

به نام خدا



مهندسی متالورژی و مواد



1. Transport Phenomena Bird - Stewart - Light foot منابع:

2. مقدمه‌ای بر پدیده‌های انتقال در مواد - گسکل

An Introduction to transport phenomena in Materials

3. Transport Phenomena in Materials Processing

Geiger - Poirer

منظور از پدیده‌های انتقال، انتقال سه بخش برآست:

1. انتقال مومنتوم (ریناک سیالات) 2. انتقال حرارت 3. انتقال جرم

منابع دیگر: مکانیک سیالات Shames - مقدمه‌ای بر مکانیک سیالات Stroel - Waters

Heat and Mass Transfer - (white)

Incropera - (Dewitt)

مقدمه‌ای بر انتقال حرارت

چرا این سه بحث ظاهراً متفاوت را با هم بررسی می‌کنیم؟

عموماً این سه مورد انتقال با هم اتفاق می‌افتند. حداقل دو مورد با هم اتفاق می‌افتند. البته می‌توان

مسئله را ساده کرد و از روله نمود و فقط یکی مورد داشت. هم چنین فرم کلی معادلات این سه مورد شبیه به

هم است. قوانین پایه آنها نیز مشابه است:

$$1. \tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad \text{ویسکوزیته نیوتن}$$

$$2. q_y = -k \frac{dT}{dy} \quad \text{هدایت فوری}$$

$$3. J_{Ay} = -D_A \frac{dC_A}{dy} \quad \text{دیفوزیون فیک}$$

$$Q: \frac{\text{انرژی}}{\text{زمان}} \quad q = \frac{Q}{A} \quad \text{A: سطح مقطع}$$

q : در واقع شار حرارت را نشان می‌دهد. T : درجه حرارت

هر سه این معادلات از سه بخش تشکیل شده‌اند:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

گویایان کسیت \rightarrow $\frac{dv_x}{dy}$
 ضرب تناسب \rightarrow μ
 شار پدیده (در این جا موستوم) \rightarrow τ_{yx}

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{ma}{A} = \frac{m \cdot v}{A \cdot t} = \frac{P}{At}$$

تعداد موجسوزم : $\frac{P}{At}$ ، موجسوزم : P

در سیالات تنش برشی موجب انفعال می شود ولی در برخی حالات تنش های فشاری هم موجب

انفعال می شود.

شماره ی A در جهت y : $\dot{\gamma}_{xy}$

غلظت A : C_A

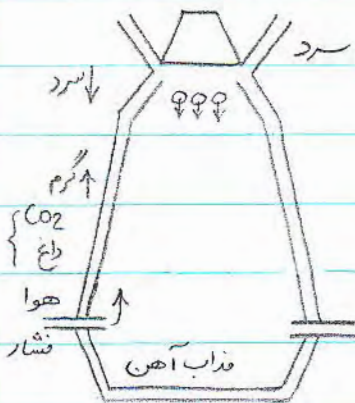
این بزرگ ها در سه معیاس برشی می شوند :

1- ماکروسکوپی $cm - m$ ← برزی اولیه فیزیکی - کلی لوزن - مثال : برزی کلی راکتور

2- میکروسکوپی $micron - cm$ ← برزی یک انسان حتی از کل وسیله - مثال : بختی کوچک از راکتور

3- مولکولی $1 - 1000 \text{ nm}$ ← برزی اتم ها برزی اثرشان روی یکدیگر - مثال : پیدایش ضرایب تناسب.

مثال : گوره بنند (نهم ترین راکتور متالورژیکی) - در زوب آهن

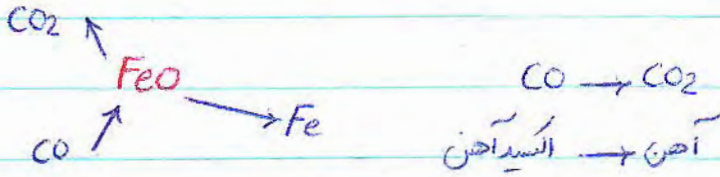


وروی : آهن و لگ (سرد)

در جهت موجسوزم مانا سیال کار داریم.

چه مقدار فشار لازم است که هوا خارج شود ؟

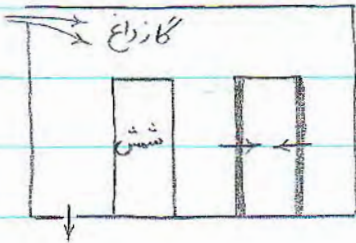
واکنش‌هایی که رخ می‌دهد در راکتور → انتقال حریم



Counter - Current exchange

این انتقال هم معکوس است.

مثال. کوره‌های عملیات حرارتی



* - گازی

انتقال حرارت از گاز داغ به شش سرد

انتقال حریم : عمل ریفریوین - شش‌ها دندریت دارند. در شاخه‌های دندریت

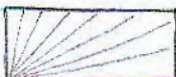
از سطح داغ به وسط شش سرد نیز انتقال حرارت داریم.

۱- دینامیک سیالات :

مقدمه : در دینامیک سیالات حرکت سیال داریم ولی در استاتیک سیالات ، سیال ساکن داریم.

استاتیک سیالات :

سیال : ماده ایست که اگر تنش برشی هر چند کوچک به آن وارد شود ، مازافی که این تنش وجود دارد

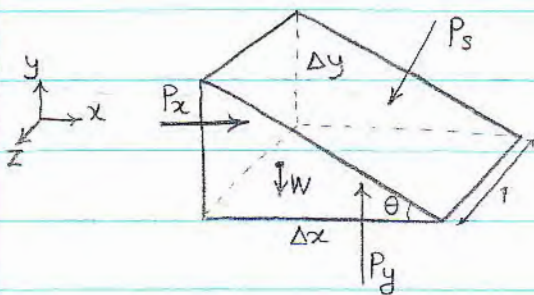


حرکت می‌کند.

بعبارت دیگر سیال متش برشی را تحمل نمی کند ولی فشار را می تواند تحمل کند. پس در استاتیկ سیالات

پا فشار برشی نداریم ولی تنش فشاری داریم.

فشار در یک نقطه: یک المان حقی در نظریه بگیریم. (به شکل گود)



P_x ، P_y و P_s از جانب دیگر سیالات وارد می شود و W نیز وزن المان است.

شرط تعادل: $\sum F = 0$

$$F_x = P_x \cdot \Delta y \cdot 1$$

$$x: P_x \Delta y = P_s \Delta s \cdot \sin \theta$$

$$y: P_y \cdot \Delta x = P_s \cdot \Delta s \cdot \cos \theta + \rho \cdot V \cdot g$$

$$V = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2}$$

$$\Delta y = \Delta s \cdot \sin \theta$$

$$\Delta x = \Delta s \cdot \cos \theta$$

$$\rightarrow P_x = P_s$$

$$(P_y - P_s) \Delta x = \rho g \frac{\Delta x \Delta y}{2}$$

شرایط حدی: $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$

عنق را هم می توان به صفر میل داد.

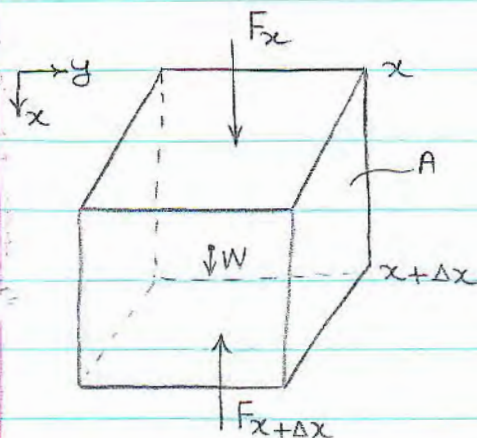
$$\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta y \rightarrow 0$$

$$\rightarrow P_y = P_s \Rightarrow P_x = P_y = P_s$$

نتیجه گیری مهم: فشار در هر جهتی برای یک نقطه با هم برابر است.

تغییرات فشار در سیال ساکن

یک المان حجمی برای سیال در نظر می‌گیریم:



در راستای y ، برآیند نیرو باید صفر باشد (معادله تعادل)

طرفین سطح در جهت y ، اختلاف نیرو نداریم.

در غیر این صورت سیال جاری می‌شود.

$$P_x \cdot A + A \Delta x \rho g = P_{x+\Delta x} A \rightarrow \frac{P_{x+\Delta x} - P_x}{\Delta x} = \rho g$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{dP}{dx} = \rho g \rightarrow \int_{P_0}^P dP = \int_{x_0}^x \rho g dx$$

$$\rightarrow \Delta P = P - P_0 = \rho g (x - x_0) = \rho g x \quad x_0 = 0$$

ΔP : فشار مطلق

ΔP : فشار نسبی

$$PV = nRT$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

برای گازها:

$$\rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{n}{m} RT = \frac{RT}{M} \rightarrow \rho = \frac{PM}{RT}$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dx} = \rho g = \frac{PMg}{RT} \rightarrow \int \frac{dP}{P} = - \int g \frac{M}{RT} dx$$

$$\rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = - \frac{Mgx}{RT} \rightarrow P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgx}{RT}\right)$$

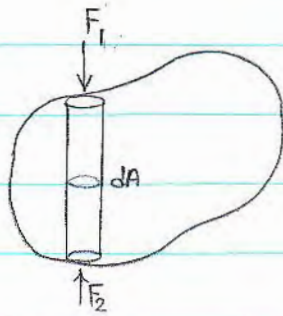
علامت منفی در لیل جهت انتخابی محور x است.

Buoyancy Force

نیروی شناوری (آرشمیدسی)

از طرف سیال نیروی معادل حجم جسم شناور روی سیال از پایین به بالا وارد می شود.

درواقع مستقل از وزن جسم می باشد. یک البان از جسم شناور در نظریه بگیریم:



تنش برشی نداریم چون استاتیکی است.

$$dF_B = P_{x_2} dA - P_{x_1} dA = (P_{x_2} - P_{x_1}) dA$$

$$= \rho g (x_2 - x_1) dA$$

$$\rightarrow F_B = \rho g \int (x_2 - x_1) dA \quad \text{فرض: دانسیته ثابت است (مایعات)}$$

برای گازها نیز در اختلاف ارتفاع کم، دانسیته تقریباً ثابت است.

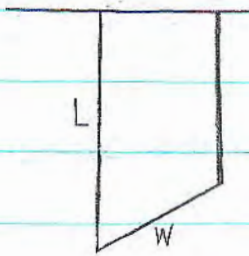
$$\rightarrow F_B = \rho g V \quad \text{حجم جامد } \rho: \text{ چگالی سیال}$$

تذکر: این نیرو به جرم بستگی ندارد.

* بحث مرکز فشار مطالعه شود.

مثال: صفحه با ضخامت ناچیز در داخل سیال فرو رفته است. فشار وارد بر سطح صفحه در هر

طرف را بدست آورید. نشان دهید که فشار وارد بر ورق برابر با فشار اعمالی بر مرکز ثقل است.



سطح سیال

تذکره فشار در نقطه به جهت بستگی ندارد.

در مرکز ثقل، فشار $\rho g \frac{L}{2}$ است.

انتقال مومنوم (دینامیک سیالات):

$P = mV$

تغییل جرم به ادامه حرکت در مسیر خودش را مومنوم گویند.



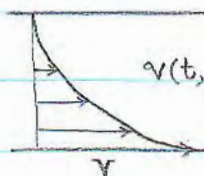
مومنوم نیز مانند انرژی غنا نایزیر است. یعنی نه بوجود می آید و نه از بین می رود. بجای آن بجای

مومنوم وجود دارد. پس در سیستم ها، از موازنه مومنوم استفاده می کنیم.

قانون ویسکوزیته نیوتن:

آزمایش. صفحه پائینی را با سرعت V حرکت می دهیم (در زمان صفر) در $t=0$ ، فقط لایه

متصل به صفحه حرکت می کند و بعد دیگر لایه ها. در نتیجه تنش برشی در سیال ایجاد می گردد. لایه ها

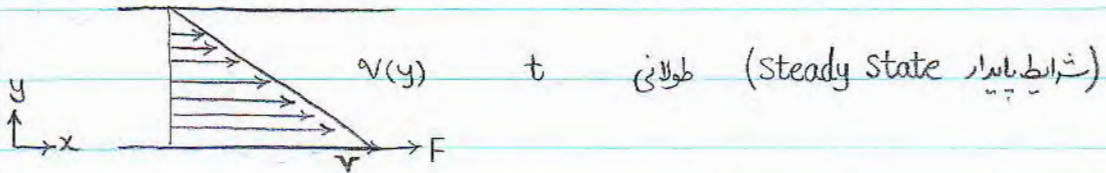


در نهایت به سرعت V می رسند :
کوچک t :

$t < 0$ ساکن $t = 0$ شروع حرکت www.iran-mavad.com

لایه ای که بلافاصله به جامدی متصل است، سرعت جامد را پیدا می کند. در این آزمایش

صفحه پائینی با هر سرعتی حرکت کند، لایه ای متصل به صفحه بالایی، سرعت صفر دارد.



(شرایط پایدار (Steady State) طولانی t

در اینجا سرعت تابعی از زمان نیست.

سطح صفحه: A : نیرویی که به صفحه پائینی وارد می شود. F

$$F \propto A \frac{V}{Y} \rightarrow \frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y}$$

μ : ضریب تناسب : فرم ریفرانسیتی $\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$

توسط نیروی F، مومنتوم از صفحه جامد به سیال وارد می شود. این انتقال در جهت y انجام

می شود. سرعت از یائین به بالا کم می شود یعنی $\frac{dv_x}{dy} < 0$ است ولی $\tau_{yx} > 0$ است.

همین دلیل علامت منفی لحاظ می شود. اندیس اول: جهت انتقال مومنتوم τ_{yx}
 // دوم: جهت سرعت

عامل انتقال انرژی گرمایی، اختلاف دماست. از دمای زیاد به دمای کمتر.

عامل انتقال مومنتوم، اختلاف سرعت است. از سرعت بیشتر به سرعت کمتر. این

مکانیزم، مکانیزم مولکولی می باشد.

سیالاتی که از رابطه ویسکوزیته نیوتن تبعیت می کنند، سیالات نیوتنی نام دارند. گازها سیال

نیوتنی هستند. اما مایعات همگی سیال نیوتنی نیستند. سرابرها، مواد خمیری و سوسپانسیونها

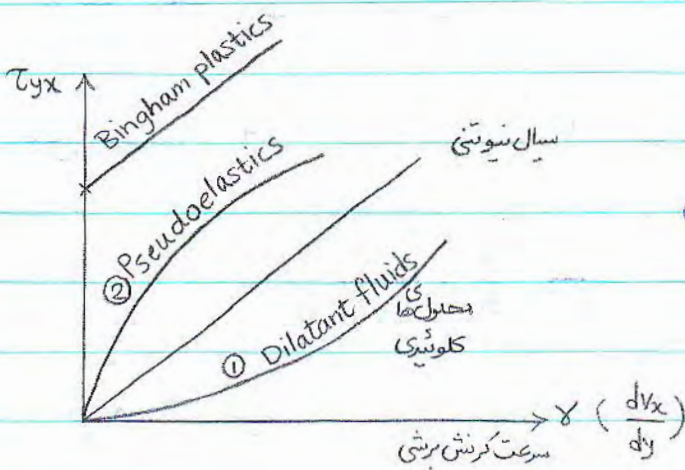
جز سیالات غیر نیوتنی هستند.

برای سیالات نیوتنی و غیر نیوتنی:

Bingham plastics در واقع دارای نوعی

تنش تسلیم هستند و بعد رفتار سیال

نیوتنی دارند.



Pseudoelastics : با افزایش سرعت کرنش برشی، شکل می شوند.

Oswald: $\tau_{yx} = k \dot{\gamma}^n$ $n > 1$ ① $n < 1$ ②

$n = 1$: سیال نیوتنی

دینامسیون و سیکوزیته:

$$\mu: \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}} = \frac{Pa}{\frac{m}{s.m}} = Pa.s \quad \text{or} \quad kg.m^{-1}.s^{-1} \quad (SI)$$

$$\mu: \frac{dyn}{cm^2} . s = poise \quad \rightarrow \quad 1 cp = 1 m Pa.s \quad (CGS)$$

ویسکوزیته کیسنا تیک :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ذرواق نفوذ موستوم توسط مکانیزم مولکولی راشان می دهد .

$$\nu : \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad \text{دیناسیون} :$$

تمام کیفیت هائیکه واحد یا دیناسیون $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ دارند، نوعی (دیفوزیون) ویانوعی نفوذ راشان می دهد .

$$\text{آب } (20^\circ\text{C}) : \mu = 1 \text{ cp} \quad \nu = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$\text{آب } (80^\circ\text{C}) : \mu = 0.4 \text{ cp} \quad \nu = 0.4 \text{ cm}^2/\text{s}$$

با افزایش سیالیت ، ویسکوزیته کمتر می شود . ویسکوزیته هم وابسته به دماست .

$$\text{هوا } (20^\circ\text{C}) : \mu = 0.018 \text{ cp} \quad \nu = 15 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

$$\text{هوا } (80^\circ\text{C}) : \mu = 0.021 \text{ cp} \quad \nu = 20 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

برای گارها ، ν زیادتر از مایعات است زیرا ρ برای گارها کم است . هم چنین رفتار μ و ν

باز برای گارها و مایعات فرقی می کند .

$$\text{Hg } (20^\circ\text{C}) : \mu = 1.55 \text{ cp}$$

$$\text{Fe (مایع)} : \mu \cong 7 \quad \nu \cong 1 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{شبهه به رفتار آب}$$

ویسکوزیته‌ی سرشاره‌ها ، بعضی از روغن‌ها و مایعات پلیمری ، μ بین 100 poise - 1

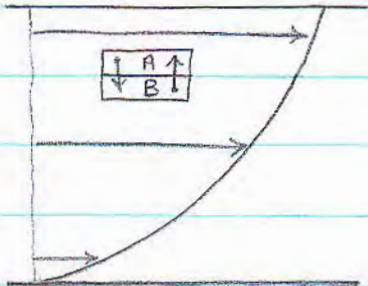
تغییر می‌کند. برای H_2SO_4 (اسید سولفوریک) ، μ بین 1 p - 0.1 تغییر می‌کند.

برای ننگ‌های مذاب ، فلزات سنگین (Pb, Zn, ...) ، فلزات واسطه ، آب ، بنزین ، استون

فلزات قلیائی در $20^\circ C$ ، μ بین 0.1 p - 0.01 تغییر می‌کند.

ویسکوزیته‌ی گازها :

نگ‌گردان سرعت برای سیال در نظر می‌گیریم.



$$v_A > v_B$$

دو لایه A و B که سرعت‌های متفاوتی دارند

در نظر می‌گیریم. اتم‌ها ممکن است بین لایه‌ها

منتقل بشوند و با برخورد این اتم وارد شده به

لایه‌ی جدید به اتم‌های این لایه ، هوشیوم منتقل می‌شود. لایه‌ی A با اعمال تنش برشی در جهت



حرکت لایه‌ی B ، سعی دارد سرعت لایه‌ی B را زیاد کند.

