $\boldsymbol{\Upsilon}$ و زاویه تماس $\boldsymbol{\theta}$ بستگی دارد.

الف) یک عبارت بدون بعد برای رابطه میان پارامترها بیابید.

ب) اگر در یک آزمایشی h=۳ باشد، در حالت مشابه وقتی که قطر و تنش سطحی نصف شوند و دانسیته دو برابر گردد و زاویه تماس بدون تغییر باشد، مقدار h چه قدر خواهد شد؟

ج: از قضیه پی برای به دست آوردن رابطه بی بعد بین پارامترهای مساله استفاده نمایید. در قسمت دوم مقادیر را جایگذاری کرده تا نسبت مجهول به دست آید.

۴- یک اژدر که در عمق ۸ متری از سطح آزاد دریا در دمای ۲۰درجه سانتیگراد با سرعت ۲۱ m/s حرکت می کند، وقتی فشار اتمسفریک ۱۰۱ kPa باشد، ایجاد حباب می کند[48]. چنان چه اثر اعداد رینولدز و فرود قابل اغماض باشد، در چه سرعتی این اژدر حباب ایجاد خواهد کرد به طوری که در عمق ۲۰ متری حرکت کند؟ این اژدر با سرعت ۳۰ m/s در چه عمقی باید حرکت کند تا از ایجاد حباب جلوگیری شود؟

ج: معادله نیروهایی که بر اژدر اعمال می شود را نوشته آن گاه با کمک این معادله می توان مقدار مجهول را محاسبه کرد. (از معادلات مقیاس سازی نیز می توان استفاده کرد.)

۵- مدل یک اژدری در یک تونل باد تحت هوای فشرده با دانسیته kg/m^3 ۲۶ و ویسکوزیته سینماتیکی 5.8×10^{-7} m^2/s تحت آزمایش قرار گرفت. دراگ برابر با ۸ نیوتن است وقتی که سرعت هوا ۳۰ m/s می باشد. مقدار دراگ را برای نمونه شبیه سازی شده در آب دریا با دانسیته 1.025×10^3 kg/m^3 و ویسکوزیته سینماتیکی 1.6×10^{-6} m^2/s محاسبه کنید.

ج: از معادلات مقیاس سازی استفاده کرده و با جایگذاری مقادیر معلوم، مقدار مجهول به دست می آید.

48 Cavitate

۱۱. فهرست منابع درس

- Frank M. White, 2003, *Fluid Mechanics*, second edition, McGraw-Hill.
- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid mechanics for chemical engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, *Transport phenomena*, second edition, J. Wiley.

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل هشتم

جریان سیالات با عدد رینولدز پایین (جریان‌های خزشی)

۱. مقدمه

در فصل پنجم بیان شد که معادلات ناویر- استوکس برای گروه خاصی از سیالات می‌تواند ساده شود، به طوری که می توان با کمک تقریب، جواب‌های قابل قبولی برای این گونه سیالات فراهم نمود. سیالات ویسکوز با عدد رینولدز پایین ($Re << 1$) در گروه جریان سیالات خزشی قرار می گیرند. در این فصل با آنالیز عددی نشان خواهیم داد که برای سیالات خزشی عبارت‌های اینرسی قابل اغماض بوده، به طوری که بتوان معادلات ساده شده ناویر- استوکس را برای توصیف حرکت جریان‌های سیالات ویسکوز با اطمینان اعمال نمود.

۲. معادلات استوکس[1] برای سیالات با عدد پایین رینولدز

معادله بدون بعد ناویر- استوکس در فصل ششم نشان داده و توضیح داده شد که برای عبارت فشار از مشخصه فشار به صورت ρu^2 برای سیالات غیر لزجی استفاده می‌شود. در این جا نشان داده می‌شود که برای سیالات با ویسکوزیته بسیار بالا (وقتی که عدد رینولدز آن‌ها خیلی پایین باشد)، می‌توان عبارت اینرسی را با استفاده از معادله بدون بعد ناویر- استوکس حذف نمود. در این حالت فشار را به صورت ذیل بدون بعد می‌نماییم:

$$\overline{P}^* = \frac{P}{\mu\frac{U}{L}} = \frac{PL}{\mu U} \qquad (۸-۱)$$

با همان روشی که قبلاً در فصل ششم توضیح داده شد، خواهیم داشت:

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{U} \quad ; \quad \nabla^* = L\nabla \quad ; \quad \frac{D}{Dt^*} = \left(\frac{L}{U}\right)\frac{D}{Dt} \qquad (۸-۲)$$

بنابراین با جاگذاری عبارت‌های بدون بعد در معادله ناویر- استوکس، خواهیم داشت:

$$Re\frac{Dv^*}{Dt} = -\nabla^* P^* + \nabla^{*2} v^* + \left(\frac{Re}{Fr}\right)\frac{\vec{g}}{g} \qquad (۸-۳)$$

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \quad ; \quad Fr = \frac{U^2}{gL}$$

[1] Stokes equation

در شرایطی که عدد رینولدز پایین باشد ($Re << 1$)، عبارت اینرسی از طرف چپ معادله بالاحذف می‌شود. عبارت گرانشی نیز برای مجاری بسته در عبارت فشار ادغام شده، به طوری که معادله (۳–۸) به شکل ذیل نوشته می‌شود:

$$\nabla \overline{P}^* = \nabla^2 v^* \tag{۸–۴}$$

شکل اندیسی معادله (۴–۸) به صورت ذیل نوشته خواهد شد:

$$\frac{\partial \overline{P}^*}{\partial x_i^*} = \frac{\partial}{\partial x_j^*}\left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*}\right) \tag{۸–۵}$$

از طرفی شکل اصلی معادله (۵–۸) به صورتهای ذیل استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \qquad \text{(اندیسی)}$$

$$\nabla \overline{P} = \mu \nabla^2 \vec{v} \qquad \text{(برداری)} \tag{۸–۶}$$

به معادله (۶–۸) معادلات استوکس گفته می‌شود و $\overline{P} = P + \rho g h$، همان فشار هیدرو استاتیکی می‌باشد. در این حالت سیال فاقد شتاب خواهد بود. در جریان چنین سیالاتی که عبارت‌های اینرسی برای آن‌هاحذف می‌شوند، "سیالات خزشی" گفته می‌شوند.

حال اگر از دو طرف معادله (۶–۸) دیورژانس گرفته شود، خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \nabla \overline{P} = \mu \nabla \cdot \nabla^2 \vec{v} \tag{۸–۷}$$

$$\nabla^2 \overline{P} = \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{v}) \tag{۸–۸}$$

$$\nabla^2 \overline{P} = 0 \tag{۸–۹}$$

مشاهده می‌شود که در معادله (۸–۸)، عبارت داخل پرانتز به واسطه معادله پیوستگی صفر می باشد. پس میدان فشار $P(x,y,z)$ در سیالات خزشی از معادله لاپلاس پیروی می کند که تابعی هارمونیک[۲] است.

در فصل پنجم توضیح داده شد که برای جریان‌های دو بعدی، معادلات استوکس به صورت ذیل نوشته می‌شود:

[2] Harmonic

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \quad (۸-۱۰)$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) \quad (۸-۱۱)$$

با مشتق گیری ضربدری $\partial/_{\partial y}$ و $\partial/_{\partial x}$ از دو معادله (۱۰-۸) و (۱۱-۸)، و سپس کم کردن معادلات مذکور، عبارت فشار حذف شده و معادله دوگانه هارمونیک $\nabla^4\psi=0$ به دست می‌آید که ψ تابع جریان می باشد.

سیالات خزشی حداقل در پنج گروه زیر کاربرد دارند:

۱) جریانات آرام کاملاً توسعه یافته[۳] : این گونه سیالات که در فصل پنجم به آن‌ها اشاره شد، در یک جهت حرکت می‌کنند و کاملاً ویسکوز در نظر گرفته می‌شوند.

۲) جریانات آرام در مجاری باریک اما متغیر[۴] : این جریانات ابتدا برای مکانیسم روانکاری سیالات باریک به صورت فیلم[۵] ارائه شد و مربوط به نظریه روانکاری هیدرودینامیکی[۶] می‌باشد.

۳) جریانات خزشی اطراف اجسام غوطه‌ور[۷] : این مسئله از حل استوکس برای جریان سیال اطراف یک کره شروع گردید. مسائل مشابه آن در منابع و کتاب هاپل و برنر[۸] ارائه شده است.

۴) جریان در محیط‌های متخلخل[۹] : این گونه مسائل در بررسی حرکت آب و نفت در خاک و سنگ‌های متخلخل، همچنین در حرکت محلول‌ها در فیلترها و بسترهای کاتالیست، خیلی مهم می‌باشند.

۵) جریان پلی مرهای مذاب در دستگاه‌های اکسترودر، قالب ریزی مکشی و غیره : در صنایع پلاستیک و لاستیک، حرکت مواد مذاب پلی مری به صورت خزشی انجام می‌شود. حرکت سیالات پلاستیک مذاب با ویسکوزیته خیلی بالا در قالب‌های لوله سازی، قالب‌های تزریقی و غیره از انواع جریانات با عدد رینولدز پایین می‌باشند.

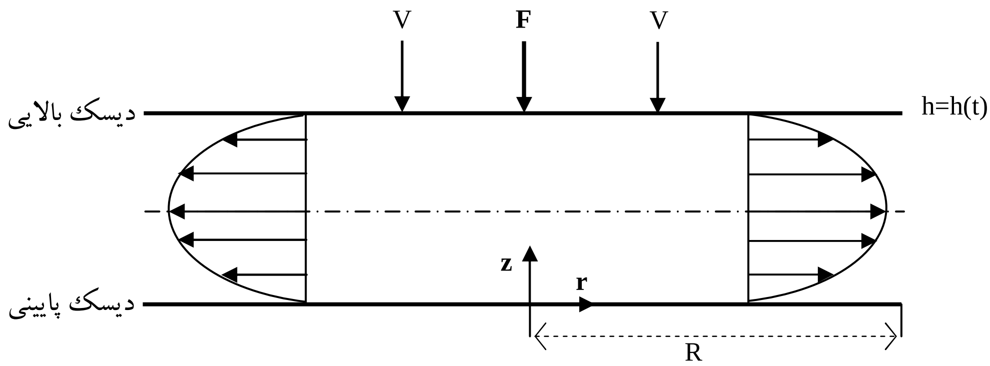
در ادامه با ارائه مثال‌هایی از جریان‌های خزشی به بررسی بیشتر این گونه سیالات پرداخته می‌شود.

---

[3] Fully Developed Laminar Flow
[4] Laminar Flow Through Narrow Path
[5] Lubrication
[6] Hydrodynamic Lubrication Theory
[7] Creeping Flow About Immersed Bodies
[8] Happel & Brenner's Book
[9] Flow Through Porous Media

۳. جریان فشردگی فیلم[10]

سیالی با دانسیته ρ و ویسکوزیته بالای μ بین دو دیسک موازی با شعاع R مطابق شکل (۱–۸) قرار دارد. دیسک صفحه پایینی ثابت بوده و دیسک صفحه بالایی با سرعت ثابت v به طرف پایین حرکت می‌کند. به تدریج که صفحه بالایی پایین‌تر می‌آید، فیلم بین دو صفحه، فشرده شده و به صورت شعاعی از اطراف دیسک به طرف بیرون و در جهت r حرکت می‌نماید. مقدار نیروی F را طوری می‌خواهیم تنظیم کنیم که سرعت صفحه همواره ثابت بوده و فاصله دو صفحه به مقدار h برسد.



شکل ۱–۸: جریان فشردگی فیلم بین دو دیسک صفحه‌ای موازی

۱) ابتدا فرض می‌کنیم که جریان سیال کند بوده، به طوری که نیروهای اینرسی قابل اغماض خواهند بود. همچنین در جهت θ سرعت قابل اغماض می‌باشد ($v_\theta=0$)، سپس فرض می‌کنیم که تقارن محوری داریم، یعنی $\partial/\partial\theta = 0$.

۲) به علت کم بودن فاصله بین دو صفحه، جهت جریان در جهت r خواهد بود. همچنین فرض می‌کنیم که فاصله بین دو صفحه تابعی از زمان باشد، یعنی h=h(t).

۳) قانون بقای جرم به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$Q = \pi r^2 v = 2\pi r \int_0^h v_r dz \qquad (۸–۱۲)$$

که Q دبی حجمی می‌باشد. در این جا چون سیال تراکم ناپذیر است، ρ از دو طرف معادله بالا حذف شده است.

[10] Squeeze Film Flow

۴) معادله ناویر- استوکس در مختصات استوانه‌ای برای سیال خزشی برای مؤلفه r به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$0=-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}(rv_r)\right)+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right] \qquad (۸-۱۳)$$

ملاحظه می‌شود که فشار در جهت r افت پیدا کرده و از فشار P در r=0 به فشار P=0 در r =R می‌رسد. با توجه به این که سرعت نسبت به r تغییر نمی‌کند، پس $\partial v_r/\partial r = 0$. در یتیجه معادله حرکت به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$0=-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \qquad (۸-۱۴)$$

با استفاده از معادلات ناویر- استوکس در جهت z و θ، داریم:

$$\partial P/\partial\theta = 0 \qquad ; \qquad \partial P/\partial z = 0$$

۵) با استفاده از شرایط مرزی بر روی هر دو صفحه دیسک خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l} z=0 \quad ; \quad v_r=0 \\ z=h \quad ; \quad v_r=0 \end{array} \qquad (۸-۱۵)$$

همان گونه که ملاحظه می‌شود در این جا از اصل عدم لغزش در مرز جامد استفاده شد. بنابراین با استفاده از شرایط مرزی (۱۵-۸) و با انتگرال گیری از معادله (۱۴-۸)، پروفیل سرعت به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$v_r=-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)(zh-z^2) \qquad (۸-۱۶)$$

۶) محاسبه افت فشار یا توزیع فشار با استفاده از معادلات (۱۲-۸) و (۱۶-۸) به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\pi r^2 V = 2\pi r\int_0^h -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)(zh-z^2)dz \qquad (۸-۱۷)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial P}{\partial r}=-\frac{6\mu V r}{h^3} \qquad (۸-۱۸)$$

با انتگرال گیری از معادله (۱۸-۸) و استفاده از شرایط مرزی P=0 در r =R ، خواهیم داشت:

$$P=\frac{3\mu V(R^2-r^2)}{h^3} \qquad (۸-۱۹)$$

ملاحظه می‌شود که در r =0، فشار در مرکز دیسک‌ها بیشینه خواهد بود.

۷) محاسبه نیروی کل وارده بر دیسک بالایی برای نگه داشتن سرعت ثابت v، به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$dF = PdA$$
$$dA = rdrd\theta \qquad (۸-۲۰)$$
$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^R Prdrd\theta = 2\pi\int_0^R \frac{3\mu v(R^2 - r^2)}{h^3} rdr$$

که نیروی اعمال شده کل عبارت است از:

$$F = \frac{3\pi\mu VR^4}{2h^3} \qquad (۸-۲۱)$$

از طرفی سرعت دیسک بالایی به صورت $v = -dh/dt$ بیان می‌شود که علامت منفی به واسطه حرکت صفحه بالایی در خلاف جهت محور z است. پس با استفاده از معادله (۲۱-۸) خواهیم داشت:

$$V = \frac{2Fh^3}{3\pi\mu R^4} \qquad (۸-۲۲)$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{2Fh^3}{3\pi\mu R^4} \qquad (۸-۲۳)$$

با انتگرال گیری از معادله (۲۳-۸) و استفاده از شرط مرزی h=H در t=0، خواهیم داشت:

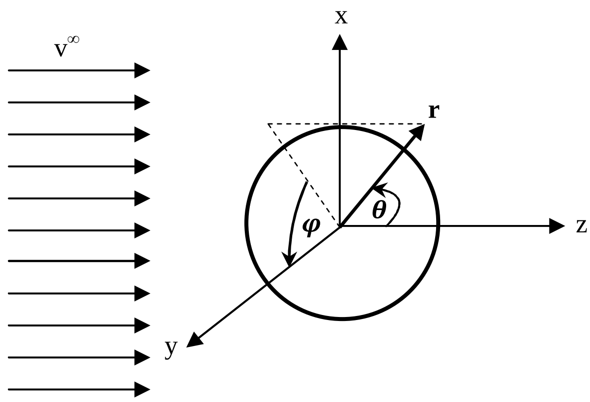
$$h = \left(\frac{1}{H^2} + \frac{4Ft}{3\pi\mu R^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (۸-۲۴)$$

معادله (۲۴-۸) به عنوان معادله استفان[11] شناخته شده که فاصله بین دو صفحه را بر حسب زمان نشان می‌دهد.

۴. حرکت جریان خزشی اطراف کره (جریان استوکس)

حرکت سیالی ویسکوز با ویسکوزیته μ و دانسیته ρ را در اطراف یک کره توپر مطابق شکل (۲-۸) در نظر بگیرید. ملاحظه می‌شود که جریان آزاد دارای سرعت v^∞ می‌باشد. چون مجرای حرکت سیال اطراف کره می‌باشد، بنابراین معادلات ناویر- استوکس در مختصات کروی نوشته خواهد شد.

[11] Stefan Equation



شکل ۲-۸: حرکت سیال خزشی اطراف کره توپر

۱) معادله پیوستگی در مختصات کروی نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) = 0 \qquad (۸-۲۵)$$

ملاحظه می‌شود که فرض تقارن محوری $\partial/\partial\varphi = 0$ استفاده شده است و $v_\varphi=0$ می‌باشد.

۲) معادله مومنتوم (ناویر-استوکس) در جهت‌های r و θ نوشته شده و ساده می‌شوند:

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 v_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\right] \qquad (۸-۲۶)$$

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)\right) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right] \qquad (۸-۲۷)$$

در این‌جا با توجه به این که حل دو معادله بالا بسیار پیچیده می‌باشد و از طرفی جریان خزشی فرض شده است، بنابراین از عبارت‌های اینرسی صرف‌نظر می‌شود. از طرفی با استفاده از تابع جریان در مختصات کروی یعنی $\psi=\psi(r,\theta)$ و با مشتق گیری ضربدری از معادلات (۲۶-۸) و (۲۷-۸) نسبت به θ و r، بعد از ساده سازی به معادله ذیل می‌رسیم:

$$\nabla^4\psi = 0 \qquad Re \ll 1 \qquad (۸-۲۸)$$

که در مختصات کروی معادله (۲۸-۸) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\psi = 0 \qquad (۸-۲۹)$$

از طرفی مؤلفه‌های سرعت در مختصات کروی بر حسب ψ به صورت ذیل نشان داده می‌شوند:

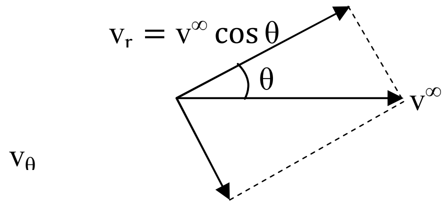
$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$ (۸–۳۰)

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$ (۸–۳۱)

۳) چهار شرط مرزی برای حل معادله (۸–۲۹) نیاز می‌باشد که به صورت ذیل ارائه می‌شوند:

شرایط مرزی در فاصله بی نهایت: در سرعت آزاد سیال در مختصات دکارتی به صورت $v_z=v^\infty$، $v_x=v_y=0$ می‌باشد.

لیکن در مختصات کروی مؤلفه v_z به دو مؤلفه v_θ^∞ و v_r^∞ به صورت ذیل تجزیه می‌شود:



شرط مرزی ۱: $r = r_\infty : \ v_r = v^\infty \cos\theta$ (۸–۳۲)

شرط مرزی ۲: $r = r_\infty : \ v_\theta = -v^\infty \sin\theta$ (۸–۳۳)

دو شرط مرزی در سطح کره: با استفاده از شرط عدم لغزش در مرز جامد سرعت برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند:

شرط مرزی ۳: $$r = R : \ v_r = 0 = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$ (۸–۳۴)

شرط مرزی ۴: $$r = R : \ v_\theta = 0 = -\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$ (۸–۳۵)

۴) با استفاده از معادلات (۸–۳۰) و (۸–۳۱) و اعمال شرایط مرزی در $r\to\infty$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = v^\infty \cos\theta$$ (۸–۳۶)

$$-\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} = -v^\infty \sin\theta$$ (۸–۳۷)

پس خواهیم داشت:

$$d\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)d\theta + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)dr$$ (۸–۳۸)

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = r^2 v^\infty \cos\theta \sin\theta \qquad (۸-۳۹)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = r v^\infty \sin^2\theta \qquad (۸-۴۰)$$

با جایگذاری معادلات (۳۹-۸) و (۴۰-۸) در معادله (۳۸-۸) و انتگرال گیری از این معادله خواهیم داشت:

$$\psi = \frac{r^2}{2} v^\infty \sin^2\theta + \text{constant} \qquad (۸-۴۱)$$

ثابت اختیاری در معادله (۴۱-۸) را برابر صفر قرار می‌دهیم. چون با اختیار کردن هر عددی، با مشتق گیری برای به دست آوردن مؤلفه‌های سرعت، مشتق عدد ثابت برابر صفر خواهد شد. لذا تابع جریان در $r\rightarrow\infty$ به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\psi^\infty = \frac{r^2}{2} v^\infty \sin^2\theta \qquad (۸-۴۲)$$

از شکل تابع جریان در $r\rightarrow\infty$، معادله (۴۲-۸)، می‌توان تابع جریان را به صورت شکل اولیه ذیل ارائه داد:

$$\psi = f(r)\sin^2\theta \qquad (۸-۴۳)$$

که معادله (۴۳-۸) نمایان‌گر ضرب دو تابع $f(r)$ و $\sin^2\theta$ بوده، به عبارتی جداسازی متغیرها در این جا انجام شده است.

حال جواب اولیه معادله (۴۳-۸) را در معادله تابع جریان، معادله (۲۹-۸)، جایگزین نموده و به صورت ذیل مشتق گیری می‌کنیم:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2 f(r)\sin^2\theta = 0 \qquad (۸-۴۴)$$

بعد از اعمال مشتق گیری از معادله (۴۴-۸) و جداسازی عبارت های مشتق نسبت به r، خواهیم داشت:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right]\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right] f(r) = 0 \qquad (۸-۴۵)$$

همان گونه که ملاحظه می شود معادله (۴۵-۸) یک معادله همگن دیفرانسیل خطی است که دارای جواب عمومی $f(r)=Cr^n$ می‌باشد. معادله (۴۵-۸) نیز به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\left[\frac{d^4}{dr^4} - \frac{4}{r^4} - \frac{4}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}\right] Cr^n = 0 \qquad (۸-۴۶)$$

با مشتق گیری از معادله (۴۶-۸) و قرار دادن ضریب معادله برابر با صفر خواهیم داشت:

$$[(n-2)(n-3)-2][n(n-1)-2]=0 \qquad (۸-۴۷)$$

معادله (۴۷-۸) چهارجواب به شرح ذیل دارد:

$$n=-1,1,2,4$$

پس جواب تابع f(r) به صورت ذیل نوشته می شود:

$$f(r)=\frac{A}{r}+Br+Cr^2+Dr^4 \qquad (۸-۴۸)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود معادله (۴۸-۸) دارای چهار ثابت می باشدکه باید تعیین گردد . پس با اعمال شرایط مرزی

در $r\to\infty$ خواهیم داشت:

$$\psi^{\infty}=f(r)\sin^2\theta=\left(\frac{A}{r}+Br+Cr^2+Dr^4\right)\sin^2\theta=\frac{r^2}{2}v^{\infty}\sin^2\theta \qquad (۸-۴۹)$$

از مقایسه دو طرف معادله (۴۹-۸) ملاحظه می شود که D=0 بوده و $C=\frac{1}{2}v^{\infty}$ می باشد، پس خواهیم داشت:

$$\psi=\left(\frac{A}{r}+Br+\frac{1}{2}v^{\infty}r^2\right)\sin^2\theta \qquad (۸-۵۰)$$

از طرفی با اعمال شرایط مرزی ۳و ۴ (روابط (۳۴-۸) و (۳۵-۸)) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{2}{r^2}f(r)\cos\theta=0 \qquad (۸-۵۱)$$

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial r}=-\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\sin\theta}{r}=0 \qquad (۸-۵۲)$$

که $f(r)=A/r+B\,r+1/2\,v^{\infty}r^2$ می باشد، پس با جایگذاری $f(r)|_{r=R}$ در معادلات (۵۱-۸) و (۵۲-۸) خواهیم داشت:

$$\frac{A}{R^3}+\frac{B}{R}+\frac{v^{\infty}}{2}=0 \qquad (۸-۵۳)$$

$$-\frac{A}{R^3}+\frac{B}{R}+v^{\infty}=0 \qquad (۸-۵۴)$$

با حل همزمان معادلات (۵۳-۸) و (۵۴-۸) ثابت‌های A و B به دست می‌آیند.

$$A=\frac{r^{\infty}}{4}R^3 \qquad ; \qquad B=-\frac{3r^{\infty}}{4}R \qquad (۸-۵۵)$$

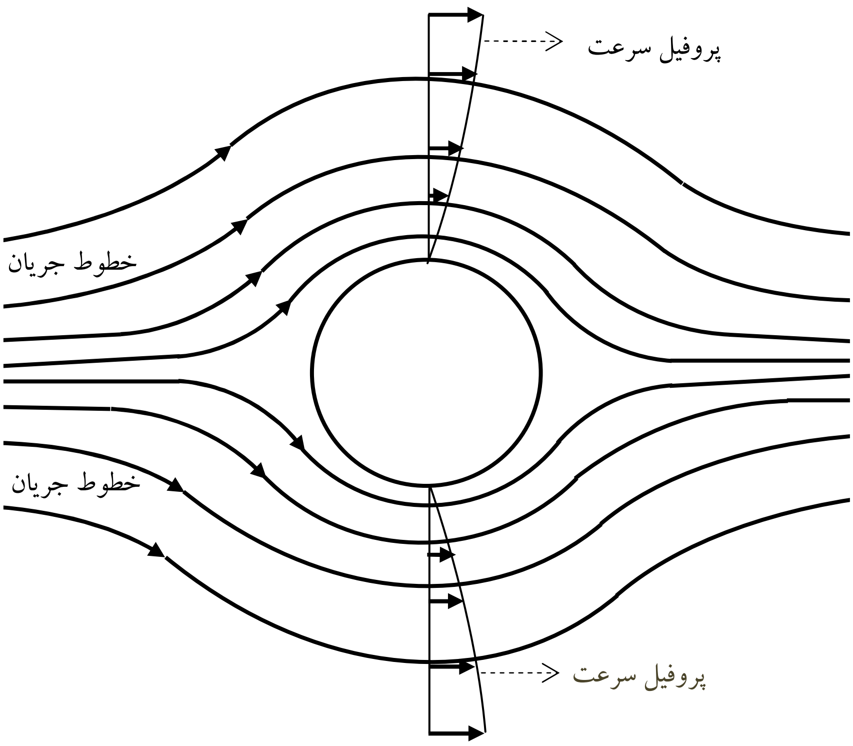
بنابراین در نهایت تابع جریان برای سیال ویسکوز اطراف کره به شکل ذیل حاصل می‌شود:

$$\psi = \frac{1}{2} v^{\infty} \left(\frac{R^3}{2r} - \frac{3R}{2} r + r^2 \right) \sin^2 \theta \tag{۸-۵۶}$$

۵) مؤلفه‌های سرعت $v_r(r,\theta)$ و $v_\theta(r,\theta)$ با استفاده از معادلات (۳۰-۸) و (۳۱-۸) و (۵۶-۸) به دست می‌آیند.

$$v_r = v^{\infty} \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \right] \cos\theta \tag{۸-۵۷}$$

$$v_\theta = v^{\infty} \left[-1 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \right] \sin\theta \tag{۸-۵۸}$$



شکل ۳-۸: خطوط جریان و پروفیل سرعت اطراف کره

برای نمایش گرافیکی لازم است خطوط جریان و پروفیل سرعت در (r,θ) داده شده و با استفاده از معادلات (۵۶-۸) تا (۵۸-۸) مقادیر ψ و v_r و v_θ را محاسبه نمود. شکل (۳-۸) تغییرات متغیرها را نشان می‌دهد.

در شرایطی که سیال در حال سکون باشد و کره صلب در درون سیال حرکت نماید، لازم است که مؤلفه v^{∞} را از معادلات جریان و مؤلفه‌های سرعت v_r و v_θ کم نماییم.

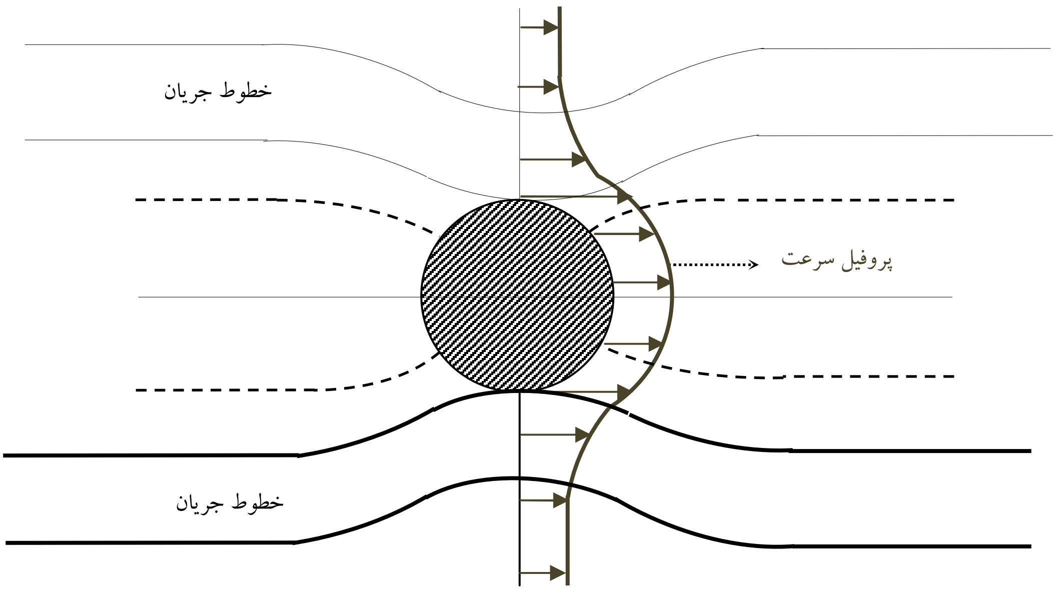
$$v_r{}^0 = v_{\infty} \left[-\frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \right] \cos\theta \tag{۸-۵۹}$$

$$v_\theta{}^0 = v_\infty\left[\frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\sin\theta \qquad (۸-۶۰)$$

که در این‌جا v^∞ سرعت ثابت کره در اطراف سیال ساکن خواهد بود و $v_r{}^0$ و $v_\theta{}^0$ مؤلفه‌های پروفیل سرعت سیال اطراف کره متحرک هستند. تابع جریان سیال اطراف کره متحرک نیز به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\psi^0(r,\theta) = \frac{1}{2}v^\infty\left(\frac{R^3}{2r}-\frac{3R}{2}r\right)\sin^2\theta \qquad (۸-۶۱)$$

شکل (۴-۸) تابع جریان و پروفیل سرعت را برای کره صلب متحرک در جریان ویسکوز ساکن نشان می‌دهد.



شکل ۴-۸: خطوط جریان و پروفیل سرعت برای حرکت کره صلب در یک سیال ساکن

۶) حال لازم است توزیع میدان فشار $P=P(r,\theta)$ را برای حرکت سیال آزاد اطراف کره ثابت به دست آوریم. تابع فشار از انتگرال گیری رابطه زیر به دست می‌آید:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)dr + \left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)d\theta \qquad (۸-۶۲)$$

با جاگذاری مؤلفه‌های سرعت (۵۹-۸) و (۶۰-۸) در معادلات ساده شده ناویر-استوکس یعنی معادلات (۲۶-۸) و (۲۷-۸) و صرف‌نظر از عبارت‌های اینرسی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{2v_r\cot\theta}{r^2}\right] \qquad (۸-۶۳)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r\sin\theta^2}\right] \qquad (۸-۶۴)$$

پس مشتق‌های جزیی فشار به صورت ذیل به دست می‌آیند:

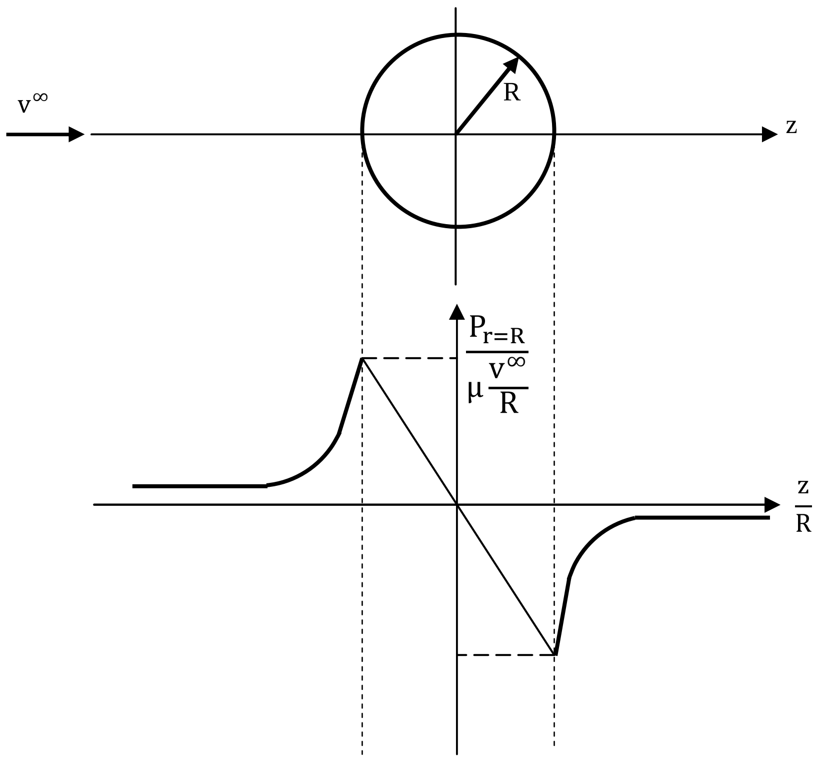
$$\frac{\partial P}{\partial r} = \left(\frac{3\mu R v^\infty}{r^3}\right)\cos\theta \qquad (۸-۶۵)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \left(\frac{3\mu R v^\infty}{2r^2}\right)\sin\theta \qquad (۸-۶۶)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۶۵-۸) و (۶۶-۸) در معادله (۶۲-۸) و انتگرالگیری از آن، تابع توزیع فشار حاصل می‌شود:

$$P = P_\infty - \left(\frac{3\mu R v^\infty}{2r^2}\right)\cos\theta \qquad (۸-۶۷)$$

توجه شود که در $r\to\infty$ ، $P=P_\infty$ می باشد. شکل (۵-۸) توزیع فشار را در اطراف کره صلب نشان می دهد.



شکل ۵-۸: توزیع فشار در سطح کره برای سیال خزشی اطراف کره صلب

از طرفی فشار در سطح کره (r=R) عبارتست از $P_\infty=0$، لذا خواهیم داشت:

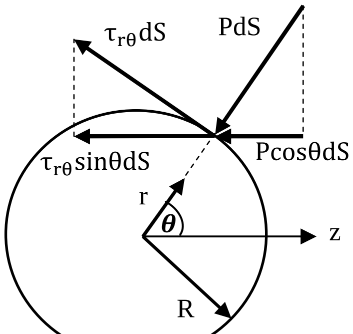
$$P|_{r=R} = -\frac{3}{2}\frac{\mu R v^\infty}{r^2}\cos\theta \qquad (۸-۶۸)$$

مقدار بیشینه فشار در $\theta=\pi$ و مقدار کمینه آن در $\theta=0$ به صورت ذیل به دست می آید:

$$P_{max}|_{r=R} = \frac{3}{2}\frac{\mu v^\infty}{R} \qquad (۸-۶۹)$$

$$P_{min}|_{r=R} = -\frac{3}{2}\frac{\mu v^{\infty}}{R} \quad (۸-۷۰)$$

۷) مرحله آخر پیدا نمودن درگ اصطکاکی و درگ فشار در سطح کره می‌باشد. در این‌جا مطابق شکل (۶-۸) نشان داده می‌شود که مولفه‌های درگ اصطکاکی و فشار ناشی از مولفه‌های نیروهای تنش برشی و فشاری می‌باشند.