افزایش دما ، انتقال اتم‌ها بین لایه‌ها را ساده‌تر می‌کند.

برای مایعات این طور نیست و برای مایعات مایه‌ای بین مولکولی فیز داریم

* در حالت کلی، هدف از انتقال موستوم، انتقال حرارت و ... برقراری حالت تعادل و از بین بردن اختلاف است. در مطلب قبلی، این اختلاف توسط نیروهای برشی ایجاد شده بین لایه‌ها، رفع می‌شود.

ویسکوزیته‌ی گازها با استفاده از تئوری جنبشی گازها:

اتم‌ها را بصورت گره‌های صلب در نظر می‌گیریم و قانون بقای موستوم را نیز در نظر می‌گیریم. هم‌چنین فرض می‌کنیم نیروهای بین مولکولی واقعی وجود ندارد. (این اتفاق در فشارهای کم رخ می‌دهد) فرض ساده‌شونده‌ی دیگر، دمای زیاد است. برخورد بین اتم‌ها بصورت انعطافی است.

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}$$

سرعت متوسط اتم‌ها

m : جرم اتم
 k : ثابت بولتزمن
 T : دمای مطلق

n : غلظت اتمی
 λ (mean free path) فاصله آزاد متوسط

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

متوسط فاصله‌ی بین هر دو برخورد

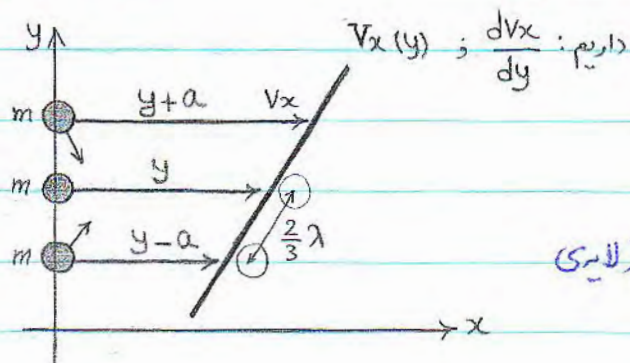
d : قطر اتم - بزرگی است که هر چه d و n بیشتر باشد، λ کمتری شود.

$$Z = \frac{1}{4} n \bar{u}$$

Z : شار اتمی = تعداد اتم‌هایی که در واحد زمان

یا عبور

از سطح اتمی عبور می‌کند.



لایه مرجع : y

مقدار مومنتوم وارد شده یا خارج شده از لایه

مرجع راهی خواهیم حساب کنیم.

$$m v_x|_{y+a} = m \left(v_x|_y + \frac{2}{3} \lambda \frac{dv_x}{dy} \right)$$

$$m v_x|_{y-a} = m \left(v_x|_y - \frac{2}{3} \lambda \frac{dv_x}{dy} \right)$$

(تنش برشی = فشار مومنتوم)

$$\tau_{yx} = 2m \left[v_x|_{y-a} - v_x|_{y+a} \right]$$

$$\rightarrow \tau_{yx} = -\frac{1}{3} n m \bar{u} \lambda \frac{dv_x}{dy}$$

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

$$\rightarrow \mu = \frac{1}{3} n m \bar{u} \lambda$$

$$\rightarrow \mu = \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi d^2}$$

$$\mu \propto T^{0.5}$$

در این رابطه، فشار وجود ندارد.

تذکره: در فشارهای کم و سیکوزیته‌ی گازها تابعی از فشار نمی باشد. تبدیل خطاهای ناشی از

فرض‌های ساده‌کننده $\mu \propto T^{\alpha}$ که α بین 0.6 تا 1 متغیر است.

$$* \mu = 2.67 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}}$$

M: وزن مولکولی Ω_{μ} : پارامتر لئونارد جونز (وابسته به دما)

σ : قطر مشخصه‌ای که کمی با قطر واقعی فرق می‌کند. این معادله دقیقتر است و فرض‌های

ساده‌کننده ندارد.

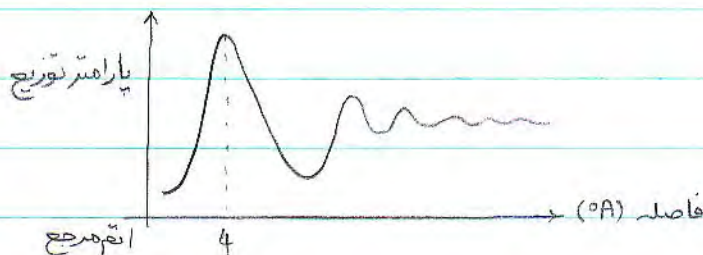
ویسکوزیته‌ی مایعات:

برای مایعات رابطی کلی وجود ندارد. ساختار مایعات ساختاری بین گازها و جامدات

است. در جامدات هم نظم در فاصله‌ی نزدیک (short range ordering) و هم نظم در فواصل

دور (long range ordering) وجود دارد. اما در مایعات در فاصله‌ی نزدیک تا حدودی نظم (یا

فشاردهی آنها) وجود دارد.



گازها هم کاملاً بی‌نظم هستند.

رابطه‌ی زیر برای ویسکوزیته‌ی مایعات وجود دارد:

$$\mu = A \exp\left(\frac{\Delta G^*_{vis}}{RT}\right)$$

ΔG^*_{vis} : انرژی اکتیواسیون ویسکوزیته
 A : ثابت تجربی

نظریه‌ی حفزه (Eyring):

وجود حفزه در داخل مایعات اثبات نشده ولی نتایج خوبی دارد.

انرژی اکتیواسیون ویسکوزیته، انرژی لازم است تا یک حفزه جای یک اتم را بگیرد. به عبارتی برای

اینکه حفزه حرکت کند باید به نیروهای بین مولکولی یا اتمی غلبه کند.

$$A \approx \frac{N_0 h}{\hat{V}}$$

N_0 : عدد آووگادرو

\hat{V} : حجم مولی

h : ثابت پلانک

این رابطه برای فلزات نتیجه خوبی نمی‌دهد. برای فلزات تئوری زیر وجود دارد؛ (چپین)

$$\Delta G^*_{vis} \approx 0.41 \Delta \hat{U}_{vap} \approx 9.4 RT_6$$

تئوری چپین (Chapman):

$$\mu^* v^{*2} = f(T^*)$$

μ^* : reduced viscosity V^* : حجم کاهش یافته

T^* : دمای کاهش یافته

$$\mu^* = \frac{\mu s^2 N_0}{\sqrt{MRT}}$$

s : فاصله بین انتی در صفر کلون

$$V^* = \frac{1}{n\delta^3}$$

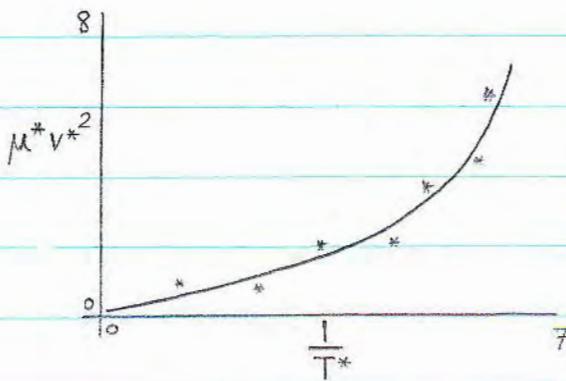
n : تعداد اتم‌ها در واحد حجم

$$T^* = \frac{KT}{\epsilon}$$

ϵ : پارامتر انرژی

$$\frac{\epsilon}{k} = 5.2 T_m$$

μ^* ، V^* و T^* بدون بعد هستند.



ویسکوزیته‌ی سرباره :

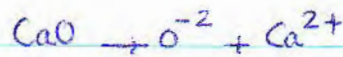
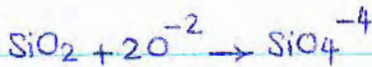
سرباره‌ها، مذاب‌هایی هستند که فازهای اکسیدی دارند.

اکسیدهاسته‌دسته‌اند: اکسیدهای اسیدی - اکسیدهای قلیائی - اکسیدهای آمفوتر

اکسیدهای اسیدی معروف: $As_2O_3 - P_2O_5 - SiO_2$

اکسیدهای قلیائی معروف: آهک (CaO) ، MgO ، Na₂O . این اکسیدها دهنده

یون اکسیدین هستند . اما اکسیدهای اسیدی گیرنده یون اکسیدین هستند . (کپلس O^{-2} →)



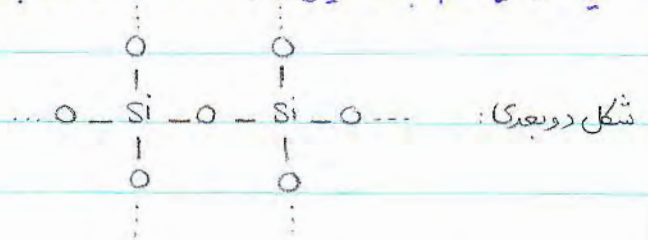
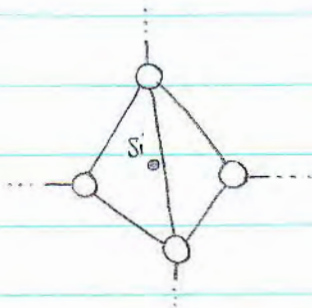
آهک‌ترهای معروف: PbO ، Al₂O₃ . بنا به مصیبتی که در آن قرار می‌گیرند رفتار اسیدی

یا بازی دارند .

سرباره‌ها ، سیالیت خیلی کمی دارند . $\mu = 1.5 \times 10^5$ Poise ($T = 1940^\circ C$)

سیلیس

این سیالیت کم برای سیلیس به ساختار آن مربوط می‌شود:



در فواصل نزدیک نظم زیاد است . هم چنین پیوندهای بین Si و O نیز خیلی مستحکم است

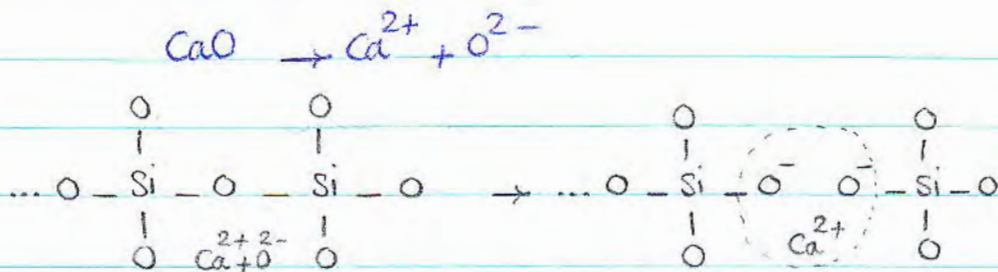
و برای اینکه یک اتم بتواند حرکت کند ، کل شبکه می‌خواهد حرکت کند و در ضمن پیوندهای فوق‌باید

ازین برونند . این مطلب برای SiO₂ حائز است .

وقتی CaO وارد شبکه SiO₂ می‌شود ، سیالیت زیاد می‌شود و هر چه مقدار CaO بیشتر

شود، سیالیت هم زیاد می شود. زیرا CaO وقتی اضافه می شود، تجزیه

می شود. (بدلیل اختلاف شعاع اتمی و هم چنین بار بیشتر نسبت به Si-O)



$\mu = AT \exp\left(\frac{1000 B}{T}\right)$ ثابت تجربی B

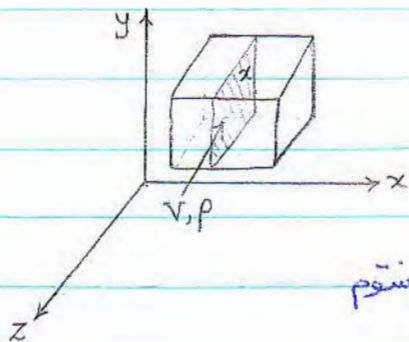
نتیجه: ویسکوزیته مکانیزم مولکولی است. بعبارتی انتقال موستوم بر اساس مکانیزم

ویسکوزی، مکانیزمی زمان بر است زیرا وابسته به حرکت اتم ها با سرعت محدود می باشد.

اما انتقال موستوم فقط بر این صورت نمی باشد.

انتقال موستوم جابه جایی:

سیالی با سرعت V و چگالی ρ از امان حجمی زیر عبور می کند. در این جا کاری به حرکت مولکول ها



تغایریم.

سرعت خطی
↑

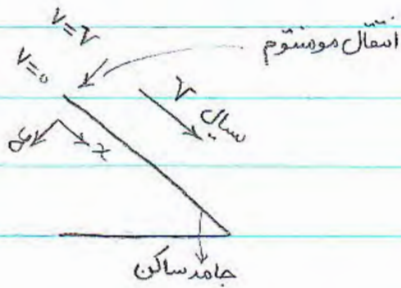
$$\text{سرعت حجمی} \times \frac{\text{موتوم}}{\text{حجم}} = \text{سطح} \times \text{زمان} / \text{موتوم}$$

درجهت x : $\rho V v_x$: شار مومنتوم جابه جایی

درجهت y : $\rho V v_y$

V : سرعت

مومنتوم درجهت سرعت جابه جایی دارد.



اما برای مومنتوم مولکولی درجهت y مستقل می شود.

اما مومنتوم جابه جایی نیاز به گرادیان سرعت ندارد.

$$mV = \text{مومنتوم درجهت جرم } m \rightarrow \frac{\text{مومنتوم}}{\text{حجم}} = \frac{m \cdot v}{V} = \rho \cdot v$$

$$\rightarrow \text{شار مومنتوم جابه جایی} = \rho \cdot v \cdot \frac{\text{حجم}}{\text{زمان} \times \text{سطح}} = \rho \cdot v \cdot v$$

↓
سرعت خطی

$\rho \cdot v \cdot v$: تانسور درجهت دوم است. مثل $v_x v_x$. در واقع $\rho v v$ دارای 9 مؤلفه است:

$$v_{zz} \quad v_{xx} \quad v_{xy} \quad v_{yx} \quad v_{xz} \quad v_{zx} \quad v_{yz} \quad v_{zy} \quad v_{yy}$$

موازته مومنتوم (جریان آرام - لایه ای) : **Laminar flow**

در مورد جریان آرام فرض می کنیم سیال بصورت لایه های مجزا است و سیال بصورت لایه لایه حرکت

می کند و این لایه ها با هم آمیخته نمی شوند.

سرعت انباشتی موشوم = سایر نیروها + ... + سرعت موشوم خروجی - سرعت موشوم ورودی

(چون موشوم دارای بقاست) کمیت با زمان تغییر نمی کند → حالت پایدار

در شرایط steady state ، سرعت انباشتی صفر است.

$$\text{سرعت موشوم} = \frac{\text{موشوم}}{\text{زمان} \times \text{سطح}} \times \text{سطح} = \text{شار موشوم} \times \text{سطح}$$

$$\text{نیرو} = \text{سطح} \times \tau$$

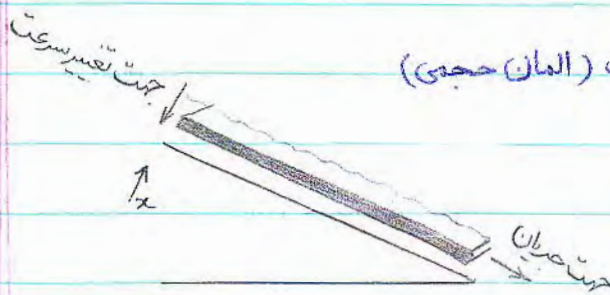
$$\Rightarrow \text{سرعت موشوم} = \text{نیرو}$$

سایر نیروها = ثقل - فشار - فشاری توانه بعنوان ورودی و خروجی هم باشد.

* مراحل حل مسئله :

1- مشخص کردن مؤلفه‌ی سرعت و جهت تغییر جریان که بر درک فیزیکی مسئله مربوطه می شود.

2- نوشتن موازنه‌ی موشوم برای پوسته‌ی نازک (المان حجمی)



مثال - این المان باید عمود بر جهت تغییر سرعت

باشد. می توان المان مکعبی هم در نظر گرفت.

3- اعمال شرایط حده ← بدست آوردن معادله دیفرانسیل شار موشوم

4- انگرال گیری ← توزیع فشار مونتوم

5- نوشتن قانون ویسکوزیته نیوتن برای درست آوردن معادله دیفرانسیل سرعت جریان

6- انگرال گیری ← معادله سرعت

7- اعمال شرایط مرزی برای درست آوردن ثابت انگرال

حرف :

معادلات سرعت - معادلات تنش برشی - معادلات تغییرات فشار - معادلات

سرعت متوسط ، سرعت max و غیره .

شرایط مرزی :

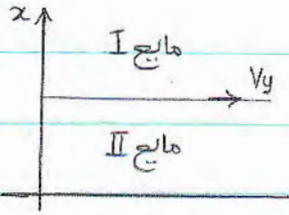
1- در فصل مشترک سیال و جامد ، سرعت سیال با سرعت جامد برابر است .

2- در فصل مشترک مایع و گاز : (وقتی سرعت گاز خیلی کم است) تنش برشی در فصل مشترک



3- در فصل مشترک مایع و مایع : اجزای سرعت همسانی در دو سیال با هم برابرند و هم چنین

اجزای تنش برشی . بعبارتی در فصل مشترک ، دو مایع نسبت به هم نمی لغزند .

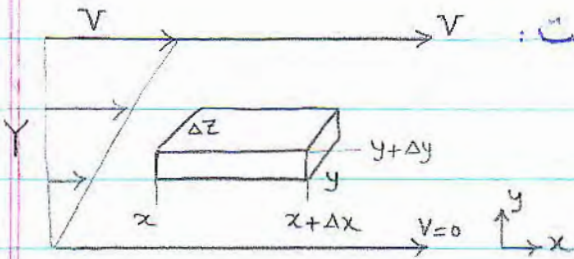


اجزای سرعت همبسی برابر $v_y, v_z =$

نیویستی اجزای تنش برشی $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz} =$

مثال. جریان کویتی: (شرایط پایدار) (سیال غیرقابل تراکم)

شکل مسئله مانند اثبات قانون ویسکوزیته نیوتن است:



یک المان حجمی در نظر می‌گیریم.

در جهت انتقال سرعت، در المان Δ در نظر می‌گیریم.

در این جا حتماً Δy داریم.

سرعت متوسط ورودی

سرعت متوسط خروجی

$$\Delta z \cdot \Delta x \cdot \tau_{yx} \Big|_{y+\Delta y} - \Delta z \cdot \Delta x \cdot \tau_{yx} \Big|_y$$

داریم v_x

$$v_y = v_z = 0$$

فرض‌های اولیه مسئله:

$$v_x = v_x(y) \quad : \quad \text{چرا تابعی است از } y$$

چرا تابعی از x نیست. (برهان خلف) اگر تابعی از x باشد نیویستی در سیال ایجاد می‌شود

که تناقض با تعریف سیال دارد. هم چنین تغییرات سرعت در جهت x در صورتی است که

شرایط پایدار نباشد.

سرعت موستوم خروجی سرعت موستوم ورودی

$$\rho v_x^2 \Big|_x \Delta y \Delta z - \rho v_x^2 \Big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z = 0 \quad \text{موستوم جابه جایی صفر است:}$$

نیروی تعلق ناشی از جریان ندارد. ← ذی نویسیم

$$\frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \rightarrow \frac{d\tau_{yx}}{dy} = 0 \rightarrow \tau_{yx} = C_1$$

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} = C_1$$

$$\rightarrow \frac{dv_x}{dy} = -\frac{C_1}{\mu} \rightarrow v_x = -\frac{C_1}{\mu} y + C_2$$

BCI : شرایط مرزی $y=0 \rightarrow v_x=0$

$$y=Y \rightarrow v_x=V$$

حل برای C_1 و C_2 : $v_x = \frac{V}{Y} y$ $\tau_{yx} = -\mu \frac{V}{Y}$

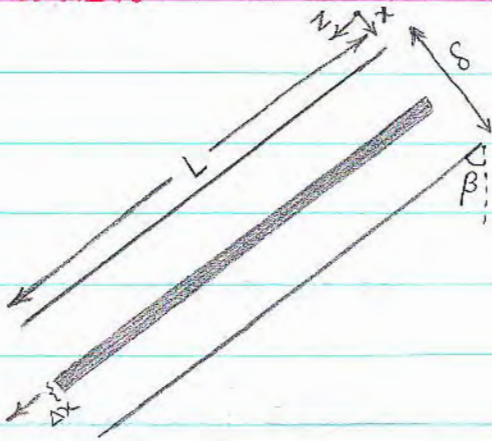
85.12.6

جریان مانع بصورت آرام روی سطح شیب دار:

در اینجا نیروی وزن موجب حرکت سیال می شود. چون جریان آرام است، بنابراین سیال لایه لایه است.

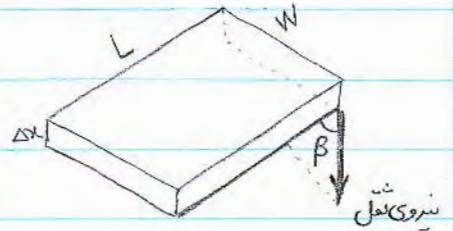
و در لایه در راستای شیب سطح حرکت می کند. هم چنین سیال نیوتنی است و تراکم ناپذیر و پایدار.

یعنی شتاب صفر است. بنابراین نیروی ویسکوز باید آنقدر بزرگ باشد که بر نیروی ثقل غلبه کند.



$$v_x = v_y = 0$$

$$v_z = v_z(x)$$



درزوی عرضی

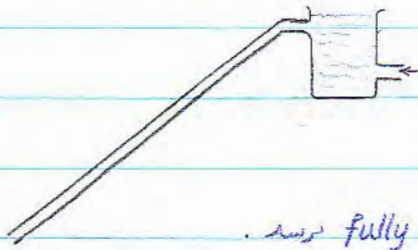
$$LW \tau_{xz} \Big|_x - LW \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x}$$

$$+ W \Delta x \rho v_z^2 \Big|_{z=0} - W \Delta x \rho v_z^2 \Big|_{z=l}$$

$$+ mg \cos \beta$$

نیروی مؤثر $mg \sin \beta$ ناشی از جریان نراره.

در اینجا در نقاط ابتدا و انتها تغییرات فشار نداریم و در هر دو نقطه فوق، فشار مساوی فشار جو است.



در ابتدای مسیر چون سرعت صفر است پس تا

مسافتی کم شتاب وجود دارد تا به شرایط fully developed flow برسد.

$$\frac{\div L \cdot W \cdot \Delta x}{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tau_{xz} \Big|_x - \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow - \frac{d\tau_{xz}}{dx} + \rho g \cos \beta = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \rho g \cos \beta \cdot x + C_1$$

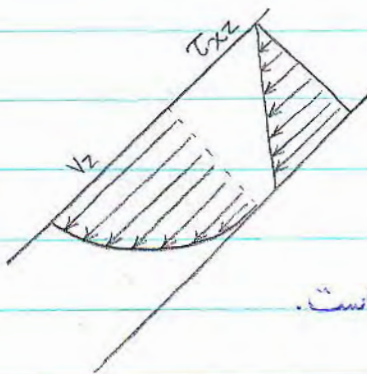
سطح بالایی جریان سیال، با گاز در ارتباط است ← تنش برشی ناچیز است.

$$x=0 \rightarrow \tau_{xz}=0 \rightarrow C_1=0$$

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} = \rho g \cos\beta x$$

$$\rightarrow v_z = \frac{\rho g \cos\beta}{-2\mu} x^2 + C_2 \quad x = \delta \rightarrow v_z = 0$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{\rho g \cos\beta}{2\mu} \delta^2 \quad \rightarrow v_z = \frac{\rho g \cos\beta \delta^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$



در نتیجه معادله بصورت مشخصی است.

نتیجه. جایی که تنش صفر است، سرعت

max بوده و جایی که تنش max است، سرعت صفر است.

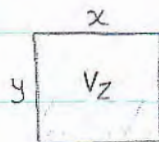
$$v_z(\max) = \frac{\rho g \cos\beta \delta^2}{2\mu}$$

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^w \int_0^\delta v_z dx dy}{\int_0^w \int_0^\delta dx dy} = \frac{\rho g \cos\beta \delta^2}{3\mu} = \frac{2}{3} v_z(\max)$$

سرعت حجمی (دبی حجمی):

عبارتست از سطح مقطع در سرعت سطح. چون سرعت در داخل سطح تغییر می‌کند

$$\int_0^w \int_0^\delta v_z dx dy$$



بصورت انتگرالی نوشته می‌شود:

$$\dot{W} = \rho \int_0^w \int_0^\delta v_z dx dy$$

سرعت جری (دبی جری):

$$= \frac{\rho^2 g w \delta^3 \cos\beta}{3\mu}$$

عدد رینولدز:

$$Re = \frac{48 \bar{v}_z \rho}{\mu} < 20$$

این عدد نشان دهنده آرام بودن و اغتشاش سیال است. هر چه این عدد بزرگتر باشد، سیال

تقابل به اغتشاش دارد. اگر کوچکتر از 20 باشد، سیال جریان آرام دارد.

D: بعد مشخصه = 4 برابر ضخامت در مورد سطح شیبدار

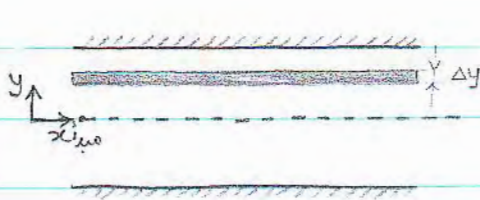
$$Re = \frac{D V \rho}{\mu}$$

رابطه کلی

در حالت کلی وابسته به هندسه مسئله است

* جریان بین دو سطح موازی:

کانال با سطح مقطع مستطیل با دو صفحه ساکن داریم. نیروی ثقل نقشه در جریان ندارد. در نتیجه



نقطه اختلاف فشار موجب حرکت می شود. عمق: w

فرض: لایه ای - پایدار - نیوتنی - تراکم ناپذیر

... کاملاً شکل یافته (fully developed flow)

$$v_z = v_y = 0 \quad v_x = v_x(y)$$

$$L.W. \tau_{yx} \Big|_y - L.W. \tau_{yx} \Big|_{y+\Delta y}$$

$$+ W \Delta y P \Big|_{x=0} - W \Delta y P \Big|_{x=L} = 0$$

$$\frac{\div L W \Delta y}{\Delta y \rightarrow 0} \quad \frac{d \tau_{yx}}{dy} = \frac{P_0 - P_L}{L} \rightarrow \tau_{yx} = \frac{P_0 - P_L}{L} y + C_1$$

دما به تقارن، سرعت در وسط max است پس تنش برشی صفر است.

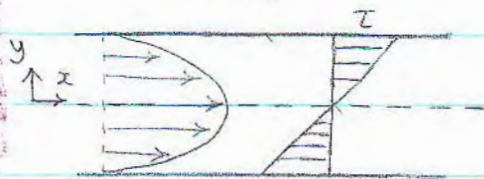
$$y=0 \rightarrow \tau_{yx}=0 \rightarrow C_1=0$$

این شرط مرزی در مراحل بعدی هم بدست می آید.

$$\Rightarrow v_x = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} y^2 + C_2 \quad y=\delta \rightarrow v_x=0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \delta^2 \quad \Rightarrow v_x = \frac{1}{2\mu} (\delta^2 - y^2) \frac{P_0 - P_L}{L}$$

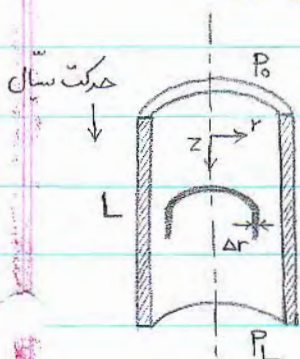
$$\bar{v}_x = \frac{\int_0^w \int_0^\delta v_x dy dz}{\int_0^w \int_0^\delta dy dz}$$



تنش برشی مثبت یا منفی است.

مثال - جریان در داخل لوله:

فرض: پانیاار - جریان لایه‌ای (بگ جفتی) - تراکم ناپذیر - سیال نیوتونی.



$$v_\theta = v_r = 0 \quad v_z = v_z(r) \quad \text{در محصات استوانه‌ای}$$

عوامل مؤثر در حرکت سیال: اختلاف فشار - نیروی ثقل

بسته به صورت مسئله می توان فقط یکی از این عوامل را داشت. مثلاً اگر افقی باشد، فقط

اختلاف فشار وجود دارد.

$$(2\pi r \tau_{rz})|_r \cdot L - (2\pi r \tau_{rz})|_{r+\Delta r} \cdot L + 2\pi r \Delta r P_o - 2\pi r \Delta r P_L + \rho 2\pi r \Delta r L g = 0$$

موسوم جانبی $(\rho V z^2)$ هم داریم اما در $Z=L$ و $Z=0$ باهم برابر بوده و حذف می شوند.

$$\frac{\div 2\pi L \Delta r}{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r \tau_{rz})|_{r+\Delta r} - (r \tau_{rz})|_r}{\Delta r} = \frac{r(P_o - P_L)}{L} + \rho g = r \left(\frac{P_o - P_L}{L} + \rho g \right)$$

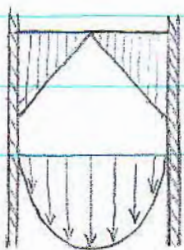
$$\int \tau_{rz} = \left(\frac{P_o - P_L}{L} + \rho g \right) \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

B.C.1: $r=0 \rightarrow$ چون τ_{rz} بی نهایت نمی شود $\rightarrow C_1=0$
(τ_{rz} : finite)

$$\frac{dv_z}{dr} = - \left(\frac{P_o - P_L}{2L\mu} + \frac{\rho g}{2\mu} \right) r \quad \int \rightarrow v_z = - \left(\frac{P_o - P_L}{4L\mu} + \frac{\rho g}{4\mu} \right) r^2 + C_2$$

B.C.2: $r=R \rightarrow v_z=0 \rightarrow C_2 = \left(\frac{P_o - P_L}{4L\mu} + \frac{\rho g}{4\mu} \right) R^2$

$$\rightarrow v_z = \left(\frac{P_o - P_L}{L} + \rho g \right) \left(\frac{R^2}{4\mu} \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$



$$\frac{P_o - P_L}{L} + \rho g = (P_o - P_L) \frac{1}{L}$$

فشار تغییر یافته

(modified pressure)

$$P = P + \rho g L$$

85.12.8

P(30)

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta \rightarrow \pi R^2} = \frac{\overbrace{P_0 - P_L}^{\text{فشار تغییر یافته}}}{8\mu L} R^2 = \frac{1}{2} v_z(\text{max})$$

سرعت حقیقی <= صورت

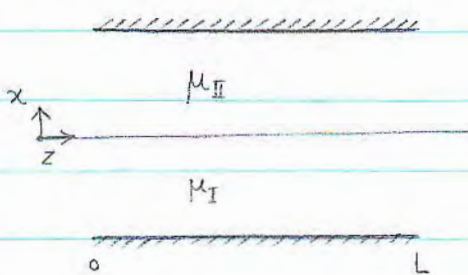
$$\dot{W} = \rho \bar{v}_z \pi R^2 = \frac{\pi (P_0 - P_L) R^4 \rho}{8\mu L} \quad (\text{هاگن پویزول})$$

مفهوم ریاضی جریان آرام در این مثال :

$$Re = \frac{D \bar{v}_z \rho}{\mu} < 2100 \quad \text{شرط آرام بودن}$$

85.12.13

جریان دو سیال نامخلوط :



همه فرض های قبلی در اینجا هم وجود دارد :

معادله جریان ، مانند حرکت سیال یکم به تنهایی

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{P_0 - P_L}{L} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xz}^I = \frac{P_0 - P_L}{L} x + C_1^I \\ \tau_{xz}^{II} = \frac{P_0 - P_L}{L} x + C_1^{II} \end{cases} \quad \text{است.}$$

$$\text{B.C.1: } x=0 \quad \tau_{xz}^I = \tau_{xz}^{II} \Rightarrow C_1^I = C_1^{II} = C_1$$

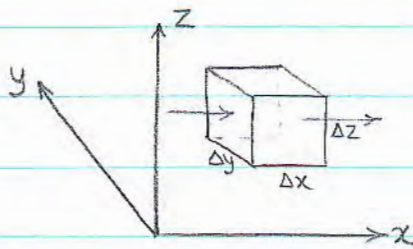
$$\tau_{xz}^{I \text{ or } II} = \frac{P_0 - P_L}{L} x + C_1 \rightarrow -\mu \frac{dv_z^I}{dx} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right)x + C_1$$

$$\rightarrow V_z^I = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu^I L} x^2 - \frac{C_1}{\mu^I} x + C_2^I \quad V_z^{II}: \text{به همین ترتیب}$$

$$\text{B.C.2: } x=0 \rightarrow V_z^I = V_z^{II} \quad \text{B.C.3: } x=b \rightarrow V_z^{II} = 0$$

$$\text{B.C.4: } x=-b \rightarrow V_z^I = 0$$

معادلات تغییر (برای سیستم های تک درجه و عدم واکنش شیمیایی):



قانون پیوستگی (بقای جرم):

تغییرات ورودی و خروجی = انباشتگی جرم

اولین کار نوشتن معادلات پیوستگی است: $\rho \times \text{ریحی} = \text{سرعت جرم}$

$$\rightarrow \rho v_x|_x \Delta y \Delta z - \rho v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

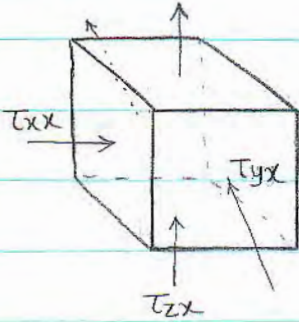
$$\xrightarrow{\div \Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right)$$

معادلات دینامیک کامل نیست چون مثلاً ρ هم با زمان، هم با x ، y و z تغییر می کند.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{V}) \quad (\nabla: \text{divergance}) \quad \text{شکل برداری:}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{برای مایعات ثابت است:}$$

اگر تنش های برشی را هم برای همان در نظر بگیریم:



برای همان محورهای مختصات :

رابطی انباشتی مومنوم را می نویسیم : (سرعت انتقال مومنوم)

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \Delta y \Delta z (\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x}) + \Delta z \Delta x (\rho v_y v_x|_y - \rho v_y v_x|_{y+\Delta y}) + \dots \\ & + \Delta y \Delta z (T_{xx}|_x - T_{xx}|_{x+\Delta x}) + \Delta z \Delta x (T_{yx}|_y - T_{yx}|_{y+\Delta y}) + \dots \\ & + \Delta x \Delta y \Delta z \rho g_x + \Delta y \Delta z (P_x - P_{x+\Delta x}) = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial (\rho \cdot v)}{\partial t} \end{aligned}$$

g نیز دارای سه مؤلفه g_x ، g_y و g_z است که در این مختصات $g_z -$ داریم.

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial (\rho \cdot v)}{\partial t} \quad \text{آهنگ انباشتی مومنوم} :$$

در شرایط پایدار (steady state) صفر است.

آهنگ انباشتی مومنوم، همان رابطی $F=ma$ را می دهد.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_x \right] \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zx} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \cdot v] = - [\nabla \cdot \rho v v] - [\nabla \cdot \tau] - \nabla P + \rho g \quad \text{به شکل برداری} :$$

معادله‌ی ویسکوزیته‌ی نیوتن، حالت خاصی از معادلات زیر است:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{برای } \tau_{zz} \text{ هم به همین ترتیب.}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad \text{برای تنش های برشی:}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad \tau_{xz} \text{ هم به همین ترتیب.}$$

در زمانیکه سرعت یک بگری است، به همان قانون ویسکوزیته‌ی نیوتن هم رسم.

معادلات ناویر-استوکس برای حالت μ و ρ ثابت:

در این معادلات فقط مؤلفه‌ی سرعت داریم؛ زیرا سرعت نسبت به تنش برشی عملی تر است:

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} +$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

(Substantial derivative) مشتق ذاتی: $\frac{D}{Dt}$

$$\Rightarrow \rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu [\nabla^2 v] + \rho g$$

در سرعت های خیلی کم نیروهای ویسکوزی بسیار بیشتر از وزن هستند. در حرکت سیال دو

نیروی اصلی وزن و نیروهای مولکولی یا ویسکوزی مؤثرند.