شکل ۶-۸: نیروهای تنش برشی و فشار روی سطح کره

همان طور که در فصل ششم اشاره شد، درگ فشار، مقاومت در مقابل فشار اعمال شده از سوی سیال روی کره می‌باشد. مطابق شکل (۶-۸) خواهیم داشت:

$$dD_P = -P\cos\theta dS \quad (۸-۷۱)$$

پس با انتگرالگیری از معادله (۷۱-۸) در سطح کل کره خواهیم داشت:

$$D_P = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P|_{r=R}\cos\theta\, \underbrace{R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi}_{dS} \quad (۸-۷۲)$$

با داشتن $P|_{r=R}=-(3/2)(\mu v^{\infty}/R)\cos\theta$ و جاگذاری در معادله (۷۲-۸)، درگ فشاری به دست خواهد آمد:

$$D_P = 2\pi\mu R v^{\infty} \quad (۸-۷۳)$$

درگ اصطکاکی مقاومت در برابر نیروهای ویسکوز می‌باشد که از تنش برشی حاصل می‌شود:

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right] \quad (۸-۷۴)$$

با استفاده از معادلات مولفه‌های سرعت یعنی معادلات (۵۷-۸) و (۵۸-۸) و با مشتق گیری از معادلات مذکور و جاگذاری در معادله (۷۴-۸) خواهیم داشت:

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = -\frac{3}{2}\frac{\mu v^{\infty}}{R}\sin\theta \qquad (۸-۷۵)$$

که $\tau_{r\theta}$ تنش برشی در دیواره کره صلب را نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۶-۸) درگ اصطکاکی به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$dD_F = -\tau_{r\theta}\sin\theta dS \qquad (۸-۷۶)$$

که با جاگذاری (۷۵-۸) در (۷۶-۸) خواهیم داشت:

$$D_F = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\tau_{r\theta}|_{r=R}\, R^2 \sin\theta \; d\theta \, d\phi \qquad (۸-۷۷)$$

پس با جایگذاری (۷۵-۸) در (۷۷-۸) درگ اصطکاکی به دست می آید:

$$D_F = 4\pi\mu R v^{\infty} \qquad (۸-۷۸)$$

پس درگ کل از جمع هر دو درگ به صورت ذیل حاصل می شود:

$$D = D_P + D_F = 2\pi\mu R v^{\infty} + 4\pi\mu R v^{\infty} \qquad (۸-۷۹)$$

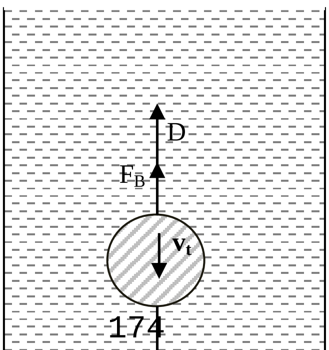
که خواهیم داشت:

$$D = 6\pi\mu R v^{\infty} \qquad Re \le 0.5 \qquad (۸-۸۰)$$

که معادله (۸۰-۸)به عنوان قانون استوکس[۱۲] شناخته می شود. قانون استوکس برای اندازه گیری ویسکوزیته با استفاده از آزمایش سقوط آزاد کره جامد به کار گرفته می‌شود. برای مثال کره‌ای صلب بـا شـعاع R در سـیالی بـا ویسـکوزیته μ و دانسیته ρ سقوط می کند. زمانی که سرعت کره به مقدار ثابت v_t می‌رسد، (شـکل (۷-۸)) ملاحظـه مـی‌شـود کـه برآینـد نیروهای حاکم بر حرکت کره را می توان به صورت ذیل نوشت:

$$W = D + F_B \qquad (۸-۸۱)$$

که F_B نیروی شناوری[۱۳] و W نیروی وزن کره می باشد، پس با جایگذاری عبارات متناظر خواهیم داشت:



[12] Stoke's Law
[13] Buoyant

شکل ۷-۸: سقوط کره صلب در سیال ساکن

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g}_{W} = \underbrace{6\pi\mu R v_t}_{D} + \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}_{F_B} \qquad (۸-۸۲)$$

با داشتن سرعت حدی[14] و خواص سیال و اندازه کره، ویسکوزیته سیال به صورت ذیل به دست می آید:

$$\mu = \frac{2R^2 g}{9 v_t} \qquad (۸-۸۳)$$

ملاحظه می شود که برای $Re \leq$ ۰/۵ درگ از رابطه (۸-۸۰) به دست می آید. برای مقادیر بالاتر عدد رینولدز نمی توان از عبارت های اینرسی صرفنظر کرد. اسین[15] معادلات ذیل را برای این حالت پیشنهاد داد:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \qquad (۸-۸۴)$$

$$\rho \overrightarrow{v^{\infty}} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \qquad (۸-۸۵)$$

ملاحظه می‌شود که به جای $\rho\vec{v} \cdot \nabla\vec{v}$ در عبارت اینرسی، $\rho\overrightarrow{v^{\infty}} \cdot \nabla\vec{v}$ جایگزین شده است. در حقیقت این عبارت اینرسی را خطی نموده است. با این ساده‌سازی، معادلات مجددا در مختصات کروی حل گردید و در نهایت معادله زیر برای درگ حاصل شد:

$$D = 6\pi\mu R v^{\infty}\left(1 + \frac{3}{16} Re\right) \qquad (۸-۸۶)$$

[14] Terminal Velocity (v_t)
[15] Oseen

باید توجه داشت که معادله (۸-۸۶) نیز محدود می‌باشد و برای اعداد رینولدز خیلی بالا پاسخ صحیح ارائه نمی دهد.

ضریب درگ صحیح سیال آزاد اطراف کره صلب، در تمامی مقادیر عدد رینولدز، رابطه ذیل ارائه شده است:

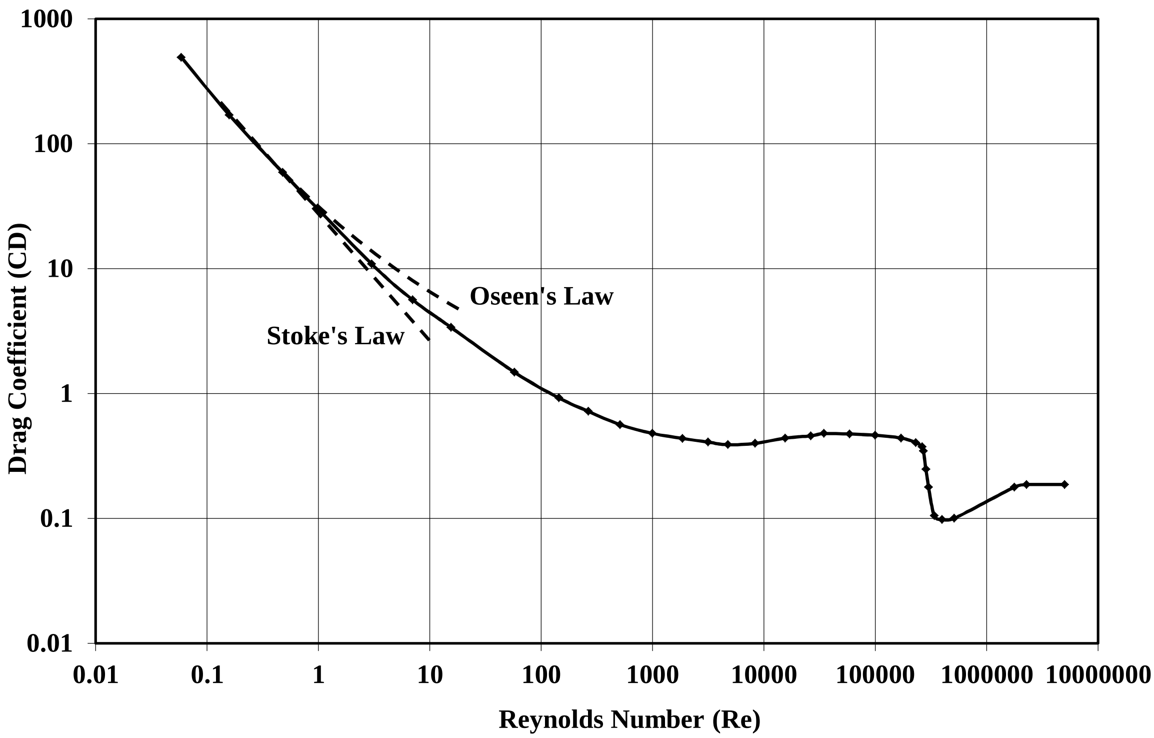
$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho(v^{\infty})^2 A} = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho(v^{\infty})^2 \pi R^2} \qquad (۸-۸۷)$$

که برای حالت $Re < 0.5$ و اعداد رینولدر متوسط، با جاگذاری $D=6\pi\mu R v^{\infty}$ در معادله (۸-۸۶) و (۸-۷۷) خواهیم داشت:

$$C_D = \frac{24}{Re} \qquad Re < 0.5 \qquad (۸-۸۸)$$

$$C_D = \frac{24}{Re} + 36 \qquad 0.5 < Re < 100 \qquad (۸-۸۹)$$

برای مقادیر مختلف عدد رینولدز، Re، شکل (۸-۸) تغییرات C_D بر حسب Re را برای سیال آزاد اطراف یک کره صلب نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که در $Re > 10^5$ جریان سیال از حالت آرام به مغشوش منتقل شده و C_D به زیر ۰/۲ کاهش می یابد.

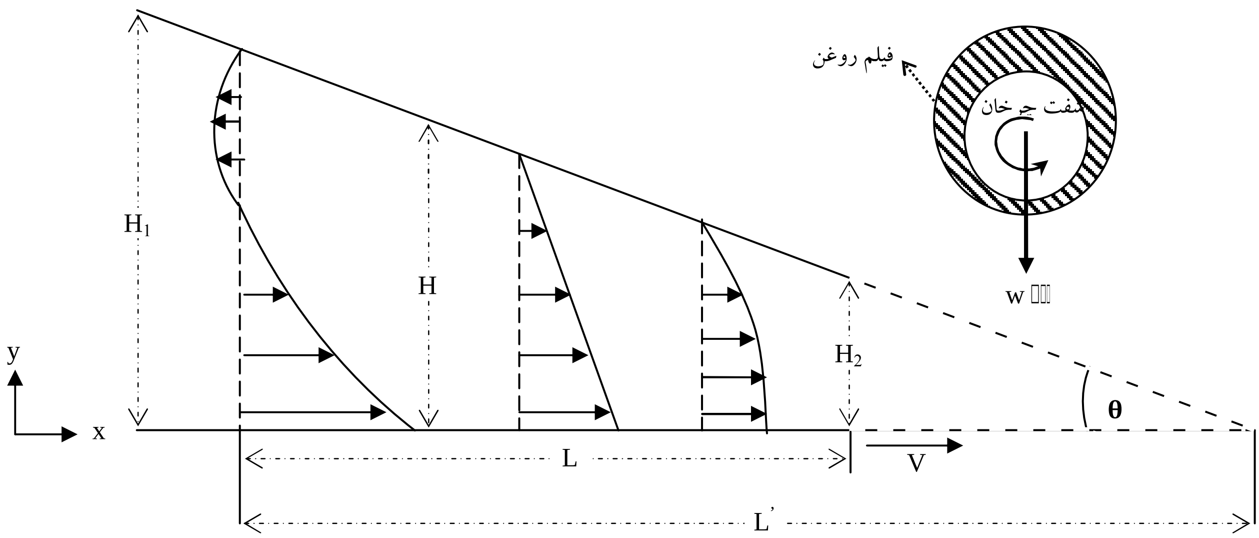


شکل ۸-۸: ضریب درگ (CD) بر حسب عدد رینولدز ($Re = \rho v^{\infty}(2R)/\mu$) برای جریان آزاد اطراف کره صلب

۵. مسئله یاتاقان [16] لغزنده[17]، تقریب هیدرودینامیکی روانکاری[18]

فیلم‌ها لایه‌ای نازک از مایعات هستند که بین دو صفحه جامد جدا از هم قرار می‌گیرند. کاربرد این گونه فیلم‌ها در سطوح یاتاقان می‌باشد. هدف از این فیلم‌ها جدا نگهداشتن صفحات جامد از یکدیگر می‌باشد، زمانی که از بیرون یک ظرفیت بار زیاد بر آن‌ها اعمال می‌شود. این گونه روانکارها به عنوان روان‌کننده‌های هیدرودینامیکی شناخته می‌شوند.

حال دو صفحه جامد موازی را در نظر بگیرید که یک صفحه ساکن و دیگری حرکت می‌کند. تحلیل حرکت این گونه مجاری قبلاً در فصل پنجم بیان شد. در شرایطی که فاصله بین دو صفحه موازی کم باشد، هیچ فشاری از بارگذاری، در فیلم بین دو صفحه احساس نمی‌شود. برای ایجاد فشار در این گونه مجاری، که از دو صفحه موازی تشکیل شده است، لازم است که عرض بین دو سطح موازی مقداری متغیر باشد. شکل (۹–۸) یک یاتاقان را با دو صفحه که زاویه‌ای بین آن‌ها قرار دارد، نشان می‌دهد. البته زاویه بین دو صفحه اغراق شده است. معمولاً زاویه کمتر از ۱۵ درجه می باشد.



شکل ۹–۸: توزیع سرعت و فشار در یاتاقان

۱) در این جا فرض می شود که $\alpha<15^0$ و $(H_2-H_1)/L<<1$ می باشد.

[16] Bearing
[17] Slider
[18] Hydrodynamic Lubrication Approximation

۲) معادلات مومنتوم (ناویر استوکس) برای جریان خزشی در جهت های x و y به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \quad (۸-۹۰)$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}\right) \quad (۸-۹۱)$$

در این جا برخلاف دو صفحه کاملاً موازی، افت فشار در جهت x ثابت نخواهد بود. در فیلم بین دو صفحه فشار به یک نقطه ماکزیمم می رسد و در دو طرف صفحه به P_0 نزول می نماید.

۳) شرایط مرزی به صورت ذیل نوشته می شود:

$v_x=V$	در	$y=0$	
$v_x=0$	در	$y=H$	(۸-۹۲)
$P=P_0$	در	$x=0$	
$P=P_0$	در	$x=L$	

با اعمال شرایط مرزی (۹۲-۸) پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست می آید:

$$v_x = \frac{V}{H}(H-y) - \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}y(H-y) \quad (۸-۹۳)$$

۴) دبی جریان در مجرای بین دو صفحه در تمام مکان ها در جهت x مقداری ثابت است که از رابطه ذیل محاسبه می شود:

$$q = \int_0^{H(x)} v_x\, dy = \text{ثابت} \quad (۸-۹۴)$$

حال با جاگذاری معادله (۹۳-۸) درمعادله (۹۴-۸)، دبی به صورت ذیل به دست می آید:

$$q = \frac{VH}{2} - \frac{H^3}{12\mu}\frac{dP}{dx} \quad (۸-۹۵)$$

با حل معادله (۹۵-۸) برای افت فشار خواهیم داشت:

$$\frac{dP}{dx} = 12\mu\left(\frac{V}{2H^2} - \frac{q}{H^3}\right) \quad (۸-۹۶)$$

توزیع فشار با انتگرالگیری از معادله (۹۶–۸) و با استفاده از شرایط مرزی (۹۲–۸) به دست خواهد آمد:

$$P(x) = P_0 + 6\mu v \int_0^x \frac{dx}{H^2} - 12\mu q \int_0^x \frac{dx}{H^3} \quad (۸–۹۷)$$

با اعمال شرط مرزی در $x=L$، $P=P_0$، دبی بر واحد عرض یاتاقان به صورت ذیل حاصل می شود:

$$q = \frac{\int_0^L \frac{dx}{H^2}}{2\int_0^L \frac{dx}{H^3}} \quad (۸–۹۸)$$

بنابراین برای به دست آوردن دبی نیاز به معادله جبری تابع $H=H(x)$ داریم. پس با توجه به شکل هندسی (۹–۸) معادله مرزی خطی صفحه بالایی یعنی $H(x)$ به صورت ذیل حاصل می شود:

$$H(x) = H_1 - \frac{H_1 - H_2}{L}x \quad (۸–۹۹)$$

$$\tan\alpha \cong \alpha = \frac{H_1 - H_2}{L} \quad (۸–۱۰۰)$$

$$H(x) = \alpha(L' - x) \quad (۸–۱۰۱)$$

$$\frac{L'}{L} = \frac{H_1}{H_1 - H_2} \quad (۸–۱۰۲)$$

که در معادلات بالا $15^0 \leq \alpha$ می باشد.با جایگذاری معادله (۹۹–۸) در معادله (۹۸–۸) خواهیم داشت:

$$q = V\alpha\frac{L'(L' - L)}{2L' - L} \quad (۸–۱۰۳)$$

و با ترکیب معادلات (۹۹–۸) ، (۱۰۰–۸) و (۱۰۳–۸) و جایگذاری در معادله (۹۷–۸) خواهیم داشت:

$$P(x) = P_0 + \frac{6\mu VL}{{H_1}^2 - {H_2}^2}\frac{(H_1 - H)(H - H_2)}{H^2} \quad (۸–۱۰۴)$$

که برآیند کل نیروی نرمال بر صفحه بالایی به صورت ذیل حاصل می شود:

$$F_N = W\int_0^L (P(x) - P_0)dx \quad (۸–۱۰۵)$$

پس با جایگذرای $P(x)$ از معادله (۱۰۴–۸) در (۱۰۵–۸) خواهیم داشت:

$$F_N = \frac{6\mu VL^2}{(H_1 - H_2)^2}W\left[\ln\left(\frac{H_1}{H_2}\right) - \frac{2(H_1 - H_2)}{H_1 + H_2}\right] \quad (۸–۱۰۶)$$

روش جایگزین برای به دست آوردن توزیع فشار، این است که از معادله (۹۵-۸) نسبت به x مشتق گیری نموده و چون q ثابت است پس داریم dq/dx=0، که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{H^3}{\mu}\frac{dP}{dx}\right) = 6V\frac{dH}{dx} \qquad (۸-۱۰۷)$$

که معادله ی (۱۰۷-۸) معادله ی پوسان[19] می باشد که طرف راست معادله به عنوان عبارت تولید کننده افت فشار در طول یاتاقان می باشد. حال فرض می کنیم که :

۱) μ ثابت باشد.

۲) شیب dH/dx مقداری ثابت باشد.

۳) برای ساده سازی، مقدار H_m را به عنوان متوسط H در نظر می گیریم.

بنابراین تعریف می کنیم:

$$\beta = -6\mu V\frac{dH}{dx} \qquad (۸-۱۰۸)$$

که β یک مقدار مثبت می باشد (چون $dH/dx < 0$) پس معادله فشار به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{d}{dx}\left(H^3\frac{dP}{dx}\right) = -\beta \qquad (۸-۱۰۹)$$

با انتگرالگیری خواهیم داشت:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\beta x}{H^3} + \frac{C_1}{H^3} \qquad (۸-۱۱۰)$$

ثابت انتگراسیون C_1 باید از شرایط مرزی به دست آید. از طرفی چون H=H(x) می باشد، برای به دست آوردن فشار لازم است که مقدار متوسط H_m برای H تعریف گردد. پس با انتگرالگیری از (۱۱۰-۸) خواهیم داشت:

$$P = -\frac{\beta x^2}{2{H_m}^3} + \frac{C_1 x}{{H_m}^3} + C_2 \qquad (۸-۱۱۱)$$

با اعمال شرایط مرزی برای فشار در x=0 و x=L ، P=0 خواهد بود. پس خواهیم داشت:

[19] Poisson equation

$$C_1 = \frac{1}{2}\beta L \qquad ; \qquad C_2 = 0 \tag{۸–۱۱۲}$$

که با جاگذاری این ثوابت در معادله (۱۱۱–۸) خواهیم داشت:

$$P = -\frac{3\mu V \frac{dH}{dx}}{{H_m}^3} x(L - x) \tag{۸–۱۱۳}$$

بنابراین منحنی فشار سهموی می باشد و دارای بیشینه در مرکز، L/2 ، خواهد بود. فشار متوسط در فیلم روانکاری شده به صورت ذیل محاسبه می شود:

$$P_m = \frac{1}{L}\int_0^L P dx = \frac{\beta L^2}{12{H_m}^3} = \frac{2}{3}P_{max} \tag{۸–۱۱۴}$$

از طرفی چون توزیع فشار مشخص شد، بنابراین گرادیان فشار به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\beta}{{H_m}^3}\left(\frac{L}{2} - x\right) \tag{۸–۱۱۵}$$

با جایگذاری معادله (۱۱۵–۸) در معادله پروفیل سرعت (۹۳–۸) خواهیم داشت:

$$v_x = \frac{V}{H}(H - y) - \underbrace{\frac{1}{2\mu}\frac{\beta}{{H_m}^3}\left(\frac{L}{2} - x\right)}_{\text{مثبت}}\underbrace{y(H - y)}_{\text{منفی}} \tag{۸–۱۱۶}$$

ازمعادله (۱۱۶–۸) ملاحظه می شود که اگر dH/dx=0 ،یعنی β=0 باشد، پروفیل سرعت خطی خواهد بود، و این در حالتی است که دو صفحه کاملاً موازی هم باشند. از طرفی در x=L/2 پروفیل سرعت کاملاً خطی است. همان گونه که در شکل (۹–۸) نشان داده شده است، لیکن در x=0 پروفیل سرعت دارای عقبگرد می باشد.

۶. سیال خزشی در محیط های متخلخل[20]

جریان سیالات در محیط های متخلخل، صنایع پایین دستی نفت، ازدیاد برداشت نفت ، گاز و در بسیاری از صنایع شیمیایی دارای کاربردهای وسیعی می باشد. جریان آب و نفت در سنگ‌های متخلخل[21] ، هم‌چنین جریان سیالات مختلف در فیلترها، بسترهای آکنده در واحدهای جداسازی، در بسترهای کاتالیستی، همه از کاربرد سیالات ویسکوز در

[20] Flow in porous media
[21] Porous Rocks

محیط‌های متخلخل می‌باشد. تحلیل این‌گونه سیالات در این گونه محیط‌ها از اهمیت خاصی در مهندسی شیمی برخوردار است.

در ابتدای فصل اشاره شد که جریان‌های خزشی برای توزیع فشار از معادله لاپلاس پیروی می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$\nabla^2\overline{P} = 0$$
$$\nabla^2(P + \rho g h) = 0 \qquad (۸-۱۱۷)$$

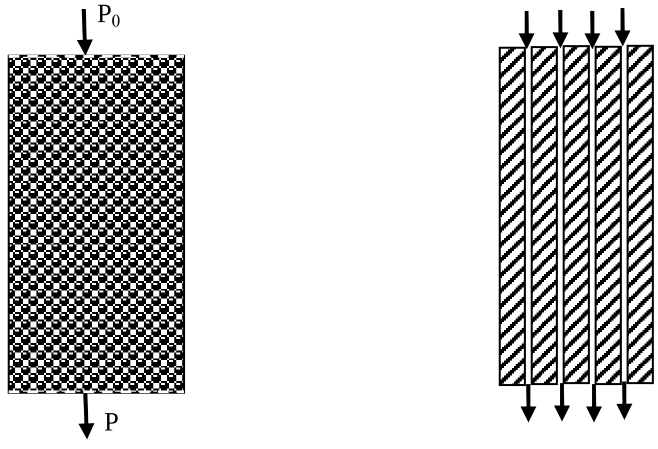
حال اگر مولفه فشار را در جهت z مورد بررسی قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{d^2(P + \rho g h)}{dz^2} = 0 \qquad (۸-۱۱۸)$$

که با انتگرالگیری از معادله (۸-۱۱۸) خواهیم داشت:

$$\frac{d(P + \rho g h)}{dz} = \text{constant} \qquad (۸-۱۱۹)$$

حال اگر محیط متخلخلی را مطابق شکل (۸-۱۰) در نظر بگیرید ملاحظه می شود که سیال از فضاهای خالی بین ذرات عبور می نماید. لیکن به علت سطح تماس بالا، افت فشار بالا بوده و حرکت سیال به صورت خزشی می باشد. حال فرض



شکل ۱۰-۸: الف)حرکت سیال ویسکوز از محیط متخلخل (بسترآکنده) ب)محیط متخلخل متشکل از لوله‌های موئینه

می کنیم که محیط متخلخل از یک سری لوله های موینه[۲۲] تشکیل شده که سیال قادر است فقط از این لوله های موینه عبور نماید. بنابراین سیال از داخل مجموع این لوله‌ها عبور می‌کند، به طوری که جریان سیال را در هر لوله به صورت جریان پویزله[۲۳] در نظر می‌گیریم که دبی آن از معادله هیگن-پویزله[۲۴] پیروی می نماید. بنابراین دبی کل در محیط متخلخل به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$Q = -\frac{\text{constant}}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (۸\text{–}۱۲۰)$$

هم‌چنین سرعت ظاهری[۲۵] در محیط متخلخل به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$v_z = \frac{Q}{A} = \frac{\text{حجم سیال در محیط}}{\text{سطح مقطع کل در محیط متخلخل}} \qquad (۸\text{–}۱۲۱)$$

که با جایگذاری معادله (۱۲۰–۸) در (۱۲۱–۸) خواهیم داشت:

$$v_z = -\frac{\kappa}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (۸\text{–}۱۲۲)$$

که ثابت κ به ضریب عبوری[۲۶] محیط متخلخل یا ثابت دارسی[۲۷] اطلاق می‌شود و معادله (۱۲۲–۸) را قانون دارسی گویند. بعد ثابت κ به صورت $<L^2>$ می‌باشد و از راه آزمایش روی محیط متخلخل مورد نظر به دست می‌آید. برای محیط‌های ایزوتروپیک[۲۸]، ثابت دارسی در تمامی جهات یکسان بوده و قانون عمومی دارسی نیز به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\vec{v} = -\frac{\kappa}{\mu}\nabla P \qquad (۸\text{–}۱۲۳)$$

قانون دارسی فقط برای جریان آرام و خزشی صادق می باشد. برای محاسبه افت فشار در محیط متخلخل بسترهای آکنده از معادله ارگان[۲۹] به صورت ذیل استفاده می شود:

$$f_P = \frac{D_P \varepsilon^3}{\rho {u_z}^2 (1-\varepsilon)}\frac{\Delta P}{L} = \frac{150}{Re_P} + 1.75 \qquad (۸\text{–}۱۲۴)$$

[22] Capillary
[23] Poiseuille
[24] Hagen-Poiseuille
[25] Superficial Velocity
[26] Permeability
[27] Darcy’s Law
[28] Isotropic
[29] Ergan

که f_P ضریب اصطکاک[۳۰] در بستر آکنده می باشد. سایر متغیرها به شکل ذیل می باشد:

$$Re_P = \frac{\rho u_z D_P}{(1-\varepsilon)\mu} \qquad (۸-۱۲۵)$$

u_z: سرعت ظاهری (m/s)

ε: کسر تخلخل[۳۱]

D_P: قطر متوسط ذرات :

که سرعت ظاهری در محیط (بستر) به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$u_z = -\frac{\Delta P}{\mu L}\frac{{D_P}^2\varepsilon^3}{150(1-\varepsilon)^2} = -\frac{\kappa}{\mu}\frac{\Delta P}{L} \qquad (۸-۱۲۶)$$

$$\kappa = \frac{{D_P}^2\varepsilon^3}{150(1-\varepsilon)^2}$$

۷. خلاصه(جمع بندی)

از آن جا که جریان های خزشی مربوط به اعداد رینولدز کوچکتر از ۱ می باشد، لذا به سیالاتی که عبارت‌های اینرسی (شتاب) برای آن‌ها حذف می‌شود، "سیالات خزشی" گویند. در حل معادلات حرکت مربوط به جریان خزشی از عبارت اینرسی در مقابل عبارت ویسکوز صرفنظر می شود. سیالات خزشی حداقل درپنج گروه کاربرد دارند: جریانات آرام کاملاً توسعه یافته، جریانات آرام در مجاری باریک(فیلم) اما متغیر، جریانات خزشی اطراف اشیاء غوطه ور، جریان در محیط‌های متخلخل، و جریان پلی‌مرهای مذاب در دستگاه‌های اکسترودر، قالب ریزی مکشی و غیره. برای حل معادلات حرکت لازم است: معادلات حرکت و پیوستگی در مختصاتی متناسب با هندسه مساله نوشته شود، ساده سازی-ها اعمال شود، شرایط مرزی مساله با توجه به معادلات حاکم و هندسه مساله به درستی تعیین شود. معمولا بی بعدسازی معادلات نیزانجام می شود. با حل معادلات ناویر استوکس پروفیل سرعت به دست آید. بلاخره با داشتن تابع سرعت، تابع میدان فشار به دست آید. تحلیل جریان خزشی در مجاری فشردگی فیلم، جریان آزاد اطراف کره، یاتاقان لغزنده و در سیستم‌های متخلخل انجام شد. و در بخش پایانی این فصل، قانون دارسی و ضریب عبوری معرفی گردید.

[30] Friction Factor
[31] Fraction Void

۸. پرسش‌های پایان درس

۱- کره ای صلب با شعاع R با سرعت حدی v^{∞} در یک جریان خزشی از یـک سـیال سـاکن بـا ویسـکوزیته μ در حـال سقوط است. در چه فاصله افقی از مرکز کره، سرعت سیال ٪۱ سرعت حدی کره می باشد؟

ج: پروفیل سرعت سیال در لایه مرزی سیال در اطراف کره را با کمک معادلات پیوستگی و مومنتوم به دست آورده آن گاه فاصله ای از ضخامت لایه مرزی که در آن سرعت سیال برابر ٪۱ سرعت حدی کره است، محاسبه می کنیم.

۲- نشان دهید که میدان جریان[۳۲] $v=R(e_R \times e_z)$ و $p = 0$ جوابی برای معادلات استوکس است.

ج: معادله استوکس را نوشته و میدان جریان مربوطه را در معادله قرار دهید.

۳- وقتی که یک مایع حول یک حباب گازی جریان داشته باشد، در داخل حبـاب سیرکولاسـیون اتفـاق مـی افتـد. ایـن سیرکولاسیون موجب کاهش تنش برشی سطحی می شود و لذا به عنوان اولین تقریب، ممکن است فرض کنیم که تنش برشی سطحی به کلی حذف شده است. با فرض این که حباب کره‌ای با شعاع R است و جریان مایع نیز جریـانی خزشـی است،آن گاه:

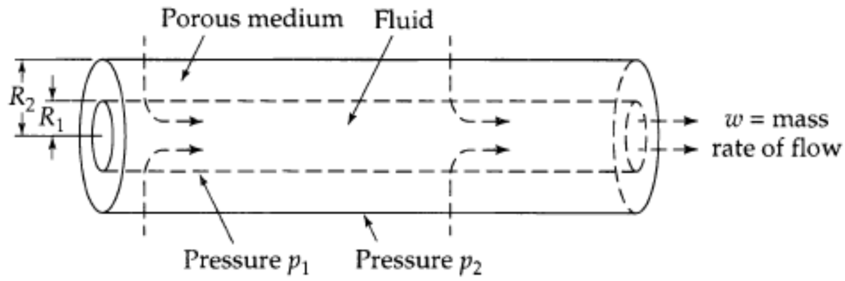
- معادله حرکت حاکم بر سیال را بر حسب تابع جریان $\psi(\theta,r)$ بنویسید.
- شرایط مرزی لازم برای حل معادله را به دست آورید.
- مولفه های سرعت v_r و v_θ را به دست آورید.
- توزیع فشار در داخل این سیال چگونه خواهد بود.
- نیروی کلی که سیال بر حباب وارد می کند به دست آورید.

ج: معادله ناویر استوکس را با اعمال فرضیات لازم نوشته آن گاه مقادیر معادل مشتق تابع جریان را جایگزین مولفه های سرعت می کنیم. آن گاه شرایط مرزی را بر سیستم اعمال کرده و در نهایت مقدار تابع جریان را به دست می‌آوریم. با

[32] Flow Field

داشتن تابع جریان مولفه های سرعت به دست می آید. با اعمال شرایط مرزی فشاری، تابع توزیع فشار حاصل می شود. نیروهای حاکم برحباب را نیز از انتگرال نیروهای تنش وارد بر حباب از سوی سیال می توان به دست آورد.

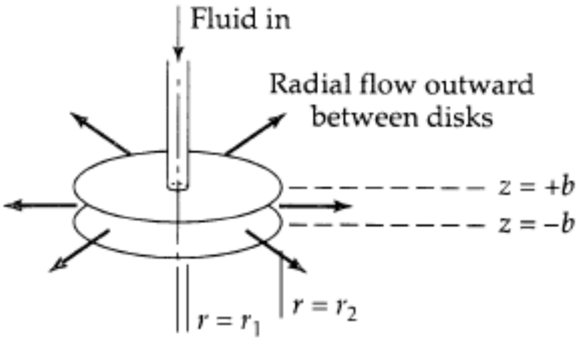
۴-جریان سیالی از یک پوسته استوانه‌ای با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 عبور می کند. هم چنین فشار در سطح جداره داخلی و خارجی به ترتیب برابر P_1 و P_2 است. طول استوانه نیز برابر h است (شکل زیر). توزیع فشار، سرعت شعاعی حرکت سیال و دبی جرمی سیال را در دو حالت یکی برای سیال تراکم ناپذیر و دیگری برای گاز ایده‌آل به دست آورید.



ج: معادله پیوستگی و معادلات حرکت را برای سیال جاری در پوسته را نوشته و فرضیات لازم را اعمال می کنیم آنگاه تابع توزیع فشار و سرعت را به دست می آوریم. با داشتن پروفیل سرعت، دبی جرمی نیز قابل محاسبه است.

۵- بخشی از یک سیستم روغنکاری متشکل از دو دیسک دایره‌ای است که در بین دو دیسک روغن به طور شعاعی جریان دارد. علت ایجاد جریان وجود اختلاف فشار P_1-P_2 بین دو شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 می باشد (شکل زیر).

- با اعمال فرضیات لازم، معادله پیوستگی و معادله حرکت را برای حرکت این سیال در فاصله $r_1 \le r \le r_2$ بنویسید.
- با فرض جریان خزشی، با اعمال شرایط مرزی درست، تابع توزیع سرعت و فشار سیال را به دست آورید.



ج: همان طور که در صورت مساله آمده ابتدا معادلات پیوستگی و حرکت را نوشته و فرضیات مساله را بر معادلات اعمال کرده آن گاه با استفاده از شرایط مرزی ، توابع توزیع فشار و توزیع سرعت را به دست می آوریم.

۹. فهرست منابع درس

- Frank M. White, 2003, *Fluid Mechanics*, second edition, McGraw-Hill.
- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid Mechanics for Chemical Engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, *Transport Phenomena*, second edition**,** J. Wiley.
- Ron Darby, 2001, *Chemical Engineering Fluid mechanics*, second edition, Marcel Dekker.
- Currie I.G., 2003, *Fundamental Mechanics of Fluids*, third edition, Marcel Dekker.