نیروی اصلی وزن و نیروهای مولکولی یا ویسکوزی مؤثرند. $\frac{Dv}{Dt} = 0$

سرعت خیلی کم: حرکت خزنده (creeping)

$$\rightarrow 0 = -\nabla P + \mu [\nabla^2 v] + \rho g$$

حل مثال لوله با استفاده از این معادلات:

جریان عمودی بود یعنی در جهت z می دانستیم که $v_r = v_\theta = 0$

تابعیت v_z به r را هم می نویسیم: $v_z = v_z(r, z)$

$$\nabla \cdot v = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [v_\theta] + \frac{\partial}{\partial z} [v_z] = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow v_z \text{ تابعی از } z \text{ نیست.}$$

معادله ناویر - استوکس برای مؤلفه r از مختصات استوانه ای:

$$\rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g$$

$$\rightarrow - \frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

$$\theta \text{ برای: } \rightarrow - \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$$

z برای : $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \rho g_z$

P فقط به z بستگی دارد و v_z هم فقط به r :

$\rightarrow 0 = -\frac{dP}{dz} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] + \rho g_z$

$\rightarrow \frac{dP}{dz} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] = C_1$

4 تا ثابت ایجاد می شود (از انتگرال) . شرایط مرزی :

$v_z = \text{غیر بنهایت} : r=0$

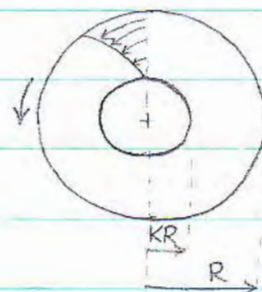
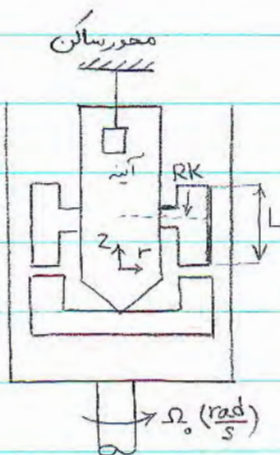
$v_z = 0 : r=R$

$z=0 \rightarrow P=P_0$

$z=L : P=P_L$

$\rightarrow v_z = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$

ویسکومتر کویتی :



نصویر از بالا :

$v_\theta = v_\theta(r, \theta)$

$v_z = v_r = 0$

$P = P(z, r)$

تابعی از r : کویتی

تابعی از r : نیروی گریز از مرکز تابعی از z : نیروی ثقل

برای مؤلفه θ : (در شرایط steady state)

$$\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) \right] = 0$$

علامت منفی برای θ و بدلیل جهت محور z است: $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g$: مؤلفه z

$$r \text{ " } : -\rho \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V_\theta) \right) = 0$$

$$\rightarrow V_\theta = \frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r}$$

$$\text{B.C.1: } r=R \rightarrow V_\theta = R \Omega_0$$

$$\text{B.C.2: } r=KR \rightarrow V_\theta = 0$$

$$\rightarrow V_\theta = \Omega_0 R \left(\frac{\frac{r}{RK} - \frac{RK}{r}}{\frac{1}{k} - k} \right)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial r} = 0 \rightarrow T_{r\theta} = -\mu \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = -2\mu \Omega_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{k^2}{1-k^2} \right)$$

$$\text{گشتاور نیرو } T_z = \left(-T_{r\theta} \Big|_{r=RK} \right) \times 2\pi R K L \times \underbrace{RK}_{\text{ارتفاع}} = \omega \cdot \theta_b$$

علامت منفی بدلیل جهت محور r است. این گشتاور برابر است با گشتاور وارده بر آینه.

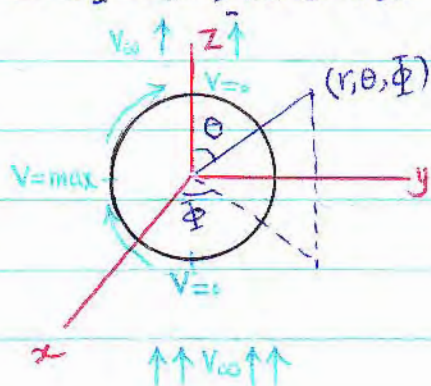
θ_b : زاویه آینه. $\leftarrow \mu$ بستگی می آید.

جریان لغزنده (خزشی) به دورگه:

وقتی می‌گوئیم جریان خزشی یعنی اینکه سرعت کم است و شتاب صفر می‌باشد. در این جا فرض

می‌کنیم $Re < 0.1$ که موجب می‌شود جملات مربوط به شتاب صفر است.

می‌توان فرض کرد که سیال با سرعت یکنواخت V_{∞} (رفواصل دورتر سرعت یکنواخت است)



به سمت جامد ساکن می‌آید.

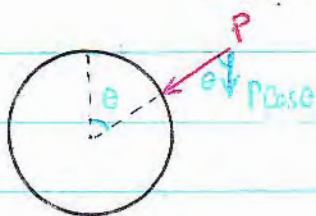
$V_{\theta} = 0$ اما V_r داریم.

از حل معادلات پیشرفته ریاضی:

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu V_{\infty}}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin\theta$$

$$P = P_0 - \rho g z - \frac{3}{2} \frac{\mu V_{\infty}}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta$$

هدف: مولفه‌ی درجهت جریان سیال، نیروهای وارد بر جامد؟



چون P هم با θ و هم با r متغیر است باید انگرال

بگیریم:

$$F_n = \int P \cos\theta \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (P|_{r=R, z=r\cos\theta} \cos\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$F_n = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{سیال}} g + 2 \pi \mu R V_{\infty}$$

نیروی اول از نوع ارشمیدی است پس نتیجه می شود که نیروی ارشمیدی چه در سیال ساکن و

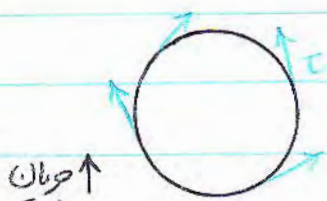
چه در سیال متحرک وجود دارد و همواره در جهت کاهش نیروی وزن است.

جمله دوم نیروی F_n یعنی $2 \pi \mu R V_{\infty}$ از نوع نیروی drag است که از نوع

کشش بوده و مخالفت با جریان می کند.

تنش های برشی بر لای چسبندگی سیال به سطح جامد بوجود می آید. این تنش ها مماسی اند.

هم چنین این تنش ها موجب استهلاک می شوند. (استهلاک نیرو).



$$F_{\tau} = \int (\tau_{ro} |_{R} \sin \theta) dA$$

$$= 4 \pi R V_{\infty} \mu$$

این نیرو از لحاظ ظاهری شبیه نیروی drag است پس این نیرو هم drag است. و موجب

استهلاک نیرو می شود. وجود جامد در داخل سیال موجب نیروی مقاوم (اصططاک) می شود و اگر

جامدی در نزدیکی سیال نباشد، سیال بدون افت فشار و سرعت حرکت می کند.

$$F_D = 6 \pi \mu R V_{\infty} \quad \text{قانون استوکس: (درگ کل)}$$

اگر یک سرباره در مزاب باشد با چه سرعتی بالا می آید و با چه سرعتی ته نشین می شود؟



عوط پر شدن :



رسوب کردن :

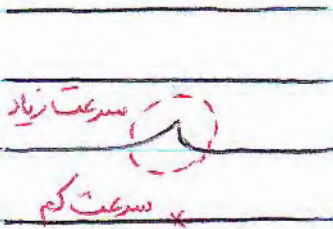
F_D : با جریان سیال مخالفت دارد .

وقتی که سیال ساکن و جامد متحرک باشد ، باز هم ، مطابق قلی صادق است .

Turbulent Flow :

جریان نا آرام :

وقتی یک لایه از سیال سرعتی متفاوت با لایه های دیگر دارد

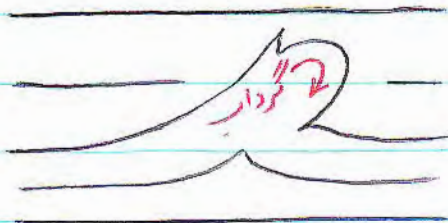


مولکول ها در جهتی حرکت می کنند که اختلاف سرعت

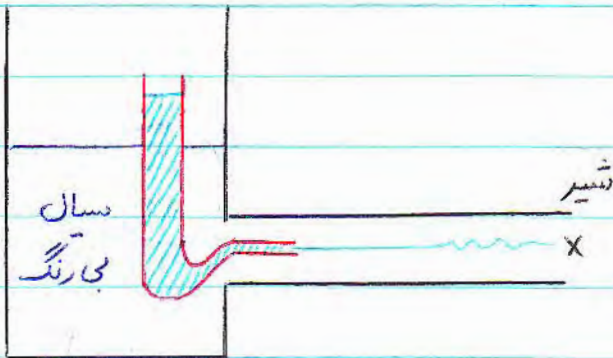
را از بین ببرند . در نتیجه موافق مولکولی (ویسکوزی) داریم

و چون این مکانیزم زمان بر است برای زمانی است که سرعت کم باشد . اگر سرعت زیاد باشد ، زمان

کافی برای مکانیزم ویسکوزی وجود ندارد . بنابراین مکانیزم از بین برنده اختلاف سرعت انجام نمی شود



آزمایش رینولدز:



اگر شیر باز شود، حرکت سیال زنگی در ابتدای مسیر آرام بوده و با دور شدن شیر

دارای اعوجاج می شود. و بعد از اعوجاج سیال زنگی در سیال بدون رنگ محو می شود. هر چه

شیر بیشتر باز شود، اعوجاج در فواصل نزدیکتری شروع می شود.

$$Re = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}} \begin{matrix} \nearrow \text{موجب اغتشاش} \\ \searrow \text{موجب آرام بودن} \end{matrix}$$

عدد Re (رینولدز) بدون بعد است. روابط زیر از لحاظ دیمانسیون بیان شده اند:

$$\left. \begin{aligned} F_i = ma = \rho L^3 \frac{V^2}{L} \quad (\text{اینرسی}) \\ F_v = \tau L^2 = \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu V L \quad (\text{ویسکوز}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

در صورت کسر ρ داریم که مشخصه جرم است. L نیز از روی هندسه مسئله تعیین می شود.

مثلاً در سطح شیبه L ، 4 برابر ضخامت است.

$$\frac{v_z}{v_{z,max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{برای جریان آرام:}$$

$$P_o - P_L = \left(\frac{8\mu L}{\rho \pi R^4}\right) \dot{w}$$

برای جریان turbulent :

$$\frac{\bar{v}_z}{v_{z,max}} \approx \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

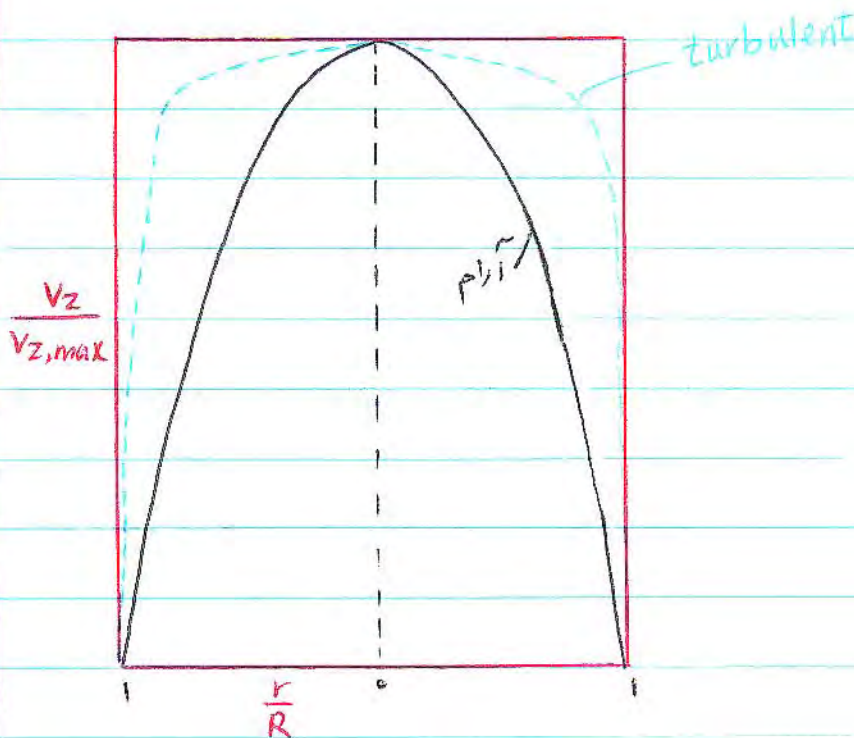
سرعت متوسط زمانی

$$P_o - P_L \approx 0.198 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\mu^{1/4} L}{\rho R^{19/4}}\right) \dot{w}^{\frac{7}{4}}$$

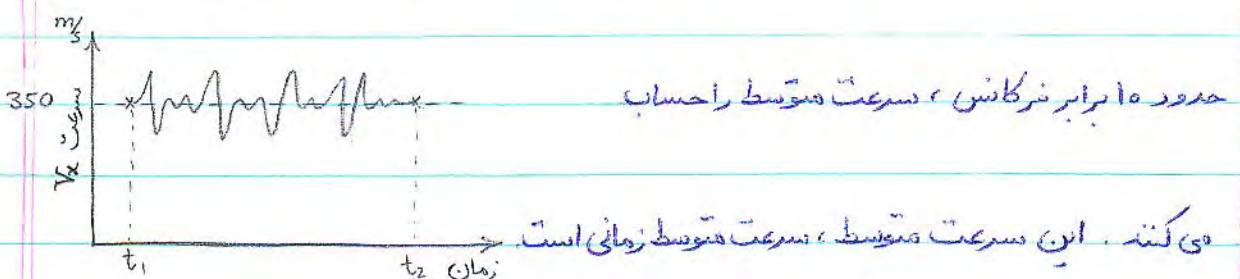
روابط فوق ، تجربی می باشند .

از مقایسه ی روابط ، در W های مختلف ، اونت فشار در جریان turbulent بسیار

جریان آرام است .



از خصوصیات جریان نا آرام این است که در هر لحظه سرعت تغییر می کند . برای رفع این مشکل



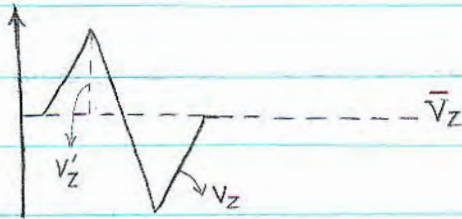
حدود ه برابر فرکانس ، سرعت متوسط را حساب

می کنند . این سرعت متوسط ، سرعت متوسط زمانی است .

$$\bar{V}_x = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V_x dt \quad (\text{Time average velocity})$$

$$\bar{P} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

اگر دامنه‌ی نویسان در نمودار قبلی بیشتر باشد به این معناست که جریان ناآرام تر است.



$$V_z = \bar{V}_z + V_z'$$

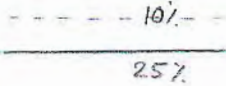
$$\bar{V}_z' = 0$$

$$I = \frac{\sqrt{(V_z')^2}}{\bar{V}_z}$$

10-25%

شدت ناآرام بودن :

شدت توربولنت در مرکز لوله و



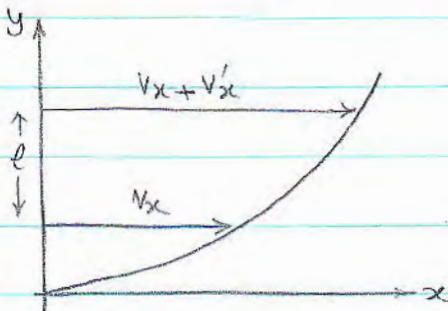
دو باره فرق می‌کند.

تئوری توربولنس پرندل :

مطابق این تئوری در جریان ناآرام برخلاف جریان آرام عامل انتقال موثر است، حرکت نوده‌ای

از اتم‌هاست. حرکت این نوده بصورت ناگهانی است. در جریان آرام فاصله موجود در نمودار را

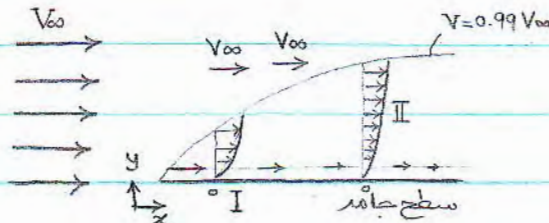
فاصله بین اتمی تعریف کردیم اما در اینجا طول مشخصه (ℓ) را در نظر می‌گیریم که وابسته به ابعاد سیال است.



$$\bar{\tau}_{yx}^t = -\rho \ell \left| \frac{dV_x}{dy} \right|^2$$

لایه های مرزی :

در مجاورت سطح جامد، سرعت لایه های مجاور تا خط فرضی زیر، با گذشت زمان کم می شود.



در I، چون طول (مسافت) کم است

پس گرادیان سرعت نسبت به II بیشتر است.

البته سرعت ابتدایی و انتهای هر دو برابر است (0 - 0.99 V_infinity)

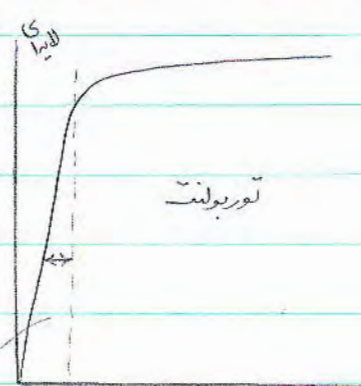
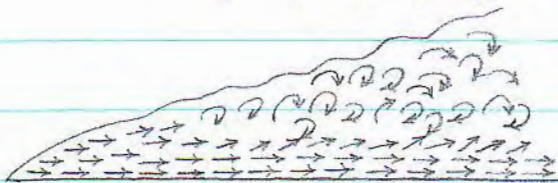
$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

dv_x در لایه مرزی ثابت است (0 - 0.99 V_infinity)

اما dy در x های مختلف فرق می کند.

با توجه به این مطلب، در لایه های نزدیک به دیواره جریان آرام داریم چون τ_{yx} و یا نیروی

ویسکوز بزرگتر است. هم چنین از محل شروع دیواره نیز جریان آرام است:



در جریان آرام نیروی ویسکوز مهم است و در جریان

نا آرام نیروی اینرسی در منطقه گذار هر دو نیرو مهم

است.

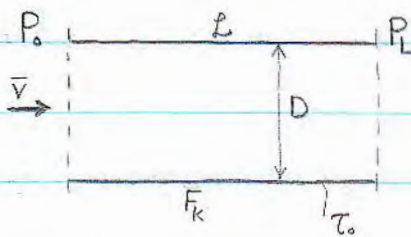
ضرب اصطکاک :

قبلاً تحت عنوان نیروی درگ برای یک گرد بخت شد و نیروی $F_k = 6\pi\mu R V \omega$ بدست آمد

در حالت کلی چه برای جریان آرام و چه ناآرام داریم :

$$* F_k = AKf \quad K: \text{انرژی جنبشی (رواندر حجم)} \quad \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2$$

$$A: \text{سطح} \quad f: \text{ضرب اصطکاک} \quad F_k = (2\pi RL) \times \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 \times f \quad \text{برای نوله}$$



$$F_k = [(P_0 - P_L) + \rho g(h_0 - h_L)] \pi R^2$$

$$= (P_0 - P_L) \pi R^2$$

$$f = \frac{1}{4} \left(\frac{D}{L} \right) \left(\frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2} \right) \quad \text{با حذف } F_k \text{ از دو رابطه فوق داریم:}$$

$$F_k = 2\pi RL \tau_0 \quad \rightarrow \quad f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2}$$

در نوله، هالگن پودیسول رابطه‌ی معادل رابطه‌ی آورد (برای جریان آرام)

$$1 * \bar{v} = \frac{P_0 - P_L}{8\mu L} R^2 \quad 2 * \text{آرام } f = \frac{16}{Re} \quad ; \quad Re < 2100$$

وقتی جریان آرام است نیازی به رابطه‌ی \$f\$ نداریم و رابطه‌ی 1 کافی است اما برای جریان ناآرام

این تعریف مفید است.