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل نهم

جریان‌های پتانسیلی و توابع پتانسیل

۱. مقدمه

در فصل‌های پنجم و هفتم به تحلیل جریان‌های ویسکوز پرداخته شد. در جریان‌های ویسکوز از عبارت‌های اینرسی یا نیروهای شتابی در معادلات حرکت صرف نظر شد و اشاره شد که معمولاً در $Re \ll 1$ می‌توان از نیروهای اینرسی چشم پوشی نمود. لیکن در جریان سیالات دور از مرزهای جامد، اثرات ویسکوزیته قابل اغماض می‌باشد. در فصل ششم در آنالیز ابعادی معادلات ناویر- استوکس توضیح داده شد که در سیالات با عدد رینولدز بالا ($Re \gg 1$)، از فشار مشخصه ρU^2 برای بدون بعد کردن فشار در معادله حرکت استفاده می‌شود. در آن جا معادله بدون بعد ناویر- استوکس به صورت ذیل به دست آمد:

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \cdot \nabla \vec{v}^* = -\nabla \overline{P}^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}^* \tag{۹-۱}$$

ملاحظه می‌شود که در شرایطی که $Re \gg 1$ باشد، عبارت‌های ویسکوز از معادله بالا حذف می‌شود، به طوری که معادله حرکت به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \cdot \nabla \vec{v}^* = -\nabla \overline{P}^* \\ \frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} = -\nabla \overline{P}^* \end{gathered} \tag{۹-۲}$$

معادله (۲-۹) برای مجاری باز به صورت واقعی به شکل ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F} \tag{۹-۳}$$

که $\vec{F}$، بردار نیروهای جرمی یا گرانشی است و به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\vec{F} = -\nabla \phi = -\nabla (gh) \tag{۹-۴}$$

که ϕ به عنوان پتانسیل نیروی جرمی[1] شناخته می‌شود.

[1] Body-Force Potential

به جریان سیالاتی که از نیروهای ویسکوز صرفنظر می‌شود سیال غیر لزجی گفته می‌شود. معمولاً به جریان‌های هوا در مجاری اطراف هواپیما، جریان آب در دریاچه‌ها و بنادر، امواج سطحی روی آب، حرکت هوا در گردبادها و غیره، غیر لزجی یا به عبارتی جریان‌های پتانسیلی گفته می‌شود.

بنابراین معادله‌های هیدرودینامیکی برای جریان‌های غیر لزجی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right) = -\nabla P - \rho g \nabla h \qquad (۹-۵)$$

$$\nabla.\vec{v} = 0$$

پس جریان سیالات غیر لزجی در دو حالت جواب‌های تقریبی مناسبی ارائه می‌دهند. اول این که تقریب غیر لزجی در مجاری دور از مرز جامد نتایج خیلی خوبی ارائه می‌دهدو ثانیاً برای جریان‌های داخل مجاری بسته در ابتدا و انتهای مجاری که هنوز لایه مرزی[۲] توسعه نیافته است، استفاده از تقریب غیر لزجی مناسب می‌باشد. در حوالی مرز جامد که نیروهای ویسکوز حاکم بوده و گرادیان سرعت شدید می‌باشد، تئوری لایه مرزی حاکم می‌باشد که در فصل نه به آن پرداخته خواهد شد. بنابراین جریان سیالات خارج از لایه مرزی در عدد رینولدز خیلی بالا از تئوری جریان سیالات غیر لزجی استفاده می‌شود.

در این جا لازم است که حالت‌های خاص از جریان‌های غیر لزجی مورد بررسی قرار گیرد. زیر مجموعه سیالات غیر لزجی، جریان‌های ایده‌آل[۳] و جریان‌های پتانسیلی[۴] می‌باشند. به جریان‌هایی ایده‌آل گفته می‌شود که غیر تراکمی (دانسیته ثابت) بوده و از معادلات اویلر (معادله (۵-۹)) پیروی نماید.

جریان سیال پتانسیلی به جریان‌هایی اطلاق می‌شود که غیر چرخشی[۵] باشند، به عبارتی جریانی غیر چرخشی است که بردار گردابش صفر باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\text{غیر چرخشی} \rightarrow \qquad \vec{\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{v} = 0$$

---

[2] Boundary Layer
[3] Ideal Fluid Flow
[4] Potential Flow
[5] Irrotational

در فصل چهار به بردار گردابش و مفهوم غیر چرخشی پرداخته شد.

حال زمانی $\nabla \times \vec{v} = 0$ می‌باشد که سرعت به صورت گرادیان یک تابع اسکالر به صورت ذیل تعریف شود:

$$\vec{v} = \nabla\phi \tag{۹-۶}$$

در این جا تابع اسکالر $\phi(t,x,y,z)$ به عنوان تابع سرعت پتانسیل[۶] شناخته می‌شود. پس جریان‌های پتانسیلی به جریان-هایی اطلاق می‌شود که غیر چرخشی بوده و از رابطه (۹-۶) پیروی نماید.

۲. معادله برنولی[۷]

برای جریان‌های غیر لزجی، با حذف عبارت (نیروهای) ویسکوز معادله اویلر به دست آمد. از طرف دیگر عبارت ویسکوز در دو حالت حذف می‌شود. اول در شرایطی که $\mu=0$ قرار بدهیم و در حالت دوم زمانی که بردار گردابش[۸] صفر باشد.

در معادله ناویر- استوکس با قرار دادن $\mu=0$ و استفاده از روابط (۹-۳) و (۹-۴) به معادله ذیل می‌رسیم:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + gz\right) \tag{۹-۷}$$

با استفاده از حساب بردارها می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right) - \vec{v} \times \vec{\xi} \tag{۹-۸}$$

که $\vec{\xi}$ بردار گردابش می‌باشد که در فصل چهارم به صورت ذیل تعریف گردید:

$$\vec{\xi} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z} = \nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega} \tag{۹-۹}$$

که $\vec{\omega}$، بردار سرعت زاویه‌ای می‌باشد.

بنابراین با ترکیب معادلات (۹-۷) و (۹-۸) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\xi} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + gh\right) \tag{۹-۱۰}$$

---

[6] Velocity Potential
[7] Bernoulli Equation
[8] Vorticity Vector

پس معادله (۱۰-۹) برای جریان پایدار[9] به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2+gh\right)=\vec{v}\times\vec{\xi} \qquad (۹-۱۱)$$

چون $\vec{v}\times\vec{\xi}$ یک بردار می‌باشد که جهت آن عمود بر سطوح دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{\xi}$ می‌باشد، پس عبارت داخل پرانتز در طرف چپ معادله (۱۱-۹) نیز یک کمیت اسکالر است که به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2+gh=c \qquad (۹-۱۲)$$

در این جا مقدار c برای هر صفحه خاص ثابت می‌باشد. در صورتی که c برای تمام صفحات ثابت باشد به معادله (۱۲-۹) معادله معروف برنولی اطلاق می‌شود که برای سیالات ایده‌آل بدون اصطکاک استفاده می‌شود.

برای جریان‌های غیرچرخشی گذرای[10] ناپایدار، "معادله ناپایدار برنولی" به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2+gh\right) \qquad (۹-۱۳)$$

۳. جریان پتانسیلی

برای جریان‌های پتانسیلی لازم نیست که معادله اویلر مستقیماً حل گردد. در این گونه جریان‌ها چون بردار گردابش صفر می‌باشد، پس می توان تابع سرعت پتانسیلی را به صورت ذیل تعریف نمود، به طوری که با مشتق گیری از این تابع مؤلفه-های سرعت در جریان پتانسیلی به دست می‌آید:

$$\vec{\xi}=2\vec{\omega}=\nabla\times\vec{v}=0$$
$$\vec{v}=\nabla\phi \;:\; v_x=\frac{\partial\phi}{\partial x} \;;\; v_y=\frac{\partial\phi}{\partial y} \;;\; v_z=\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (۹-۱۴)$$

حال جریان پتانسیلی برای یک مجرای دو بعدی که مؤلفه‌های سرعت آن v_x و v_y می‌باشد، در نظر بگیرید. در این جریان، تابع جریان به صورت $\psi=\psi(x,y)$ تعریف می‌شود. بنابراین مؤلفه‌های سرعت به دو صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad (۹-۱۵)$$

9 Steady Flow
10 Transmit

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

با جاگذاری مؤلفه‌های سرعت از معادلات (۱۵-۹) در معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{۹-۱۶}$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{۹-۱۷}$$

که به معادلات (۱۶-۹) و (۱۷-۹) روابط لاپلاسی و به روابط (۱۵-۹) معادلات کوشی-ریمان[11] اطلاق می‌شود. حال دیفرانسیل کل دو تابع ϕ و ψ را می‌نویسیم:

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy \tag{۹-۱۸}$$

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dy \tag{۹-۱۹}$$

معادلات (۱۸-۹) و (۱۹-۹) بر حسب مؤلفه‌های سرعت نوشته می‌شود. همچنین فرض می‌شود که ϕ و ψ مقادیر ثابتی باشند.

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy = 0 \tag{۹-۲۰}$$

$$d\phi = v_x dx + v_y dy = 0 \tag{۹-۲۱}$$

با جابجایی عبارت‌ها در روابط (۲۰-۹) و (۲۱-۹) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi = \frac{v_y}{v_x} \tag{۹-۲۲}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\phi = -\frac{v_x}{v_y} \tag{۹-۲۳}$$

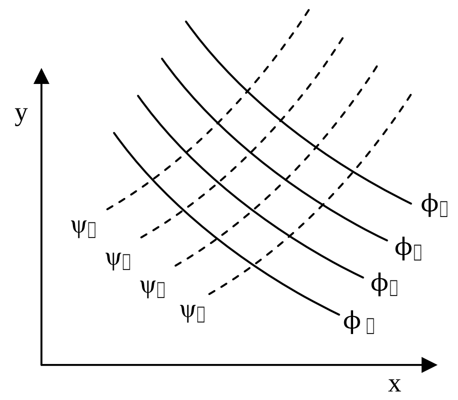
حال ملاحظه می شود که روابط (۲۲-۹) و (۲۳-۹) ضریب زوایای مماس بر منحنی‌های جریان ψ و سرعت پتانسیلی ϕ را نشان می دهند. از طرفی ملاحظه می گردد که حاصلضرب روابط مذکور برابر ۱- می‌گردد ($\nabla\phi.\nabla\psi=-1$). به عبارتی می توان نتیجه گرفت که اگر حاصلضرب ضریب زاویه دو خط مماس ۱- باشد، پس دو منحنی ψ و ϕ ثابت بر هم عمودند. شکل (۱-۹) خطوط جریان و سرعت های پتانسیلی عمود بر هم را نشان می دهد.

[11] Cauchy-Riemann

جریان پتانسیلی در مختصات استوانه ای به صورت ذیل ارائه می شود. برای یک جریان دو بعدی در مختصات استوانه ای اگر $v_z=0$ فرض شود، مولفه های سرعت بر حسب تابع سرعت پتانسیلی $\phi\ (r,\theta)$ و تابع جریان $\psi(r,\theta)$ به صورت ذیل نوشته می شود:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad (۹-۲۴)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad (۹-۲۵)$$



شکل ۱-۹: خطوط جریان و سرعت پتانسیلی عمود بر هم در جریان دو بعدی

معادله پیوستگی و شرایط غیرچرخشی بودن به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \qquad (۹-۲۶)$$

$$\vec{\xi}(r,\theta) = \nabla \times \vec{v}(r,\theta) = 0 \qquad (۹-۲۷)$$

$$\xi_z = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} = 0 \qquad (۹-۲۸)$$

پس با جایگذاری روابط (۹-۲۴) و (۹-۲۵) در معادلات (۹-۲۶) و (۹-۲۸) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (۹-۲۹)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (۹-۳۰)$$

برای جریان پتانسیلی که $v_\theta = 0$ باشد، مولفه های سرعت بر حسب $\psi(r,z)$ و $\phi(r,z)$ به صورت ذیل نوشته می شود:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{۹-۳۱}$$

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{۹-۳۲}$$

همچنین معادله پیوستگی و شرایط غیرچرخشی به صورت ذیل حاصل می شود:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{۹-۳۳}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \tag{۹-۳۴}$$

بنابراین برای به دست آوردن مولفه های سرعت در جریان پتانسیلی لازم است که معادلات لاپلاس را در دستگاه مختصات مربوط با استفاده از روش های عددی یا آنالوگ های مکانیکی و یا از برهم نهش توابع اولیه حل نمود.

برای به دست آوردن P=P(x,y) ، با داشتن مولفه های سرعت، از معادله برنولی استفاده می شود. پس راه حل عمومی برای جریان های پتانسیلی به صورت ذیل خلاصه می شود:

معادله پیوستگی $\xleftarrow{\text{استفاده از تابع پتانسیلی}}$ معادله لاپلاس $\leftarrow$ مولفه های سرعت

معادله مومنتوم اویلر $\xleftarrow{\vec{\xi}=0}$ معادله برنولی $\leftarrow$ توزیع فشار

شرایطی مرزی در جریان های پتانسیلی برای حل معادلات لاپلاس مقداری متفاوت با سیالات ویسکوز می باشد. اصل عدم لغزش[12]در مرزهای جامد برای این گونه سیالات برای مرزهای جامد و مرزهای جامد متحرک به صورت ذیل استفاده می شود. برای سیالات ویسکوز تمام مؤلفه های مماسی و عمودی در مرز جامد ساکن برابر صفر در نظر گرفته می شود. لیکن برای سیالات غیر ویسکوز فقط مولفه های عمودی سرعت بر مرزهای جامد صفر می شود. لیکن مؤلفه های مماسی وجود خواهد داشت. چون گرادیان سرعت در مرز جامد وجود ندارد. پس می توان نوشت:

[12] No slip condition

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=0$$ (برای مرز جامد ساکن) (۹-۳۵)

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=U\cdot\vec{n}$$ (برای مرز جامد متحرک با سرعت U) (۹-۳۶)

که بردار $\vec{n}$ برداری عمودی بر سطح مرز جامد می باشد و U بردار سرعت جسم می باشد. برای جریان‌های آزاد که مولفه سرعت به صورت $v_x = V^\infty$ باشد، شرایط مرزی به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=V^\infty$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=v_y=0 \qquad (۹-۳۷)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=v_z=0$$

۴. تابع پتانسیل کمپلکس[۱۳] و سرعت کمپلکس[۱۴]

در قسمت قبل اشاره شد که برای جریان های پتانسیلی دو بعدی می توان دو تابع اسکالر $\psi(x,y)$ و $\phi(x,y)$ را تعریف نمود به گونه ای که معادله لاپلاس برای هر دو تابع از معادله پیوستگی به دست آید. در نظریه تابع کمپلکس ثابت شده است که اگر دو معادله لاپلاسی برای دو تابع اسکالر عددی وجود داشته باشد، می توان یک تابع پتانسیل کمپلکس تعریف کرد که دو تابع اسکالر به صورت ذیل بخش های واقعی و موهومی تابع پتانسیل مذکور را تشکیل دهند:

$$F(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y) \qquad (۹-۳۸)$$

$\phi(x,y)$: بخش واقعی تابع F

$\psi(x,y)$: بخش موهومی تابع F

که z متغیر کمپلکس بوده و به صورت ذیل تعریف می شود:

$$z=x+iy$$ مختصات دکارتی (۹-۳۹)

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$ مختصات قطبی (۹-۴۰)

که در این جا $i=\sqrt{-i}$ عدد کمپلکس می باشد.

---

[13] Complex Potential Function
[14] Complex velocity

حال اگر F(z) یک تابع تحلیلی[۱۵] باشد، آنگاه ϕ و ψ به طور خودکار معادلات کوشی-ریمان (معادلات ۱۵-۹) را ارضا خواهد نمود. پس با داشتن چنین تابعی برای F(z)، قسمت واقعی تابع مذکور برای ϕ و قسمت موهومی تابع مذکور برای ψ در نظر گرفته می شود. به این ترتیب نظریه متغیرهای کمپلکس معادلات $\nabla^2\psi=0$ و $\nabla^2\phi=0$ را تضمین خواهد نمود. تابع ثابت ψ میدان جریان حرکت سیال پتانسیلی را توصیف می نماید. بنابراین با این روش می توان مؤلفه های سرعت را از توابع ψ یا ϕ به دست آورد.

نقص این روش این است که ابتدا باید توابع کمپلکس را از قبل تعیین نمایید، و سپس تست نمایید که جواب های به دست آمده برای مولفه های سرعت با واقعیت فیزیکی جریان منطبق می باشد. نقص دوم این است که برای جریان های سه بعدی روش نظریه کمپلکس را نمی توان اعمال نمود. به هر حال از مزایای این روش عدم استفاده از حساب دیفرانسیل برای حل معادلات حرکت می باشد. پس می توان روش مذکور را به صورت ذیل خلاصه نمود:

$$\text{تابع کمپلکس} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{قسمت موهومی}} \psi(x,y) \\ \xrightarrow{\text{قسمت واقعی}} \phi(x,y) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مولفه های سرعت} \xrightarrow{\text{معادله برنولی}} \text{تابع توزیع فشار}$$

سرعت کمپلکس با مشتق‌گیری از تابع کمپلکس F(z) حاصل می‌شود. در نظریه کمپلکس ثابت می‌شود که مشتق dF/dz تابعی نقطه‌ای است که مقدارش مستقل از جهت مشتق‌گیری این تابع می باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که :

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (۹-۴۱)$$

که رابطه (۴۱-۹) سرعت کمپلکس نامیده می شود. بنابراین با استفاده از روابط (۱۵-۹) خواهیم داشت :

$$w(z) = v_x + iv_y \qquad (۹-۴۲)$$

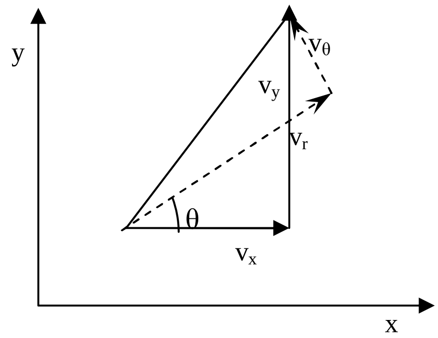
سرعت کمپلکس مزدوج[۱۶] نیز به صورت ذیل نوشته می شود :

$$\overline{w}(z) = v_x - iv_y \qquad (۹-۴۳)$$

که خواهیم داشت :

[15] Analytical
[16] Conjugate

$$w\bar{w} = (v_x - iv_y)(v_x + iv_y) = {v_x}^2 + {v_y}^2 = |v|^2 \qquad (۹-۴۴)$$



شکل ۲-۹: مولفه های سرعت در دو دستگاه مختصات دکارتی و قطبی

مؤلفه های سرعت در دستگاه مختصات قطبی مطابق شکل (۲-۹)، به صورت ذیل به دست می آیند:

$$v_x = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta \qquad (۹-۴۵)$$

$$v_y = v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta \qquad (۹-۴۶)$$

پس سرعت کمپلکس در مختصات قطبی (استوانه ای) با جایگذاری معادلات (۴۵-۹) و (۴۶-۹) در معادله (۴۲-۹) به صورت ذیل نوشته می شوند:

$$\begin{gathered} w(z) = v_x - iv_y = (v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta) - i(v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta) \\ w(z) = v_r(\cos\theta - i\sin\theta) - iv_\theta(\cos\theta - i\sin\theta) \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \\ w(z) = (v_r - iv_\theta)e^{-i\theta} \end{gathered} \qquad (۹-۴۷)$$

۵. نظریه کمپلکس[۱۷] و اصل برهمنهش[۱۸]

در نظریه کمپلکس بیان می نماید که اگر چند تابع کمپلکس به صورت های $F_1(z)$، $F_2(z)$ و .... داشته باشیم، که هرکدام از توابع مذکور یک جریان پتانسیلی را توصیف نمایند، پس مجموع توابع مذکور یک تابع جدید کمپلکس را تشکیل می دهد به طوری که تابع جدید یک جریان پتانسیلی خاص را توصیف نماید.

$$\left.\begin{matrix} F_1(z) \longrightarrow \phi_1, \psi_1 \\ F_2(z) \longrightarrow \phi_2, \psi_2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{پس}} F(z) = F_1(z) + F_2(z) \Rightarrow \phi\,, \psi$$

[17] Complex Theory
[18] Principle of Superposition

به عبارتی دیگر می توان نتیجه گیری نمود که:

$$\left.\begin{array}{r} F_1(z) \longrightarrow \nabla^2\phi_1 = 0,\ \ \nabla^2\psi_1 = 0 \\ F_2(z) \longrightarrow \nabla^2\phi_2 = 0, \nabla^2\psi_2 = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow F(z) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2(\phi) = 0;\ \ (\phi = \phi_1 + \phi_2) \\ \nabla^2(\psi) = 0;\ \ (\psi = \psi_1 + \psi_2) \end{array}\right.$$

بنابراین با داشتن توابع کمپلکس برای جریان های ساده پتانسیلی می توان با جمع جریان های مذکور تابع جدیدی برای ϕ و ψ به دست آورد که جریان های بسیار پیچیده پتانسیلی را توصیف نماید. در بخش های بعد ابتدا به جریان های ساده پرداخته می شود و سپس معادلات سرعت و فشار برای جریان های پتانسیلی پیچیده حاصل می شود.

۶. توابع پتانسیلی کمپلکس برای جریان های ساده پتانسیلی

در این جا جریان های ساده پتانسیلی در سه دسته جریان های یکنواخت[۱۹]، جریان چشمه و چاه[۲۰]، و جریان گرداب[۲۱] مورد بررسی قرار می دهیم.

۶-۱. جریان یکنواخت

جریان ساده یکنواخت به صورت ذیل توصیف می شود: $v_x=U$ ، $v_y=0$. پس توابع ψ و ϕ را می توان از معادلات دیفرانسیل ساده ذیل به دست آورد:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = U = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (۹-۴۸)$$

$$v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (۹-۴۹)$$

با انتگرالگیری از روابط (۹-۴۸) و (۹-۴۹) خواهیم داشت:

$$\psi = Uy + f(x) \qquad ; \qquad \psi = g(y) \quad (۹-۵۰)$$

بنابراین دو تابع $g(y)$ و $f(x)$ ثابت های انتگرالگیری هستند که از انتگرالگیری مشتق های جزیی به دست آمده اند. با توجه به این که با مشتق گیری توابع مذکور ثابت ها حذف می شوند، مقدارشان اختیاری است، پس فرض می نماییم $f(x)=g(y)=0$ می باشند. پس برای جریان یکنواخت خواهیم داشت:

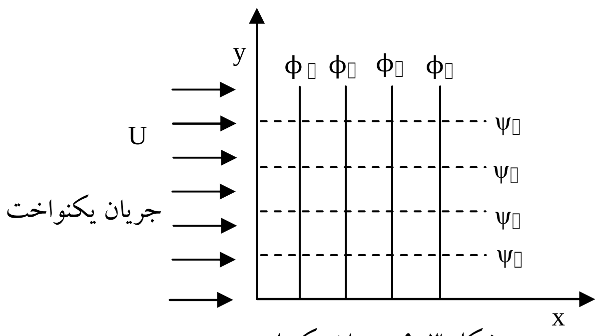
[19] Uniform flow
[20] Source & sink
[21] Vortex

$$\psi = Uy \qquad (۹-۵۱)$$

از طرفی چون تابع ϕ عمود بر ψ می باشد، از روابط (۴۸-۹) و (۴۹-۹) می توان نوشت:

$$\phi = Ux \qquad (۹-۵۲)$$

شکل (۳-۹) خطوط جریان و پتانسیلی را برای جریان یکنواخت نشان می دهد.



شکل ۳-۹: جریان یکنواخت

حال برای جریان یکنواخت تابع کمپلکس را به شکل ذیل می بنویسیم :

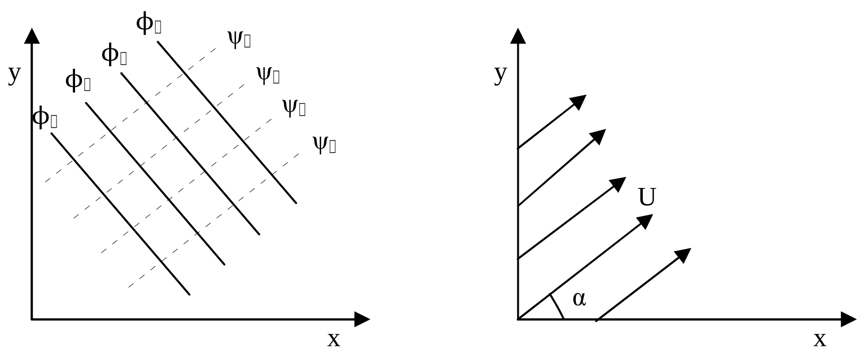
$$F(z) = Cz \quad ; \qquad C = \text{ثابت} \qquad (۹-۵۳)$$

$$W(z) = \frac{dF}{dx} = C \qquad (۹-۵۴)$$

$$W(z) = v_x - iv_y = U = C \qquad (۹-۵۵)$$

چون تابع F برای جریان یکنواخت صادق است، پس تابع $F(z)=Uz$ تابع کمپلکس مناسب برای این جریان می باشد.

حال جریان یکنواخت را در نظر بگیرید که با محور xها زاویه α مطابق شکل (۴-۹)، می سازد:



شکل ۴-۹: جریان پتانسیلی یکنواخت مورب با زاویه α

مشاهده می شود که $v_x = U\cos\alpha$ و $v_y = U\sin\alpha$ می باشد، لذا داریم:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \therefore \qquad \psi = U\cos\alpha + f(x) \tag{۹-۵۶}$$

$$v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad \therefore \qquad \psi = -U\sin\alpha + g(x) \tag{۹-۵۷}$$

پس با فرض $f(x)=g(x)=0$ رابطه های ψ و ϕ به دست می آید:

$$\psi = U(y\cos\alpha - x\sin\alpha) \tag{۹-۵۸}$$

$$\phi = U(x\cos\alpha + y\sin\alpha) \tag{۹-۵۹}$$

بنابراین برای جریان یکنواخت مورب با زاویه α ، $F(z)$ به صورت ذیل تعریف می شود:

$$F(z) = Ce^{-i\alpha}z$$
$$w(z) = \frac{dF}{dz} = C(\cos\alpha - i\sin\alpha) = v_x - iv_y = U(\cos\alpha - i\sin\alpha) \tag{۹-۶۰}$$

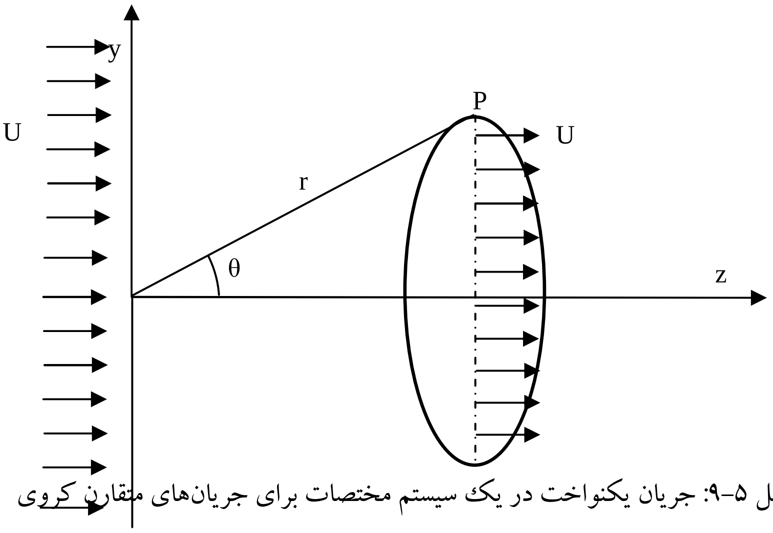
پس $C=U$ می باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$F(z) = Ue^{-i\alpha}z \tag{۹-۶۱}$$

۲-۶. جریان یکنواخت در سیستم سه بعدی[22]

برای جریان های پتانسیل سه بعدی لازم است که جریان یکنواخت برای حالت جریان های متقارن تعریف شود. جریان های یکنواخت اطراف کره مورد توجه می باشد. مختصات قطبی کروی در یک سیستم کروی متقارن مطابق شکل(۵-۹) نشان داده شده است:

[22] Uniform Stream in 3D



شکل ۵-۹: جریان یکنواخت در یک سیستم مختصات برای جریان‌های متقارن کروی

جهت حرکت سیال z می باشد و شعاع دایره $r\ \sin\theta$ بوده که از نقطه P می گذرد. دبی جریان که از دایره می گذرد به صورت ذیل نوشته می شود:

$$Q = \pi(r\sin\theta)^2 U$$

مولفه های سرعت U بر حسب مختصات قطبی به صورت $v_r = U\cos\theta$ و $v_\theta = -U\sin\theta$ می باشد. چون $U^2 = v_\theta^2 + v_r^2$ می باشد. از طرفی مولفه های سرعت بر حسب ϕ و ψ به صورت ذیل نوشته می شود:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U\cos\theta \qquad (۹-۶۲)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\sin\theta \qquad (۹-۶۳)$$

پس باا نتگرالگیری از معادلات (۹-۶۲) و (۹-۶۳) خواهیم داشت:

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta \qquad (۹-۶۴)$$

$$\phi(r,\theta) = Ur\cos\theta \qquad (۹-۶۵)$$

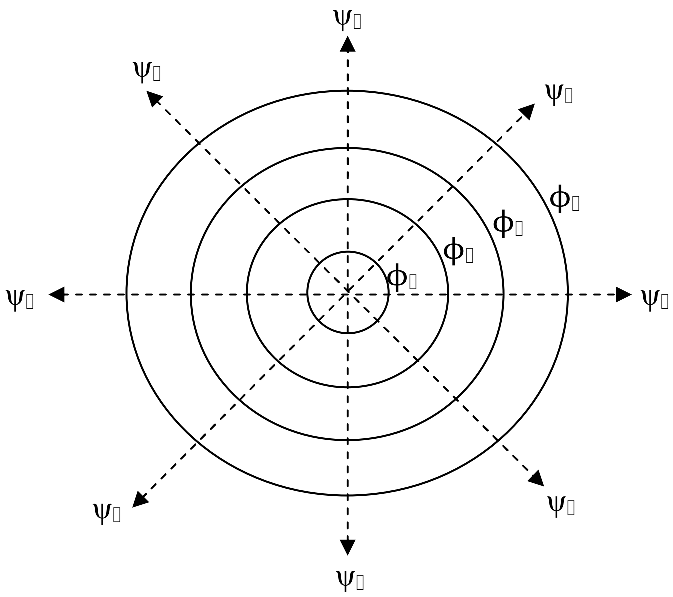
باید توجه داشت که در جریان های سه بعدی تابع کمپلکس تعریف نشده است.

۶-۳. جریان چشمه و چاه نقطه ای در مختصات قطبی کره ای[23]

جریان چشمه جریانی پتانسیلی است که در مرکز هندسی یک کره فرضی قرار دارد و جریان سیال در جهت تمام شعاع های کره فرضی از چشمه جاری است. خطوط جریان و پتانسیل در مختصات قطبی در شکل (۶-۹) نشان داده شده است. قدرت چشمه به صورت m نشان داده شده است و برحسب دبی حجمی سیال به طور عمود بر سطح کره به طرف بیرون جریان دارد. برای به دست آوردن m، کره ای فرضی را در نظر بگیرید که شعاع آن r باشد، پس خواهیم داشت: $4\pi m = v_r(4\pi r^2)$ از این جا سرعت شعاعی جریان به صورت ذیل به دست می آید:

$$v_r = \frac{m}{r^2} \qquad (۹-۶۶)$$

چون v_θ برابر صفر است، پس ψ و ϕ در مختصات قطبی کروی به صورت ذیل به دست می آید:



شکل ۶-۹: خطوط جریان و پتانسیل در چشمه نقطه ای در مختصات قطبی

$$v_r = \frac{m}{r^2} = \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad (۹-۶۷)$$

$$v_\theta = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad (۹-۶۸)$$

[23] Point Source, Sink in spherical polar coordinate

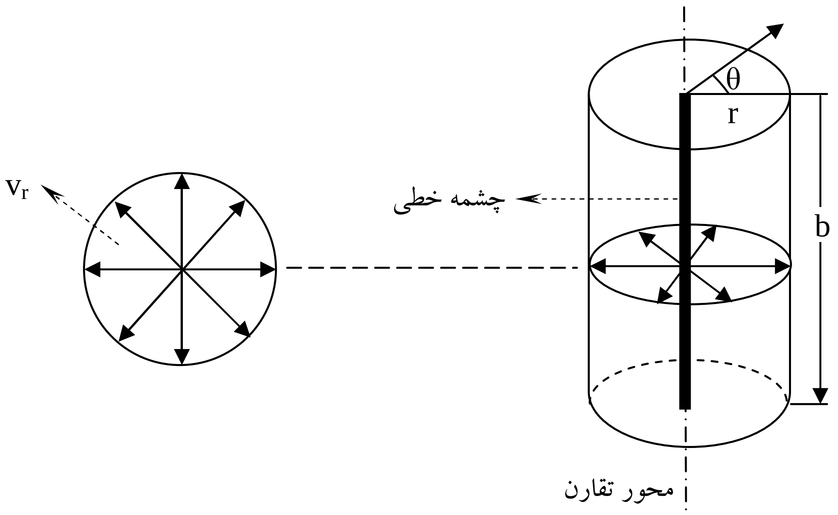
پس با انتگرال گیری از معادلات (۶۷-۹) و (۶۸-۹) خواهیم داشت:

$$\psi = m\cos\theta = \frac{mz}{r}$$
$$\phi = -\frac{m}{r} \qquad (۹-۶۹)$$

۴-۶. جریان پتانسیلی چشمه خطی[۲۴]

جریان چشمه خطی به صورت جریان شعاعی از یک منبع سیال خطی به صورت متقارن از سطح جانبی یک استوانه فرضی در نظر گرفته می شود. شکل (۷-۹) سطح مقطع و یک چشمه خطی را نشان می دهد. مطابق شکل، محور z از یک لوله بسیار باریک که در تمام اطراف آن در طول لوله دارای سوراخ های بسیاری است تشکیل شده است، دبی حجمی جریان برابر با حجم سیالی است که بر واحد زمان از سطح جانبی استوانه در شعاع r عبور می کند:

$$Q = v_r(2\pi rb) = \text{ثابت}$$



ب- سطح مقطع استوانه در r
الف- چشمه خطی

شکل ۷-۹: چشمه خطی

که b طول استوانه و v_r سرعت شعاعی چشمه خطی می باشد. همان گونه که ملاحظه می شود دبی همواره ثابت بوده و هرچه سیال از محور چشمه دور می شود سرعت آن کاهش می یابد. بنابراین سرعت شعاعی چشمه به صورت ذیل نوشته می شود:

---
[24] Line Source

$$v_r = \frac{m}{r} \qquad ; \qquad m = rv_r \qquad (۹\text{–}۷۰)$$

لذا خواهیم داشت:

$$Q = 2\pi mb \qquad ; \qquad m = \frac{Q}{2\pi b} \qquad (۹\text{–}۷۱)$$

بنابراین مؤلفه های سرعت برحسب ϕ و ψ به صورت ذیل نوشته می شود:

$$v_r = \frac{m}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad (۹\text{–}۷۲)$$

$$v_\theta = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad (۹\text{–}۷۳)$$

با انتگرالگیری معادلات (۷۲-۹) و (۷۳-۹) توابع جریان و پتانسیلی به صورت ذیل به دست می آید:

$$\phi = m\ln r \qquad ; \qquad \psi = m\theta \qquad (۹\text{–}۷۴)$$

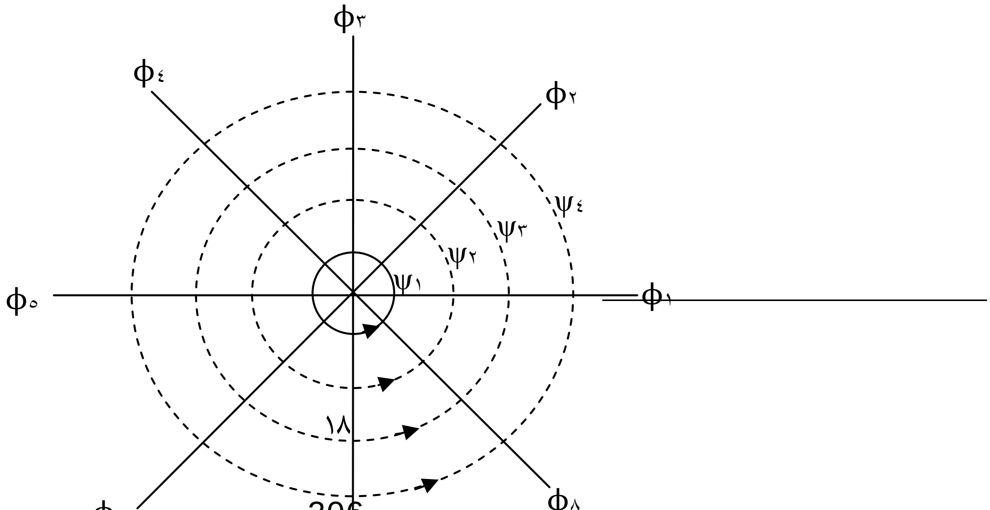
به همین ترتیب توابع کمپلکس برای چشمه خطی به صورت ذیل نوشته می شود:

$$F(z) = m\ln z \qquad (\text{چشمه خطی در } z = 0) \qquad (۹\text{–}۷۵)$$

$$F(z) = m\ln(z - z_0) \qquad (\text{چشمه خطی در } z = z_0) \qquad (۹\text{–}۷۶)$$

۵-۶. گرداب خطی[۲۵]

گرداب خطی جریان پتانسیل غیر چرخشی است که جریان غیر ویسکوز حول محور z به صورت دایره‌ای می‌چرخد و بر خلاف جریان چشمه خطی، سرعت جریان در جهت شعاع‌های استوانه صفر می‌باشد. شکل (۸-۹) دیاگرام یک گرداب خطی را همراه با خطوط جریان و پتانسیلی نشان می‌دهد.



[25] Line Vortex

شکل ۸-۹: گرداب آزاد

در این جا $v_r=0$ بوده، لیکن $v_\theta=c/r$ فرض می‌شود. به عبارتی هر چه از محور z دور می‌شویم سرعت چرخشی کاهش پیدا می‌نماید. پس توابع ψ و ϕ به صورت ذیل به دست می‌آیند:

$$v_r = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \tag{۹-۷۷}$$

$$v_\theta = \frac{c}{r} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{۹-۷۸}$$

پس با انتگرال گیری از روابط (۷۶-۹) و (۷۷-۹) خواهیم داشت:

$$\psi = -c\ln r \qquad ; \qquad \phi = C\theta \tag{۹-۷۹}$$

از طرفی تابع کمپلکس برای گرداب خطی به شکل ذیل ارائه می‌شود:

$$F(z) = -ic\ln z \tag{۹-۸۰}$$

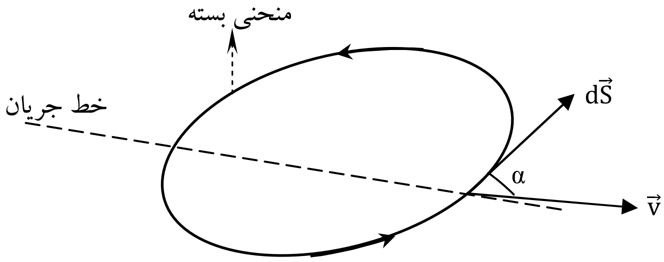
که علامت منفی به عنوان گرداب مثبت یعنی عکس حرکت عقربه‌های ساعت تلقی می‌شود. سرعت پتانسیلی نیز به شکل ذیل حاصل می‌شود:

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = -i\frac{c}{z} = -i\frac{c}{r}e^{-i\theta} \tag{۹-۸۱}$$
$$w(z) = (v_r - iv_\theta)e^{-i\theta}$$

از معادلات (۸۱-۹) می‌توان مؤلفه‌های سرعت را که قبلاً در بالا ارائه شده بود نشان داد. حال چگونه مقدار ثابت C را می‌توان محاسبه کرد؟ در این جا لازم است "گردابی[۲۶]" تعریف شود. در یک میدان جریان پتانسیل، گردابی در داخل یک منحنی بسته مطابق شکل (۹-۹) به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\Gamma = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{s} \tag{۹-۸۲}$$

که Γ یک انتگرال خطی بردار سرعت بوده که به صورت موضعی همواره به منحنی بسته مطابق شکل (۹-۹) وابسته می باشد

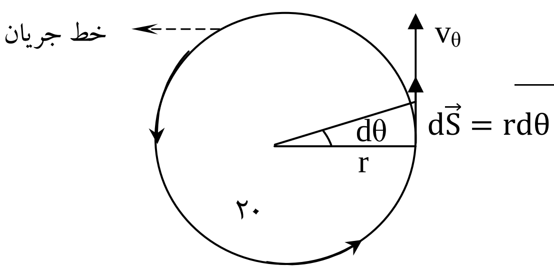


شکل ۹-۹: بردار سرعت در منحنی بسته

باید توجه داشت که گردابی از طریق تئوری استوکس به گردابش طبق رابطه‌ی ذیل مربوط می‌شود:

$$\Gamma = \int_c \vec{v}.d\vec{s} = \iint_{Area} \Big(\underbrace{\nabla \times \vec{v}}_{\xi}\Big).dA \tag{۹-۸۳}$$

البته گردابی همیشه در مرکز گرداب تعریف می‌شود، به طوری که فقط در مرکز $\xi \neq 0$ می‌باشد. مطابق شکل(۹-۹)، $d\vec{s}$ یک المان طولی از منحنی بسته می‌باشد. حال گردابی را برای یک جریان گرداب خطی مطابق شکل (۱۰-۹) به صورت ذیل می‌نویسیم:



[26] Circulation

۲۰

شکل ۱۰-۹: بردار سرعت در حرکت گردابی آزاد بر روی منحنی بسته

$$\Gamma = \oint_c \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta \qquad (۹-۸۴)$$

پس گردابی با جایگذاری $v_\theta=c/r$ در معادله (۸۴-۹) حاصل می‌شود.

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} c d\theta = 2\pi c \qquad ; \qquad c = \frac{\Gamma}{2\pi r} \qquad (۹-۸۵)$$

بنابراین سرعت گرداب به صورت $v_\theta=\Gamma/2\pi r$ و همچنین تابع کمپلکس به صورت ذیل برای گرداب خطی به دست می-آید. "Γ" را قدرت گرداب نیز می گویند.

$$F_z = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z-z_0) \qquad (\text{گرداب در } z=z_0) \qquad (۹-۸۶)$$

جدول (۱-۹) خلاصه توابع کمپلکس را برای جریان‌های ساده نشان می‌دهد.

جدول (۱-۹) خلاصه توابع کمپلکس را برای جریان‌های ساده

جریان پتانسیلی	F(z)	ψ	ϕ
جریان یکنواخت ساده دو بعدی	Uz	Uy	Ux
جریان یکنواخت با زاویه α دو بعدی	$Ue^{-i\alpha}z$	$U(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$	$U(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$
جریان چشمه و چاه خطی	$\pm m\ln(z-z_0)$	$m\theta$	$m\ln r$
جریان گرداب خطی	$\pm i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z-z_0)$	$-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	$\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$

۷. خلاصه (جمع بندی)

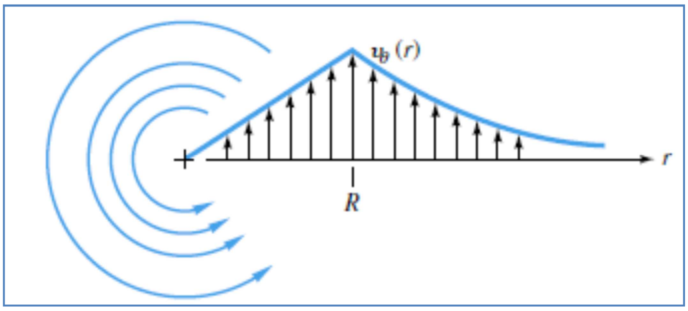
در جریان سیالات دور از مرزهای جامد، اثرات ویسکوزیته قابل اغماض می‌باشد. به جریان سیالاتی که از نیروهای ویسکوز صرفنظر می‌شود سیال غیر لزجی گفته می‌شود. در حوالی مرز جامد که نیروهای ویسکوز حاکم بوده و گرادیان سرعت شدید می‌باشد، تئوری لایه مرزی حاکم می‌باشد. به جریان‌هایی ایده‌آل گفته می‌شود که غیر تراکمی (دانسیته ثابت) بوده و از معادلات اویلر پیروی نماید. جریان سیال پتانسیلی به جریان‌هایی اطلاق می‌شود که غیر چرخشی باشند. دو منحنی تابع جریان ψ و تابع پتانسیل ϕ در مقادیر ثابت بر هم عمودند. برای جریان‌های پتانسیلی دو بعدی می توان دو تابع اسکالر ψ و ϕ را تعریف نمود به گونه‌ای که معادله لاپلاس برای هر دو تابع از معادله پیوستگی به دست آید. در نظریه تابع کمپلکس ثابت شده است که اگر دو معادله لاپلاسی برای دو تابع اسکالر عددی وجود داشته باشد، می توان یک تابع پتانسیل کمپلکس تعریف کرد که توابع اسکالر ψ و ϕ به ترتیب بخش های موهومی و واقعی تابع پتانسیل مذکور باشند. جریان چشمه نقطه ای جریانی پتانسیلی است که در مرکز هندسی یک کره فرضی قرار دارد و جریان سیال در جهت تمام شعاع های کره فرضی از چشمه جاری است. جریان چشمه خطی به صورت جریان شعاعی از یک منبع سیال خطی به صورت متقارن از سطح جانبی یک استوانه فرضی در نظر گرفته می شود. گرداب خطی جریان پتانسیل غیر چرخشی است که جریان غیر ویسکوز حول محور z به صورت دایره‌ای می‌چرخد و بر خلاف جریان چشمه خطی، سرعت جریان در جهت شعاع‌های استوانه صفر می‌باشد.

۸. پرسش های پایان درس

۱- یک گردباد را می توان به صورت جریانی در حال گردش نشان داد که در آن $v_r=v_z=0$ و نیز v_θ به صورت ذیل تعریف می شود:

$$v_\theta = \begin{cases} \omega r & r \le R \\ \dfrac{\omega R^2}{r} & r > R \end{cases}$$

- تعیین کنید که آیا این الگوی جریان غیرچرخشی است یا خیر؟
- با استفاده از معادله حرکت، توزیع فشار $p(r)$ را در گردباد به دست آورید. (در $r\to\infty$ فرض کنید که $p=p_\infty$)
- مقدار و محل فشار کمینه را به دست آورید.



شکل مربوط به مساله ۱

ج: از تعریف الگوی جریان چرخشی که در متن بیان شد، استفاده کرده چرخشی بودن جریان تعیین شود. معادله حرکت را برای سیستم مورد نظر نوشته آنگا ه با در اختیار داشتن معادله سرعت، می توان با اعمال شرایط مرزی حاکم بر سیستم، توزیع فشار را به دست آورد.

۲- خطوط جریان و خطوط پتانسیل را برای جریانی با چشمه خطی با قدرت m در (a,0) به علاوه یک چشمه با قدرت 3m در نقطه (-a,0) ترسیم کنید. الگوی جریانی که از دور دیده می شود چیست؟

ج: با استفاده از معادلات توابع پتانسیل مربوط به و با کمک اصل بر همنهش، خطوط جریان و پتانسیل قابل ترسیم اند.

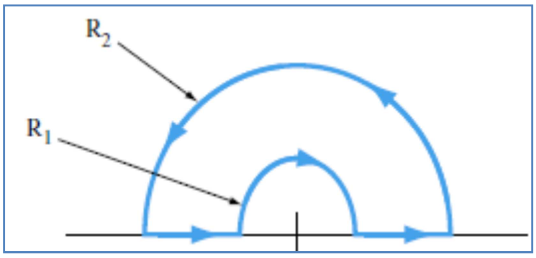
۳- یک جریان تراکم ناپذیر داری پتانسیل سرعت $\phi=2Bxy$ است که در آن B یک ثابت است. تابع جریان مربوط به حرکت این سیال را به دست آورید، خطوط جریان را ترسیم کرده و الگوی جریان را توصیف نمایید.

ج: از قایم بودن خطوط پتانسیل و جریان استفاده کرده با کمک روابط مربوطه، تابع جریان به دست می آید.

۴- نشان دهید که خطوط جریان در مختصات قطبی ($\psi(r,\theta)$) بر خطوط پتانسیلی ($\phi(r,\theta)$) عمودند.

ج: کافی است که نشان دهیم که در نقاط تقاطع این دو دسته خطوط، خطوط مماس بر خطوط پتانسیلی و خطوط جریان بر هم عمودند.

۵- صفحه ساکن در شکل زیر دارای سرعتی با مولفه های $v_\theta=\Omega r$ و $v_r=0$ است. گردابی Γ را حول مسیر نشان داده شده تعیین کنید.

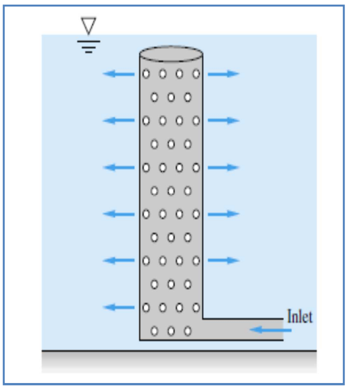


شکل مربوط به مساله ۵

ج: از تعریف ارائه شده برای گردابی در متن درس، معادله (۸۲-۹) برای به دست آوردن گردابی استفاده می شود.

۶- در یک نیروگاه برق، آب خنک‌کننده از طریق یک لوله چند راهه[۲۷]، که دارای ۲۵۰۰۰ روزنه ۱ سانتیمتری است، با قطر ۵۵ سانتیمتر و طول ۸ متر، تخلیه می شود. با فرض در نظر گرفتن این لوله چندراهه به صورت یک چشمه خطی، قدرت آن چقدر است؟

ج: از مفاهیم ارائه شده در بخش ۴-۶ استفاده کرده و قدرت این چشمه را با فرض دبی Q برای آب خنک کننده به دست آورید.



شکل مربوط به مساله ۶

[27] manifold

۹. فهرست منابع درس

- Frank M. White, 2003, *Fluid Mechanics*, second edition, McGraw-Hill.
- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid Mechanics for Chemical Engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, *Transport Phenomena*, second edition, J. Wiley.
- Ron Darby, 2001, *Chemical Engineering Fluid mechanics*, second edition, Marcel Dekker.
- Currie I.G., 2003, *Fundamental Mechanics of Fluids*, third edition, Marcel Dekker.

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل دهم

کاربرد جریان های پتانسیلی (غیرلزجی)

۱. مقدمه

همان طور که در فصل های گذشته بیان شد حل کامل معادله ناویر استوکس به صورت تحلیلی هنوز میسر نشده است لذا برای سیستم های مختلف از تقریب استفاده می شود تا با حذف برخی از ترم های معادله حرکت ناویر استوکس، معادله به طور تحلیلی قابل حل باشد. از جمله تقریب هایی که در گذشته بیان شد جریان سیالات با رینولدز پایین بود که در آن از اثر اینرسی در مقابل ویسکوز صرف نظر می شد. در فصل قبل گفته شد که برای جریان سیال دور از مرز جامد، و نیز نقاطی در جریان سیال که اثر ویسکوزیته بسیار پایین است مانند ابتدا و انتهای مجاری که هنوز جریان توسعه یافته نیست و به طور کل در خارج از لایه مرزی، می توان از اثر ویسکوزیته در مقابل اینرسی صرف نظر کرد و گفته شد که به این دسته از سیالات سیالات غیرلزجی گفته می شود که جریان های پتانسیلی نیز در این دسته قرار می گیرند. در فصل قبل جریان پتانسیلی و توابع پتانسیلی ساده به همراه اصل برهمنهش معرفی گردید. در این فصل برآنیم تا به برخی کاربردهای جریان های پتانسیلی در مکانیک سیالات اشاره ای داشته باشیم.

۲. کاربرد جریان‌های ساده یکنواخت، چشمه، چاه و گرداب در مختصات دو بعدی

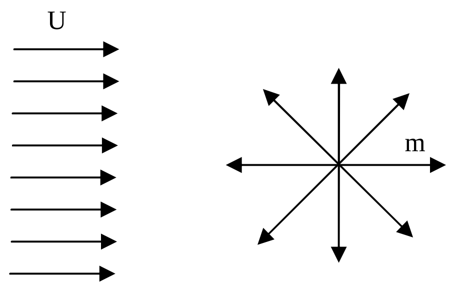
در فصل ۹ اصل بر همنهش توابع کمپلکس مورد بررسی قرار گرفت و توضیح داده شد که با جمع و یا ترکیب جریان-های ساده پتانسیلی می‌توان جریان‌های پیچیده‌تر پتانسیلی تولید نمود تا بدین وسیله جواب‌های تحلیلی مناسب با روش آسان‌تر برای چنین جریان‌های پتانسیلی به دست آورد. در این بخش به تحلیل جریان‌های مختلف پتانسیلی مانند جریان پتانسیلی اطراف کره، جریان پتانسیلی اطراف استوانه و غیره پرداخته می‌شود.

۲-۱. جریان پتانسیلی اطراف جسم نیمه‌ای رنکین[1]

حرکت یک جریان یکنواخت اطراف یک چشمه خطی را ملاحظه نمایید. با استفاده از اصل بر همنهش و استفاده از جدول (۱-۹) می‌توانیم بنویسیم:

$$F(z) = Uz + \frac{m}{2\pi}\ln z \qquad (۱۰-۱)$$

[1] Rankine Half Body



شکل ۱-۱۰: حرکت جریان یکنوخت و چشمه به طور مجزا

که معادله (۱-۱۰) تابع کمپلکس را برای جریان جدید که از جریان‌های یکنواخت و چشمه خطی تشکیل شده است، نشان می‌دهد. شکل (۱-۱۰) جریان یکنواخت و چشمه را به طور مجزا نشان می‌دهد. حال با استفاده از نظریه کمپلکس خواهیم داشت:

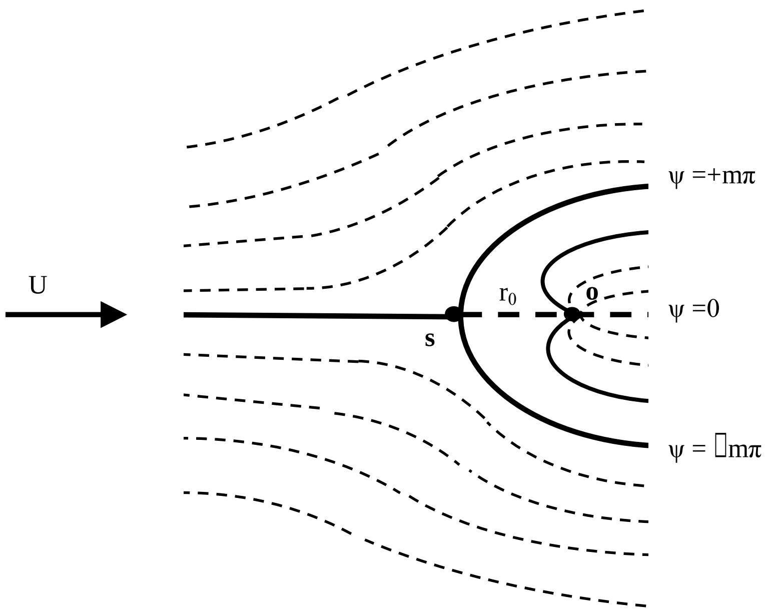
$$\psi = \underbrace{\overbrace{\mathrm{Ur}\sin\theta}^{\mathrm{Uy}}}_{\text{جریان یکنواخت}} + \underbrace{\mathrm{m}\theta}_{\text{چشمه}} \tag{۱۰-۲}$$

مرلفه‌های سرعت در مختصات استوانه‌ای بر حسب ψ به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}(\mathrm{Ur}\cos\theta + m) \tag{۱۰-۳}$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\sin\theta \tag{۱۰-۴}$$

دیاگرام جریان جدید حاصل از جمع دو جریان ساده مذکور در شکل (۲-۱۰) نشان داده شده است.



شکل ۲-۱۰: جریان پتانسیل اطراف چشم نیمه ای رنکین

همان گونه که شکل (۲-۱۰) نشان می‌دهد، جریان یکنواخت، چشمه را در یک جسم نیمه‌ای محبوس می‌نماید. اندازه جسم نیمه‌ای بستگی به شدت جریان یعنی سرعت U و قدرت چشمه یعنی m دارد.

مطابق شکل مذکور، نقطه s به عنوان نقطه سکون شناخته می‌شود که مؤلفه‌های سرعت یعنی $v_r=v_\theta=0$ می‌باشند. از طرفی خط مرزی یا خط جریان مرزی از نقطه سکون می گذرد. پس برای به دست آوردن نقطه سکون خواهیم داشت:

$$v_\theta = 0 \qquad ; \qquad U\sin\theta = 0 \qquad ; \qquad \theta = 0, \pi \tag{۱۰-۵}$$

$$v_r = 0 \qquad ; \qquad Ur\cos\theta + m = 0 \tag{۱۰-۶}$$

نقطه سکون در $\theta=\pi$ قرار دارد. پس معادله (۶-۱۰) برای به دست آوردن فاصله ما بین چشمه و نقطه سکون استفاده می-شود. پس با جاگذاری $\theta=\pi$ در معادله (۶-۱۰) خواهیم داشت:

$$r_0 = \frac{m}{U} \tag{۱۰-۷}$$

از طرفی برای به دست آوردن خط جریان مرزی که از نقطه S می گذرد، خواهیم داشت:

$$\psi = Ur\sin\theta + m\theta = U\left(\frac{m}{U}\right)\sin\pi + m\pi \qquad ; \qquad \psi = m\pi \tag{۱۰-۸}$$

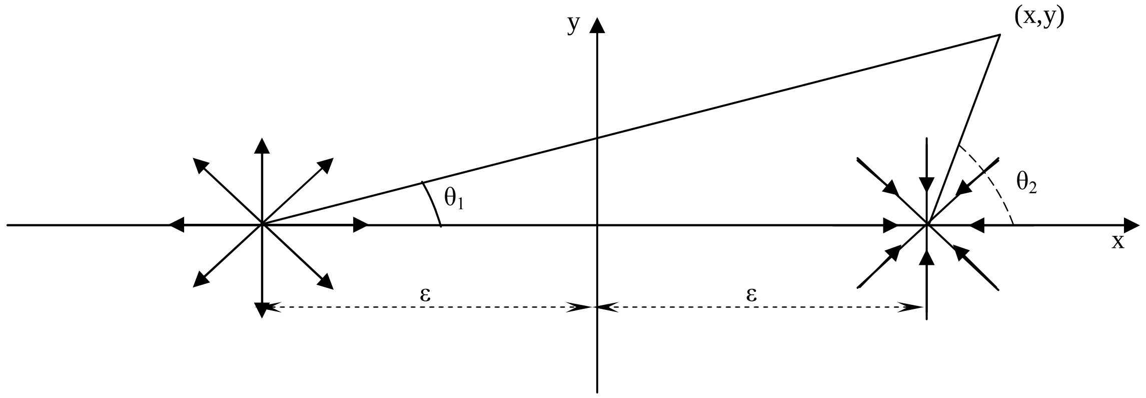
پس معادله (۸-۱۰) خط جریان مرزی بالایی جسم نیمه‌ای رنگین را نشان می‌دهد. فاصله هر نقطه از مرز جسم تا چشمه از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$r = \frac{m(\pi - \theta)}{U\sin\theta} \tag{۱۰-۹}$$

۲-۲. جریان چشمه و چاه خطی

چشمه و چاه را با قدرت m در نقطه‌های (-ε,0) و (+ε,0) مطابق شکل (۳-۱۰) ملاحظه نمایید. در این جا با استفاده از اصل بر همنهش و جدول (۱-۹) برای مجموع جریان‌های چشمه و چاه خواهیم داشت:

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$



شکل ۳-۱۰: چشمه و چاه

بنابراین تابع کمپلکس برای جریان جدید به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$F(z) = m\ln(z+\varepsilon) - m\ln(z-\varepsilon) \tag{۱۰-۱۰}$$

$$F(z) = m\ln\frac{z+\varepsilon}{z-\varepsilon} \tag{۱۰-۱۱}$$

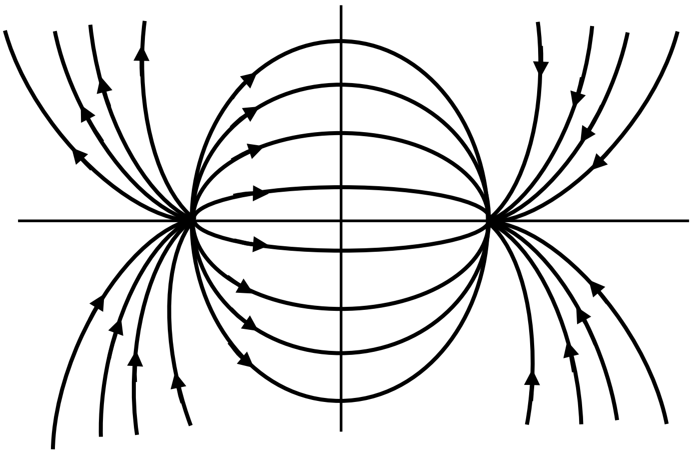
پس تابع جریان برای جریان پتانسیلی جدید به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\psi = \psi_{Source} + \psi_{Sink} = m\theta_1 - m\theta_2 = m(\theta_1 - \theta_2) \tag{۱۰-۱۲}$$

مطابق شکل (۳-۱۰) زاویه‌های θ_1 و θ_2 نسبت به نقطه (x,y) تعیین شده‌اند. با استفاده از روابط مثلثاتی می توانیم بنویسیم:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{y}{x+\varepsilon} \qquad ; \qquad \theta_2 = \tan^{-1}\frac{y}{x-\varepsilon} \tag{۱۰-۱۳}$$

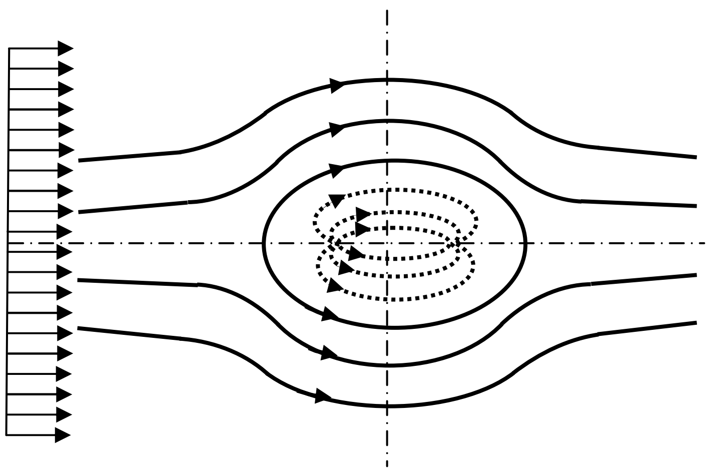
شکل (۴-۱۰) جریان چشمه و چاه خطی را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱۰: چشمه و چاه خطی (جریان پتانسیل مغناطیسی)

۳-۲. جریان یکنواخت اطراف جسم بیضوی رنکین[2]

حال جریان چشمه و چاه خطی را با جریان یکنواخت مطابق شکل (۵-۱۰) ملاحظه نمایید.



شکل ۵-۱۰: جریان یکنواخت اطراف جسم با سطح مقطع بیضوی (چشمه و چاه خطی)

در این جا مطابق اصل بر همنهش خواهیم داشت:

$$F(z) = Uz + m\ln\frac{z+\varepsilon}{z-\varepsilon} \tag{۱۰-۱۴}$$

همچنین تابع جریان به صورت ذیل نوشته می‌شود:

[2] The Rankine Oval Body

$$\psi = Ur\sin\theta + m(\theta_1 - \theta_2) \tag{۱۰-۱۵}$$

۴-۲. دابلت خطی[۳]

اگر در بخش قبل چشمه و چاه در یک نقطه منطبق شوند، خواهیم داشت:

$$F(z) = m\ln\frac{z+\varepsilon}{z-\varepsilon} = m\ln\frac{1+\frac{\varepsilon}{z}}{1-\frac{\varepsilon}{z}} \tag{۱۰-۱۶}$$

در این جا اگر $\varepsilon\to 0$ ، جریان جدید دابلت نامیده می‌شود. در این جا $\varepsilon/|z|$ عدد خیلی کوچکی است یا به عبارتی $(\varepsilon/z)\to 0$ می‌باشد. حال اگر معادله (۱۶-۱۰) را بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F(z) &= m\ln\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{z}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{z}+O(\frac{\varepsilon^2}{z^2})\right)\right] \\ F(z) &= m\ln\left[1+\frac{2\varepsilon}{z}+O\left(\frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)+\cdots\right] \end{aligned} \tag{۱۰-۱۷}$$

که O نمایانگر عبارتهای با درجات بالاتر می باشد. با استفاده از بسط $\ln(1+x)=x-x^2/2+\ldots$ می توانیم بنویسیم:

$$F(z) \cong m(\frac{2\varepsilon}{z}) \tag{۱۰-۱۸}$$

زمانی‌که $(\varepsilon/z)\to 0$ و $m\to\infty$ پس $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ m\to\infty}}(m\varepsilon)=\mu$ ،می باشد، لذا معادله (۱۸-۱۰) به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$F(z) = \frac{\mu}{z} \tag{۱۰-۱۹}$$

که عدد دو در μ ادغام شده است. بنابراین معادله (۱۹-۱۰) را تابع کمپلکس دابلت می‌گویند و μ قدرت دابلت نامیده می‌شود. رابطه (۱۹-۱۰) را به صورت ذیل می‌نویسیم:

$$F(z) = \frac{\mu}{x+iy} = \mu\frac{x}{x^2+y^2} - i\mu\frac{y}{x^2+y^2} \tag{۱۰-۲۰}$$

ملاحظه می‌شود که از قسمت موهومی تابع (۱۴-۱۰) تابع ψ و قسمت حقیقی تابع ϕ حاصل می‌شود.

$$\psi = -\mu\frac{y}{x^2+y^2} \qquad ; \qquad \phi = \mu\frac{x}{x^2+y^2} \tag{۱۰-۲۱}$$

حال اگر ثابت=ψ باشد، پس تابع یا معادله خط جریان از رابطه (۲۱-۱۰) حاصل می‌شود.

[3] Linear Doublet

$$x^2 + \left(y + \frac{\mu}{2\psi}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{2\psi}\right)^2 \qquad (۱۰-۲۲)$$

معادله (۲۲-۱۰) رابطه برای دایره‌ای می‌باشد که ψ آن ثابت بوده و مرکز دایره در نقطه $x=0$ و $y=-\mu/2\psi$ قرار دارد.

همچنین شعاع دایره برابر $\mu/2\psi$ می‌باشد. حال سرعت پتانسیلی از تابع $F(z)$ به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$W(z) = -\frac{\mu}{z^2} = -\frac{\mu}{r^2}e^{-2i\theta} = -\frac{\mu}{r^2}(\cos\theta - i\sin\theta)e^{-i\theta} \qquad (۱۰-۲۳)$$

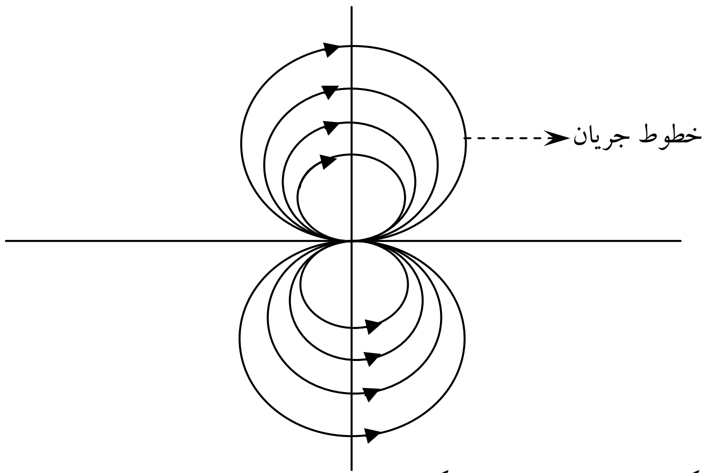
بنابراین مؤلفه‌های سرعت به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$v_r = -\frac{\mu}{r^2}\cos\theta \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\mu}{r^2}\sin\theta \qquad (۱۰-۲۴)$$

پس ψ و ϕ بر حسب مختصات قطبی به صورت ذیل به دست می‌آید.

$$\psi = -\frac{\mu\sin\theta}{r} \quad ; \quad \phi = \frac{\mu\cos\theta}{r} \qquad (۱۰-۲۵)$$

شکل (۶-۱۰) دیاگرام یک دابلت را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۱۰: خطوط جریان یک دابلت خطی (چشمه و چاه خطی منطبق بر هم)

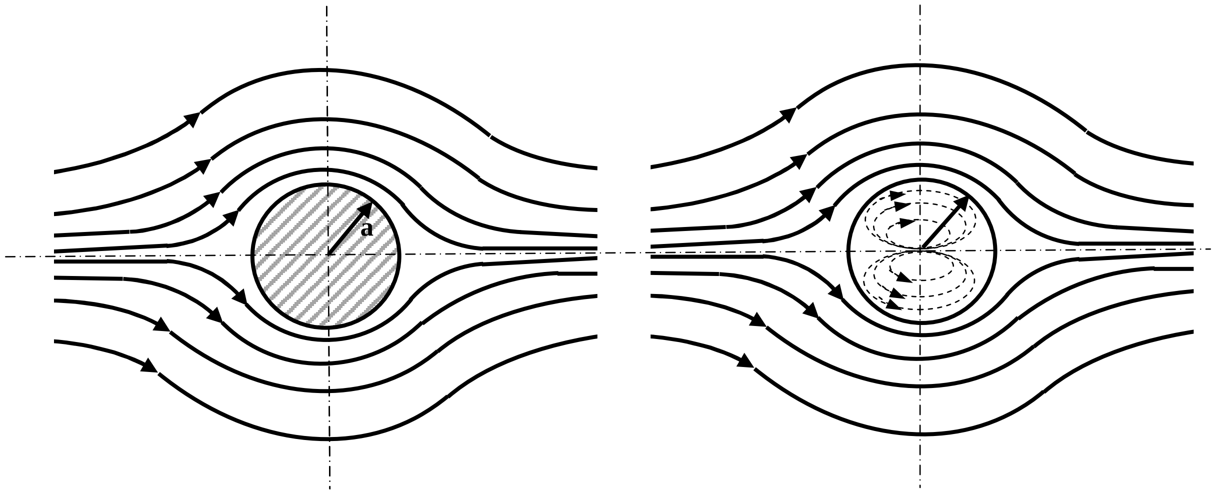
۵-۲. جریان یکنواخت اطراف یک استوانه ثابت[4]

برای توصیف حرکت جریان یکنواخت اطراف یک استوانه از بر همنهش جریان یکنواخت و یک دابلت خطی استفاده می‌شود. تابع پتانسیلی کمپلکس این جریان از جمع جریان‌های مذکور به شکل ذیل حاصل می‌شود:

[4] Flow Around A Circular Cylinder

$$F(z) = \underbrace{Uz}_{\text{جریان یکنواخت}} + \underbrace{\frac{\mu}{z}}_{\text{جریان دابلت}} \qquad (۱۰-۲۶)$$

مطابق شکل (۷-۱۰) جریان دابلت در میدان جریان یکنواخت، خودش را به صورت یک استوانه توپر نشان می‌دهد.



ب) الف)

شکل ۷-۱۰: الف) جریان یکنواخت اطراف دابلت. ب) جریان یکنواخت اطراف کره توپر.