روابط زیر تجربی است : (برای لوله های صیقلی)

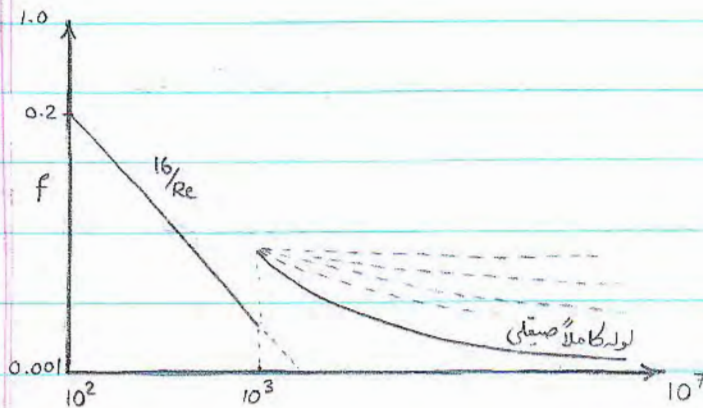
رابطه‌ی بلازیوس : $f = \frac{0.0791}{Re^{1/4}} \quad 2.1 \times 10^3 < Re < 10^5$

رابطه‌ی پرندل : $\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0 \log Re \sqrt{f} - 0.4 \quad 2300 < Re < 4 \times 10^6$

در هر دو رابطه ملاحظه می شود که f تابعی است از عدد رینولدز (Re)

در حالت کلی : $f = f \left(\frac{D}{L}, Re, \frac{k}{D} \text{ or } \frac{\epsilon}{D} \right)$

در جریان های پایا ، $\frac{D}{L}$ تأثیری در جریان ندارد .

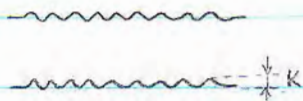


هر چه زبری بیشتر باشد ، f هم بیشتر

خواهد شد و نمودار غیرخطی به سمت بالا

می آید . ملاحظه می شود که در زبری های

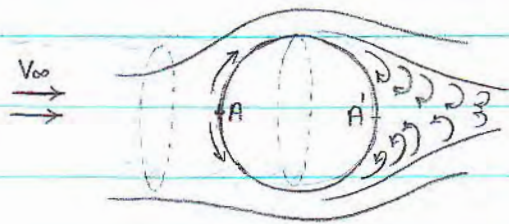
چینی بالا ، f مستقل از Re می شود .



در لوله ها برای زبری K بصورت معادل تعریف می شود :

f کیفیت برون بعد است . (مفهوم فیزیکی ندارد)

برای گره : (قبلاً هم بحث شد)



در A ، سطح عمود بر جریان است در نتیجه

سرعت صفر است . این صفر شدن موجب افزایش

فشار سیال می شود . در نتیجه سیال به سمت بالا می رود . در بالا سرعت max است . در A' دوباره سرعت

صفر است . این کاهش سرعت در سرعت های بالا توسط نیروهای ویسکوزی تا همین دمی شود ، زیرا

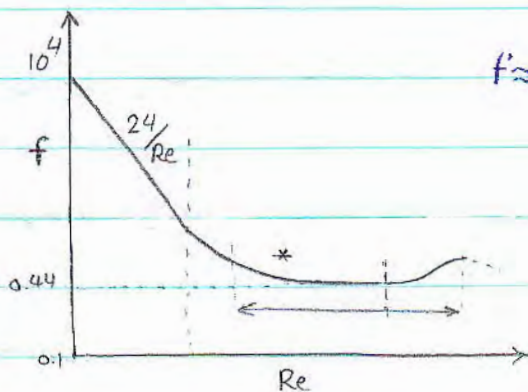
زمان بر است . در نتیجه خود سیال برمی گردد و جریان گردابی ایجاد می کند و مقداری انرژی در این

گرداب ها هدر می رود .

$$F_k = 6\pi\mu R V_\infty \quad \text{فرشی} \quad F_k = f A K = f \pi R^2 \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$

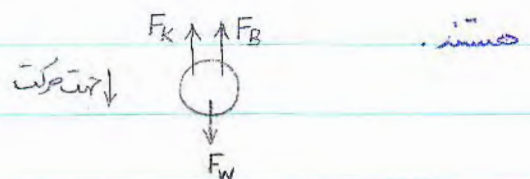
$$\rightarrow f = \frac{24}{Re} \quad Re < 0.1 \quad \text{A : سطح عمود بر جریان است .}$$

$$f = \left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{Re}} + 0.5407 \right)^2 \quad Re < 6000$$



$$f \approx 0.44 \quad 5 \times 10^2 < Re < 10^5$$

F_k و نیروی درگ که قبلاً تعریف شد یکسان



$$F_w = F_B + F_k \rightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{جامد}} g = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{سیال}} g + f \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$

$$v_{\infty} = \left[\frac{8Rg(\rho_s - \rho)}{3f\rho} \right]^{1/2}$$

f تابعی از رینولدز است و برای بیست آوردن رینولدز باید سرعت را بدانیم!

بنابراین از روش سعی و خطا استفاده می کنیم.

مثال ۱. توده های متخلخل: Porous Media or Packed columns:

مثال عملی آن فیلترها هستند. برای حل مسئله از تئوری یک دسته لوله (Tube bundle) -

مصادیقی ارگان استفاده می کنیم. در این روش فرض بر این است که مجموعه ای از لوله داریم که

قطر آن متغیر است. هم چنین بین این لوله ها کانال وجود ندارد. قطر این لوله ها نسبت به قطر کل



چینی کم است.

کل توده $f = \frac{1}{4} \left(\frac{D_p}{L} \right) \frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}_s^2}$

D_p : قطر مؤثر ذرات
↓ particle

سرعت متوسط ظاهری $\bar{v}_s = \frac{Q}{P \times A}$ → Q دبی

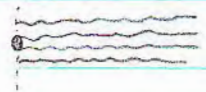
سرعت ظاهری در داخل لوله ها بیشتر است

f_{tube} : برای یک لوله از کل توده

زیرا سطح مقطع کوچکی دارد.

$P_0 - P_L = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 L R_h f_{tube}$
سرعت متوسط واقعی \bar{v} ↓ R_h

شعاع هیدرولیکی $R_h = \frac{A_h}{P_w}$
سطح جریان A_h ↑
محیط ترشیده P_w ↓



$$f = \frac{1}{4} \frac{D_p}{R_h} \frac{\bar{V}^2}{\bar{V}_s^2} f_{tube}$$

$$\omega = \frac{\text{سطح مقطع حفره}}{\text{سطح کل جریان}} = \text{کسر حفره ها}$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{V}_s} > 1 \quad (\text{سرعت واقعی} < \text{سرعت ظاهری})$$

$$\bar{V}_s = \bar{V} \cdot \omega$$

superficial

$$f \text{ کل توده} = \frac{1}{4 \omega^2} \frac{D_p}{R_h} f_{tube}$$

تذکره: اختلاف فشار کل = اختلاف فشار برای یک لوله.

$$R_h = \frac{A_h \times L}{P_w \times L} = \frac{\text{حجم موجود در جریان}}{\text{کل سطح ترشونده}} = \frac{A_h \times L / V}{P_w \times L / V} = \frac{\omega}{S}$$

S : کل سطح ترشونده بر حجم کل

$$S = S_0 (1 - \omega)$$

S_0 : سطح خاص (سطح کل به حجم زره)

$$R_h = \frac{\omega}{S_0 (1 - \omega)}$$

$$S_0 \text{ ذرات کروی} = \frac{(\pi D_p^2)}{(\pi D_p^3/6)} = \frac{6}{D_p} \rightarrow f = \frac{3}{2} \left(\frac{1 - \omega}{\omega^3} \right) f_{tube}$$

هرگز ارام از این لوله ها، بصورت لوله خنثی زیر هستند ← می توان f_{tube} را بدست آورد.

$$f_{tube} = \frac{16}{Re} \quad (\text{برای لوله صاف گرد})$$

الف - جریان آرام

برای لوله عمیق گرد، به جای 16 از $\frac{100}{3}$ استفاده می کنیم.

$$f = \frac{(1 - \omega)^2}{\omega^3} \frac{75}{D_p \rho \bar{V}_s / \mu}$$

با قراردادن این فرمول در اولین رابطه، اختلاف فشار بدست می آید.

$$\frac{P_0 - P_L}{L} = 150 \left(\frac{\mu \bar{V}_s}{D_p^2} \right) \frac{(1 - \omega)^2}{\omega^3}$$

$$\omega < 0.5$$

$$Re < 10$$

$$Re = \frac{D_p \rho \bar{v}_s}{\mu(1-\omega)} < 10$$

معادله فوق، بلیک کوزنی نام دارد.

ب. جریان توربولنت با سرعت زیاد:

با توجه به نمودار $f - Re$ ، در سرعت‌های زیاد، Re مستقل از f (و بالعکس) شده و فقط

$$f_{\text{tube}} = \frac{7}{12} \quad \text{به زبری بستگی دارد.}$$

$$f = \frac{7}{8} \left(\frac{1-\omega}{\omega^3} \right) \Rightarrow \frac{P_o - P_L}{L} = \frac{7}{4} \left(\frac{\rho \bar{v}_s^2}{D_p} \right) \left(\frac{1-\omega}{\omega^3} \right)$$

$$\frac{D_p \rho \bar{v}_s}{\mu(1-\omega)} > 1000$$

معادله بورک - پلوسر

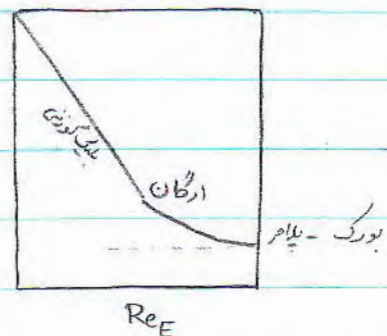
ج. - برای جریان مابین الف و ب:

$$\frac{P_o - P_L}{L} = 150 \left(\frac{\mu \bar{v}_s}{D_p^2} \right) \frac{(1-\omega)^2}{\omega^3} + \frac{7}{4} \left(\frac{\rho \bar{v}_s^2}{D_p} \right) \frac{1-\omega}{\omega^3} \quad \text{معادله ارگان: Ergun eq.}$$

$$0.1 < \frac{D_p \rho \bar{v}_s}{\mu(1-\omega)} < 10^5$$

$$s_o = \frac{6\lambda}{D_o}$$

برای ذرات غیر کروی:

 f_E


$$\lambda = \frac{\text{سطح زره}}{\text{سطح کروی هم حجم آن}}$$

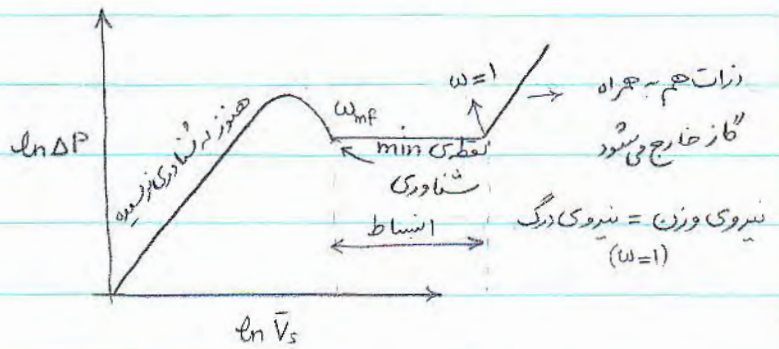
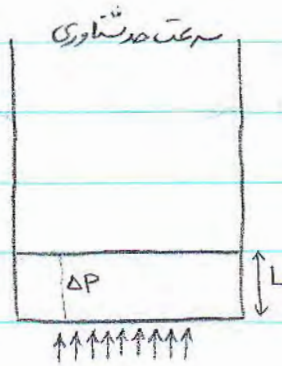
برای کره: $\lambda = 1$

مثال 2. بسترسایل:

یکی از راکتورهای محکم در متالورژی بسترسایل است. در ابتدا یک توده‌ی جامد متراکم در دست داریم

با ایجاد اختلاف فشار و سیال سرعت پیدا می کند. این ΔP با وزن ذرات برابر است \leftarrow سیال

بصورت فشار در می آید \leftarrow عبور گاز راحت تر می شود.



$$\Delta P / L = (\rho_s - \rho) g (1 - \omega)$$

ρ سیال

در حالتیکه ω_{mf} داریم:

$$\frac{\Delta P}{L} = (\rho_s - \rho) g (1 - \omega) = \frac{150 \mu \bar{v}_s \lambda^2 (1 - \omega)}{D_p^2 \omega^3} + \frac{1.75 \rho \bar{v}_s \lambda (1 - \omega)}{D_p \omega^3}$$

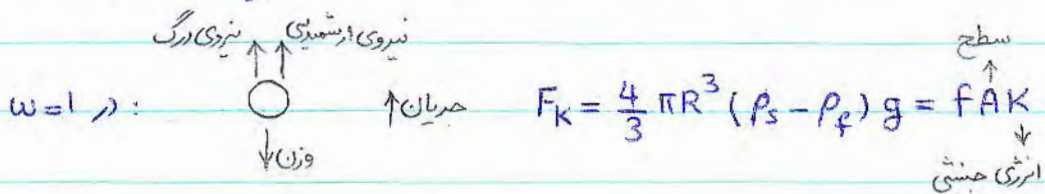
$$\times \frac{D_p \times \rho}{(1 - \omega) \mu^2} \quad ; \quad Re_D = \frac{\rho \bar{v}_s D_p}{\mu} \quad ; \quad Ga = \frac{D_p^3 (\rho_s - \rho) \rho g}{\mu^2}$$

$$\Rightarrow Re_{D/mf} = (1134 + 0.0408 Ga)^{0.5} - 33.7$$

$$\omega_{mf} \approx 0.14$$

$$\lambda = 1$$

$$\omega = 1 \text{ و } \omega_{mf} \text{ : } \omega^{4.7} Ga = 18 Re_D + 2.7 Re_D^{1.687}$$



$$K = \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$v_t = \left[\frac{4 d_p (\rho_s - \rho) g}{3 f \rho} \right]^{0.5}$$

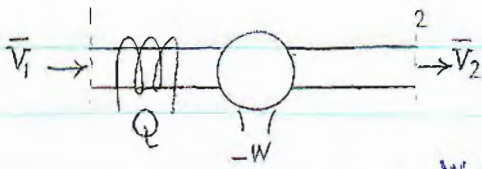
dp: قطر ذرات.

موازنه ماکروسکوپی انرژی (معادله برنولی):

در ابتدا باید قانون بقا را در نظر بگیریم. در این جا بقای مومنتم کاربردی ندارد و باید بقای انرژی

(در ترمودینامیک) را در نظر گرفت. و از این انرژی بخش مکانیکی آنرا جدا می کنیم.

رابطه $\Delta U = Q - W$ برای سیستم بسته است درحالیکه در سیالات سیستم ها باز است.



در سیالات سه نوع کار داریم:

$$W = W_s + W_T + W_{PV \text{ or } P_r}$$

\downarrow کار کشش \downarrow کار اصطکاکی \downarrow کار فشاری یا PV

قانون اول ترمودینامیک برای سیستم باز:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{m}_1 \left(\overset{\substack{\text{بر واحد جرم} \\ \text{ایستایی}}}{h_1 + e_{p_1} + e_{k_1}} \right) - \dot{m}_2 \left(h_2 + e_{p_2} + e_{k_2} \right) + \dot{Q} - (\dot{W}_s + \dot{W}_T)$$

\downarrow پتانسیل \downarrow جنبشی \downarrow سرعت حرارت

\dot{m} : دبی جرمی

\dot{A} : سرعت

در شرایط steady state (پایدار) داریم:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad ; \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

$$\Delta e_p = g \Delta z \quad \text{انرژی پتانسیل}$$

بعبارتی حد جریان ثابت است. مثلاً اگر انرژی جنبشی زیاد شود، یکی از دو تکی دیگر و یا هر

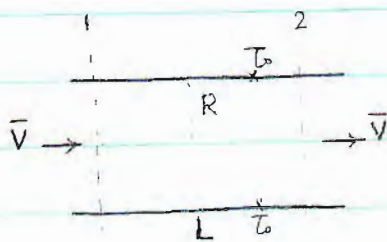
دو کاهش می یابد.

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{V}_2}{g} - \frac{\bar{V}_1}{g} \right] + z_2 - z_1 = h_2 - h_1 = -h_L$$

در شرایطی که اذیت انرژی نداریم، h_L صفر است. اگر جریان ویسکوز باشد ولی بدون تبادل

حرارت و کارشفت، هم چنین تک (ماهم باشد)، خواهیم داشت:

$$h_L = \frac{\omega \tau}{g} = \frac{E_f}{g}$$



برای حالت سادگی:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 \rightarrow \text{شرایط پایدار (steady state)}$$

$$z_2 = z_1 \quad \bar{V}_1 = \bar{V}_2 \quad \rho_2 = \rho_1 \quad (\text{سیال تراکم ناپذیر}) \quad \Delta u = q = W_s = 0$$

در واقع کار اصطکاک موجب افت فشار می شود.

$$\rightarrow \frac{P_2 - P_1}{\rho} = -E_f = -W_\tau = -\frac{\Delta P}{\rho}$$

$$(P_1 - P_2) \pi R^2 = \tau_0 \times 2\pi RL \quad \text{موازنی هوشتم ماکروسکوپی:}$$

$$\rightarrow \Delta P = \tau_0 \frac{2L}{R} \quad \rightarrow \frac{\Delta P}{\rho} = \tau_0 \frac{2L}{\rho R} \quad \rightarrow E_f = W_\tau = \tau_0 \frac{2L}{\rho R}$$

$$\text{ضریب اصطکاک: } f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho \bar{V}^2} \quad \rightarrow E_f = 2f \frac{L}{D} \bar{V}^2 \quad ; \quad D = 2R$$

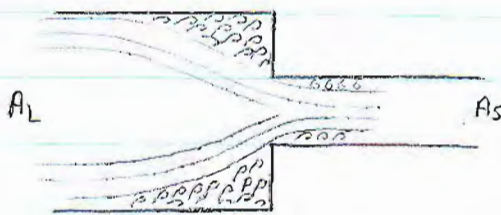
افت اصطکاکی: $f = \frac{16}{Re}$: جریان آرام $\rightarrow E_f = \frac{32\mu\bar{v}L}{D^2\rho}$

برای کلیه مقاطع: $E_f = \frac{1}{2}\bar{v}^2 \frac{L}{R_h} f$

ضریب اصطکاک: $\frac{L}{R_h} \cdot f = e_f$ ، $R_h = \frac{\text{سطح جريان}}{\text{محیط ترشوند}} : \text{شعاع هیدرولیکی}$

$\rightarrow E_f = \frac{1}{2}\bar{v}^2 e_f$

این روابط برای لوله صاف نوشته شده است. اگر تغییر ضخامت داشته باشیم:

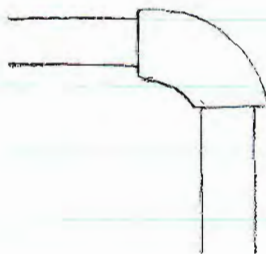


در قسمتی که سطح عمود بر جریان است، سرعت

صفر می شود.