در شعاع r=a استوانه از طریق دابلت شکل می‌گیرد. در این حالت شعاع استوانه بستگی به قدرت دابلت و سرعت جریان آزاد دارد. هر چه قدرت دابلت (μ) بیشتر باشد، شعاع استوانه بزرگتر خواهد بود و بالعکس هر چه سرعت جریان آزاد بیشتر باشد، قطر استوانه کوچکتر خواهد شد. بنابراین در روی استوانه خواهیم داشت:

$$z = re^{i\alpha} = ae^{i\alpha} \qquad (r = a) \qquad (۱۰-۲۷)$$

با جایگذاری معادله (۲۷-۱۰) در معادله(۲۶-۱۰) می‌توان نوشت:

$$F(z) = Uae^{i\theta} + \frac{\mu}{a}e^{-i\theta} = \left(Ua + \frac{\mu}{a}\right)\cos\theta + i(Ua - \frac{\mu}{a})\sin\theta \qquad (۱۰-۲۸)$$

بنابراین با استفاده از معادله (۲۷-۱۰) توابع ψ و ϕ به صورت ذیل حاصل می‌شوند:

$$\psi = (Ua - \frac{\mu}{a})\sin\theta \qquad (۱۰-۲۹)$$

$$\phi = \left(Ua + \frac{\mu}{a}\right)\cos\theta \qquad (۱۰-۳۰)$$

حال مرز استوانه یک خط جریان ثابت فرض می‌شود، پس برای مرز جامد $\psi=0$ فرض می‌نماییم. بنابراین با استفاده از رابطه (۳۰–۱۰) خواهیم داشت:

$$\psi = \left(Ua - \frac{\mu}{a}\right)\sin\theta = 0$$

و در نهایت می‌توان نوشت:

$$\mu = Ua^2 \tag{۱۰–۳۱}$$

پس تابع پتانسیلی کمپلکس برای جریان آزاد اطراف استوانه به شعاع a به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$F(z) = \left(z + \frac{a^2}{z}\right)U \tag{۱۰–۳۲}$$

با مشتق گیری از رابطه (۳۲–۱۰) و جاگذاری $z=re^{-i\theta}$ رابطه‌ی ذیل برای سرعت پتانسیلی کمپلکس حاصل می‌شود:

$$w(z) = \left[U\left(\cos\theta - \frac{a^2}{r^2}\cos\theta\right) + i\,U\left(\sin\theta + \frac{a^2}{r^2}\sin\theta\right)\right]e^{-i\theta} \tag{۱۰–۳۳}$$

بنابراین مؤلفه‌های سرعت به صورت ذیل از معادله (۳۳–۱۰) به دست می آیند:

$$\begin{aligned} v_r &= U\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ v_\theta &= -U\sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \end{aligned} \tag{۱۰–۳۴}$$

ملاحظه می‌شود در روی استوانه در $r=a$، $v_r=0$ و $v_\theta = -2\ U\sin\theta$ خواهد بود. در $\theta = 0,\pi$ (نقطه سکون)، هر دو مؤلفه سرعت صفر می‌شود. تابع جریان نیز با استفاده از معادله (۲۹–۱۰) و (۳۱–۱۰) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\psi(r,\theta) = Ur\sin\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{۱۰–۳۵}$$

با استفاده از مؤلفه‌های سرعت، معادله (۳۴–۱۰) و استفاده از معادله برنولی، ضریب فشار به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$PC = \frac{\overline{P} - \overline{P}^{\infty}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - 4\sin^2\theta \tag{۱۰–۳۶}$$

۶-۲. جریان یکنواخت اطراف یک استوانه چرخان

در این قسمت حرکت سیال یکنواخت را اطراف استوانه چرخان را بررسی می‌کنیم. حرکت جریان یکنواخت اطراف استوانه ساکن با بر همنهش جریان آزاد و دابلت خطی به دست آمد. حال اگر دابلت را بر یک گرداب قرار بدهیم، جریان آزاد اطراف استوانه چرخان حاصل می‌شود. پس با استفاده از رابطه (۳۲-۱۰) و تابع جریان گرداب خواهیم داشت:

$$F(z) = \underbrace{U\left(z + \frac{a^2}{z}\right)}_{\text{دابلت+جریان آزاد}} + \underbrace{\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z}_{\text{گرداب}} + \underbrace{k}_{\text{ثابت}} \tag{۱۰-۳۷}$$

که $\mu = Ua^2$ قدرت دابلت، a، شعاع استوانه و Γ، گردابی (قدرت گرداب) می‌باشند. در این جا گرداب منفی استفاده شده است تا لیفت مثبت ایجاد نماید. بعداً در خصوص لیفت بیشتر توضیح داده خواهد شد. از طرفی توجه شود که با اضافه کردن مقدار ثابت k به معادله (۳۷-۱۰)، مقدار ثابت خط جریان در مرز استوانه برابر صفر $(\psi=0)$ تنظیم می‌شود. مقدار ثابت k را متعاقباً به دست خواهیم آورد. بنابراین با جاگذاری $z = a\,e^{-i\theta}$ در مرز جامد استوانه، معادله (۳۷-۱۰) به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$F(z) = 2Ua\cos\theta + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln a - \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + k \tag{۱۰-۳۸}$$

با توجه به این که قسمت موهومی معادله (۳۸-۱۰) برابر با ψ است، خواهیم داشت:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln a \tag{۱۰-۳۹}$$

اگر در $r = a$ (سطح استوانه) ψ را برابر صفر فرض نماییم، بنابراین لازم است که ثابت k به صورت ذیل فرض گردد:

$$k = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln a \tag{۱۰-۴۰}$$

بنابراین تابع پتانسیل کمپلکس، معادله (۳۷-۱۰) در نهایت به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$F(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{z}{a} \tag{۱۰-۴۱}$$

که تابع جریان ψ به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \qquad (۱۰-۴۲)$$

همان طور که ملاحظه می‌شود، در $r= a$ ، $\psi=0$ خواهد بود. با مشتق گیری از رابطه (۴۱-۱۰) خواهیم داشت:

$$w(z) = \left\{ U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta + i\left[U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right]\right\} e^{-i\theta} \qquad (۱۰-۴۳)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۴۳-۱۰) مؤلفه‌های سرعت به صورت ذیل حاصل می‌شوند:

$$v_r = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \qquad (۱۰-۴۴)$$

$$v_\theta = -U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \qquad (۱۰-۴۵)$$

ملاحظه می‌شود در نقطه سکون مؤلفه‌های سرعت صفر خواهد بود و این زمانی اتفاق می‌افتد که $\sin\theta_s=-\Gamma/4\pi Ua$

باشد. که θ_s زاویه در نقطه سکون می‌باشد. بر روی مرز استوانه چرخان خواهیم داشت:

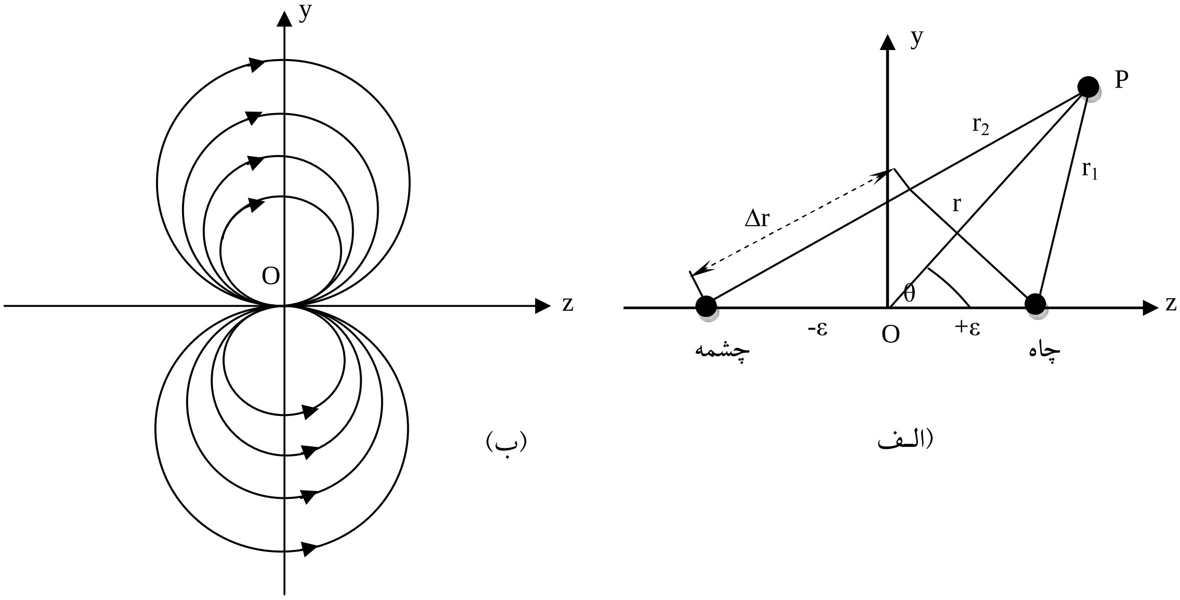
$$v_r = 0 \qquad , \qquad v_\theta = -2U\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \qquad (۱۰-۴۶)$$

۳. دابلت کروی[5]

یک دابلت، خیلی شبیه دی پل[6] در الکتریسیته و مغناطیس می‌باشد. در بخش‌های قبل دابلت استوانه ای توضیح داده شد.

در این جا از انطباق یک چاه با یک چشمه نقطه‌ای (در مختصات قطبی) می‌توان یک دابلت کروی شکل به دست آورد.

[5] Spherical Doublet
[6] Dipole



شکل ۸-۱۰: الف) چشمه و چاه نقطه ای   ب) خطوط جریان دابلت نقطه ای در مختصات قطبی

در فصل قبل گفته شد که، توابع پتانسیلی برای چشمه و چاه نقطه‌ای با قدرت یکسان به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\phi = \phi_{\text{Source}} + \phi_{\text{Sink}} = -\frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2} \quad (۱۰\text{-}۴۷)$$

$$\phi = m\frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} = m\frac{\Delta r}{r^2} = \frac{m(2\varepsilon \cos\theta)}{r^2} \quad (۱۰\text{-}۴۸)$$

$$\psi = \Psi_{\text{Source}} + \Psi_{\text{Sink}} = \frac{mz_1}{r_1} - \frac{mz_2}{r_2} \quad (۱۰\text{-}۴۹)$$

با فرض این که $\varepsilon \to 0$ و $m \to \infty$، پس حد $2am = \mu$. بنابراین ψ و ϕ به صورت ذیل حاصل می‌شوند. که μ، قدرت دابلت نقطه‌ای می‌باشد. همچنین توابع جریان و پتانسیالی به صورت ذیل به دست می آیند:

$$\phi = -\frac{\mu \cos\theta}{r^2} \quad (۱۰\text{-}۵۰)$$

$$\psi = \frac{\mu \sin^2\theta}{r} \quad (۱۰\text{-}۵۱)$$

۴. جریان آزاد اطراف کره با ترکیب دابلت و جریان یکنواخت در مختصات قطبی

در این‌جا از بر همنهش یک جریان یکنواخت و یک دابلت در مختصات کروی به توصیف جریان آزاد اطراف یک کره توپر می‌رسیم. به این ترتیب توابع ψ و ϕ را برای جریان یکنواخت در مختصات قطبی می‌نویسیم.

$$\phi = Uz = Ur\cos\theta \qquad ; \qquad \psi = -\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta \tag{۱۰-۵۲}$$

حال اگر قدرت دابلت را به صورت $\mu=-Ua^3/2$ فرض نماییم، به طوری که چشمه طرف چپ چاه قرار دارد، با استفاده از نتایج بخش قبلی (معادلات (۵۰-۱۰) و (۵۱-۱۰)) در خصوص ϕ و ψ خواهیم داشت:

$$\phi = -\frac{1}{2}\frac{Ua^3\cos\theta}{r^2} \qquad ; \qquad \psi = \frac{1}{2}\frac{Ua^3\sin^2\theta}{r} \tag{۱۰-۵۳}$$

با ترکیب جریان یکنواخت و دابلت برای جریان جدید خواهیم داشت:

$$\phi = U(r+\frac{a^3}{2r^2})\cos\theta \tag{۱۰-۵۴}$$

$$\psi = -\frac{1}{2}Ur^2(1-\frac{a^3}{r^3})\sin^2\theta \tag{۱۰-۵۵}$$

معادلات (۵۴-۱۰) و (۵۵-۱۰)، جریان یکنواخت اطراف کره را توصیف می‌نمایند. به دلایل ذیل این مسئله اثبات می‌شود:

۱) در $\psi=0$، π یا $\theta=0$، یا برای $r=a$ نیز خط جریان صفر می‌باشد. بنابراین کره با شعاع $r=a$ را می‌توان به عنوان مرز جامد در نظر گرفت.

۲) هر دوی ψ و ϕ معادلات متقارن جریان پتانسیلی (معادلات (۲۸-۹) و (۲۹-۹)در فصل قبل) را ارضا می‌نماید.

۳) در شرایطی که $r\to\infty$ باشد، یعنی در فاصله بسیار دور از کره، معادلات (۵۴-۱۰) و (۵۵-۱۰)، جریان یکنواخت سرعت را پیش بینی می‌نمایند.

۴) در سطح کره، معادلات سرعت، $v_r=0$ و $v_\theta\neq 0$ را پیش بینی می‌کنند.

مؤلفه‌های سرعت در میدان حرکت با به دست آوردن از ψ و ϕ، به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$v_r = U\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]\cos\theta \tag{۱۰-۵۶}$$

$$v_\theta = -U\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]\sin\theta \qquad (۱۰-۵۷)$$

و با استفاده از معادله برنولی، فشار به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$P(a,\theta) = P^\infty + \frac{1}{2}\rho U^2\left(1-\frac{a}{4}\sin\theta\right) \qquad (۱۰-۵۸)$$

۵. کاربرد جریان‌های پتانسیلی در مکانیک سیالات

جریان‌های پتانسیلی دارای کاربرد وسیع در بسیاری از جریانات واقعی در صنعت و طبیعت دارد. جریان‌های غیرلزجی به عنوان جریان بیرونی لایه مرزی در حل بسیاری از جریانات سیال اطراف اجسام غوطه‌ور مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین در حرکت آب‌های زیرزمینی و در بازیافت نفت خام با استفاده از تزریق آب می‌توان از تئوری سیالات پتانسیلی برای شبیه سازی و مدل سازی بهره برد. در این جا ابتدا به بحث درگ و لیفت در حرکت سیال یکنواخت اطرف استوانه می‌پردازیم. سپس کاربرد آن را در جریان آب‌های زیر زمینی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۵-۱. درگ و لیفت در جریان یکنواخت اطراف استوانه

در حرکت جریان‌های پتانسیلی اطراف اجسام جامد، همیشه درگ صفر می‌شود. چون فرض شده است که نیروهای ویسکوز قابل اغماض است. از طرفی همان طور که جریان اطراف استوانه و کره نشان داده شد، کاملاً متقارن می‌باشد. به عبارتی مؤلفه‌های سرعت در جلو[۷] و عقب اجسام متقارن یا به عبارتی جریانهای بالادستی و پایین دستی یکسان هستند. در حقیقت هیچ نیروی هیدرودینامیکی بر استوانه در اثر حرکت سیال یکنواخت ایجاد نمی‌شود. به علت اغماض ویسکوزیته، حتی فشار نیز در دو طرف کره و استوانه متقارن است. در نهایت هر دوی درگ و لیفت در جریان پتانسیلی اطراف استوانه و کره در سکون صفر می‌باشد.

اما در واقعیت درگ اطراف کره و استوانه صفر نیست. هر چند ویسکوزیته ممکن است نا چیز باشد، لیکن به علت وجود لایه مرزی در مرز جامد و ایجاد گرادیان سرعت، نیروهای ویسکوز موجود می‌باشد. علت دیگر، سیال اطراف کره و یا استوانه در واقعیت متقارن نیست، چون در عقب (جریان پایین دستی) این گونه اجسام، جداسازی لایه مرزی داریم که

[7] Upstream

منجر به از بین رفتنِ تقارن و اختلاف فشار می‌شود. پس در واقعیت نیروی درگ وجود دارد. لیکن تئوری سیالات غیرلزجی ناقص بوده و نمی‌تواند رفتار واقعی را در مرز اجسام جامد پیش بینی نماید. این حالت خاص را "تناقض دالمبرت[۸] " اطلاق می‌شود.

۲-۵. نظریه لیفت کوتا-چاوکوسکی[۹]

برای جریان سیالات پتانسیلی یکنواخت اطراف یک استوانه چرخان همیشه یک نیروی دینامیکی یا لیفت عمود بر استوانه در جهت جریان پایین دستی وجود دارد. به این پدیده اثر مگنوث[۱۰] می گویند. در این جا مؤلفه‌های سرعت در سطح استوانه چرخان به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$v_r = 0 \qquad ; \qquad v_\theta = -2U^\infty \operatorname{Sin}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \tag{۱۰-۵۹}$$

با استفاده از معادله برنولی توزیع فشار به صورت ذیل حاصل خواهد می شود:

$$P_s - P_\infty = \frac{1}{2}\rho U^{\infty 2}(1 - 4\sin^2\theta + 4\beta\sin\theta - \beta^2) \qquad \beta = \frac{\Gamma}{2\pi a U} \tag{۱۰-۶۰}$$

حال برای محاسبه لیفت از انتگرال نیروی فشار اطراف استوانه استفاده می شود:

$$L = -\int_0^{2\pi} (P_s - P_\infty)\sin\theta\, ba\, d\theta \tag{۱۰-۶۱}$$

که b طول استوانه و P_∞ فشار جریان آزاد می باشد. حال با جایگذاری رابطه (۶۰-۱۰) در (۶۱-۱۰) خواهیم داشت:

$$L = -\rho b U^\infty \Gamma \tag{۱۰-۱۴۹}$$

ملاحظه می شود که در اثر چرخش استوانه با مقدار گردابی Γ ، لیفت که مستقل از شعاع استوانه بوده عمود بر جریان آزاد و عکس چرخش استوانه به وجود می آید.

[8] d,Alembert Paradox
[9] Kutta-Joukowski Lift Theorem
[10] Magnus Effect

۳-۵. جریان آب در مخازن زیر زمینی

از کاربردهای مهم جریان پتانسیلی مکانیک سیالات مطالعه جریان نفت خام در مخازن متخلخل از میان منافذ می باشد. برای افزایش و ازدیاد برداشت نفت از مخازن چند مرحله پیشنهاد شده است:

مرحله اول (بازیافت اولیه[11]): در این مرحله نفت در چاه به طور خود کار تحت فشار مخزن خارج می شود یا تولید تا آن جا که ممکن است از طریق پمپ انجام می گیرد.

مرحله دوم (بازیافت ثانویه[12]): در این مرحله نفت به منافذ موجود در سنگ های متخلخل چسبیده است. برای جدا کردن نفت از محیط آب تزریق می شود. با تزریق آب دریا و یا رودخانه نفت را جابجا کرده به طوری که نفت به چاه های تولید منتقل می شود. اگر آب تزریقی با سرعت انجام شود، پدیده انگشتی[13] اتفاق می افتد و به جای نفت، آب از چاه های تزریق تولید می شود.

مرحله سوم (بازیافت ثالثیه[14]): در این مرحله از مواد شیمیایی مانند فعال سطحی[15] برای کاهش فشار موئینگی[16] میان آب و نفت استفاده می شود. و جریان را برای انتقال نفت باقیمانده در مخازن افزایش می دهد.

از کاربردهای دیگر جریان پتانسیلی تزریق آب برای تصفیه در مخازن زیر زمینی می باشد. برای مثال به علت دور ریز بعضی از مواد سمی همراه با آب به مخازن زیرزمینی لازم است که آب زیر زمینی تصفیه شود. مطابق شکل (۹-۱۰)، برای تصفیه آب از روش تابش نور ماورای بنفش استفاده می شود. در مخزن دو چاه A و B حفر می شود. از طریق چاه B آب به مخزن تزریق شده و از طریق چاه A که در فاصله L از چاه B قرار دارد، آب خارج می شود. آب خارج شده در معرض تصفیه از طریق نور قرار گرفته و مجدداً به چاه برگشت داده می شود و این عمل تکرار می شود تا مواد سمی در آب از بین برود.

---

[11] Primary Recovery
[12] Secondary Recovery
[13] Finger
[14] Tertiary Recovery
[15] surfactant
[16] Capillary

برای آنالیز جریان در مخزن زیرزمینی، چاه خطی A به عنوان چاه و چاه خطی B به عنوان چشمه خطی در نظر گرفته می شود. هدف در این جا پیدا کردن افت فشار P_B-P_A بین دو چاه می باشد. این افت فشار بر حسب دبی (Q) شعاع چاه (a)، فاصله (L)، ضریب عبوری (κ) و ویسکوزیته (μ) به دست می آید.

برای چشمه خطی و چاه خطی سرعت v_r به صورت ذیل نوشته می شود:

$$v_{r,A} = \frac{Q}{2\pi r_A} \qquad \text{(چاه خطی)}$$
$$v_{r,B} = \frac{Q}{2\pi r_B} \qquad \text{(چشمه خطی)} \qquad (۱۰-۶۲)$$

حال طبق قانون دارسی برای سرعت های مذکور داریم:

$$v_{r,A} = -\frac{\kappa}{\mu}\ \frac{\partial P_A}{\partial r_A}$$
$$v_{r,B} = -\frac{\kappa}{\mu}\ \frac{\partial P_B}{\partial r_B} \qquad (۱۰-۶۳)$$

پس با ترکیب معادلات (۶۲-۱۰) و (۶۳-۱۰) فشار چاه های A و B با انتگرالگیری به دست می آید:

$$P_A = \frac{\mu Q}{2\pi\kappa}\ \ln r_A + f(z) \qquad (۱۰-۶۴)$$

$$P_B = -\frac{\mu Q}{2\pi\kappa}\ \ln r_B + f(z) \qquad (۱۰-۶۵)$$

چون مشتق های جزیی در معادلات می باشد، بنابراین ثابت f(z) تنها تابعی از فاصله عمودی z می باشد، به عبارتی دیگر، فشار با ارتفاع از سطح زمین تغییر می کند. حال به عنوان شرط مرزی اگر $f(z_0)=P_0$، پس خواهیم داشت:

$$P = P_A + P_B = \frac{\mu Q}{2\pi\kappa}\ \ln\frac{r_A}{r_B} + P_0 \qquad (۱۰-۶۶)$$

که P اثر فشار هردو چاه را نشان می دهد و P_0 به ارتفاع از سطح چاه بستگی دارد. حال معادله (۶۶-۱۰) در شعاع هر کدام از چاه ها اعمال می گردد. شعاع هر یک از چاه ها برابر a فرض می شود، پس نقاط مختصات برای چشمه و چاه مطابق شکل (۹-۱۰) به صورت ذیل نشان داده می شود:

چاه A : $r_A = a \quad ; \quad r_B = L$

چاه B : $r_B = a \quad ; \quad r_A = L$

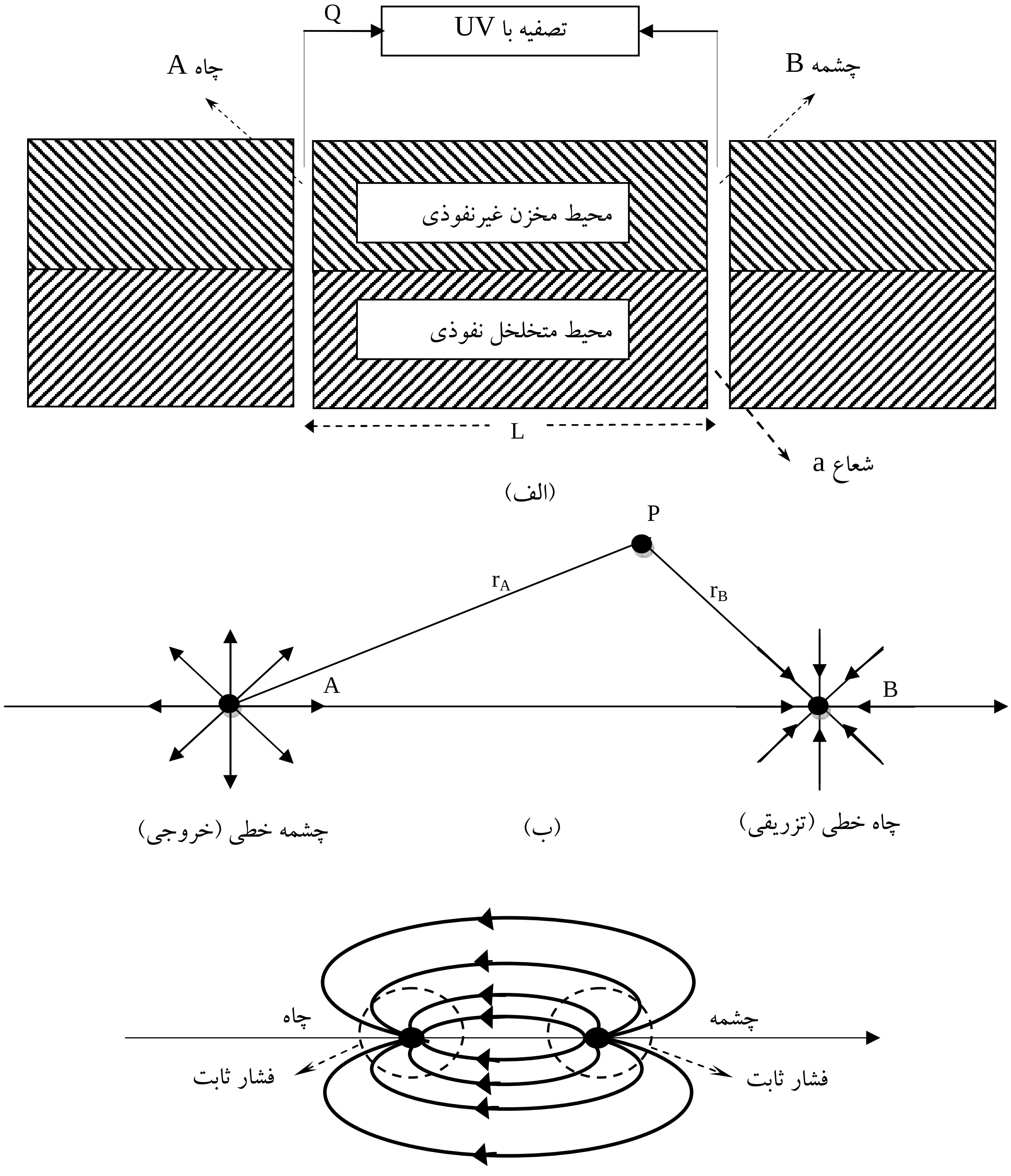
پس با اعمال معادله (۶۶-۱۰) در شعاع خارجی هر چاه، به طوری که فشار در شعاع خارجی هر چاه بستگی به فشار چاه مربوط و چاه دیگر دارد. پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_B &= P_0 + \frac{\mu Q}{2\pi\kappa} \ln\frac{L}{a} \\ P_A &= P_0 + \frac{\mu Q}{2\pi\kappa} \ln\frac{a}{L} \end{aligned} \tag{۱۰-۶۷}$$

پس فشار لازم، تفاوت بین دو فشار خواهد بود:

$$P_B - P_A = \frac{\mu Q}{2\pi\kappa} \ln\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \frac{\mu Q}{\pi\kappa} \ln\frac{L}{a} \tag{۱۰-۶۸}$$

شکل (۹-۱۰) نقاط ایزوبار(هم فشار) را در حوالی چاه نشان می دهد که تقریباً دایره شکل است.

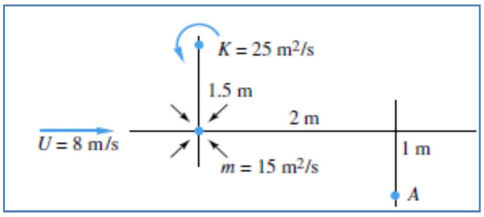


شکل۹-۱۰: جریان آب در مخزن زیرزمینی

۶. خلاصه(جمع بندی)

حرکت جریان یکنواخت اطراف استوانه ساکن با بر همنهش جریان آزاد و دابلت خطی به دست می آید. از انطباق یک چاه با یک چشمه نقطه‌ای (در مختصات قطبی) یک دابلت کروی شکل به دست می آید. از برهمنهش یک جریان یکنواخت و یک دابلت در مختصات کروی توصیفی برای جریان آزاد اطراف یک کره توپر حاصل می‌شود. جریان‌های غیرلزجی به عنوان جریان بیرونی لایه مرزی در حل بسیاری از جریانات سیال اطراف اجسام غوطه‌ور مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای جریان سیالات پتانسیلی یکنواخت اطراف یک استوانه چرخان همیشه یک نیروی دینامیکی یا لیفت عمود بر استوانه در جهت جریان پایین دستی وجود دارد. در حرکت آب‌های زیرزمینی و در باز یافت نفت خام با استفاده از تزریق آب می‌توان از تئوری سیالات پتانسیلی برای شبیه سازی و مدل سازی بهره برد. به این پدیده اثر مگنوث می-گویند. از کاربردهای مهم جریان پتانسیلی مکانیک سیالات مطالعه جریان نفت خام در مخازن متخلخل از میان منافذ می باشد.

۷. پرسش های پایان درس

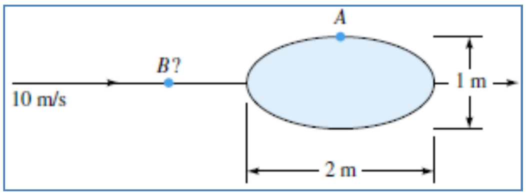


شکل مربوط به مساله ۱

۱- بردار سرعت را در نقطه A که توسط جریان یکنواخت، گرداب و چشمه خطی القا می‌شود، به دست آورید.(شکل مقابل)

ج: طبق روشی که در متن درس انجام شد، با کمک تابع کمپلکس حاصل از جریان یکنواخت، گرداب و چشمه خطی و با استفاده از اصل برهمنهش، بردار سرعت نهایی به دست می آید.

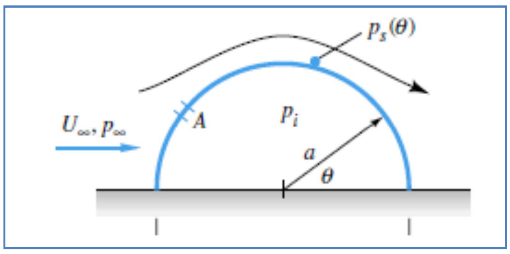
۲- یک بیضی رنکین با طول ۲ متر و ارتفاع ۱ متر در جریانی با سرعت $U_\infty=10$ m/s فروبرده شده است. سرعت را در نقطه A و در نقطه B تخمین بزنید به نحوی که ذره نزدیک شونده به نقطه سکون بیشینه شتاب منفی را داشته باشد.



شکل مربوط به مساله ۲

ج: از مفهوم جریان یکنواخت اطراف جسم بیضوی رنکین استفاده کرده تا معادله سرعت به دست آید. آن گاه سرعت در نقاط A و B قابل محاسبه است.

۳- بادی با U_∞ و p_∞ از یک نیمه استوانه با شعاع a و طول L عبور می کند. فشار داخلی p_i است. با استفاده از تئوری سیالات غیرویسکوز، بیانی برای نیروی قایم وارد بر استوانه بر مبنای اختلاف دانسیته p_i و p_s به دست آورید.



شکل مربوط به مساله ۴

ج: از مفهوم دابلت و اصل برهم نهشی به همراه معادله برنولی، نیروهای قایم وارد بر نیمه استوانه تعیین می شود.

۴-نشان دهید که پتانسیل کمپلکس $F=U_\infty\{z+a/4\coth[\pi(z/a)]\}$ جریان عبوری از یک جسم بیضوی واقع در حدواسط میان دو دیوار موازی $y=\pm a/2$ را نشان می‌دهد.

ج: از اصل برهمنهشی و نیز مفهوم جسم بیضوی رنکین استفاده کرده تا تابع کمپلکس به دست آید.

۵- کره ای با قطر ۱ متر و با سرعت V در آبی با دمای ۲۰ درجه سانتیگراد کشیده می‌شود. با استفاده از تئوری سیالات غیرویسکوز، سرعت V m/s را که کاویتاسیون اولین بار در سطح کره رخ خواهد داد، به دست آورید. در این شرایط (کاویتاسیون)، مقدار فشار در نقطه A در بالای کره و در زاویه ۴۵ درجه در جهت حرکت روی کره، چقدر خواهد بود؟

ج: از معادلات مربوط به جریان آزاد اطراف کره استفاده کرده تا معادله سرعت کلی و نیز مقدار سرعت در شرایط کاویتاسیون به دست آید. با کمک معادله برنولی می توان مقادیر فشار در نقاط مختلف اطراف کره به دست آورد.

۶- پتانسیل کمپلکس برای یک جریان همگن با اندازه U به یک استوانه چرخان با شعاع a که دارای گردابی است که با قدرت Γ دور خود می گردد عبارتست از:

$$F(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\log\frac{z}{a}$$

با استفاده از این نتیجه، به همراه معادله برنولی، معادله ای برای فشار $p(a,\theta)$ بر روی سطح استوانه به دست آورید. با انتگرالگیری از عبارت $-p(a,\theta)a\sin\theta$ حول سطح استوانه، اعتبار قانون کوتا-جوکوسکی را برای این جریان خاص بررسی نمایید.

ج: معادله برنولی را نوشته و مقادیر سرعت را از تابع کمپلکس جایگذاری کرده و به این ترتیب تابع توزیع فشار به دست می آید. از معادله لیفت مربوط به قانون کوتا-جوکوسکی برای بررسی اعتبار این قانون در این جریان خاص استفاده می کنیم.

۸. فهرست منابع درس

- Frank M. White, 2003, *Fluid Mechanics*, second edition, McGraw-Hill.
- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid Mechanics for Chemical Engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, *Transport Phenomena*, second edition, J. Wiley.
- Ron Darby, 2001, *Chemical Engineering Fluid mechanics*, second edition, Marcel Dekker.
- Currie I.G., 2003, *Fundamental Mechanics of Fluids*, third edition, Marcel Dekker.

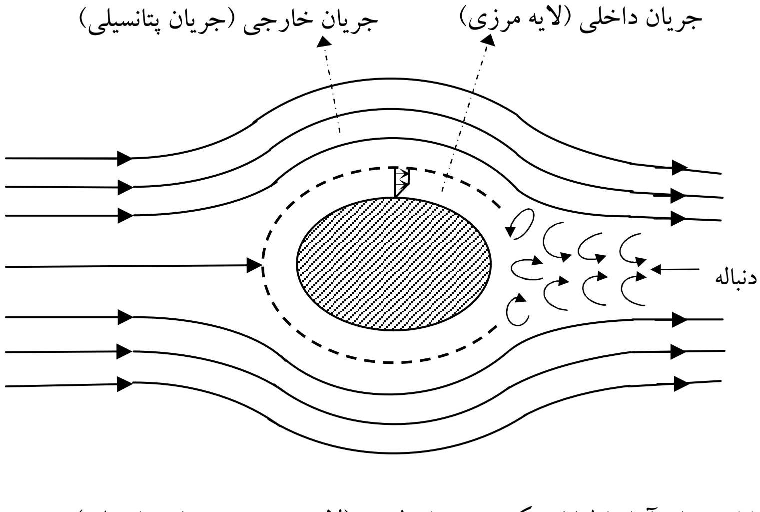
مکانیک سیالات پیشرفته

فصل یازدهم

نظریه لایه مرزی

۱. مقدمه

در فصل قبل جریان پتانسیلی اطراف اجسام غوطه‌ور مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که در مرز اجسام جامد شرط "عدم لغزش[1] " صادق نمی‌باشد. به عبارتی سرعت سیال در مرز جامد ناپدید یا صفر نمی‌شود. با بررسی که در فصل قبل گردید، نشان داده شد که درگ صفر می‌شود. در واقع جریان پتانسیلی در اطراف اجسام جامد در تناقض با مشاهدات آزمایشگاهی و جریان واقعی سیال در مجاری مرز جامد می‌باشد، چون درگ همیشه در جریان سیال وجود دارد. پرانتل[2] در سال ۱۹۰۴ این تناقض را با ارائه تئوری لایه مرزی مرتفع نمود. او نشان داد که جریان پتانسیل خارج از لایه مرزی در مرز جامد واقعیت دارد. در حقیقت لایه مرزی به صورت ذیل در مرز جامد تعریف شده است: " لایه مرزی عبارت است از لایه‌های نازکی از سیال که همواره به سطح جامد چسبیده‌اند، به طوری که اثرات قوی نیروهای ویسکوز در این لایه وجود دارد".



شکل ۱-۱۱: جریان آزاد اطراف یک جسم غوطه ور (لایه مرزی و جریان پتانسیلی)

در شکل ۱-۱۱ جریان سیالی یک نواخت را اطراف یک جسم غوطه ور را ملاحظه نمایید. سه ناحیه اطراف جسم به شرح ذیل مشاهده می شود.

[1] No Slip
[2] Prandtl

الف- ناحیه جریان داخلی

در این ناحیه لایه نازکی اطراف جسم جامد و در مرز آن به وجود می‌آید به طوری که سرعت در مرز جامد صفر بوده و گرادیان سرعت زیادی در این لایه به وجود می آید. به این ناحیه که دارای فیلم نازکی از سیال است لایه مرزی گفته می شود. در لایه مرزی سیال چرخشی فرض شده به طوری که گردابش ها در عرض لایه مرزی نفوذ می کنند.

ب- ناحیه جریان خارجی

خارج از ناحیه داخلی که در حقیقت خارج از لایه مرزی می باشد، گرادیان سرعت زیاد نمی باشد که این بستگی به شکل هندسی جسم دارد. در این ناحیه اثرات ویسکوزیته مشاهده نمی شود به طوری که جریان پتانسیلی در این ناحیه حاکم است. به عبارتی جریان خارجی به صورت غیرلزجی بوده و به صورت غیر چرخشی می باشد.

ج- ناحیه دنباله[3] یا گرداب پایین دستی[4]

به علت افت فشار در مرز جامد، لایه مرزی از سطح جامد جدا شده و افزایش فشار در دنباله یا جریان پایین دستی جسم مشاهده می شود. در این حالت گرادیان فشار معکوس می شود[5] به طوری که بر اثر جدایی لایه مرزی ناحیه ای به نام دنباله به وجود می آید . در این ناحیه گرادیان سرعت زیاد نبوده و اثرات ویسکوزیته اهمیت ندارد.

باید توجه داشت که برای تشکیل لایه مرزی عدد رینولدز از مقدار معینی نباید کمتر باشد. از طرفی لایه مرزی در مجاری اطراف اجسام جامد با لایه مرزی جریان های ویسکوز که در داخل مجاری بسته مانند کانال ها اتفاق می افتد می تواند مقداری متفاوت باشد. در مجاری اطراف اجسام غوطه ور لایه مرزی خیلی نازك می باشد لیکن در مجاری بسته مانند لوله ها و کانال ها لایه مرزی ضخیم بوده و حتی در رینولدز خیلی پایین نیز اتفاق می افتد.

در فصل های قبل به جریان های ویسکوز (خزشی) و جریان های غیر لزجی (پتانسیلی) اشاره شد و بیان شد که در جریان های خزشی نیروهای ویسکوز حاکم بوده در حالیکه در جریان های پتانسیلی نیروهای اینرسی غالب می باشد. همان گونه که در ابتدای این فصل اشاره شد، جریان در مجاری اطراف جسم غوطه ور، دو ناحیه وجود دارد که هر دو جریان

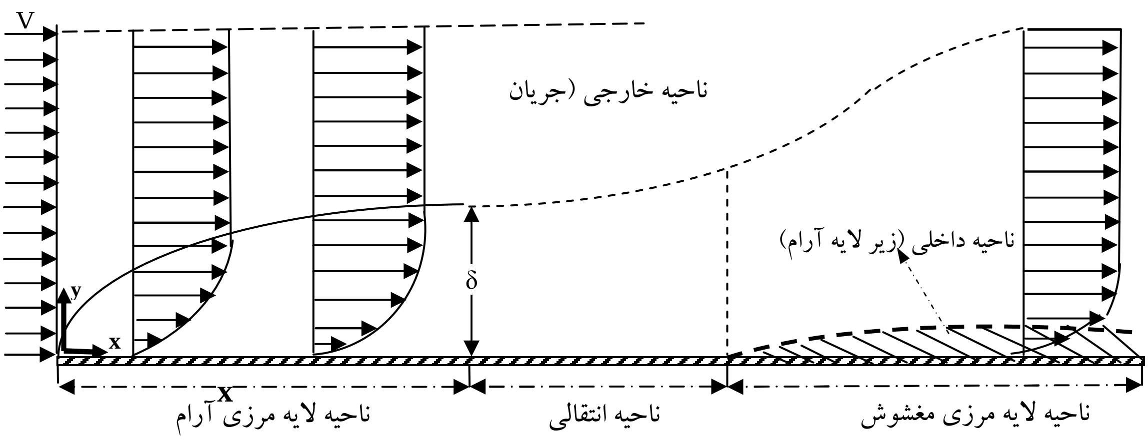
---

[3] wake
[4] Down Stream
[5] Adverse Pressure Gradient

ویسکوز (لایه مرزی) و جریان غیرلزجی (پتانسیلی) وجود دارد. لایه مرزی در بسیاری از عملیات های مهندسی شیمی اهمیت دارد، چون نفوذ جرم و گرما بیشتر در لایه مرزی واقع می شود. هم چنین در صنعت هوا فضا، کشتیرانی، و نیز در ساختمان سازی کاربردهای فراوان دارد.

۲. مفهوم لایه مرزی

برای بررسی و تحلیل لایه مرزی اطراف جسم غوطه ور، همیشه از جریان آزاد اطراف یک ورقه یا صفحه مسطح نازک که به موازات جریان قرار دارد، شروع می کنند. مطابق شکل (۲-۱۱) جریانی یکنواخت با سرعت U موازی صفحه مسطح که طول آن L می باشد، حرکت می کند. اثرات ویسکوزیته در مرز جامد شدید بوده به طوری که ناحیه ویسکوز وسیع بوده و از لبه تا انتهای صفحه موجود می باشد. یک صورت اصلی و مهم در تحلیل لایه مرزی وجود جهت اصلی و اولیه جریان است که مولفه سرعت حاکم معمولا u_x بوده و در اغلب مواقع $u_x >> u_y$ فرض می شود به طوری که تغییرات سرعت در عرض لایه مرزی نسبت به طول لایه شدید می باشد. معمولا افت فشار در طول صفحه در نظر گرفته می شود و تغییرات فشار در عرض نازک لایه مرزی ، قابل اغماض است.



شکل ۲-۱۱: تشکیل لایه مرزی روی یک سطح مسطح

مطابق شکل (۲-۱۱) ملاحظه می شود که جریان یکنواخت در اطراف صفحه مسطح به دو ناحیه تقسیم می شود: ناحیه لایه مرزی که گرادیان سرعت در آن شدید بوده و از صفر بر روی صفحه شروع می شود، و به تدریج افزایش می یابد تا این که مقدارش به سرعت آزاد U در ناحیه خارجی برسد. در لبه صفحه مسطح ابتدا لایه مرزی توسعه پیدا نمی کند

لیکن زمانی که عدد رینولدز به مقدار بحرانی ۲۵۰۰ رسید، لایه مرزی توسعه پیدا می نماید و به تدریج ضخیم تر می گردد. خارج از لایه مرزی سیال بدون اصطکاک بوده و جریان پتانسیلی حاکم می باشد. همان گونه که اشاره شد، افت فشار در عرض لایه مرزی قابل اغماض است و هم چنین به علت مسطح بودن صفحه افت فشار در عرض جریان پتانسیلی خارجی نیز صفر در نظر گرفته می شود.

مشاهده می شود که در $Re > 2500$ لایه مرزی توسعه پیدا می کند و اگر صفحه صاف بوده و فاقد هر گونه زبری باشد، تا $Re = 3\times106$ لایه مرزی آرام شکل می گیرد. متعاقبا با زیاد شدن فاصله از لبه صفحه، عدد رینولدز زیادتر شده به طوری که از ناحیه آرام خارج شده و در عبور از ناحیه انتقالی به ناحیه لایه مرزی مغشوش در $Re = 5\times109$ می رسیم. در ناحیه مغشوش لایه مرزی آرام فشرده شده و به صورت زیرلایه آرام[۶] نمایانگر می شود. در خارج از این زیر لایه آرام یک لایه مرزی مغشوش پدیدار می شود که در آن اثرات ویسکوزیته حاکم نمی باشد. در این ناحیه تغییرات مومنتوم با حرکت تصادفی ذرات سیال از لایه ای به لایه ای دیگر منتقل می شود که طبیعت جریان از نوع مغشوش بوده که تنش برشی بستگی به ویسکوزیته پیچشی (ϵ)[۷] دارد. در صورتی که در ناحیه مرزی آرام فقط تنش های برشی و یسکوز حاکم بوده و فقط ویسکوزیته نیوتنی μ مورد استفاده قرار می گیرد. پس در ناحیه لایه مرزی آرام تنش برشی به صورت $\tau_{lam} = \mu\ (du_x/dy)$ در نظر گرفته می شود. لیکن در ناحیه مربوط به لایه مرزی مغشوش $\tau_{tur} = \rho\ \epsilon$ (du_x/dy) می باشد، که ϵ به جریان مغشوش بستگی داشته و مستقل از خاصیت انتقالی سیال می باشد.

۳. روش های تحلیل لایه مرزی (جریان اطراف اجسام غوطه ور)

حل تحلیلی کل معادلات ناویر استوکس برای لایه‌های مرزی اطراف اجسام غوطه ور تقریباً غیر ممکن است. لذا معمولاً سه روش برای تحلیل لایه مرزی ارائه شده است:

۱- روش استفاده از محاسبات عددی و کامپیوتر[۸]

---
[6] Laminar Sublayer
[7] Eddy Viscosity
[8] Numerical Digital Computer Solution

۲- روش تجربی با انجام آزمایش[9]

۳- روش تئوری لایه مرزی[10]

تحلیل جریان سیال در مجاری اطراف اجسام پیچیده ، محدب یا مقعر معمولا سخت و مشکل می باشد و حل تحلیلی معادلات ناویر-استوکس در این گونه موارد، بسیار مشکل و غیر ممکن می نماید. لذا روش محاسبات عددی به کمک کامپیوتر استفاده می شود. راه حل های عددی بسیاری برای تحلیل لایه مرزی تاکنون ارائه شده است. به خصوص برای مدلسازی لایه مرزی در جریان های مغشوش می توان از ابزار محاسبات عددی و روش های المان محدود و یا تفاضل محدود و دیگر روش ها نیز استفاده کرد. در روش تجربی با بهره گیری از آنالیز ابعادی می توان جواب های دقیق به دست آورد. به هر حال روش تجربی گران بوده و معمولا برای تحلیل جریان خارج از لایه مرزی (جریان پتانسیلی) بسیار مفید می باشد.

روش نظریه لایه مرزی توسط لودویگ پرانتل[11] در سال ۱۹۰۴ ارائه شد که نقطه عطفی در تحلیل لایه مرزی به شمار می‌رود. پرانتل با استفاده از مرتبه مقداری[12] متغیرها، معادلات ناویر-استوکس را بسیار ساده نمود به طوری که معادلات حاصل را که به آن‌ها معادلات لایه مرزی اطلاق شده، می‌توان با استفاده از روش‌های ساده عددی و یا تحلیلی حل نموده و جواب‌های قابل قبولی برای توزیع سرعت و فشار در لایه مرزی ارائه نمود.

در ادامه این بخش به تعریف انواع ضخامت لایه مرزی پرداخته می‌شود آن‌گاه معادلات لایه مرزی با استفاده از روش پرانتل توضیح داده می‌شود و در نهایت، روش‌های عددی و تحلیلی برای حل معادلات لایه مرزی ارائه می‌شود.

[9] Experimentation
[10] Boundary Layer Theory
[11] Ludwig Prandtl
[12] Order of Magnitude

۱-۳. ضخامت لایه مرزی

برای ساده سازی معادلات ناویر استوکس، لازم است که ضخامت لایه مرزی، δ، معرفی شده و نشان داده شود که ضخامت لایه مرزی به طور نسبی بسیار کمتر از طول میدان جریان (L) مانند اندازه جسم، شعاع، تحدب و یا عرض کانال می باشد. در این جا ضخامت لایه مرزی به سه صورت تعریف می شود:

- ضخامت لایه مرزی[۱۳]
- ضخامت جابجایی[۱۴]
- ضخامت مومنتوم[۱۵]

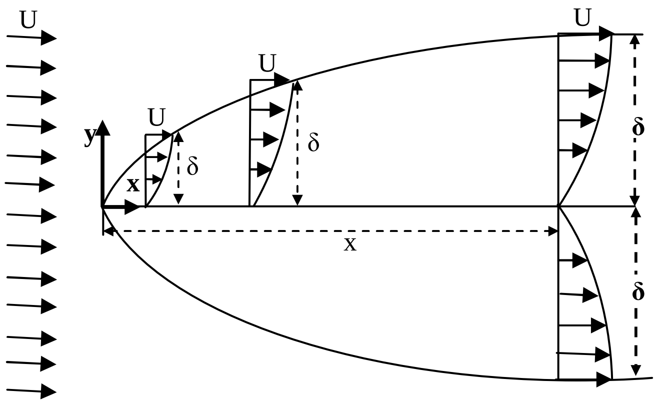
الف- ضخامت لایه مرزی

ضخامت لایه مرزی عبارت است از فاصله ما بین مرز جامد و ناحیه‌ای که سرعت سیال از صفر به مقدار ۰/۹۹ سرعت جریان آزاد (U) می‌رسد. مطابق شکل (۳-۱۱) جریان یکنواخت اطراف صفحه مسطح را ملاحظه نمایید. ملاحظه می‌شود که ضخامت لایه مرزی تابعی از متغیر x در طول صفحه می‌باشد، یعنی $\delta=\delta(x)$ فرض می‌شود. لیکن در فاصله x از لبه صفحه لایه مرزی آرام، کاملاً توسعه پیدا کرده است. پس ضخامت لایه مرزی به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$y = \delta : u_x = 0.99U \qquad (۱-۱۱)$$

که $u_x=u_x\ (y)$، پروفیل سرعت در لایه مرزی می‌باشد.

[13] Boundary Layer Thickness
[14] Displacement Thickness
[15] Momentum Thickness



شکل ۳-۱۱: ضخامت لایه مرزی اطراف یک صفحه مسطح

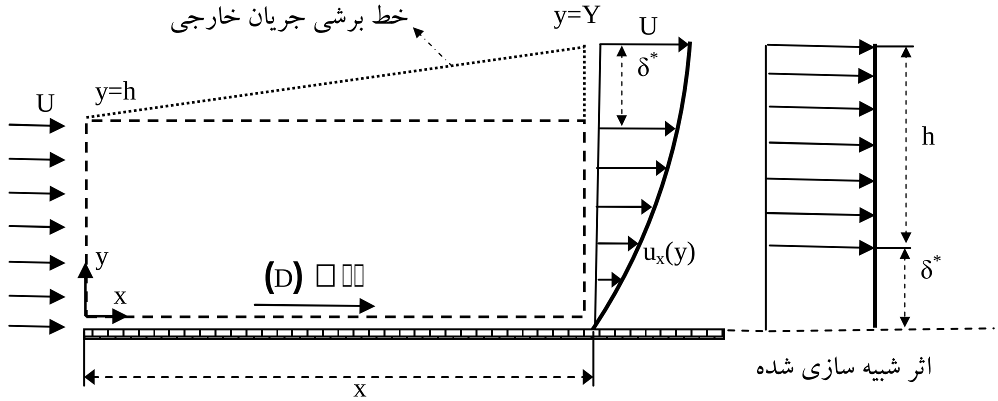
ب- ضخامت‌های جابجایی و مومنتوم

برای تعریف ضخامت‌های جابجایی و مومنتوم لایه مرزی لازم است موازنه های جرم و مومنتوم روی المان در لایه مرزی نوشته شود. همانگونه که در شکل (۴-۱۱) دیده می‌شود، جریان آزاد با سرعت U در ارتفاع h وارد المان حجمی لایه مرزی می‌شود. به علت اصطکاک و گرادیان سرعت، جریان روی مرز جامد متوقف می‌شود، لیکن به تدریج حرکت سیال در جهت عمود بر صفحه به طرف بالا جابجا می‌شود. برای برقراری موازنه جرم لازم است مقدار جرم ورودی در ارتفاع h در ابتدای صفحه برابر با جرم خروجی در فاصله x از صفحه باشد. بنابراین با استفاده از معادله انتگرال انتقالی رینولدز می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dm}{dt} = \iint_{cs} \rho\vec{u}.\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{cv} \rho dV = 0 \qquad (۱۱-۲)$$

که انتگرال اول شار جرمی را در جهت جریان یکنواخت نشان می‌دهد. انتگرال دوم تجمع جرم را در حجم کنترل یا المان نشان می‌دهد که در این جا صفر است، چون حالت پایداری حاکم می‌باشد. پس خواهیم داشت:

$$\iint_{cs} \rho\vec{u}.\,dA = \int_0^Y u_x dy - \int_0^h U dy = 0 \qquad (۱۱-۳)$$



شکل ۴-۱۱: المان لایه مرزی روی صفحه مسطح

معادله (۳-۱۱) به صورت ذیل جابجا و نوشته می‌شود:

$$Uh = \int_0^Y u_x dy = \int_0^Y (U + u_x - U) dy = UY + \int_0^Y (u_x - U) dy \qquad (۱۱-۴)$$

حال $Y=h+\delta^*$ تعریف می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$U(Y - h) = U\delta^* = \int_0^Y (U - u_x) dy \qquad (۱۱-۵)$$

پس با استفاده از معادله (۵-۱۱) "ضخامت جابجایی لایه مرزی" به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\delta^* = \int_0^{y=\delta} \left(1 - \frac{u_x}{U}\right) dy \qquad (۱۱-۶)$$

ملاحظه می‌شود که $y=\delta$ همان ضخامت لایه مرزی است. مطابق شکل (۴-۱۱)، ضخامت جابجایی لایه مرزی عبارت از فاصله‌ای از مرز جامد می‌باشد که سیال از سطح در جهت y جابجا شده به طوری که دبی جریان واقعی در جهت x برابر با جریان پتانسیل ورودی بر روی صفحه مسطح باشد.

حال اگر بر روی المان حجم موازنه مومنتوم در جهت x نوشته شود، خواهیم داشت:

$$\sum F_x = \iint_{cs} u_x(\rho\vec{u}.dA) = \int_0^{y=\delta} u_x(\rho u_x) dy - \int_0^h U(\rho U) dy \qquad (۱۱-۷)$$

با توجه به این که درگ به صورت $\sum F_x = -D$ می‌باشد، بنابراین معادله (۷-۱۱) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$D = \rho U^2 h - \int_0^{y=\delta} \rho {u_x}^2 dy \qquad (۱۱-۸)$$

از طرفی از معادله (۴-۱۱) می‌توانیم بنویسیم:

$$h = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{U} dy \qquad (۱۱-۹)$$

پس با جاگذاری معادله (۹-۱۱) در معادله (۸-۱۱) خواهیم داشت:

$$D = \rho \int_0^{\delta} u_x (U - u_x) dy \qquad (۱۱-۱۰)$$

حال اگر دو طرف معادله (۱۰-۱۱) را بر ρU^2 تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{D}{\rho U^2} = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{U} \left(1 - \frac{u_x}{U}\right) dy \qquad (۱۱-۱۱)$$

پس "ضخامت مومنتوم لایه مرزی" به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{U} \left(1 - \frac{u_x}{U}\right) dy \qquad (۱۱-۱۲)$$

برای ضخامت مومنتوم مانند ضخامت جابجایی نمی‌توان مفهوم فیزیکی به صورت تصویری ارائه داد. بنابراین سه ضخامت δ و δ^* و θ که برای لایه مرزی تعریف شده، ترتیب آن‌ها به صورت $\theta < \delta^* < \delta$ می‌باشند.

۲-۳. درگ و ضریب اصطکاک در لایه مرزی

همان طور که در بالا اشاره شد، درگ، نیروی مقاومت اصطکاکی است که از سطح جسم غوطه‌ور در مقابل جریان آزاد قرار دارد. در این جا ضریب درگ به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} \qquad (۱۱-۱۳)$$

که A مساحت صفحه مسطح می‌باشد. حال با استفاده از معادلات (۱۱-۱۱) و (۱۲-۱۱) خواهیم داشت:

$$C_D(x) = \frac{2\theta}{x} \qquad (۱۱-۱۴)$$

که در این جا عرض صفحه (b) مساوی یک در نظر گرفته شده است. از طرفی ضریب اصطکاک پوسته‌ای به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \qquad (۱۱-۱۵)$$

که τ_w، تنش برشی در دیواره یا مرز جامد است.

۴. معادلات لایه مرزی[۱۶]

در این جا روش پرانتل که با ساده سازی معادلات ناویر-استوکس برای جریان دو بعدی سیال یکنواخت روی یک صفحه مسطح انجام شده، ارائه می‌گردد. طبیعت روش مذکور کاملاً فیزیکی است، به طوری که متغیرها را با یکدیگر مقایسه نموده و با توجه به این که $\delta << L$ می‌باشد، بسیاری از عبارت‌ها در معادلات ناویر-استوکس حذف می‌شوند.

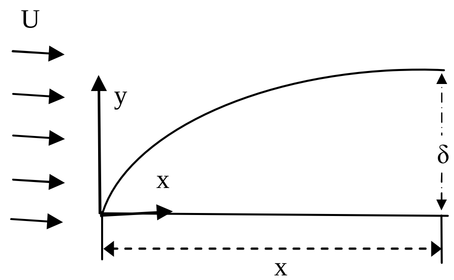
پس ابتدا معادلات ناویر-استوکس و پیوستگی را برای جریان دو بعدی به صورت ذیل می‌نویسیم:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad (۱۱-۱۶)$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \qquad (۱۱-۱۷)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \qquad (۱۱-۱۸)$$

که $\nu=\mu/\rho$، ویسکوزیته سینماتیکی است.



شکل ۵-۱۱: توسعه لایه مرزی آرام در روی صفحه مسطح

مطابق شکل (۵-۱۱)، $(\delta/x) << 1$ فرض می‌شود، مگر در لبه صفحه که هنوز لایه مرزی توسعه پیدا نکرده است.

[16] Boundary Layer Equations

الف- مرتبه مقداری متغیرها

در ابتدا درجه و مقدار بزرگی و یا کوچکی متغیرها را نسبت به یکدیگر مقایسه می‌کنیم. هم چنین مشتق متغیرها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این جا چون مؤلفه u_x سرعت جریان غالب می‌باشد، تغییرات آن را نسبت به x و y مورد بررسی قرار می‌دهیم. ملاحظه می‌شود که $0<u_x<U$ در فاصله $0<y<\delta$ تغییر می‌کند. به عبارتی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U}{x} \qquad \& \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y} \sim \frac{U}{\delta} \tag{۱۱-۱۹}$$

پس می‌توانیم مرتبه مقدار بزرگی[۱۷] برای مشتق‌های مؤلفه سرعت u_x را به صورت ذیل بنویسیم:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \simeq O\left(\frac{U}{x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = O\left(\frac{U}{x^2}\right) \tag{۱۱-۲۰}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} \simeq O\left(\frac{U}{\delta}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{U}{\delta^2}\right) \tag{۱۱-۲۱}$$

که علامت "O" به معنی مرتبه مقداری هر متغیر است.

در این جا فرض شده است که $u_x \simeq O(U)$، $\partial/_{\partial x} \simeq O(1/_x)$ و $\partial/_{\partial y} \simeq O(1/_\delta)$ می‌باشند. حال اگر معادله پیوستگی را برای مرتبه بزرگی $\partial u_y/_{\partial y}$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial u_x}{\partial x} = O\left(\frac{U}{x}\right) \tag{۱۱-۲۲}$$

از طرفی چون $u_y \ll u_x$ و همچنین در $y=0$، $u_y=0$ است، پس می‌توان از معادله (۱۱-۲۲) مؤلفه u_y را به صورت ذیل به دست آورد:

$$u_y = O\left(\frac{U\delta}{x}\right) \tag{۱۱-۲۳}$$

بنابراین با استفاده از معادلات (۱۱-۲۲) و (۱۱-۲۳) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} \simeq O\left(\frac{U}{x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = O\left(\frac{U}{x\delta}\right) \tag{۱۱-۲۴}$$

[17] Order Of Magnitude

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} \simeq O\left(\frac{U\delta}{x^2}\right) \qquad ; \qquad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = O\left(\frac{U\delta}{x^3}\right) \tag{۱۱-۲۵}$$

حال با جاگذاری معادلات (۱۱-۲۰)، (۱۱-۲۱)، (۱۱-۲۴) و (۱۱-۲۵) برای مشتق‌های اول و دوم معادلات ناویر-استوکس و در نظر گرفتن $u_x=O(U)$ و $u_y=O(U\delta/x)$، معادلات ناویر-استوکس به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\frac{U^2}{x} + \frac{U^2}{x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{U}{x^2} + \nu\frac{U}{\delta^2} \qquad \text{(مؤلفه x)} \tag{۱۱-۲۶}$$

$$\frac{\delta U^2}{x^2} + \frac{\delta U^2}{x^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\frac{\delta U}{x^3} + \nu\frac{U}{x\delta} \qquad \text{(مؤلفه y)} \tag{۱۱-۲۷}$$

ملاحظه می‌شود که برای فشار، مرتبه مقداری در نظر گرفته نشده است.

ب- مؤلفه x در معادله ناویر- استوکس

اگر معادله (۱۱-۲۶) برای مؤلفه x را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که $(\nu U/x^2) \ll (\nu U/\delta^2)$ می‌باشد، چون $(\delta/x) \ll 1$ فرض شده است. از طرفی در لایه مرزی نیروهای اینرسی که مربوط به شتاب است در تقابل با نیروهای ویسکوز که ناشی از تنش برشی است، می‌باشد. با حذف عبارت $\nu\,{\partial^2 u_x}/{\partial x^2}$ از معادله (۱۱-۲۶) و موازنه دو نیروی اینرسی و ویسکوز خواهیم داشت:

$$\underbrace{\frac{U^2}{x}}_{\text{نیروی اینرسی}} \simeq \underbrace{\nu\frac{U}{\delta^2}}_{\text{نیروی ویسکوز}} \tag{۱۱-۲۸}$$

پس معادله (۱۱-۲۸) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\delta \approx O\left(\sqrt{\frac{\nu x}{U}}\right) \qquad \text{یا} \qquad \left(\frac{\delta}{x}\right)^2 = O\left(\frac{\nu}{xU}\right) \tag{۱۱-۲۹}$$

که $Re_x = xU/\nu$ تعریف می‌شود. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\delta}{x} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re_x}}\right) \tag{۱۱-۳۰}$$

پس چون $1 \gg (\delta/x)$ است، بنابراین $Re_x \gg 1$ می‌باشد. بنابراین زمانی لایه مرزی توسعه داده می‌شود که عدد رینولدز خیلی بزرگ باشد، به عبارتی در ابتدا و یا لبه صفحه لایه مرزی شکل نمی‌گیرد. همچنین از معادله (۲۹-۱۱) و (۲۶-۱۱) می‌توان مرتبه بزرگی ν و افت فشار در جهت x را به صورت ذیل به دست آورد:

$$\nu = O\left(\frac{\delta^2 U}{x}\right) \qquad ; \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = O\left(\frac{U^2}{x}\right) \tag{۱۱-۳۱}$$

باید توجه داشت که در جریان روی صفحه مسطح، معمولاً افت فشار در x قابل اغماض می‌باشد.

ج- مؤلفه y در معادله ناویر-استوکس

حال معادله (۲۷-۱۱) را برای مؤلفه y معادله ناویر-استوکس مورد بررسی قرار می‌دهیم. ملاحظه می‌شود که عبارت‌های اینرسی در معادله (۲۷-۱۱) بسیار کوچکتر از عبارت‌های اینرسی متناظر در معادله (۲۶-۱۱) می‌باشد، چون $(\delta U^2/x^2) \ll (U^2/x)$ است. از طرفی عبارت‌های ویسکوز در معادله (۲۷-۱۱) نیز از عبارت‌های ویسکوز متناظر در معادله (۲۶-۱۱) خیلی کوچک‌تر می‌باشد. بنابراین عبارت‌های اینرسی و ویسکوز را از معادله (۲۷-۱۱) حذف می‌کنیم. هم‌چنین، مرتبه مقداری افت فشار در جهت y از معادله (۲۷-۱۱) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = O\left(\frac{\delta U^2}{x^2}\right) \leq O\left(\frac{U^2}{x}\right) \tag{۱۱-۳۲}$$

پس $(dP/dy) \ll (dP/dx)$ فرض می‌شود، بنابراین $P = P(x)$ خواهد بود.

د- معادلات لایه مرزی

با توجه به فرضیات بالا معادلات پیوستگی و مومنتوم در لایه مرزی به شکل ذیل حاصل می‌شوند:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \tag{۱۱-۳۳}$$

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{۱۱-۳۴}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad ; \qquad P = P(x) \tag{۱۱-۳۵}$$

از طرفی چون $P = P(x)$ می‌باشد پس گرادیان فشار در طول لایه مرزی برابر با گرادیان فشار در جریان خارجی یا جریان پتانسیلی خواهد بود. همان طور که در فصل هشتم توضیح داده شد، برای به دست آوردن گرادیان فشار در جریان پتانسیلی از معادله برنولی به شکل ذیل استفاده می‌شود:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 = \text{ثابت} \tag{۱۱-۳۶}$$

که $P = P(x)$ فشار جریان پتانسیلی را نشان می‌دهد. که با مشتق گیری از معادله (۳۶-۱۱) خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} = U\frac{dU}{dx} \tag{۱۱-۳۷}$$

با جاگذاری معادله (۳۷-۱۱) در (۳۴-۱۱)، معادله حرکت لایه مرزی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{۱۱-۳۸}$$

بنابراین برای به دست آوردن پروفیل سرعت u_x در لایه مرزی لازم است معادله (۳۸-۱۱) حل شود. در این‌جا در جریان یکنواخت بر روی صفحه مسطح U ثابت بوده، پس $(dU/dx) = 0$ می‌باشد. بنابراین معادله حرکت لایه مرزی روی صفحه مسطح با شرایط مرزی به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{۱۱-۳۹}$$

شرط مرزی ۱ : $u_x(x,0) = 0$

شرط مرزی ۲ : $u_y(x,0) = 0$ (۱۱-۴۰)

شرط مرزی ۳ : $u_x(x,y) = U$ $(y = \delta \to \infty)$

شرط مرزی سوم در شرایطی است که سرعت u_x در $y = 0.99\delta$ سرعت جریان آزاد (U) در جریان پتانسیلی برابر می‌شود.

۵. حل معادلات لایه مرزی در صفحه مسطح

جریان یکنواخت روی صفحه مسطح بستگی به زاویه ما بین بردار جریان آزاد و صفحه مسطح دارد. در این جا فرض می‌شود که جریان یکنواخت موازی صفحه مسطح باشد. بنابراین در این جا لازم است معادله (۳۹-۱۱) حل شود. سه روش برای حل معادله دیفرانسیلی (۳۹-۱۱) ارائه شده است که به شرح ذیل می‌باشند:

- روش مشابه[۱۸] یا روش بلازیوس [۱۹]
- روش انتگرال مومنتوم[۲۰]
- روش محاسبات عددی[۲۱]

۱-۵. روش مشابه یا بلازیوس

بلازیوس معادلات لایه مرزی (۳۹-۱۱) و پیوستگی را با استفاده از تبدیل مشابه سازی حل نمود. او فرض کرد که پروفیل سرعت u_x در طول لایه مرزی روی صفحه مسطح از نظر هندسی متشابه هستند، به طوری که هر چه از لبه صفحه فاصله گرفته می‌شود، پروفیل سرعت مطابق شکل (۳-۱۱) در جهت y کشیده می‌شود. بلازیوس فرض نمود که سرعت بدون بعد u_x متناسب با پارامتر بدون بعد ξ می‌باشد. پس این رابطه تناسب را با تابع ϕ به صورت ذیل تعریف نمود:

$$\frac{u_x}{U} = \phi\left(\frac{y}{\delta}\right) \qquad (۱۱-۴۱)$$

به عبارتی رابطه (۴۱-۱۱) نشان می‌دهد که سرعت نرمال شده تابعی از فاصله نرمال شده از سطح در جهت y است.

پس رابطه بدون بعد ξ به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\xi = \frac{y}{\delta(x)} \qquad (۱۱-۴۲)$$

از طرفی طبق رابطه (۳۰-۱۱) خواهیم داشت:

---

[18] Similar
[19] Blasius
[20] Momentum Integral Approach
[21] Numerical Solution

$$\delta(x) \propto \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad \rightarrow \; \xi = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \tag{۱۱-۴۳}$$

حال با استفاده از تابع جریان لاگرانژی مؤلفه‌های سرعت $u_x=\partial\psi/\partial y$ و $u_y=-\partial\psi/\partial x$ را در معادله لایه مرزی رابطه (۱۱-۳۹) جاگذاری می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{۱۱-۴۴}$$

از معادله (۱۱-۴۴) مشاهده می‌شود که یک معادله دیفرانسیل جزیی سهموی بوده و معادله مذکور با استفاده از جداسازی متغیرها[22] به صورت ذیل ارائه می‌شود:

$$\psi(x, y) = g(x)f(\xi) \tag{۱۱-۴۵}$$

که $g(x)$ و $f(\xi)$ دو تابع یک متغیره و مستقل هستند. پس مؤلفه‌های u_x و u_y با استفاده از معادله (۱۱-۴۵) به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = g(x)f(\xi)\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \qquad \text{یا} \qquad \frac{u_x}{U} = g(x)f'(\xi)\sqrt{\frac{1}{U\nu x}} \tag{۱۱-۴۶}$$

از طرفی طبق روابط (۱۱-۴۱) و (۱۱-۴۳) خواهیم داشت:

$$\frac{u_x}{U} = \phi\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) = \phi(\xi) \tag{۱۱-۴۷}$$

بنابراین با مقایسه روابط (۱۱-۴۶) و (۱۱-۴۷) خواهیم داشت:

$$\phi(\xi) = f'(\xi) \qquad ; \qquad g(x) = \sqrt{\nu x U} \tag{۱۱-۴۸}$$

پس با توجه به روابط (۱۱-۴۶) و (۱۱-۴۸) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{u_x}{U} = \frac{df(\xi)}{d\xi} = f'(\xi) \tag{۱۱-۴۹}$$

[22] Separation of Variables

به همین ترتیب برای u_y و مشتق‌های دیگر خواهیم داشت:

$$u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}(\xi f' - f) \qquad (۱۱-۵۰)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{U\xi}{2x} f''(\xi) \qquad (۱۱-۵۱)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = U\sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(\xi) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\nu x} f'''(y) \qquad (۱۱-۵۲)$$

با جاگذاری در روابط (۴۹-۱۱) تا (۵۲-۱۱) در معادله (۴۴-۱۱) خواهیم داشت:

$$\frac{-U^2}{2x}\xi f' f'' - \frac{U^2}{2x}(f - \xi f') f'' = \frac{U^2}{x} f''' \qquad (۱۱-۵۳)$$

$$\frac{-U^2}{2x} f f'' - \frac{U^2}{x} f''' = 0 \quad \text{یا} \quad f f'' + 2f''' = 0 \qquad (۱۱-۵۴)$$

همان گونه که از معادله (۵۴-۱۱) ملاحظه می‌شود این معادله عادی دیفرانسیلی بلازیوس می‌باشد، به طوری که هیچ متغیر طولی در آن مشاهده نمی‌شود. جواب این گونه معادلات به صورت جواب‌های مشابه[23] ارائه می‌شود. شرایط مرزی معادله (۵۴-۱۱) با استفاده از شرایط مرزی (۴۰-۱۱) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\text{شرط مرزی ۱}: \xi = 0 \quad ; \quad f = f' = 0$$
$$\text{شرط مرزی ۲}: \xi = \infty \quad ; \quad f'(\xi) = 1 \qquad (۱۱-۵۵)$$

بلازیوس با استفاده از روش محاسبات عددی معادله (۵۴-۱۱) را حل نمود و جدول (۱-۱۱) را برای مقادیر نرمال شده سرعت u_x بر حسب متغیر ξ ارائه کرد. ملاحظه می‌شود که $\xi = y/\delta$ می‌باشد. پس در شرایطی که سرعت جریان در لایه مرزی به مقدار $0.99U$ برسد، δ ضخامت لایه مرزی خواهد بود.