$e_f = 0.45 \left(1 - \frac{A_s}{A_L}\right)$ انقباضی $e_f = \left(1 - \frac{A_s}{A_L}\right)^2$ انبساطی

برای زانویی:

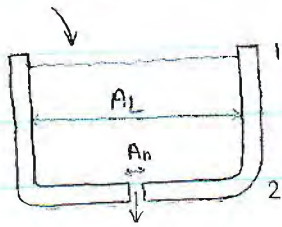


$L_e = \text{طول موثر}$ $\frac{L_e}{D} = 31$

یعنی معادل است با $31 D^{cm}$ لوله صاف.

$E_f = \left(2f \frac{L}{D} + \sum 2f \frac{L_e}{D}\right) \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \sum e_f \bar{v}^2$
 برای خود لوله \quad برای زانویی \quad برای تغییر ضخامت

جریان از پاتیل :



مطلوب ، میزان انرژی هدررفته در اثر تخلیه پاتیل است :

شرایط steady state است پس دبی ورودی = دبی خروجی

هم چنین $P_1 = P_2$ و برابر فشار جواست . اگر انتقادیته باشد : $\Delta P = \rho gh$

چون سطح مقطع 1 خیلی بیشتر از 2 است : $\bar{v}_1 \ll \bar{v}_2$

سرعت پائین آمدن از دیواره ی پاتیل (\bar{v}_1) خیلی کم است پس از اصطکاک ناشی از دیواره

می توان چشم پوشی کرد . بنابراین فقط اصطکاک ناشی از تغییر سطح مقطع داریم :

$$\frac{\bar{v}^2}{2\beta_2} + g\Delta z + E_f = 0 \quad , \quad E_f = \frac{1}{2} e_f \bar{v}^2$$

$$\frac{\bar{v}_2^2}{2} \left[\frac{1}{\beta_2} + e_f \right] + g\Delta z = 0 \quad \bar{v}_2 = \underbrace{\left[\frac{1}{\beta_2} + e_f \right]}_{C_D}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2gh}$$

$$\bar{v}_2(\max) = \sqrt{2gh}$$

h : ارتفاع سیال

$$\bar{v}_2 = C_D \sqrt{2gh}$$

C_D : ضریب تخلیه مخزن

حال اگر دبی ورودی و خروجی باهم مساوی نباشد داریم :

$$\text{دبی جری : } \frac{dw}{dt} = \rho \bar{v}_2 A_n$$

A_n : سطح مقطع پاتیل (سوراخ)

$$\frac{dw}{dt} = \rho A_n C_D \sqrt{2gh}$$

$$\int_{h/w}^{h/w_0} \frac{dw}{\sqrt{2gh}} = \int_0^{t_f} \rho A_n C_D dt$$

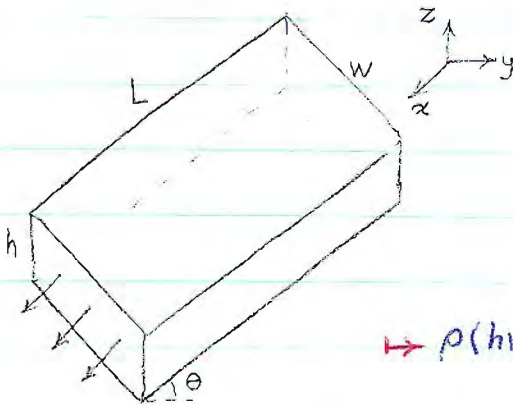
با قراردادن در داخل انگیزه داریم:
$$-\rho \frac{\pi D_L^2}{4} dh = dw \rightarrow$$

$$\rightarrow t_f = \frac{\pi D_L^2}{2 A_n C_D} \left(\frac{h_c}{2g} \right)^{1/2}$$

86.1.28

مثال. جریان روی سطح شیبدار با این تفاوت که جریان نا آرام

است. اما شرایط steady state است یعنی شتاب نداریم.



$$\rho (hwL) g \sin \theta = \tau_0 \underbrace{L (W+2h)}_{\text{سطح ترشونده}}$$

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2}$$

$$\rightarrow \rho (hwL) g \sin \theta = \frac{1}{2} f \rho \bar{v}^2 L (2h+W)$$

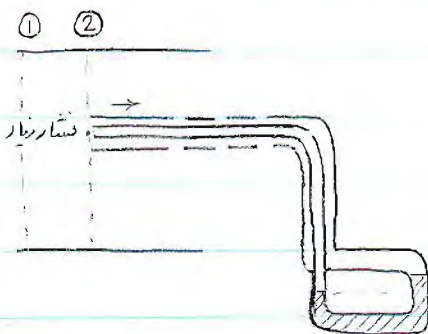
$$= \frac{1}{2} f \rho \bar{v}^2 L \frac{4hw}{De}$$

قطر معادل $De = 4 \times \frac{\text{مساحت سطح مقطع محیط ترشونده}}{2h+W} = \frac{4hw}{2h+W} \rightarrow \bar{v}^2 = \frac{De g \sin \theta}{2f}$

$$\bar{v} = 2 \left(\frac{De^{4/3} g \sin \theta}{f^{1/3}} \right)^{1/2}$$

E: زبری مطلق کانال

از این \bar{v} باید Re را بدست آورد. و بعد ببینیم در زبری مربوطه در نمودار f-Re



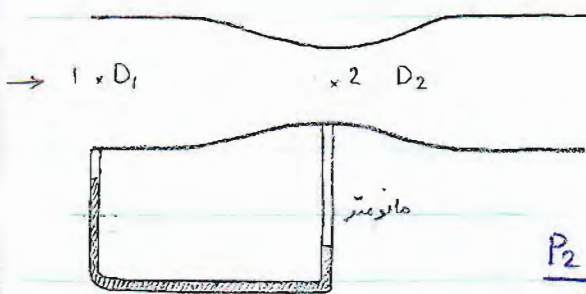
* اوله پیوت: Pitot-static tube

نرخ اولیه. اصطکاک را در نظر نمی گیریم

اصطکاک روی سوراخ‌ها وجود دارد . $\Delta Z = 0$; $\beta = 1$

$$\frac{P_2}{\rho} + \frac{\bar{V}_2^2}{2\beta} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{\bar{V}_1^2}{2\beta} \quad P_2 - P_1 = \rho \frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

$$\bar{V}_1 = C_p \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}} \quad . \text{ Cp برای لولری بیتوت معلوم است .}$$



ونتوری متر:

$$\Delta Z = 0 \quad , \quad \beta = 1$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{\bar{V}_2^2}{2} - \frac{\bar{V}_1^2}{2} = 0$$

$$\text{بقای جرم : } \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \quad \rightarrow \bar{V}_2 = \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right)} \right]^{1/2}$$

چون افت فشار ناشی از اصطکاک است ، یک ضریبی در رابطه قرار می‌گیرد .

$$\bar{V}_2 = \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right)} \right]^{0.5} \times C_D \quad C_D : \text{ ضریب خروج}$$

«انتقال گرما»

مکانیزم‌های اصلی انتقال حرارت :

1- هدایت حرارتی (مکانیزم مولکولی) *molecular heat transport (Conduction)*

هم برای سیالات و هم برای جامدات وجود دارد .

2- انتقال حرارت جابجایی (همرفتی) *Convective heat transport*

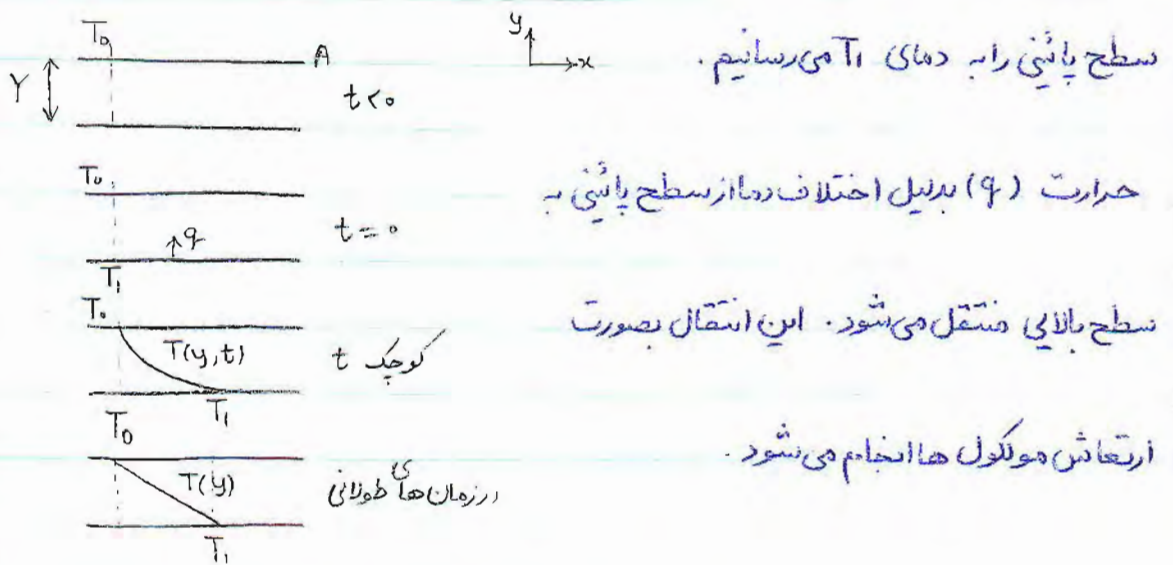
انتقال حرارت نفوذی: که مخلوطی از مورد 1 و 2 است.

diffusive heat transport.

3- انتقال حرارت تابشی: نیازی به محیط مادی ندارد. Radiative heat transport.

قانون هدایت حرارتی فوری:

سطح بالایی و پائینی جسم در زمان های $t < 0$ ، هم دمای T_0 است. بصورت ناگهانی



$$Q \propto A \frac{\Delta T}{Y} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{A} = q = k \frac{\Delta T}{Y}$$

سرعت حرارت

$$\Rightarrow q = -k \frac{dT}{dy} \quad \text{قانون انتقال حرارت فوری:}$$

از پائین به بالا، $\frac{dT}{dy}$ منفی است. اما q در جهت y مثبت (بالا) مثبت است. در نتیجه

علامت منفی می‌آید.

↑ شار حرارت

$$q_y = -k \frac{dT}{dy}$$

قانون هدایت حرارتی فوری:

$$\text{SI: } q: \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$k: \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

$$\text{c.g.s: } q: \frac{\text{cal}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}$$

$$k: \frac{\text{cal}}{\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$q = -k \nabla T$$

معادله‌ی فوق را می‌توان بصورت برداری نیز نوشت:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right) \quad \text{تعریف نفوذ حرارتی:}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right) \quad \text{نفوذ مومنتوم:}$$

عدد پرندل را نیز چنین تعریف می‌کنیم: $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ این عدد بدون بعد است.

اگر این عدد خیلی کم باشد یعنی نفوذ حرارتی خیلی بیشتر از نفوذ مومنتوم است. مثل فلزات که

این عدد کوچک است. $Pr(\text{Hg}) = 0.03$ $Pr(\text{H}_2\text{O}) = 6$ $Pr(\text{O}_2) = 0.7$ (W) سرعت انتقال حرارت: $q \times A = Q$ ← شار حرارتی

| | دما ($^{\circ}\text{K}$) | k | دما ($^{\circ}\text{K}$) | k | |
|--------------------|----------------------------|-------|----------------------------|--------|-----|
| O ₂ { | 200 | 0.018 | Cu { | 291 | 384 |
| | 300 | 0.022 | | شیشه { | |
| H ₂ O { | 300 | 0.61 | | | |
| | 400 | 0.69 | | | |
| Hg { | 273 | 8.2 | | | |
| | 473 | 12.3 | | | |

در نتیجه بهترین عایق‌ها، گازها هستند.

با توجه به قانون هدایت فوری داریم:

$$\int q_y dy = - \int_{T_1}^{T_2} k dT$$

اما خود k تابعی از دماست. بنابراین در محدوده $T_1 - T_2$ k_m (متوسط) در نظر

می‌گیریم.

$$\rightarrow \int q dy = - \int_{T_1}^{T_2} k dT = k_m (T_2 - T_1)$$

برای انتقال حرارت در جامدات به کتاب گانگنر مراجعه شود.

مکانیزم‌های انتقال حرارت در جامدات:

2- الکترون آزاد

1- ارتعاشات لاتیج

انتقال حرارت در جامدات: فلزات - پلی‌کریستال - آمورف - متخلخل

* برای فلزات با افزایش دما، k کاهش می‌یابد. و برای بسیاری از آلیاژها و غیرفلزات، با افزایش

دما، k افزایش می‌یابد.

$$\frac{k}{k_e T} = cte$$

k_e ضریب هدایت الکتریکی (در نظر می‌گیریم):

$$cte = 22.29 \times 10^{-9} \left(\frac{\text{Volt}^2}{\text{K}^2} \right)$$

* در گازها: $k = f(T)$ ، $k \neq f(P)$ (در فشارهای کم (کمتر از 10 atm))

$$k = \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi d^2} C_v$$

ثابت بولتزمن k
 حجم اتمی \uparrow
 ظرفیت حرارتی در حجم ثابت C_v
 قطر اتمی d

* با استفاده از تئوری اتمی برای گازها:

$$k \propto T^{0.5}$$

$$k \neq f(P)$$

$$k = 1.989 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{T}{M}} \rightarrow \text{جرم اتمی}$$

* رابطه‌ی دقیقتر :

$$\sigma^2 \Omega k \rightarrow \text{پارامتر لئونارد جونز}$$

قطر مشخصه اتمی

مکانیزم انتقال حرارت در مایعات مثل جامدات است. اما معادله‌ی زیر بصورت تجربی

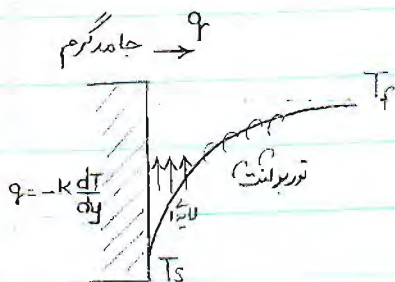
$$k = 2.8 V_s \left[\frac{N_c}{\hat{V}} \right]^{2/3}$$

بیست آمده است :

\hat{V} : حجم مولار

V_s : سرعت صوت در مایع

انتقال حرارت توسط جابجایی :



قانون سرد شدن نیوتنی :

$$q = h(T_s - T_f)$$

h (heat transfer Coefficient) ضریب انتقال حرارتی

در پاشش سیال گرم شدن و منبسط می‌شود. بنابراین یک جریان روبه بالا داریم.

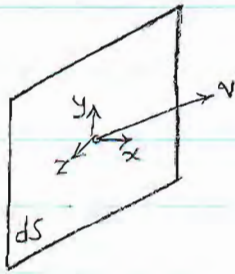
h هم تابع جنس سیال است و هم نحوه‌ی انتقال حرارت. h می‌تواند به نسبت به سردی

اینصورت چون q نمی‌تواند به باشد $T_s = T_f$. یعنی سیال و جامد همدمایی شوند.

انتقال اشعری :

یک سیال با سرعت v از سطح ds عبور می‌کند. این سیال مقداری اشعری دارد.

ds عمود بر x است.



$$E: \left(\frac{\text{انرژی}}{\text{حجم}} \right) \times \left(\frac{\text{حجم}}{\text{زمان}} \right) \times v \times ds = Q \quad \text{سرعت انتقال انرژی}$$

↓
(بی حجمی)

$$e: \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) v$$

کاری که سیال انجام می دهد: $dw = F \cdot dr \rightarrow \frac{dw}{dt} = F \frac{dr}{dt} = F \cdot v$

$$\frac{\div A}{\rightarrow} e = \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) v + Pv + [\tau \cdot v] + q$$

$\frac{F}{A}$ - تنش که دوگونه است: فشاری و برشی

$$e = \left(\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 + \rho \hat{H} \right) v + [\tau \cdot v] + q$$

برای جامدات $v=0$ در نتیجه: $e = q$

موازنه انرژی:

سرعت انباشتی انرژی = سرعت تولید انرژی + سرعت انرژی خروجی - سرعت انرژی ورودی *

در شرایط پایدار (S.S)، سرعت انباشتی انرژی صفر است.

منابع تولید انرژی عبارتند از: الکتریکی - شیمیایی - هسته‌ای - ویسکوز

شرایط مرزی جهت حل معادلات انتقال حرارت:

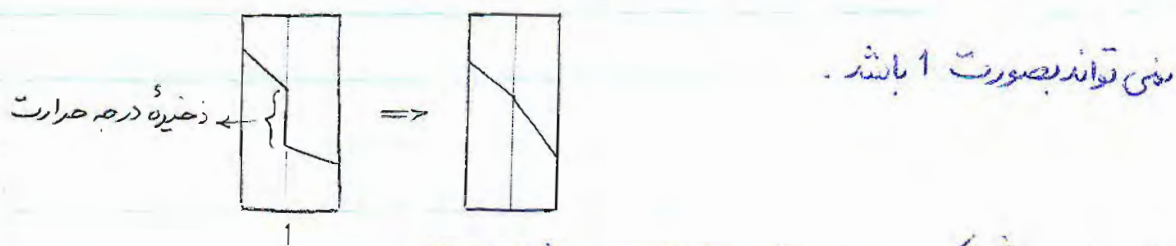
۱- درجه حرارت در سطح تماس مشخص $(T = T_0)$

$$q = -k \frac{dT}{dx} = q_0 \quad (T = T_0)$$

2- شار حرارتی در سطح تماس مشخص $(q = q_0)$

3- در فصل مشترک پیوستگی دما و شار حرارت.

دما در حجم می تواند ذخیره نشود نه در سطح. یعنی گرادیان اختلاف درجه حرارت



4- فصل مشترک جامد و سیال - قانون سرد شدن نیوتنی

$$q = h(T_c - T_b)$$

↑
دمای سیال (T_p, T_{∞})

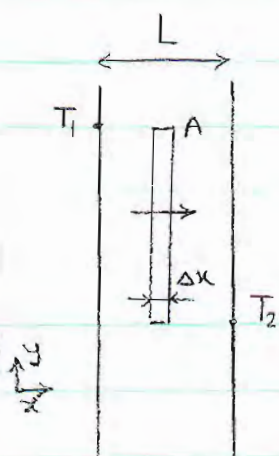
برای جامدات موازنه انرژی به موازنه حرارت تبدیل می شود. چون سرعت در جامدات

صفر است.

- انتقال حرارت در صفحه بینهایت: (S.S.)

جهت انتقال حرارت در جهت اختلاف درجه

حرارت است. از گرم به سرد.



$$q|_x \cdot A - q|_{x+\Delta x} \cdot A = 0 \Rightarrow \frac{-A \cdot \Delta x \cdot q|_{x+\Delta x} - q|_x \cdot \Delta x}{\Delta x} = 0$$

$\Delta x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{dq_x}{dx} = 0 \Rightarrow q_x = C_1$$

با سرعت یکنواخت گرما مبادله می کند.

در هر سطح، هر چه انرژی وارد شود، همانقدر خارج می شود. (ذخیره انرژی در حالت S.S نداریم)

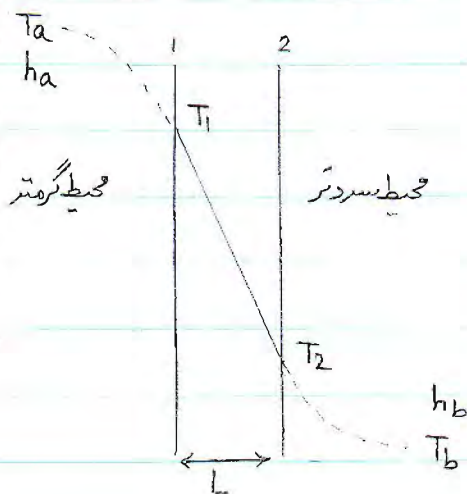
$$q_x = -k \frac{dT}{dx} = C_1 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{C_1}{k} \Rightarrow T = -\frac{C_1}{k}x + C_2$$

$$\text{B.C.1: } x=0 \Rightarrow T=T_1 \Rightarrow C_2=T_1$$

$$\text{B.C.2: } x=L \Rightarrow T=T_2 \Rightarrow T_2 = -\frac{C_1}{k}L + T_1$$

$$\Rightarrow T = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{L} \Rightarrow \frac{x}{L} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$\Rightarrow q_x = k \frac{T_1 - T_2}{L}$$



$$q = k \frac{T_1 - T_2}{L} = q_0 \quad \text{از مسئله قبل:}$$

q_0 مقدار گرمای وارد شده به صفحه‌ی 1 و مقدار

گرمای خارج شده از سطح 2 است.

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = ha(T_a - T_1) \quad \text{از گرم به سرد} \\ q_0 = hb(T_2 - T_b) \quad \text{" "} \end{array} \right.$$

$$T_1 - T_2 = \frac{q_0 L}{k} \quad , \quad T_a - T_1 = \frac{q_0}{ha} \quad , \quad T_2 - T_b = \frac{q_0}{hb}$$

$$T_a - T_b = q_0 \left(\frac{L}{k} + \frac{1}{ha} + \frac{1}{hb} \right) \quad \text{با جمع سه معادله‌ی بالا:}$$

$$q_0 = \frac{T_a - T_b}{\frac{L}{k} + \frac{1}{ha} + \frac{1}{hb}}$$

ضرایب انتقال حرارت در گاز

نسبت به مسئله قبل، ضرایب حرارت در گاز

اصافه شده است.

$$T_1 = T_a - \frac{q}{h_a} \quad , \quad T_2 = T_b + \frac{q}{h_b}$$

تعریف: U : ضریب انتقال حرارت کلی: $\frac{1}{U} = \frac{L}{k} + \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}$

$$\rightarrow q = U(T_a - T_b)$$

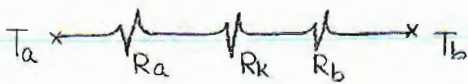
تعریف ضریب مقاومت حرارتی: $R_k = \frac{L}{kA}$ (جامد)

برای سیال‌های دو طرف: $R_{ha} = \frac{1}{h_a A}$ ؛ $R_{hb} = \frac{1}{h_b A}$

حل مسئله به روش دوم:

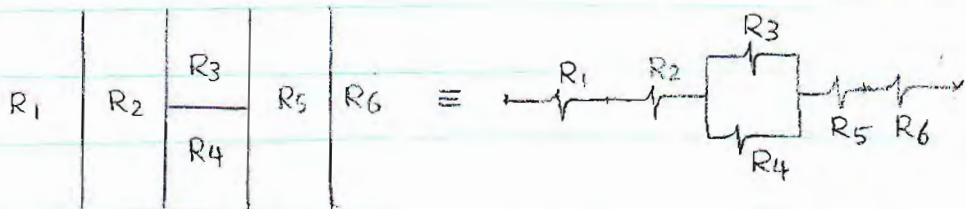
$$q = \frac{(T_a - T_b)/A}{\frac{1}{h_a A} + \frac{1}{h_b A} + \frac{L}{kA}} \Rightarrow Q = \frac{T_a - T_b}{R_k + R_a + R_b}$$

$$\Rightarrow \frac{T_a - T_b}{Q} = R_k + R_a + R_b$$



دقیقاً مثل سه مقاومت سری است:

این روش برای وقتی است که تعداد سیالات زیاد باشد.

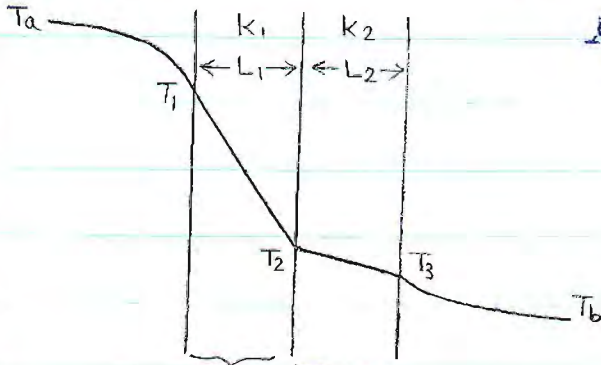


دیواره‌های مرکب: (S.S.)

کاربرد: کوره‌ها و راکتورها.

86.2.4

P(66)



مثل مسئله قبلی است فقط یک شرط

مرزی اضافه می شود.

هدایت حرارتی کم است و مقاومت زیاد
شیب حرارتی کم است
هدایت حرارتی زیاد است

$$-Q_0 = k_1 A \frac{T_1 - T_2}{L_1}$$

$$-Q_0 = k_2 A \frac{T_2 - T_3}{L_2}$$

$$-Q_0 = h_a A (T_a - T_1)$$

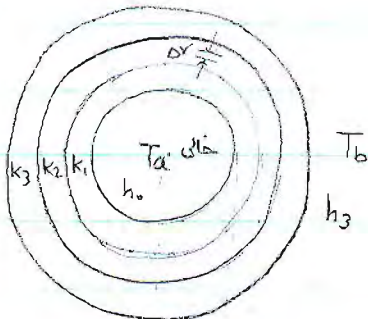
$$-Q_0 = h_b A (T_3 - T_b) \Rightarrow Q = \frac{A(T_a - T_b)}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \sum \frac{L_i}{k_i}} = UA(T_a - T_b)$$

$$T_1 = T_a - \frac{Q}{h_a \cdot A}$$

$$\frac{T_a - T_b}{Q} = R_{ha} + R_{hb} + \sum R_{ki}$$

86.2.9

دیوار مرکب استوانه ای:

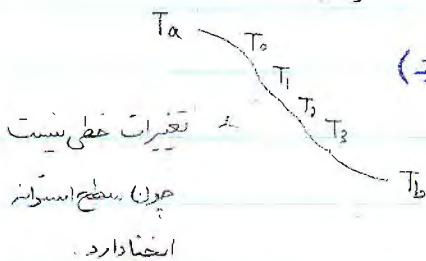


L = طول استوانه

$$Q_r = Q_{r+\Delta r} \Rightarrow 2\pi r L q_r - 2\pi r L q_{r+\Delta r} = 0$$

یعنی Q تغییر نمی کند. اما شار آن با r متغیر است

و با بزرگ شدن r، q کم می شود. (سطح زیاد می شود)



$$\Rightarrow \frac{r q_r |_{r+\Delta r} - r q_r |_r}{\Delta r} = 0 \Rightarrow \frac{d(r q_r)}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow r q_r = C_1 \Rightarrow q_r = \frac{C_1}{r} \quad C_1 = r_0 q_0$$

یادآوری: در مسابلی برق:

$$\frac{\text{سرعت تولید حرارت}}{\text{حجم}} = \frac{RI'^2}{A.L}$$

$$I': \text{ شدت جریان} \quad I: \text{ شدت جریان به واحد سطح} \quad R = \frac{L}{keA}$$

$$2\pi rL q_r - 2\pi rL q_{r+\Delta r} + Se \cdot 2\pi rL \Delta r = 0 \quad \text{بایک المان استوانه ای:}$$

$$\Rightarrow \frac{d(rq_r)}{dr} = Se \cdot r \quad \rightarrow \quad rq_r = \frac{1}{2} Se r^2 + C_1$$

$$\rightarrow q_r = \frac{1}{2} Se \cdot r + \frac{C_1}{r} \quad \text{و} \quad q = -k \frac{dT}{dr}$$

$$\rightarrow T = -\frac{Se}{4k} r^2 - \frac{C_1}{k} \ln r + C_2$$

$$r=R : T = T_0 \quad T_0 = \text{درجه حرارت دمای سطح بیرونی سیم}$$

در غیر این صورت معادله سرد شدن نیوتنی را می نویسیم.

$$r=0 \rightarrow T \rightarrow \infty \quad \rightarrow C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = T_0 + \frac{Se R^2}{4k}$$

$$\rightarrow T - T_0 = \frac{Se R^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad ; \quad q_r = \frac{Se}{2} r$$

$$T_{\max} - T_0 = \frac{Se R^2}{4k} \quad ; \quad \langle T \rangle - T_0 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R (T - T_0) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{Se R^2}{8k}$$

$$\rightarrow \langle T \rangle - T_0 = \frac{1}{2} (T_{\max} - T_0)$$

$$- \frac{dT}{dr} r k_1 = r_0 q_0 \quad \text{I} \quad , \quad - r k_2 \frac{dT}{dr} = r_0 q_0 \quad \text{II} \quad , \quad - r k_3 \frac{dT}{dr} = r_0 q_0 \quad \text{III}$$

داخل: $(T_a - T_0) h_0 = q_0 \quad \text{IV}$ بیرون: $(T_3 - T_b) h_3 = q_3 \quad \text{V}$

$$r_0 q_0 = C = r_3 q_3 \quad \Rightarrow \quad q_3 = \frac{r_0}{r_3} q_0$$

$$\text{I. } (T_0 - T_1) = r_0 q_0 / k_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) \quad \text{II. } (T_1 - T_2) = \frac{r_0 q_0}{k_2} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$\text{III. } (T_2 - T_3) = \frac{r_0 q_0}{k_3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)$$

$$\rightarrow \text{با جمع این معادله ها: } r_0 q_0 = (T_a - T_b) / \left\{ \frac{1}{r_0 h_0} + \frac{1}{r_3 h_3} + \frac{\ln(r_1/r_0)}{k_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k_2} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{k_3} \right\}$$

اگر طول در $2\pi L$ ضرب شوند، Q بدست می آید.

$$Q = 2\pi r L q = U_0 2\pi L (T_a - T_b) \Rightarrow \frac{T_a - T_b}{Q} = \frac{1}{2\pi L} \left(\frac{1}{r_0 h_0} + \frac{1}{r_3 h_3} + \dots \right)$$

$$\frac{T_a - T_b}{Q} = R_{h_0} + R_{h_3} + \sum_i R_{k_i} \quad ; \quad R_{h_i} = \frac{1}{2\pi r_i h_i L}$$

$$R_{k_i} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_i L}$$

از فرمول های این مسئله نگ جفتی بودن انتقال حرارت است. در واقع می توان شبیه سازی به مدار الکتریکی کرد: $T_a - T_b = \Delta V$ ، $Q = I$ ، $R_{h_i} = R$

از فرض های این مسئله نگ جفتی بودن انتقال حرارت است.



سیم استوانه ای:

$$\frac{\text{سرعت تولید حرارت}}{\text{حجم}} = Se = \frac{\bar{I}^2}{k_e}$$

معادله کلی انتقال حرارت تک بعدی:

سرعت انباشتی = سرعت تولید + سرعت خروج - سرعت ورود

$$Aq_x - Aq_{x+\Delta x} + A \overset{Q_v}{\Delta x} = A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot c_p \frac{dT}{dt} \quad x = \text{جهت جریان}$$

$$\rightarrow -\frac{dq}{dx} + Q_v = \rho c_p \frac{dT}{dt} \quad \text{فوری}$$

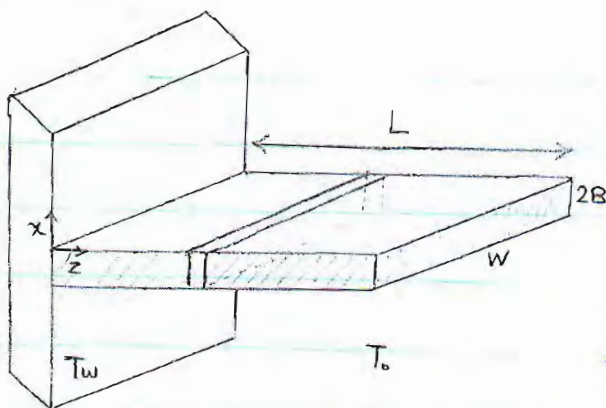
$$\rightarrow k \frac{d^2 T}{dx^2} + Q_v = \rho c_p \frac{dT}{dt}$$

تخت: $\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{k}{\rho c_p}}_{\alpha \text{ نفوذ حرارتی}} \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{Q_v}{\rho c_p}$

استوانه و کره: $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r^n} \frac{d}{dr} \left(r^n \frac{dT}{dr} \right) + \frac{Q_v}{\rho c_p}$

انتقال حرارت در پدهای سردکننده: (Cooling Fin)

از فلزی استفاده می شود که هدایت حرارتی خوبی دارد مثل مس و Al و Cu.



در واقع $T = T(x, y, z)$ اما ما آن گیری در

نم بعد شکل است. T بیشتر تابع z

است. پس در جهات دیگر تابعیت وجود

ندارد. در سطوح هاشور خورده برای سادگی کار فرض می کنیم انتقال حرارت نداریم.

$$q_z \cdot 2BW - q_{z+\Delta z} \cdot 2BW - 2\Delta z Wh \underbrace{(T - T_0)}_q = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{dq_z}{dz} = \frac{h}{B} (T - T_0) \quad \text{و} \quad q_z = -k \frac{dT}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{h}{Bk} (T - T_0)$$

$$\text{B.C.1: } z=0 \rightarrow T = T_w$$

$$\text{B.C.2: } z=L \rightarrow \frac{dT}{dz} = 0$$

B.C.2 از آنجایی که انتگرال عایق فرض کردیم

برای اینکه پارامترهای کسری داشته باشیم از پارامترهای بیرون بعد استفاده می‌کنیم مثل Re

ضریب اصطکاک، عدد پریندل. در اینجا هم از دمای بیرون استفاده می‌کنیم:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0} \quad \text{و} \quad \zeta = \frac{z}{L} \quad \text{مختصات بیرون بعد}$$

$$T = (T_w - T_0)\theta + T_0$$

$$dT = (T_w - T_0) d\theta$$

$$d^2 T = (T_w - T_0) d^2 \theta$$

$$z = L\zeta \rightarrow dz = L d\zeta$$

$$(dz)^2 = (L d\zeta)^2$$

$$d^2 z = L^2 d^2 \zeta \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} = \frac{hL^2}{kB} \theta \quad \text{و} \quad N^2 = \frac{hL^2}{kB}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} = N^2 \theta$$

$$\Rightarrow \theta = C_1 \cosh N\zeta + C_2 \sinh N\zeta$$

$$\text{B.C.1: } \zeta=0 \quad \text{و} \quad \theta=1$$

$$\text{B.C.2: } \zeta=1 \quad \text{و} \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 1$$

$$C_2 = -\tanh N$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\cosh N(1-\zeta)}{\cosh N}$$

$$Q = \int q \, dA = \int h(T-T_0) \, dA = \int_0^W \int_0^L h(T-T_0) \, dz \, dy$$

$$= \int_0^1 \theta \, d\zeta$$

چک شود

$$\eta = \frac{\text{حرارت دفعی - واقعی}}{\text{حرارت دفعی - ایده آل}} = \frac{\int_0^W \int_0^L h(T-T_0) \, dz \, dy}{\int_0^W \int_0^L h(T_w-T_0) \, dz \, dy} = \frac{\tanh N}{N}$$

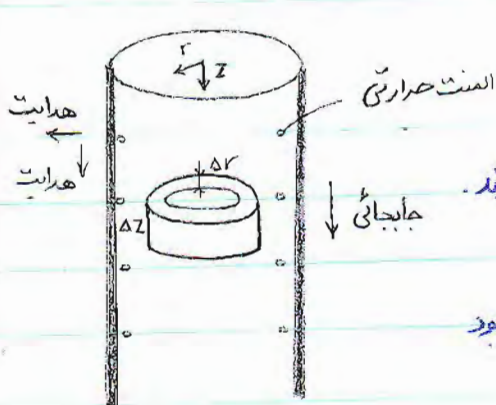
از $z=0$ تا $z=L$ ، درجه حرارت کم می شود مثلاً : $100 - T_w - 80 - 60 - 40$

اما $T_0 = 20$ است .

کنوکسیون (هسرفت) طبیعی - اجباری : (Natural-Forced Convection)

کنوکسیون اجباری برای لوله :

در حالت Steady state ، هم سرعت و هم دما با زمان تغییر نمی کند .



حرکت خود سیال موجب انتقال جابجایی می شود .

اگر سیال ساکن باشد ، دو مکانیزم دیگر هنوز وجود دارند .