[23] Similarity Solution

$\xi = y\left(\frac{U}{\nu x}\right)^2$	$\frac{u_x}{U}$	$\xi = y\left(\frac{U}{\nu x}\right)^2$	$\frac{u_x}{U}$
0.0	0.0	3.2	0.87609
0.2	0.06641	3.4	0.90177
0.4	0.13277	3.6	0.92333
0.6	0.19894	3.8	094112
0.8	0.26471	4.0	0.95552
1.0	0.32979	4.2	0.96696
1.4	0.45627	4.4	0.97587
1.8	0.57477	4.6	0.98269
2.2	0.68132	4.8	0.98779
2.6	0.77249	5.0	0.99155
3.0	0.84605	∞	1.000

جدول ۱-۱۱: مقادیر سرعت بر حسب پارامتر بدون بعد فاصله توسط بلازیوس

بنابراین مطابق جدول (۱-۱۱) در $\xi=\delta$ مقدار $u=0.99U$ می‌باشد، پس خواهیم داشت:

$$\xi = \delta(\frac{U}{\nu x})^{1/2} \cong 5.0 \qquad (۱۱-۵۶)$$

رابطه (۵۶-۱۱) بر حسب عدد رینولدز به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{Re_x}} \qquad (\text{بلازیوس } 1908) \qquad (۱۱-۵۷)$$

جواب بلازیوس برای جریان لایه مرزی آرام مناسب است و دقت آن تا $Re = 10^5$ می‌باشد. تنش برشی در دیواره یا روی صفحه مسطح به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \mu\left(U\sqrt{\frac{u_x}{\nu x}}f''\right)_{y=0} = 0.332\,\frac{\mu U^{3/2}}{\sqrt{\nu x}} \qquad (۱۱-۵۸)$$

که در معادله (۵۸-۱۱) مقدار $f''\cong.0332$ در $\xi=0$ می‌باشد. ضریب اصطکاک پوسته‌ای نیز به طریق ذیل محاسبه می-شود:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.332\mu \frac{U^{3/2}}{\sqrt{\nu x}}}{\frac{1}{2}\rho U^2} \qquad ; \qquad c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \tag{۱۱-۵۹}$$

ضریب درگ نیز به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = \frac{b\int_0^l \tau_w(x)dx}{\frac{1}{2}\rho U^2 (bl)} \tag{۱۱-۶۰}$$

که با جایگذاری معادله (۵۸-۱۱) در رابطه (۶۰-۱۱) و انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$c_D = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \qquad \text{(بلازیوس 1908)} \tag{۱۱-۶۱}$$

با استفاده از داده‌های جدول (۱-۱۱) ضخامت‌های جابجایی (δ^*) و مومنتوم (θ) به صورت ذیل حاصل می‌شوند:

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{Re}} \qquad \text{(بلازیوس 1908)} \tag{۱۱-۶۲}$$

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re}} \qquad \text{(بلازیوس 1908)} \tag{۱۱-۶۳}$$

با مقایسه روابط (۵۷-۱۱)، (۶۲-۱۱) و (۶۳-۱۱) مشاهده می‌شود که $\theta<\delta^*<\delta$ می‌باشد. نسبت ضخامت جابجایی به ضخامت مومنتوم به "ضریب شکلی[۲۴]" شناخته می‌شود. که در روش بلازیوس برای صفحه مسطح به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1.721}{0.664} = 2.59 \tag{۱۱-۶۴}$$

در شرایطی که ضریب شکلی عدد بزرگی باشد، به این معنی است که لایه مرزی در شرف جدا شدن از سطح می‌باشد.

۲-۵. روش انتگرال مومنتوم[۲۵] یا روش فون کارمن[۲۶]

کارمن با استفاده از انتگرال مومنتوم نشان داد، می‌توان ضخامت لایه مرزی و همچنین ضریب درگ را در جریان یکنواخت بر روی صفحه مسطح به دست آورد. پس برای به دست آوردن رابطه انتگرال مومنتوم لازم است که از معادلات لایه مرزی به شرح ذیل شروع گردد:

---

[24] Shape Factor
[25] Momentum Integral
[26] Von Karman

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0 \qquad \text{یا} \qquad \frac{\partial u_x}{\partial x}=-\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{۱۱-۶۵}$$

با استفاده از تعریف مشتق خواهیم داشت:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)-u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{۱۱-۶۶}$$

با جاگذاری معادله (۶۵-۱۱) در معادله (۶۶-۱۱) خواهیم داشت:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)+u_x\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{۱۱-۶۷}$$

با جاگذاری معادله (۶۷-۱۱) در معادله (۳۹-۱۱) لایه مرزی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)+\underbrace{u_x\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y)}=\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{۱۱-۶۸}$$

با انتگرال گیری از معادله (۶۸-۱۱) در عرض لایه مرزی خواهیم داشت:

$$\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)dy+\int_0^\delta d\left(u_x u_y\right)dy=\nu\int_0^\delta d\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{۱۱-۶۹}$$

پس می توانیم به نویسیم:

$$\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)dy+\left[u_x u_y\right]_0^\delta=\nu\left[\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_0^\delta \tag{۱۱-۷۰}$$

شرایط مرزی در جریان صفحه مسطح به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

شرط مرزی ۱ : $u_x(x,0)=u_y(x,0)=0$ (در صفحه مسطح) (۱۱-۷۱)

شرط مرزی ۲ : $u_x(x,\delta)=U$ (در جریان خروجی) (۱۱-۷۲)

شرط مرزی ۳ : $\tau_w=\mu\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=0}$ (در صفحه مسطح) (۱۱-۷۳)

شرط مرزی ۴ : $\frac{\partial u_x(x,\delta)}{\partial y}=0$ (در جریان خروجی) (۱۱-۷۴)

با اعمال شرایط مرزی بالا در معادله (۷۰-۱۱) خواهیم داشت:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)dy + Uu_y(x,\delta) = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (۱۱-۷۵)$$

از طرفی با انتگرال گیری از معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u_x}{\partial x}dy + \int_0^{u_y(x,\delta)} d(u_y) = 0 \quad \text{یا} \quad u_y(x,\delta) = -\int_0^{\delta} \frac{\partial u_y}{\partial x}dy \quad (۱۱-۷۶)$$

$$Uu_y(x,\delta) = -U\int_0^{\delta} \frac{\partial u_x}{\partial x}dy \quad (۱۱-۷۷)$$

پس با ادغام معادلات (۷۵-۱۱) و (۷۷-۱۱) خواهیم داشت:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)dy - U\int_0^{\delta} \frac{\partial u_x}{\partial x}dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (۱۱-۷۸)$$

با استفاده از قانون لایب نیتز[۲۷] انتگرال‌های طرف چپ معادله (۷۸-۱۱) ساده شده و معادله مذکور به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u_x^2 dy - U\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u_x dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (۱۱-۷۹)$$

چون U مقداری ثابت است پس با جابجایی عبارت‌های معادله (۷۹-۱۱) خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u_x(U - u_x)dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (۱۱-۸۰)$$

معادله (۸۰-۱۱) معادله "انتگرال مومنتوم" اطلاق می‌شود. از طرفی با تقسیم دو طرف معادله (۸۰-۱۱) بر U^2 خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} \frac{u_x}{U}\left(1 - \frac{u_x}{U}\right)dy = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (۱۱-۸۱)$$

با استفاده از تعریف ضخامت مومنتوم، یعنی معادله (۱۲-۱۱)، معادله انتگرال مومنتوم، یعنی معادله (۸۱-۱۱) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad \text{یا} \quad \tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (۱۱-۸۲)$$

معادله (۸۲-۱۱) برای هر دو جریان آرام و مغشوش استفاده می‌شود.

---

[27] Leibnitz's Rule

۳-۵. روش تقریبی با استفاده از انتگرال مومنتوم

برای محاسبه مشخصات لایه مرزی مانند ضخامت‌ها و ضریب درگ از روش انتگرال مومنتوم استفاده می‌شود. در این روش ابتدا لازم است برای پروفیل سرعت یک تابع تقریبی ارائه نمود. توابع مختلفی تا کنون برای u_x/U پیشنهاد شده است. لیکن تمام آن‌ها جواب‌های تقریبی مناسبی ارائه می‌دهند. در این جا یک تابع چند جمله‌ای برای u_x/U پیشنهاد می‌شود. لیکن قبل از ارائه هر گونه تابع لازم است شرایط مرزی برای محاسبه ضرایب تابع پیشنهادی به شرح ذیل ارائه شود. البته باید توجه داشت شرایط مرزی لازم به ترتیب ذیل اعمال می‌شود:

- ✓ شرط مرزی اول (عدم لغزش در سطح):

در $y=0$ داریم: $u_x=u_y=0$

- ✓ شرط مرزی دوم (یکسانی سرعت در $y=\delta$ با سرعت جریان خروجی):

در $y=\delta$ داریم: $u_x=U$

- ✓ شرط مرزی سوم (پیوستگی سرعت جریان در $y=\delta$ با جریان خارجی):

در $y=\delta$ داریم: $\frac{\partial u_x}{\partial y}=0$ ، $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=0, \ldots$

- ✓ شرط مرزی چهارم (ناپدید شدن مشتق‌های بالاتر بر روی سطح):

در $y=0$ داریم: $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=0$ ، $\frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3}=0, \ldots$

برای ارائه روش تقریبی پروفیل سرعت به صورت ذیل پیشنهاد می‌شود:

$$\frac{u_x}{U}=A+B\left(\frac{y}{\delta}\right)+C\left(\frac{y}{\delta}\right)^2+D\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (۱۱-۸۳)$$

۱- ابتدا شرایط مرزی ۱، ۲، ۳و ۴ اعمال می‌شود:

$$\frac{u_x}{U}=0 \qquad \text{(شرط مرزی اول)} \qquad (۱۱-۸۴)$$

$$\frac{u_x}{U}=B+C+D=1 \qquad \text{(شرط مرزی دوم)} \qquad (۱۱-۸۵)$$

$$\frac{\partial(u_x/U)}{\partial y} = B + 2C + 3D = 0 \qquad \text{(شرط مرزی سوم)} \qquad (۱۱-۸۶)$$

$$\frac{\partial^2(u_x/U)}{\partial y^2} = 2C = 0 \quad ; \quad C = 0 \qquad \text{(شرط مرزی چهارم)} \qquad (۱۱-۸۷)$$

با حل همزمان معادلات (۸۴-۱۱) تا (۸۷-۱۱)، مقادیر ضرایب پروفیل سرعت به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$A = 0 \quad ; \quad B = \frac{3}{2} \quad ; \quad C = 0 \quad ; \quad D = -\frac{1}{2}$$

بنابراین پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\frac{u_x}{U} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (۱۱-۸۸)$$

۲- ضخامت مومنتوم لایه مرزی را با استفاده از معادله (۱۲-۱۱) به دست می‌آوریم. به این ترتیب فرض می‌کنیم $\xi=y/\delta$ بوده و معادله (۸۸-۱۱) را در معادله ضخامت مومنتوم جاگذاری می‌نماییم:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u_x}{U}\left(1 - \frac{u_x}{U}\right)dy = \delta\int_0^1 \left(\frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi^3\right)\left(1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^3\right)d\xi \qquad (۱۱-۸۹)$$
$$\theta = \frac{78}{560}\delta = 0.1393\delta$$

۳- تنش برشی بر روی دیواره سطح مسطح

$$\tau_w = \mu\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \mu\left(\frac{3u}{2\delta} - \frac{3uy^2}{2\delta^3}\right)_{y=0} = \frac{3\mu u}{2\delta} \qquad (۱۱-۹۰)$$

۴- محاسبه ضخامت لایه مرزی (δ) با استفاده از انتگرال مومنتوم

$$\tau_w = \rho U^2\frac{d\theta}{dx} \quad ; \quad \frac{3\mu U}{2\delta} = \rho U^2\frac{d\theta}{dx} \quad ; \quad \frac{3\mu U}{2\delta} = 0.1393\,\rho U^2\frac{d\delta}{dx}$$

پس خواهیم داشت:

$$\delta d\delta = \frac{3\mu U}{2(0.1393)\rho U^2}dx \quad , \quad \delta d\delta = 10.76\frac{\nu}{U}dx \qquad (۱۱-۹۱)$$

که $\nu=\mu/\rho$ می‌باشد. حال با اعمال شرط مرزی در $x = 0$، $\delta = 0$ می‌باشد. پس با انتگرال گیری از معادله (۹۱-۱۱) خواهیم داشت:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.641}{\sqrt{Re}} \qquad \text{(جواب تقریبی)} \qquad (۱۱-۹۲)$$

مقایسه معادله (۹۲-۱۱) با معادله (۵۷-۱۱) بلازیوس ۷/۲٪ خطا نشان می‌دهد. برای محاسبه ضریب اصطکاک پوسته‌ای خواهیم داشت:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{\frac{3\mu U}{2\delta}}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad ; \quad c_f = \frac{0.646}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{(جواب تقریبی)} \qquad (۹۳-۱۱)$$

ملاحظه می‌شود که با ارائه روابط تقریبی برای پروفیل سرعت می‌توان جواب‌های قابل قبولی برای لایه مرزی به دست آورد. جدول (۲-۱۱) جواب‌های مختلفی برای c_f با پروفیل‌های سرعت تقریبی نشان می‌دهد. همان گونه که ملاحظه می‌شود برای پروفیل سرعت رابطه سینوسی نیز جواب‌های مناسبی ارائه می‌دهد.

$\left(\frac{u_x}{U}\right)$ پروفیل تقریبی	$C_f\sqrt{Re}$
$(\frac{y}{\delta})$	0.578
$2(\frac{y}{\delta}) - (\frac{y}{\delta})^2$	0.730
$\frac{3}{2}(\frac{y}{\delta}) - \frac{1}{2}(\frac{y}{\delta})^3$	0.646
$2(\frac{y}{\delta}) - 2(\frac{y}{\delta})^3 + (\frac{y}{\delta})^4$	0.686
$\sin(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta})$	0.656
Exact (Blasius)	0.664

جدول ۲: پروفیل های سرعت تقریبی و ضریب اصطکاک پوسته ای برای لایه مرزی

لازم است چند نکته توضیح داده شود:

- ✓ از معادله بلازیوس نتیجه می شود که، در $x=0$، $\delta=0$ می‌باشد. در جریان پایین دستی ضخامت لایه مرزی افزایش پیدا می‌کند، به طوری که $\delta \propto \sqrt{x}$ می‌باشد. برای x داده شده، ضخامت لایه مرزی با افزایش سرعت جریان آزاد (U) کم می‌شود.
- ✓ از معادله تنش برشی بلازیوس ملاحظه می‌شود که تنش برشی نزدیک لبه صفحه خیلی زیاد است (در $x=0$) و با افزایش فاصله از لبه صفحه، مقدار تنش برشی کاهش پیدا می‌کند.
- ✓ تقریب لایه مرزی در لبه صفحه صادق نیست، چون تقریب $\partial^2 u_x / \partial x^2 \ll \partial^2 u_x / \partial y^2$ صادق نمی‌باشد. به هر حال ناحیه لبه صفحه در مسائل مهندسی اهمیت ندارد.
- ✓ در فاصله‌های زیاد از لبه صفحه، عدد رینولدز خیلی بالا می‌باشد به طوری که نیروهای اینرسی حاکم بوده و نیروهای ویسکوز قابل اغماض یا کم می‌باشند. انتقال از جریان آرام به مغشوش در رینولدز ۵×۱۰^۵ اتفاق می‌افتد. لیکن اگر صفحه صاف باشد، می‌توان معادلات لایه مرزی آرام را تا رینولدز $۱۰^۶$ استفاده نمود.

برای تحلیل و فهم مناسب‌تر از لایه مرزی مثالی آورده می‌شود.

مثال- یک صفحه مسطح بسیارنازک با ابعاد ۲۵ cm در ۲۵ cm در عقب یک قایق در آب دریا کشیده می شود قایق با سرعت ۱۲ km/hr در آب با دمای ۱۵ ^oC حرکت می کند. ضخامت لایه مرزی در صفحه در این جا محاسبه می شود. هم چنین نیروی لازم برای کشیدن صفحه در آب به دست می آید.

ابتدا باید عدد رینولدز محاسبه شده تا بررسی شود که آیا حرکت سیال روی صفحه به صورت جریان آرام است یا نه:

$$\mathrm{Re_x} = \frac{\rho U x}{\mu} = \frac{\left(1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)\left(\frac{12000}{3600}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(0.25\mathrm{Cm})}{\left(0.0012\ \frac{\mathrm{N.s}}{\mathrm{m^2}}\right)} \cong 6.9 \times 10^5$$

مقدار عدد رینولدز $۵\times ۱۰^۵ < ۶/۹\times ۱۰^۵$ می باشد. لیکن اگر صفحه به اندازه کافی صاف بود، و جریان یکنواخت باشد، می توان این جریان را آرام فرض نمود. بنابراین با استفاده از معادله بلازیوس خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5 \times 0.25Cm}{\sqrt{694444}} = 0.0015Cm \cong 1.5 \text{ mm}$$

$$C_f = \frac{1.33}{\sqrt{Re_x}} = \frac{1.33}{\sqrt{694444}} = 1.6 \times 10^{-3}$$

$$\tau_\omega = \frac{1}{2} C_f \rho U^2 = \frac{1}{2}(1.6 \times 10^{-3}) \left(1000 \ \frac{kg}{m^3}\right) \left(\frac{12000}{3600} \frac{m}{s}\right)^2 = 8.87 \ \frac{N}{m^2}$$

$$F_{tot} = 2\tau_\omega A = 2\left(8.87 \ \frac{N}{m^2}\right)(0.25 \times 0.25 \text{ m}^2) = 1.11 \text{ N}$$

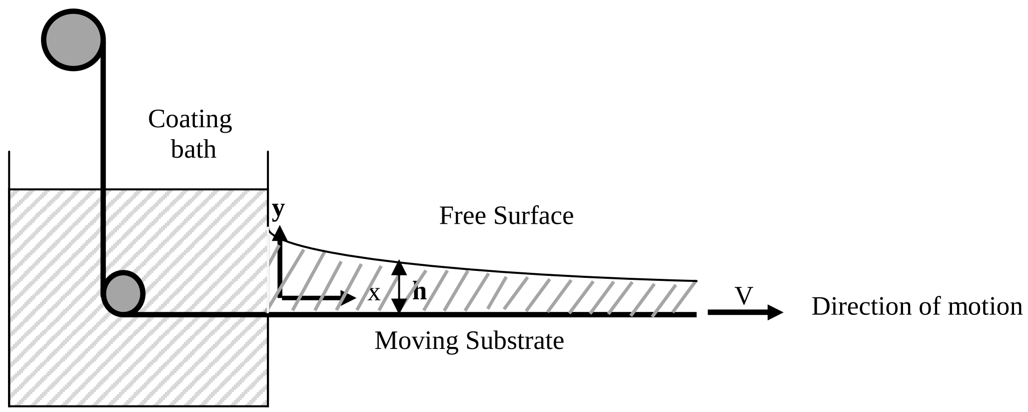
۶. خلاصه (جمع بندی)

لایه مرزی عبارت است از لایه‌های نازکی از سیال که همواره به سطح جامد چسبیده‌اند، به طوری که اثرات قوی نیروهای ویسکوز در این لایه وجود دارد. در جریان آزاد اطراف یک جسم جامد، سه ناحیه می‌توان مشاهده نمود: ناحیه داخلی (لایه مرزی)، ناحیه خارجی (جریان پتانسیلی) و ناحیه دنباله. در لایه مرزی سیال چرخشی فرض شده به طوری که گردابش ها در عرض لایه مرزی نفوذ می کنند. جریان خارجی به صورت غیرلزجی بوده و به صورت غیر چرخشی می باشد. در ناحیه دنباله گرادیان سرعت زیاد نبوده و اثرات ویسکوزیته اهمیت ندارد. لایه مرزی در بسیاری از عملیات های مهندسی شیمی اهمیت دارد چون نفوذ جرم و گرما بیشتر در لایه مرزی واقع می شود. در لایه مرزی مغشوش، تنش برشی بستگی به ویسکوزیته گردابی دارد اما در لایه مرزی آرام تنش های برشی فقط به ویسکوزیته نیوتنی وابسته می باشد. ضخامت لایه مرزی عبارت است از فاصله بین مرز جامد و ناحیه‌ای که سرعت سیال در آن به ٪۹۹ سرعت جریان آزاد می‌رسد. سه روش برای حل معادلات مرزی روی صفحه مسطح وجود دارد: روش بلازیوس، روش انتگرال مومنتوم و روش عددی.

۷. پرسش‌های پایان درس

۱- یک نوار پیوسته از یک لایه فلزی انعطاف پذیر، با سرعت ثابت V به سمت راست کشیده می شود و همزمان مایعی پلیمری با ویسکوزیته μ و تنش سطحی σ از مخزن خارج می شود و سطح نقاله را با ضخامت $h(x)$ می پوشاند (شکل زیر).

- با فرض این که نیروهای فشار و ویسکوز غلبه دارند، معادله مومنتوم در جهت x را بنویسید.
- اگر فشار داخل فیلم مایع، تنها به x بستگی داشته باشد، پروفیل سرعت را به دست آورید.
- اگر تنش سطحی اهمیت داشته باشد، آن گاه پروفیل سرعت چگونه خواهد بود؟
- اگر ضخامت فیلم مایع در نهایت به h_∞ برسد، آن گاه معادله ای برای محاسبه ضخامت فیلم مایع در طول نقاله بنویسید.



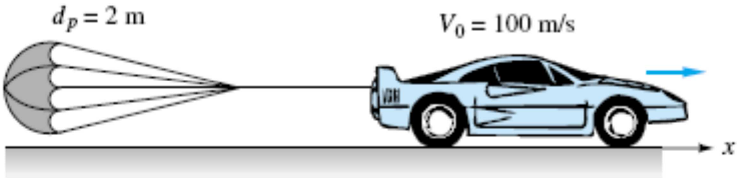
ج: ابتدا معادله پیوستگی و معادله مومنتوم را برای لایه مرزی می نویسیم. آن گاه با اعمال فرضیات خواسته شده همراه با شرایط مرزی حاکم، پروفیل سرعت را به دست می آوریم. در صورت اهمیت نیروهای تنش سطحی، ترم مربوط به تنش سطحی را در معادلات حرکت اعمال کرده آنگاه معادله را با اعمال شرایط مرزی برای سرعت حل می کنیم. با استفاده از معادله مربوط به محاسبه ضخامت لایه مرزی، با کمک پروفیل سرعت به دست آمده، می توان معادله مربوط به ضخامت فیلم مایع به دست آورد.

۲- یک صفحه تخت با ابعاد $L=1$ m و $b=3$ m به موازات جریانی با سرعت یکنواخت ۲ m/s قرار داده شده است. نیروی درگ اعمال شده بر یک طرف این صفحه را بیابید و در انتهای تیغه، مقدار ضخامت مومنتوم، ضخامت جابجایی و

ضخامت لایه مرزی را برای هوا ($\rho=1.23\ kg/m^3$ و $\nu=1.46\times10^{-5}\ m^2/s$) و برای آب ($\rho=1000\ kg/m^3$ و $\nu=1.02\times10^{-6}\ m^2/s$) به دست آورید.

ج: از روابط مربوط به محاسبه نیروی درگ، ضخامت مومنتوم، ضخامت جابجایی و ضخامت لایه مرزی که در متن درس برای صطوح مسطح گفته شد، استفاده کرده و مقادیر عددی مربوطه را جایگذاری می کنیم.

۳- ماشینی با سرعت $100\ m/s$ و با جرم $m=2000\ kg$ و $C_D=0.3$ و $A=1\ m^2$ از یک چتر نجات برای کاهش سرعت خود استفاده می کند (شکل زیر). با فرض این که ضریب درگ ثابت بوده و اصطکاک چرخ ها قابل چشم پوشی باشد و ماشین نیز فاقد ترمز باشد، سرعت ماشین را پس از ۱۰ ثانیه و ۱۰۰۰ ثانیه محاسبه کنید. از جریان دنباله ای که میان ماشین و چتر ممکن است به وجود آید صرف نظر کنید.



ج: برآیند نیروهای وارد بر سیستم (در راستای حرکت ماشین) را با درنظر گرفتن نیروهای موثر بر سیستم به دست آورده آن گاه با در اختیار داشتن شتاب سیستم می توان سرعت ماشین را در هر لحظه محاسبه کرد.

۴ – الف) با استفاده از آنالیز انتگرال مومنتوم روی صفحه تخت پروفیل سرعت زیر را بدست اورید.

$$U/U \approx A + B\left(y/\delta\right) + C\left(y/\delta\right)^3 + D\left(y/\delta\right)^4$$

ب) مقادیر θ/x، δ^*/x را محاسبه کنید.

ج) معادله C_f را برای پروفیل سرعت بالا محاسبه کنید.

د) برای سیال آب با سرعت $0.75\ ft/sec$ بر روی صفحه با ابعاد $2.5\ ft \times 3.5\ ft$ مقدار نیروی کل را وارده بـر صـفحه محاسبه کنید. ($\mu = 6.72 \times 10 - 4\ lbm/ft.sec$; $\rho = 62.4\ lbm/ft3$)

ج: از همان روشی که در بخش (۳-۵) گفته شد برای حل مساله استفاده می کنیم.

۵- یک لایه نازک ویسکوز از سیالی بر روی یک دیوار عمودی تحت نیروی گرانشی به طرف پایین جریان دارد. سرعت سیال در لبه خارجی لایه مرزی برابر $U = \sqrt{2gx}$ می باشد. با فرض این که پروفیل سرعت سیال به صورت ذیل باشد، مقادیر $h(x)$ و $\delta(x)$ را بدست آورید.

$$v_x = \begin{cases} U(2\eta - \eta^2) & 0 \le \eta \le 1 \\ U & 1 \le \eta \le h(x)/\delta(x) \end{cases}$$

$$\eta = y/\delta$$

ج: از روش انتگرال مومنتوم استفاده کرده با اعمال پروفیل سرعت داده شده، و نیز در اختیار داشتن سرعت جریان آزاد، (خارج لایه مرزی) می توان طبق روشی که در متن درس برای صفحات مسطح بیان شد، مقادیر مجهول در مساله را به راحتی محاسبه کرد.

۸. فهرست منابع درس

- James O. Wilkes, Stacy G. Bike, 2006, *Fluid Mechanics for Chemical Engineers*, first edition, Prentice Hall.
- Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot, 2002, *Transport Phenomena*, second edition, J. Wiley.
- Frank M. White, 2003, *Fluid Mechanics*, second edition, McGraw-Hill
- Ron Darby, 2001, *Chemical Engineering Fluid mechanics*, second edition, Marcel Dekker.
- Currie I.G., 2003, *Fundamental Mechanics of Fluids*, third edition, Marcel Dekker.

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل دوازدهم

کاربرد لایه مرزی در مجاری بسته و جریان در اطراف اجسام غوطه‌ور

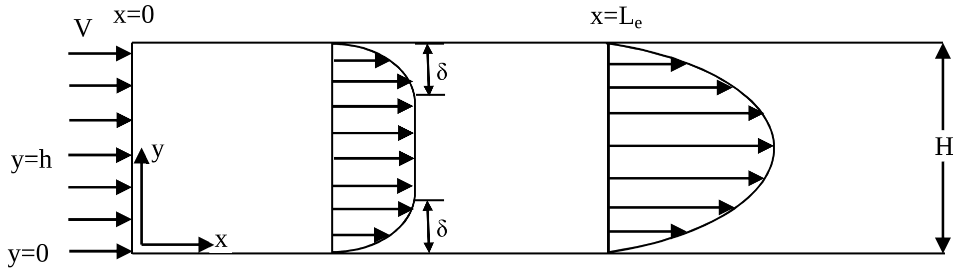
۱. مقدمه

در فصل یازدهم، به توصیف لایه مرزی و روش های حل معادلات لایه مرزی پرداختیم. در این فصل به بحث در مورد لایه‌های مرزی در نواحی توسعه نیافته کانال ها و نیز لایه مرزی در جریانات عبوری از اجسام غوطه ور و حل این دسته از معادلات می پردازیم. روش کار دراین جا نیز طبق همان اصولی است که در مورد لایه مرزی در فصل قبل گفته شد. هم چنین در این فصل، به برخی کاربردهای معادلات لایه مرزی اطراف اجسام غوطه ور خواهیم پرداخت. در انتهای فصل، ضمن معرفی لایه مرزی در جریان مغشوش، مفهوم جدایش در لایه مرزی و عوامل موثر بر آن مورد بررسی قرار خواهند گرفت. بخش پایانی این فصل، به عنوان نمونه، به بررسی رابطه میان جدایش لایه مرزی با نیروهای درگ و لیفت وارد بر اجسام غوطه ور می پردازد.

۲. جریان در ناحیه ورودی به کانال یا لوله

جریان سیالات در مجاری کانال ها و لوله های بلند با استفاده از نظریه لایه مرزی تحلیل می‌گردد. جریان ویسکوز را در یک کانال که از دو صفحه موازی تشکیل شده است مطابق شکل (۱-۱۲) ملاحظه نمایید. مولفه سرعت v_x در جهت x بوده و از سایر مولفه های سرعت صرف نظر می شود. در حرکت سیال به داخل کانال، سرعت بر روی صفحات صفر می باشد، به طوری که لایه مرزی به تدریج توسعه پیدا کرده و بعد از مسافت L_e، لایه های مرزی روی دو صفحه کانال تداخل می نماید و پروفیل سرعت به صورت سهموی مطابق شکل نشان داده شده می شود. ضخامت لایه مرزی از $\delta = 0$ شروع شده و به $\delta = h = H/2$ یعنی نصف عرض کانال می رسد.

مطابق شکل ملاحظه می شود که لایه مرزی در فاصله L_e کاملا توسعه پیدا می کند. هدف به دست آوردن L_e/H لذا حسب عدد رینولدز است.



شکل ۱-۱۲: توسعه پروفیل سرعت بین دو صفحه موازی

برای آنالیز جریان با استفاده از تئوری لایه مرزی از یک صفحه شروع می کنیم. به عنوان مثال از صفحه پایینی معادلات راتوسعه داده به طوری که ضخامت لایه مرزی توسعه داده شده برابر $\delta = h$ باشد. از روش انتگرال مومنتوم با پروفیل تقریبی سرعت به صورت ذیل شروع می کنیم:

$$u_x = V\left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) \tag{۱۲-۱}$$

که V مقدار سرعت بیشینه در وسط کانال می باشد. برای تسهیل آنالیز از متغیر زیر استفاده می شود:

$$\alpha = \frac{\delta}{y} \tag{۱۲-۲}$$

حال موازنه های جرم و مومنتوم را روی کانال می نویسیم:

۱) شار جرمی[1]

$$\dot{m} = \underbrace{\rho V h - \rho V \delta}_{\text{شار جریان اصلی}} + \underbrace{\rho \int_0^{\delta} v_x dy}_{\text{شار لایه مرزی}} \tag{۱۲-۳}$$

با جایگذاری معادله (۱-۱۲) در معادله (۳-۱۲) و انتگرالگیری از آن خواهیم داشت:

$$\dot{m} = \rho V(h - \delta) + \frac{2}{3}\rho V \delta = \rho V h\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) \tag{۱۲-۴}$$

که $\delta = \alpha h$ در معادله (۴-۱۲) استفاده شده است.

[1] Mass flux

۲) شار مومنتوم[2]

$$\dot{M} = \underbrace{\rho V^2 h - \rho V^2 \delta}_{\text{شار مومنتوم جریان اصلی}} + \underbrace{\rho \int_0^\delta v_x{}^2 dy}_{\text{شار لایه مرزی}} \qquad (۱۲-۵)$$

که با جایگذاری معادله (۱-۱۲) در معادله (۵-۱۲) و انتگرالگیری خواهیم داشت:

$$\dot{M} = \rho V^2 (h - \delta) + \frac{8}{15}\rho V^2 \delta = \rho V^2 h \left(1 - \frac{7}{15}\alpha\right) \qquad (۱۲-۶)$$

۳) تنش برشی در دیواره کانال[3]

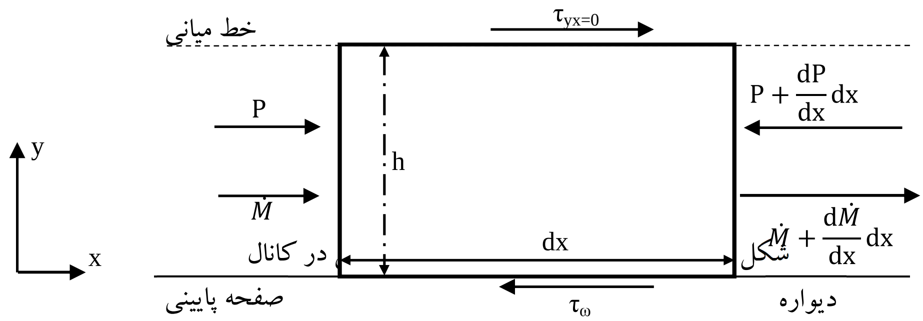
$$\tau_\omega = \mu \left(\frac{dv_x}{dy}\right)_{y=0} = \frac{2\mu V}{\delta} = \frac{2\mu V}{\alpha h} \qquad (۱۲-۷)$$

۴) معادله برنولی برای جریان اصلی ورودی به کانال

$$\frac{dP}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx} \qquad \text{یا} \qquad \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{.ثابت} \qquad (۱۲-۸)$$

۵) موازنه مومنتوم دیفرانسیلی در جهت x

مطابق شکل (۲-۱۲)، المان حجمی بین صفحه پایین و مرکز کانال که تنش برشی آن صفر است، قرار دارد.



ملاحظه می شود که نیروی شتابی (مشتق مومنتوم)، نیروی فشاری و نیروی برشی بر حرکت سیال تاثیر گذارند. البته بعد از تشکیل لایه مرزی که پروفیل سرعت سهموی شکل می گیرد، تغییرات نیروی شتابی صفر خواهد شد. پس خواهیم داشت:

---

[2] Momentum flux
[3] Wall shear stress

$$\underbrace{\left\{\dot{M}-\left(\dot{M}+\frac{d\dot{M}}{dx}dx\right)\right\}}_{\text{تغییرات نرخ مومنتوم(نیروهای شتابی)}}+\underbrace{\left\{Ph-\left(P+\frac{dP}{dx}dx\right)h\right\}}_{\text{تغییرات نیروی فشاری}}-\underbrace{\{\tau_\omega dx\}}_{\text{تغییرات نیروی برشی}}=0 \qquad (۱۲-۹)$$

با ساده سازی معادله (۹-۱۲) خواهیم داشت:

$$\tau_\omega+\frac{d\dot{M}}{dx}+\frac{dP}{dx}h=0 \qquad (۱۲-۱۰)$$

از طرفی شار مومنتوم با استفاده از موازنه شار مومنتوم از معادله (۶-۱۲) به دست آمد. پس با مشتق گیری از معادله مذکور خواهیم داشت:

$$\frac{d\dot{M}}{dx}=\rho h\left[2V\frac{dV}{dx}\left(1-\frac{7}{15}\alpha\right)-\frac{7}{15}V^2\frac{d\alpha}{dx}\right] \qquad (۱۲-۱۱)$$

با جایگذاری معادلات (۷-۱۲)، (۸-۱۲) و (۱۱-۱۲) در معادله (۱۰-۱۲) و ساده سازی خواهیم داشت:

$$\frac{10\mu}{\rho\bar{V}h^2}=\frac{\alpha(6+7\alpha)}{(3-\alpha)^2}\frac{d\alpha}{dx} \qquad (۱۲-۱۲)$$

که سرعت متوسط $\bar{V}$ به روش ذیل به دست می آید:

$$\dot{m}=\rho\bar{V}h=\rho Vh\left(1-\frac{\alpha}{3}\right) \qquad (۱۲-۱۳)$$

$$V=\frac{3\bar{V}}{3-\alpha} \qquad (۱۲-۱۴)$$

با جداسازی متغیرهای معادله (۱۲-۱۲) و انتگرالگیری در بازه $x=0$ و $x=L_e$، یعنی از ابتدای صفحه تا محلی که لایه مرزی کاملا توسعه یافته است، خواهیم داشت:

$$\frac{10\mu}{\rho\bar{V}h^2}\int_0^{L_e}dx=\int_0^1\frac{\alpha(6+7\alpha)}{(3-\alpha)^2}d\alpha=1.048 \qquad (۱۲-۱۵)$$

بنابراین معادله (۱۵-۱۲) را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{L_e}{h}=0.1048\,\frac{\rho\bar{V}h}{\mu} \qquad (۱۲-۱۶)$$

ملاحظه می شود که $Re_h=\rho\bar{V}h/\mu$ می باشد. حال اگر معادله (۱۶-۱۲) برای عرض H یعنی بر حسب فاصله بین دو صفحه نوشته شود، خواهیم داشت:

$$\frac{L_e}{H} = 0.0274\ Re_H \qquad (۱۲-۱۷)$$

که $Re_H = \rho\overline{V}H/\mu$ می باشد. به همین ترتیب برای حرکت ویسکوز سیال در یک لوله با قطر D، فاصله ورودی به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{L_e}{D} = 0.061Re \qquad (۱۲-۱۸)$$

که $Re = \rho\overline{V}D/\mu$ می باشد.

۳. راه حل عمومی لایه مرزی اطراف جسم غوطه ور[۴]

با استفاده از روش مشابه، بلازیوس لایه مرزی اطراف یک صفحه مسطح را تحلیل نمود و جواب های کاملی برای ضخامت لایه مرزی و ضریب اصطکاک پوسته ای ارائه داد. در این جا یک راه حل عمومی برای حرکت سیال یکنواخت اطراف اجسام غوطه ور که شکل آن ها غیر مسطح بوده یا زاویه جریان آزاد با صفحه موازی نباشد، ارائه می شود. این روش مشابه بلازیوس است و لذا جزییات انشقاق معادلات در این جا توضیح داده نمی شود.

پارامتر بدون بعد طولی به صورت ذیل تعریف می شود:

$$\eta = \frac{y}{\xi(x)} \qquad (۱۲-۱۹)$$

هم چنین پروفیل سرعت به صورت حاصل ضرب توابع ذیل ارائه می شود:

$$u(x,y) = U(x)\xi(x)f(\eta) \qquad (۱۲-۲۰)$$

که $f'(\eta) = \xi(x)\ f(\eta)$ می باشد. حال با جایگذاری مولفه سرعت (۲۰-۱۲) در معادلات لایه مرزی و ساده سازی، خواهیم داشت:

$$f''' + \alpha f f'' + \beta[1 - (f')^2] = 0 \qquad (۱۲-۲۱)$$

که معادله (۲۱-۱۲) جواب عمومی کامل لایه مرزی می باشد که به آن معادله فاکنر-اسکن اطلاق می شود. در این معادله مشتق های مربوط به صورت ذیل تعریف شده اند:

[4] Falkner-Skan Solution

$$f'(\eta)=\frac{df}{d\eta} \quad ; \quad f''(\eta)=\frac{d^2f}{d\eta^2} \quad ; \quad f'''(\eta)=\frac{d^3f}{d\eta^3} \tag{۱۲-۲۲}$$

هم چنین توابع α و β به صورت ذیل تعریف شده اند:

$$\alpha=\frac{\xi}{\nu}\frac{d}{dx}(U\xi) \quad ; \quad \beta=\frac{\xi^2}{\nu}\frac{dU}{dx} \tag{۱۲-۲۳}$$

برای حل معادله (۲۱-۱۲) شرایط مرزی مساله همانند شرایط مرزی برای حالت صفحه مسطح است، یعنی:

$$\begin{aligned} &f(0)=f'(0)=0 \quad ; \quad \eta=0 \\ &f'(\eta)\to 1 \quad ; \quad \eta\to\infty \end{aligned} \tag{۱۲-۲۴}$$

هم چنین با ترکیب معادلات (۲۳-۱۲) می توان رابطه ذیل را به دست آورد.

$$\frac{d}{dx}(U\xi^2)=\nu(2\alpha-\beta) \tag{۱۲-۲۵}$$

۱-۳. کاربرد معادله (۲۱-۱۲) برای صفحه مسطح

در صفحه مسطح، $\alpha=1/2$ و $\beta=0$ می باشد پس معادلات(۲۳-۱۲) و (۲۵-۱۲) به صورت ذیل به دست می آید:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(U\xi^2)=\nu \quad ; \quad \xi(x)\neq 0 \\ &\xi^2\frac{dU}{dx}=0 \quad ; \quad U(x)=\text{ثابت} \end{aligned} \tag{۱۲-۲۶}$$

پس با استفاده از معادله (۲۶-۱۲) خواهیم داشت:

$$U\frac{d\xi^2}{dx^2}=\nu \quad \therefore \quad \frac{d\xi^2}{dx^2}=\frac{\nu}{U} \tag{۱۲-۲۷}$$

که با حل معادله (۲۷-۱۲) داریم:

$$\xi(x)=\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \tag{۱۲-۲۸}$$

و معادله (۲۱-۱۲) برای جریان روی صفحه مسطح به صورت ذیل به دست می آید:

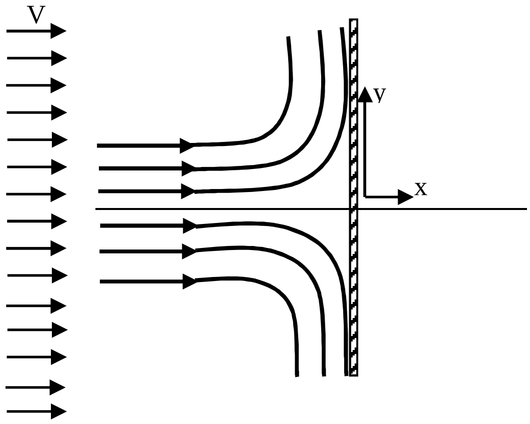
$$f'''+\frac{1}{2}ff'=0 \tag{۱۲-۲۹}$$

که معادله (۲۸-۱۲) معادله بلازیوس می باشد که تابع جریان آن به صورت ذیل حاصل می شود:

$$\psi(x,y)=\sqrt{U\nu x}\,f\left(\frac{y}{\xi(x)}\right)=\sqrt{C\nu x}\,f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}\right) \tag{۱۲-۳۰}$$

۲-۳. کاربرد معادله (۲۰-۱۲) برای جریان سکونی

مطابق شکل (۳-۱۲) جریان یکنواخت اطراف یک صفحه مسطح عمود بر جریان را ملاحظه می کنید. جریان مذکور به حرکت سیال سکونی معروف است. در این جا $\alpha=\beta=1$ می باشد.



شکل ۳-۱۲: جریان آزاد عمود بر صفحه عمودی (جریان سکونی)

بنابراین با استفاده از معادلات (۲۳-۱۲) و (۲۵-۱۲) خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}(U\xi^2) = \nu \qquad (۱۲\text{-}۳۱)$$

$$\xi^2 \frac{dU}{dx} = \nu$$

و معادله (۲۱-۱۲) به صورت ذیل نوشته می شود:

$$f''' + ff'' + 1 - (f')^2 = 0 \qquad (۱۲\text{-}۳۲)$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad ; \quad \eta = 0$$

$$f'(\eta) \to 1 \quad ; \quad \eta \to \infty$$

که از حل معادلات (۳۱-۱۲) خواهیم داشت:

$$U\frac{d\xi}{dx} = 0 \quad ; \quad U(x) \neq 0 \qquad (۱۲\text{-}۳۳)$$

$$\xi(x) = \text{ثابت} \qquad (۱۲\text{-}۳۴)$$

با استفاده از نظریه جریان روی گوه[5] خواهیم داشت:

$$\xi(x) = \sqrt{\frac{\nu}{C}} \qquad ; \qquad C = \text{ثابت}$$

چون مقدار ξ ثابت است، پس با استفاده از معادله (۳۱-۱۲) می توان نوشت : $U(x)=Cx$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\eta = \frac{y}{\xi(x)} = \frac{y}{\sqrt{\nu/C}} \qquad ; \qquad C = \text{ثابت} \tag{۱۲-۳۵}$$

پس تابع جریان برای سیال سکونی با استفاده از روابط بالا و معادله (۱۹-۱۲) به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\psi(x,y) = \sqrt{C\nu x}\left[f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu/C}}\right)\right] \tag{۱۲-۳۶}$$

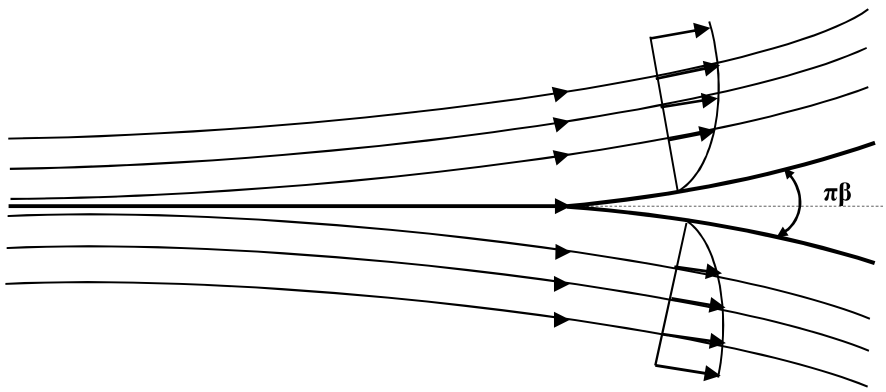
۳-۳. جریان روی گوه

جریان سیال آزاد روی یک گوه در شکل (۴-۱۲) نشان داده شده است. در این جا $\alpha=1$ و مقدار β اختیاری می‌باشد.

پس معادلات (۲۳-۱۲) و (۲۵-۱۲) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d}{dx}(U\xi^2) = \nu(2-\beta) \tag{۱۲-۳۷}$$

$$\xi^2\frac{dU}{dx} = \nu\beta \tag{۱۲-۳۸}$$



شکل ۴-۱۲: جریان سیال آزاد اطراف گوه

با حل معادلات (۳۷-۱۲) و (۳۸-۱۲) و انتگرالگیری خواهیم داشت:

---

[5] Wedge

$$U(x) = Cx^{\frac{\beta}{2-\beta}}$$ (۱۲-۳۹)

که معادله (۳۹-۱۲) جریان خارجی را نشان می دهد. حال با جایگذاری معادله (۳۹-۱۲) در معادله (۳۸-۱۲) خواهیم داشت:

$$\xi(x) = \sqrt{\frac{\nu(2-\beta)}{C}}\, x^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}$$ (۱۲-۴۰)

از طرفی با استفاده از تئوری جریان پتانسیلی در قطاع[۶] مقدار زاویه گوه برابر $\pi\beta$ می باشد. معادله فاکنر-اسکن (معادله (۲۱-۱۲)) نیز به صورت ذیل نوشته می شود:

$$f''' + ff'' + \beta[1-(f')^2] = 0$$ (۱۲-۴۱)

با حل معادله (۴۱-۱۲) تابع جریان به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\psi(x,y) = \sqrt{C(2-\beta)\nu}\, x^{\frac{1}{2-\beta}}\, f(\eta)$$ (۱۲-۴۲)

که خواهیم داشت:

$$\eta = \frac{y}{\xi(x)} = \frac{y}{x^{(1-\beta)(2-\beta)}}\ \sqrt{\frac{1}{(2-\beta)\nu}}$$ (۱۲-۴۳)

که در معادله بالا برای حالت های خاص که سیال سکونی باشد، $\beta=1$ بوده و برای سیال روی صفحه مسطح $\beta=0$ می باشد.

۴. لایه مرزی مغشوش[۷]

تحلیل قبلی برای لایه مرزی آرام توضیح داده شد. لیکن زمانی که $Re > 3.2 \times 10^5$ باشد، لایه مرزی دیگر آرام نبوده و به صورت لایه مرزی مغشوش توسعه داده می شود. متاسفانه نظریه راه حل کامل برای جریان مرزی مغشوش روی صفحه مسطح تاکنون ارائه نشده است. بیشتر تحلیل های لایه مرزی مغشوش عددی می باشد. که از ویسکوزیته پیچشی[۸]

---

[6] sector
[7] Turbulent Boundary Layer
[8] eddy

مغشوش استفاده شده است. در تحلیل جریان های لایه مرزی مغشوش بیشتر از معادله انتگرالی مومنتوم استفاده شده است.

معادله انتگرالی مومنتوم، (۸۵-۱۱)، به صورت ذیل نیز نوشته می شود:

$$V\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} v_x dy = \frac{\tau_\omega}{\rho} + \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} {v_x}^2 dy \qquad (12\text{-}44)$$

با استفاده از تجربیات آزمایشگاهی در جریان مغشوش در لوله ها، پروفیل سرعت به صورت ذیل پیشنهاد شده است:

$$\left(\frac{v_x}{V}\right)_{tur} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \qquad (12\text{-}45)$$

با جایگذاری معادله (۴۵-۱۲) در معادله (۴۴-۱۲) ضخامت مومنتوم لایه مرزی به صورت ذیل محاسبه می شود:

$$\theta = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy = \frac{7}{72}\delta \qquad (12\text{-}46)$$

از طرفی با استفاده از پروفیل سرعت (۴۵-۱۲) تنش برشی بر روی دیواره صفحه به شکل زیر حاصل می شود:

$$\tau_\omega = \mu\frac{dv_x}{dy}\Big|_{y=0} = \frac{1}{7\delta}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{-6/7}\Big|_{y=0} = \infty \qquad (12\text{-}47)$$

ملاحظه می شود که گرادیان سرعت در روی صفحه ($y=0$) بی نهایت می باشد. بنابراین از این روش نمی توان تنش برشی در دیواره را برای جریان مغشوش محاسبه نمود.

برای محاسبه تنش برشی بر دیواره سطح مسطح از تنش برشی برای جریان مغشوش در یک لوله صاف استفاده شده است. بلازیوس برای جریان مغشوش در لوله صاف بدون زبری رابطه تجربی ذیل را برای ضریب اصطکاک بر حسب عدد رینولدز ارائه داد.

$$f_f = \frac{\tau_\omega}{\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2} = 0.079 Re^{-1/4} = 0.079\left(\frac{\rho\bar{v}D}{\mu}\right)^{-1/4} \qquad (12\text{-}48)$$

از طرفی پروفیل سرعت برای جریان مغشوش در لوله به صورت ذیل پیشنهاد شده است:

$$\left(\frac{v}{v_{max}}\right) = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} \quad \text{یا} \quad v = v_{max}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} \qquad (12\text{-}49)$$

که v_{max} سرعت بیشینه در مرکز لوله و R شعاع لوله می باشد. با استفاده از معادله (۴۹-۱۲) سرعت متوسط در لوله برای جریان مغشوش به صورت ذیل به دست می آید:

$$\bar{v} = \frac{\int_0^R 2\pi r v dr}{\pi R^2} \approx \frac{4}{5} v_{max} \qquad (۱۲-۵۰)$$

پس معادله (۴۸-۱۲) با استفاده از معادله (۵۰-۱۲) به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{\tau_\omega}{\frac{1}{2}\rho {v_{max}}^2} = 0.0450\left(\frac{\mu}{\rho v_{max} R}\right)^{1/4} \qquad (۱۲-۵۱)$$

حال اگر معادله (۵۱-۱۲) را برای جریان مغشوش بر روی صفحه مسطح بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{\tau_\omega}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0.0450\left(\frac{\mu}{\rho U \delta}\right)^{1/4} \qquad (۱۲-۵۲)$$

از طرفی برای انتگرال مومنتوم داشتیم: $\tau_\omega = \rho U^2(d\theta/dx)$ ، که با جایگذاری در روابط (۴۶-۱۲) و (۵۲-۱۲) مـی‌تـوان

نوشت:

$$0.0225\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} = \frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} \qquad (۱۲-۵۳)$$

با انتگرالگیری از معادله (۵۳-۱۲) و با اعمال شرط مرزی $\delta|_{x=0} = 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.371}{Re_x^{1/5}} \quad ; \quad Re_x = \frac{xU}{\nu} \qquad (۱۲-۵۴)$$

که ضریب اصطکاک پوسته‌ای با استفاده از معادله (۵۲-۱۲) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$C_f = \frac{\tau_\omega}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0.0450 {Re_\delta}^{-1/4} \quad ; \quad Re_\delta = \frac{U\delta}{\nu} \qquad (۱۲-۵۵)$$

از معادلات (۵۴-۱۲) و (۵۵-۱۲) نسبت اعداد رینولدز به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{Re_\delta}{Re_x} = \frac{\delta}{x} = 0.371 {Re_x}^{-1/5} \qquad (۱۲-۵۶)$$

بنابراین از رابطه (۵۶-۱۲) می توان رابطه ذیل را به دست آورد:

$$Re_\delta = 0.371 {Re_x}^{4/5} \qquad (۱۲-۵۷)$$

بالاخره با جاگذاری معادله (۵۷-۱۲) در معادله (۵۵-۱۲) خواهیم داشت:

$$C_f = \frac{0.0577}{Re_x^{1/5}} \qquad \text{(جریان مغشوش)} \qquad (۱۲-۵۸)$$

۵. جدایش لایه مرزی[۹]

مشاهدات تجربی نشان می دهد که لایه مرزی در طول مجاری از سطح جامد جدا می شود. به خصوص این جدایی در اجسام محدب شدیدتر می باشد. در حرکت سیال در مجاری اطراف اجسام غوطه ور فشار افت می کند لیکن در جریان پایین دستی فشار در دنباله جسم افزایش پیدا کرده به طوری که گرادیان فشار معکوس می شود. در اجسامی مانند استوانه و کره جداسازی زود اتفاق می افتد به طوری که یک ناحیه به نام دنباله یا 'گرداب پایین دستی در جریان پایین دستی به وقوع می پیوندد. اگر معادله لایه مرزی را در سطح دیواره جسم اعمال نماییم به طوری که مولفه های سرعت $v_x=v_y=0$ خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$0=-\frac{dP}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_\omega}{\partial y} \qquad (۱۲-۵۹)$$

پس معادله (۵۹-۱۲) به صورت ذیل نوشته می شود:

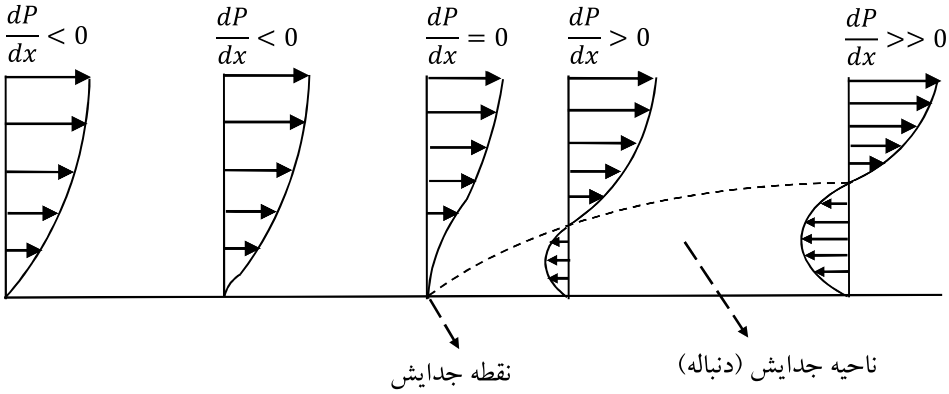
$$\frac{dP}{dx}=\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0} \qquad (۱۲-۶۰)$$

چون مشتق دوم سرعت به مفهوم انحنا[۱۰] پروفیل سرعت می باشد، پس انحنای منحنی سرعت با افت فشار متناسب است. برای بررسی مکانیسم جدایش لایه مرزی از دیواره لازم است افت فشار یا گرادیان فشار را در حالت های ذیل مورد بررسی قرار گیرد.

۱) $dP/dx<0$

در حالتی که گرادیان فشار منفی باشد، انحنای پروفیل سرعت در دیواره منفی خواهد بود ($\partial^2 u_x/\partial y^2$). پس تابع سرعت یکنوا[۱۱] می باشد. در این شرایط لایه مرزی به دیواره چسبیده و هیچ گاه جدایش رخ نمی دهد. در شکل (۵-۱۲) پروفیل سرعت را در دیوراه جسم نشان می‌دهد.

[9] Boundary Layer Separation
[10] Curvature
[11] monotonic



شکل۵-۱۲: اثر گرادیان فشار و پروفیل سرعت در جدایش لایه مرزی از دیواره

۲) $dP/dx = 0$

در این حالت انحنا صفر شده به عبارتی مشتق دوم تابع صفر مـی شـود ($\partial^2 u_x/\partial x^2 = 0$). پـس تـابع سـرعت دارای نقطـه عطف می باشد و در نتیجه شروع تغییر جهت پروفیل سرعت را در شکل (۹-۱۲) مشاهده می نماییم.

۳) $dP/dx > 0$

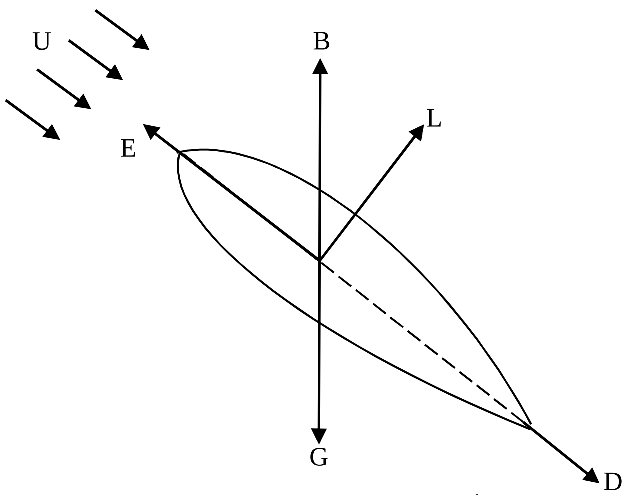
پس مشتق دوم سرعت مثبت می باشد. به عبارتی انحنـای منحنـی در دیـواره مثبـت اسـت ($\partial^2 u_x/\partial x^2 > 0$) از طرفـی در فاصله $y=\delta$ از سطح دیواره لازم است که مقدار سرعت جریان به مقدار سرعت در ناحیه جریان خارجی یعنـی $u_x = U$ برسد تا شرط مرزی بین دو جریان داخلی (لایه مرزی) و خارجی تامین شود. بنابراین انحنـای منحنـی سـرعت در دیـواره مثبت و در $y=\delta$ منفی می باشد. این تغییر انحنا منجر به تغییر جهت سرعت سیال شده به طوری که در ابتـدا نزدیـک بـه دیوار یک جریان عقبگرد مطابق شکل (۹-۱۲) مشاهده می شود. به این ترتیب ناحیه دنباله در جریان پایین دستی از ابتـدا تغییر گرادیان فشار مطابق شکل (۹-۱۲) به وجود می آید.

بررسی‌های زیادی در خصوص جدایش لایه مرزی انجام شده است. لیکن موضوع جدایش به طور تحلیلی هنوز به خوبی شناخته شده نیست. به درستی مشخص نشده است که معادلات لایه مرزی در ناحیـه جـدایش دارای رفتـار بـا قاعـده مـی باشند. فرضیه ناپدید شدن تنش برشی در نقطه جدایش یعنی $\partial u/\partial y|_{x,0}=0$ مورد اختلاف می باشد. بعضـی نظریـه هـا

نقطه ای که dP/dx ناپدید می شود را بانقطه ای که جدایش اتفاق می افتد از هم متفاوت می بینند. به هر حال هیچ مقیاس طولی بین این دو نقطه ارائه نشده است. آنچه مشخص شده است این است که لایه های مرزی در گرادیان معکوس فشار اتفاق می افتد به طوری که مقدار چنین گرادیان فشاری باید کمینه باشد. در قسمت بعدی ناحیه جدایش را بیشتر مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۶. درگ و لیفت اطراف اجسام غوطه ور

در فصل های قبل و نیز این فصل اشاره شد که جریان سیال یکنواخت و آزاد اطراف جسم غوطه ور باعث اعمال نیروهای درگ و لیفت بر روی جسم می شود.



شکل ۶–۱۲ : نیروهای وارد بر ایرفویل

معمولاً اگر جسمی مطابق شکل (۶–۱۲) در معرض سیال یکنواخت با سرعت U قرار گیرد موازنه نیروهای اعمال شده به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\vec{E} = \vec{D} + \vec{L} + \vec{B} + \vec{G}$$

که در این رابطه G، نیروی گرانشی؛ B، نیروی شناوری[۱۲]؛ L، نیروی لیفت؛ D، نیروی درگ و E نیروی خارجی موازنه کننده[۱۳] است. قبلا ملاحظه شد که ضریب درگ تابعی از عدد رینولدز به صورت ذیل می باشد:

[12] Buoyancy Force
[13] External Balancing Force

$$C_D = f(Re)$$

نظریه درگ ضعیف بوده و کامل نمی‌باشد، به استثنا برای جریان روی سطوح مسطح، معمولاً روابط تحلیلی برای ضریب درگ برای اجسامی غیر صفحه ارائه نشده است. بیشتر اطلاعات موجود برای اجسام محدب و غیر مسطح از طریق تجربی حاصل شده است. همان گونه که در فصل پنجم ارائه شد ضریب درگ ناشی از دو قسمت درگ اصطکاکی و درگ فشاری به صورت ذیل نشان داده شده است:

$$C_D = C_{D,Press} + C_{D,Fric}$$

مقدار نسبی درگ و لیفت نسبت به یکدیگر بستگی به جدایش لایه مرزی در دنباله جسم دارد. اگر اختلاف فشار در جریان بالا دستی و پایین دستی افزایش پیدا کند، درگ فشاری بیشتر می‌شود. به هر حال نقطه جدایش لایه مرزی نقش مهمی در درگ فشاری دارد. دو عامل در نقطه جدایش لایه مرزی اثر تعیین کننده دارند که عبارتند از:

۷. رژیم‌های جریان (آرام یا مغشوش):

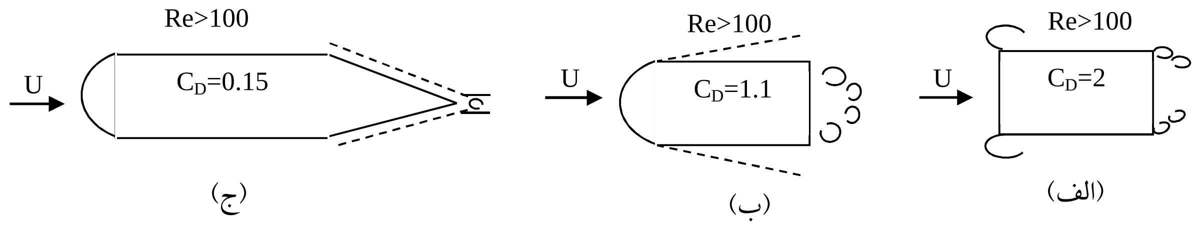
در جریان‌های آرام جدایش لایه مرزی زودتر اتفاق می‌افتد و این به دلیل عدم مقاومت جریان در مقابل افت فشار (گرادیان) در دنباله جسم می باشد. در جریان های مغشوش جدایش لایه مرزی به تعویق می افتد به طوری که جریان مقاومت بیشتری نسبت به افت فشار دارد. در نتیجه ناحیه دنباله در جریان مغشوش کوچکتر می باشد. کوچک بودن ناحیه دنباله در پشت جسم نمایانگر بازیافت فشار بوده و در نتیجه اختلاف فشار در جریان بالا دستی و پایین دستی کمتر بوده و درگ فشاری نیز کمتر می باشد. باید توجه داشت که زبری مرز جامد جسم نیز باعث کاهش ضریب درگ می شود.

۸. شکل هندسی جسم یا هم امتدادی مرزجسم با خطوط جریان[14]:

برای اجسامی که دارای مرزهای هم امتداد با خطوط جریان هستند، درگ فشاری(فرم) کاهش می یابد. برای این گونه اجسام گرادیان فشار معکوس زیاد نمی باشد. نتایج تجربی نشان می دهد که هر چه مرزهای جسم دارای گوشه های تیز کمتری باشد و دارای انحناهای صاف و موافق با خطوط جریان باشد، درگ کمتری خواهد داشت. به عنوان مثال، جریان

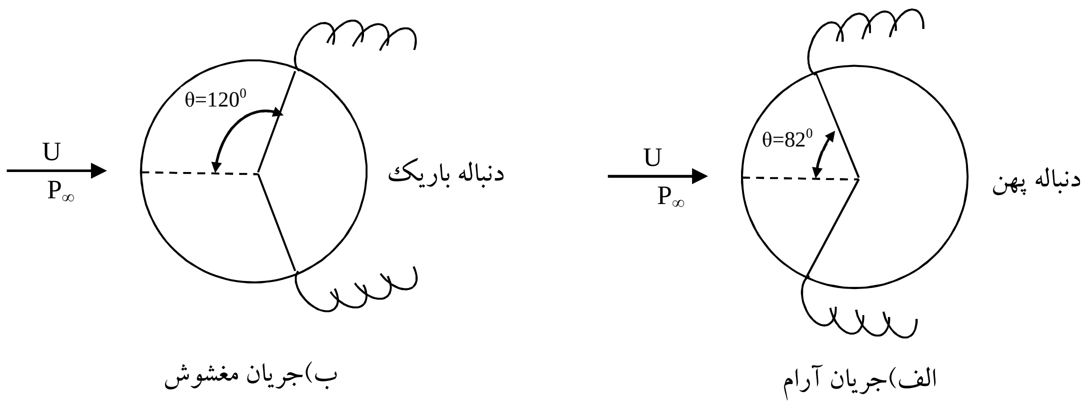
[14] Streamlining

آزاد در $Re>100$ را اطراف اشکال مشابه مطابق شکل (۷-۱۲) ملاحظه نمایید. دیده می شود که با اصلاح مرزهای جسم، ضریب درگ از مقدار ۲ به مقدار ۰/۱۵ کاهش پیدا می کند.



شکل۷-۱۲: ضریب درگ با اصلاح شکل هندسی حجم

در مثالی دیگر، حرکت جریان آزاد اطراف یک استوانه مطابق شکل (۸-۱۲) ملاحظه نمایید. در این جا اثر عدد رینولدز (آرام یا مغشوش) را بر جدایش لایه مرزی ملاحظه می کنید. در این جا دو حالت حرکت جریان آرام و جریان مغشوش در جدایش لایه مرزی نشان داده می شود.



شکل۸-۱۲ : جدایش لایه مرزی در استوانه

در شرایطی که جریان آرام باشد، نقطه جدایش در زاویه $\theta = 82^0$ به وقوع می پیوندد در حالی که در جریان مغشوش نقطه جدایش در زاویه $\theta = 120^0$ رخ می دهد (شکل ۸-۱۲). در حالت جریان آرام گرادیان فشار زودتر معکوس شده به طوری که تقارن فشار در جریان بالادستی و جریان پایین دستی زودتر از دست می رود و در نتیجه ضریب درگ برابر با $C_D = 1.2$ اندازه گیری شده است. اما در جریان مغشوش ضریب درگ اندازه گیری شده برابر $C_D = 0.3$ می

باشد. به عبارتی با گذار از جریان آرام به جریان مغشوش ضریب درگ ٪۷۵ کاهش پیدا می کند که علت آن بازیافت بهتر فشار در جریان مغشوش است.

مانند هر جریان سیال، لایه مرزی ناپایدار است. معمولا ناپایداری لایه مرزی همیشه به صورت مغشوش نمایان می شود. در نتیجه لایه مرزی آرام در حالت ناپایداری به لایه مرزی مغشوش تبدیل می شود. خواص لایه های مرزی آرام و مغشوش کاملا متمایز از یکدیگر است. همان طور که در بالا، در جریان استوانه توضیح داده شد، بحث ناپایداری لایه مرزی موضوع بسیار مهمی است که در چارچوب این فصل نمی گنجد. عموما ناپایداری بستگی به اغتشاش در لایه مرزی نسبت به زمان دارد. اگر اغتشاش نسبت به زمان رشد نماید، لایه مرزی ناپایدار خواهد بود لیکن اگر اغتشاش نسبت به زمان میرا بوده و کاهش یابد، لایه مرزی پایدار خواهد بود.

۹. خلاصه (جمع بندی)

از روش حل عمومی معادلات لایه مرزی در اطراف جسم غوطه‌ور می توان برای صفحه مسطح، جریان سکونی و جریان روی گوه استفاده کرد. بیشتر تحلیل های لایه مرزی مغشوش عددی بوده و تاکنون حل کاملی برای معادلات لایه مرزی مغشوش ارائه نشده است. در حرکت سیال در مجاری اطراف اجسام غوطه ور فشار افت می کند لیکن در جریان پایین دستی فشار در دنباله جسم افزایش پیدا کرده به طوری‌که گرادیان فشار معکوس می شود و این امر منجر به پدیده جدایش لایه مرزی از سطح جامد می شود. با وجود بررسی‌های زیادی که در خصوص جدایش لایه مرزی انجام شده است اما این موضوع هنوز به لحاظ تحلیلی به خوبی شناخته شده نیست. مقدار نسبی درگ و لیفت نسبت به یکدیگر بستگی به جدایش لایه مرزی در دنباله جسم دارد. اگر اختلاف فشار در جریان بالا دستی و پایین دستی افزایش پیدا کند، درگ فشاری بیشتر می‌شود. نقطه جدایش لایه مرزی نقش مهمی در درگ فشاری دارد. دو عامل موثر در جدایش لایه مرزی عبارتند از: رژیم جریان (آرام یا مغشوش بودن) و شکل هندسی جسم (هم امتدادی جسم با خطوط جریان).

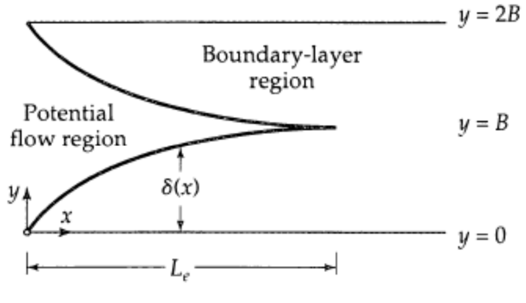
۱۰. پرسش‌های پایان درس

۱- برای شکاف باریکی که در شکل نشان داده شده است، سیال در $x=0$ با سرعت $v_y=0$ و $v_x=\langle v_x \rangle$ (ترم $\langle v_x \rangle$ سرعت متوسط در داخل شکاف است) وارد شکاف می شود. فرض کنید که توزیع سرعت در ورودی در منطقه $0<x<L_e$ به صورت ذیل است:

$$\begin{cases} \frac{v_x}{v_e} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 & 0 < y < \delta \\ \frac{v_x}{v_e} = 1 & \delta < y < B \end{cases}$$

که در این رابطه δ و v_e تابعی از x هستند.

- با استفاده از پروفیل سرعت داده شده، مقدار نرخ جریان عبوری W از سطح مقطع دلخواه در منطقه $0<x<L_e$، را یافته و نسبت $v_e/\langle v \rangle$ را بر اساس پارامترهای معادله تعیین کنید.
- با استفاده از معادله انتگرال مومنتوم، معادله ای ضمنی برای محاسبه $d(\delta/B)/dx$ بیابید.
- مقدار L_e را با استفاده از معادله مربوط به $d(\delta/B)/dx$ به دست آورید.
- با کمک تئوری جریان پتانسیلی، رابطه ای برای محاسبه $P(x)\text{-}P(x=0)$ به دست آورید.



ج: مقدار دبی جریان از رابطه انتگرالی مربوط به محاسبه دبی جریان از مقطع عرضی حرکت سیال محاسبه می شود. معادله انتگرال مومنتوم را با استفاده از معادله سرعت داده شده و نیز اعمال فرضیات لازم به دست آورده و آن را برای پارامتر $d(\delta/B)/dx$ حل می کنیم. برای به دست آوردن L_e ابتدا معادله دیفرانسیلی مربوط به $d(\delta/B)/dx$ را با