حرکت سیال لایه ای است و در جهت r حرکت سیال وجود

ندارد .

$$2\pi r \Delta z q_r - 2\pi (r+\Delta r) \Delta z q_{r+\Delta r}$$

در جهت r :

حجمت z : هم جابجائی داریم و هم هدایت :

$$0 = \underbrace{2\pi r \Delta r q_z}_{\text{هدایت}} - \underbrace{2\pi r \Delta r q_{z+\Delta z}}_{\text{جابجائی}} + 2\pi r \Delta r v_z \rho H|_z - 2\pi r \Delta r \rho H|_{z+\Delta z}$$

چون شرایط پایدار است ، تغییرات انرژی مکانیکی نداریم . از بالا به پایین انتقالی زیاد می شود .

$$H : \frac{\text{انرژی}}{\text{حجم}} \quad Q : \frac{\text{انرژی}}{\text{زمان}}$$

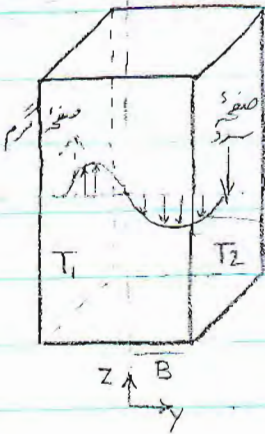
$$\Rightarrow \frac{\partial(rq_r)}{\partial r} + r \frac{\partial q_z}{\partial z} + r \rho v_z \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

$$q_r = -k \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = c_p \frac{\partial T}{\partial z} \quad , \quad q_z = -k \frac{dT}{dz}$$

$$\Rightarrow v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

کنوکسیون طبیعی:



$$v_x = v_y = 0 \quad v_z = v_z(y)$$

$$T(y) \quad \text{در جهت } y, \text{ هدایت داریم}$$

یعنی q_y . در جهت z ، هدایت و جابجایی داریم .

چون سرعت کم است (ΔT کم است) از حدمات $\tau \cdot V$ در جهت z صرف نظر می کنیم .

$$-\frac{dq_y}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad k \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$$

B.C.1: $y = -B \rightarrow T = T_1$

$y = +B \rightarrow T = T_2$

$$\int \Rightarrow T = \frac{c_1}{k} y + c_2$$

$$T = \bar{T} - \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{B} y \quad ; \quad \bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

از خصوصیات کنوکسیون طبیعی این است که حرکت سیال وابسته به تغییرات دماست .

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} - \rho g_z$$

جهت محور z خلاف z است .

معادله ناویر استوکس:

ρ تابعی از درجه حرارت است . پس بسط بتیلور

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = \mu \frac{d^2 v_z}{dy^2}$$

را حول یک درجه حرارت می نویسیم .

$$\bar{T}: \rho = \rho|_{T=\bar{T}} + \frac{d\rho}{dT}|_{T=\bar{T}} (T - \bar{T}) + \dots$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_P \quad \text{ضریب انبساط حرارتی:}$$

$$\Rightarrow \rho = \bar{\rho} - \bar{\rho} \beta (T - \bar{T})$$

$$\Rightarrow \mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{dP}{dz} + \bar{\rho}g - \bar{\rho}g\beta(T - \bar{T}) \quad ; \quad T = \bar{T} - \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{B} y$$

$$\Rightarrow \mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \left(\frac{dP}{dz} + \bar{\rho}g \right) + \frac{1}{2} \bar{\rho}g\beta \frac{\Delta T}{B} y$$

B.C.1: $y = -B \rightarrow v_z = 0$ * B.C.2: $y = +B \rightarrow v_z = 0$

$$\Rightarrow v_z = \frac{(\bar{\rho}g\beta\Delta T)}{12\mu} B^2 \left[\left(\frac{y}{B} \right)^3 - \left(\frac{y}{B} \right) \right] + \frac{B^2}{12\mu} \left(\frac{dP}{dz} + \bar{\rho}g \right) \left[\left(\frac{y}{B} \right)^2 - 1 \right]$$

دبی کل صفر است چون سیستم بسته است. هر چه در بالا می رود، همانقدر پائین می آید.

$$\int_{-B}^{+B} \rho v_z dy = 0$$

ΔT کوچک باشد

با این فرض که $\Delta T^2 = 0$ ، اگر نخواهد دبی جری صفر باشد باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\frac{dP}{dz} + \bar{\rho}g = 0$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{\bar{\rho}g\beta\Delta T}{12\mu} B^2 \left[\left(\frac{y}{B} \right)^3 - \left(\frac{y}{B} \right) \right]$$

سرعت متوسط از $-B$ تا B صفر است.

$$B.C.0: \langle v_z \rangle = \frac{\int_0^B v_z dy}{\int_0^B dy} = \frac{\bar{\rho}g\beta\Delta T B^2}{48\mu}$$

$$\frac{v}{y} = \frac{y}{B}$$

نصورت بدون بعد:

$$\frac{v}{v_z} = \frac{B v_z \rho}{\mu}$$

$$\frac{v}{v_z} = \frac{\bar{\rho}^2 g \beta B^3 \Delta T}{12 \mu^2} (y^3 - y)$$

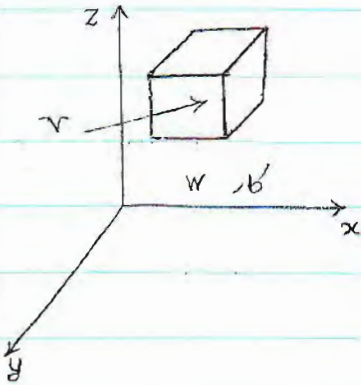
$$Gr = \frac{\bar{\rho}^2 g \beta \Delta T B^3}{\mu^2} = \frac{\bar{\rho} g B^3 \Delta \rho}{\mu^2} \quad \Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 = \bar{\rho} - \bar{\rho} \beta (T - \bar{T})$$

عدد Grashof نسبت دینامیک شناوری به ویسکوز است.

$$Nu = f(Re, Pr) \text{ اجباری}$$

$$Nu = f(Gr, Pr) \text{ طبیعی}$$

معادله انرژی:



اختلاف سرعت درونی جرمی = سرعت انباشتن انرژی
(همیشگی و داخلی) انرژی توسط جابجایی

کار انجام شده توسط سرعت کار انجام شده + انرژی بر روی سیستم + انرژی توسط هدایت + اختلاف سرعت درونی - جرمی

$$\Rightarrow \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) = \Delta y \Delta z (e|_x - e|_{x+\Delta x})$$

$$+ \Delta x \Delta z (e|_y - e|_{y+\Delta y}) + \dots + \rho \Delta x \Delta y \Delta z (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) = - (\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) v) - (\nabla \cdot q)$$

$$- (\nabla \cdot \rho v) - \nabla \cdot (\tau \cdot v) + \rho [v \cdot g]$$

$$u = H - \frac{P}{\rho} \rightarrow \rho c_p \frac{DT}{Dt} = - (\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla v) - \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_P \frac{DP}{Dt} *$$

* معادله تعالی

فرم های خاص معادله انرژی:

$$\frac{\partial \ln P}{\partial T} = -1$$

۱- گاز ایده آل:

$$\Rightarrow \rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - P (\nabla \cdot v)$$

86. 2. 23

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + \dots$$

2 - سیال در فشار ثابت یا دانسیته‌ی ثابت:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$$

3 - جامد:

معادله‌ی بوزنیک (تقریب بوزنیک) کئوکیسون طبیعی:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = (-\nabla P + \bar{\rho} g) - (\nabla \cdot \tau) - \bar{\rho} g \beta (T - \bar{T})$$

در کئوکیسون طبیعی ما چیز است.

آنالیز ابعادی:

قضیه π یا کینگم:

n : متغیر \leftarrow m : آحاد اصلی \leftarrow $n-m$: گروه بدون بعد

سیال در لوله: $h: (\bar{v}, \rho, k, \mu, c_p, D)$

θ : زمان - M : جرم - T : دما - L : طول

$\rho: ML^{-3}$ - $D: L$ - $\bar{v}: L\theta^{-1}$ - $c_p: L^2\theta^{-2}T^{-1}$

$\mu: ML^{-1}\theta^{-1}$ - $k: ML\theta^{-3}T^{-1}$ - $h: M\theta^{-3}T^{-1}$

$n=7$ \leftarrow $m=4$ \rightarrow $\pi = 7 - 4 = 3$

86. 2. 23

به تعداد m ، متغیر اصلی در نظر می‌گیریم بطوریکه D و K در آن باشند. (و سایر دیگر

ρ و \bar{V} هستند.

h نمی‌تواند متغیر اصلی باشد پس کنار گذاشته می‌شود. بعد، متغیر باقی مانده را به متغیر

اصلی تقسیم می‌کنیم تا بدون بعد شوند.

$$\pi_1 = \frac{h}{V^a D^b \rho^c k^d}$$

π_1 باید بدون بعد شود.

$$M: 1 = 0a + 0b + c + d \Rightarrow c + d = 1$$

$$L: 0 = a + b - 3c + d \quad , \quad \theta: -3 = -a - 3d \quad , \quad T: -1 = -d$$

حالت اینکه چهار متغیر اصلی در نظر گرفتیم بدلیل این معادلات بالا بود. در غیر این صورت

یکی از معادلات بی معنی می‌شد. $a=0$ ، $b=-1$ ، $c=0$ ، $d=1$

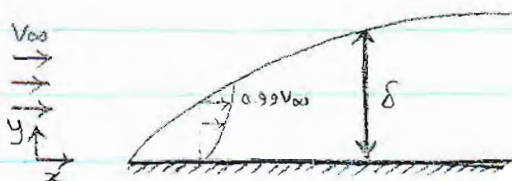
$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{hD}{k} = Nu$$

$$\pi_2 = \frac{\bar{V} \rho D}{\mu} = Re$$

$$\pi_3 = \frac{C_p \mu}{k} = Pr$$

$$\Rightarrow Nu = f(Re, Pr)$$

در بحث لایه مرزی سرعت:



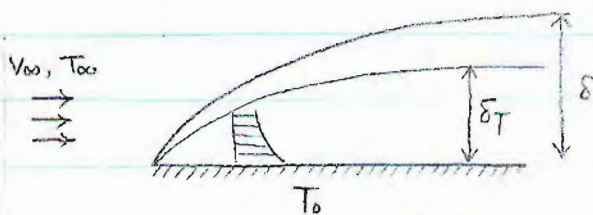
$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re}}$$

بالا ترازی لایه مرزی، اصطفاک جامد تا شری ندارد.

$$f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2}$$

این لایه مرزی مربوط به سرعت است.

اما برای حرارت؟ همزمان هم لایه مرزی سرعت داریم هم لایه مرزی حرارت:



$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_{\infty}} = 0.99$$

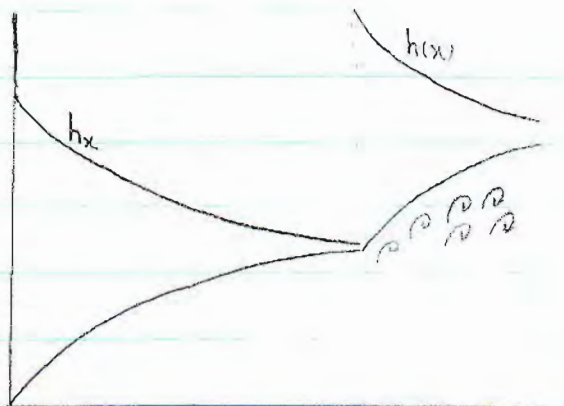
$$h = \frac{q_{\infty} \big|_{y=0}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{-k \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}}{T_0 - T_{\infty}}$$

با افزایش x ، شیب حرارتی کم تر می شود.

پس h هم کم می شود. در واقع با جلو تر رفتن سیال گرم می شود پس سرعت انتقال

حرارت کمتر می شود. بنابراین با ضخیم شدن لایه مرزی، h کم می شود.

اگر جریان توربولنت شود، مکانیزم انتقال حرارت از هدایت به جابجایی تبدیل می شود.



در نتیجه h شدت زیادی می شود.

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$$

$$h_x = 0.332 k Pr^{0.343} \left[\frac{v_{\infty}}{v_x} \right]^{1/2} \rightarrow Nux = \frac{h_x \cdot X}{k} = 0.332 Pr^{0.343} Re_x^{0.5}$$

86 . 2 . 23

ملاحظه می شود که Nu تابعی از Re و Pr است .. $(Pr \geq 0.6)$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{h} &= 0.664 Pr^{0.343} \left[\frac{V_{\infty}}{\nu_L} \right]^{1/2} \\ \bar{Nu} &= 0.664 Pr^{0.343} Re^{0.5} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\delta_T}{\delta} = 0.975 Pr^{-1/3} \quad Pr > 0.5$$

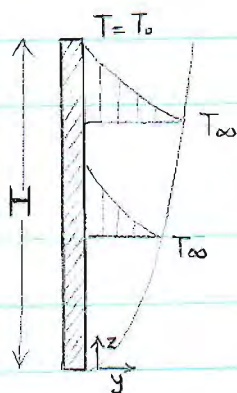
$Pr \ll 1$: $\delta_T \gg \delta$: پرندک خیلی کوچک (مغزات مایع) :

$Pr \sim 1$: $\delta_T = \delta$: برای گازها :

$Pr > 1$: $\delta_T < \delta$: برای مایعات معمولی :

86 . 2 . 25

مثال ازگنوکسیون طبیعی :



سیال ساکن است با دمای T_{∞}

$v_z = v_z(z, y)$: نیک لایه‌ای مرزی ایجاد می شود :

$v_y \ll v_z$, $v_y = v_y(z, y)$, $T = T(z, y)$

جریان لایه‌ای فرض شده است .

$$\bar{\rho} \left(v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad \text{مولفه‌ی z :$$

$$+ \bar{\rho} g \beta (T - T_{\infty}) \quad \left[-\nabla P + \bar{\rho} g \right]$$

86.2.25

$$\text{بوسستگی: } \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

در اینجا هم جابجایی قوی تراز ویسکوز است.

$$\text{انرژی: } \rho c_p (v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}) = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

با توجه به شرایط مرزی مسئله را حل می‌کنیم. به 6 شرط مرزی نیاز است:

$$\text{B.C.1 - } y=0 \rightarrow v_z=0, T=T_0$$

$$\text{B.C.2 - } y=\infty \rightarrow v_z=0, T=T_{\infty}$$

$$\text{B.C.3 - } z=0 \rightarrow v_z=0, T=T_{\infty}$$

$$h = \frac{q_0}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{-k \frac{dT}{dy} |_{y=0}}{T_0 - T_{\infty}}, \quad \text{Nu} = \frac{h L_c}{k}$$

L_c : طول مشخصه (راستوار، همان قطر است).

$$\text{Nu}_z = \frac{h z}{k}$$

Nu_z : ناسلت منطقه‌ای

با زیاد شدن ضخامت لایه مرزی، h کم می‌شود.

$$\frac{\text{Nu}_z}{\sqrt[4]{Gr/4}} = \frac{0.676 Pr^{1/2}}{(0.861 + Pr)^{1/4}}, \quad \text{Gr} = \frac{\bar{\rho}^2 g \beta (T - T_0) z}{\mu^2}$$

$$h z \propto z^{-1/4}, \quad \bar{h} = \frac{4}{3} h z$$

$$\frac{\text{Nu}_H}{\sqrt[4]{Gr/4}} = \frac{0.902 Pr^{0.5}}{(0.861 + Pr)^{1/4}}$$

86.2.25

سرعت انتقال حرارت از دیواره به سیال را بدست آورید.



$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = 0.703$$

$$T_f = \frac{T_o + T_{\infty}}{2} = 325^\circ\text{K}$$

$$Gr = \frac{g \beta}{\nu^2} (T_o - T_{\infty}) H^3 = 1.86 \times 10^8$$

بصورت تقریبی: برای گاز ایده آل: $\beta = \frac{1}{T}$

مسئله قبلی در شرایط $10^4 < Gr \cdot Pr < 10^{10}$ باید صدق کند.

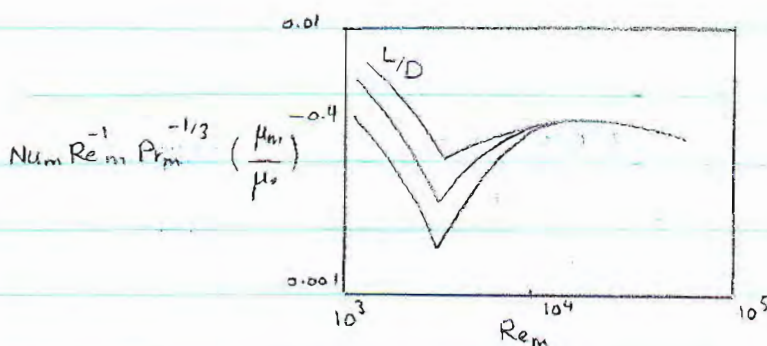
* عدد رینولدز: $Ra = Gr \cdot Pr$

$$Nu_H = 55.8 \quad h = Nu \frac{k}{H} \Rightarrow h = 5.23 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$Q = h(T_o - T_{\infty})A = 5.23 \times (360 - 290)(0.3 \times 0.1) = 11 \text{ W}$$

روابط تجربی برای کنوکسیون اجباری در لوله:

$$Nu_m = C Re_m^n Pr_m^m \left[\frac{\mu_m}{\mu_o} \right]^x \quad T_m: \text{Cup mix. temp.}$$



برای وقتی سیال سرد است،

$$T_f = \frac{T_o + T_{\infty}}{2}$$

تعریف می کنیم.

انتقال حرارت گذنا :

فقط برای جامدات بررسی می‌کنیم. در واقع شرایط غیر steady state یا متغیر با زمان

را بررسی می‌کنیم.

چون ضخامت قطعه‌ی گرم وارد شده به سیال سرد کم است، در داخل قطعه شیب

حرارتی نداریم. پس توانیم فوریه فایده‌ای ندارد.

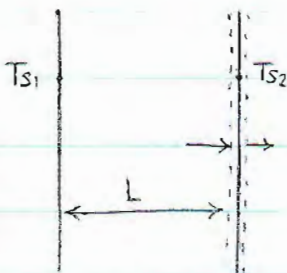


سرعت از دست دادن حرارت جامد = سرعت جذب حرارت از طرف سیال T_f

$$(T - T_f) h \cdot A = -\rho V c_p \frac{dT}{dt}$$

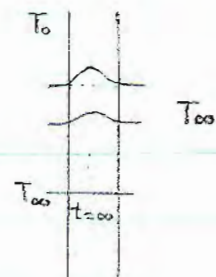
$$\int_{T_i}^T \frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \exp\left(\frac{-hAt}{\rho c_p V}\right) \quad t=0 : T = T_i$$

سرشدن نیوتنی :



در هر لحظه، مقدار حرارتی که

از طریق هدایت وارد می‌شود با



مقدار حرارتی که از طریق جابجایی خارج می‌شود برابر است.

$$\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \exp\left(-\frac{hAt}{\rho c_p V}\right)$$

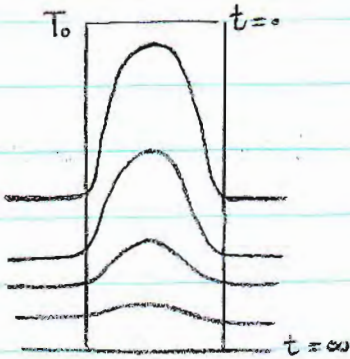
$$\frac{KA}{L} (T_{s1} - T_{s2}) = hA (T_{s2} - T_{\infty})$$

$$\Rightarrow \frac{T_{s1} - T_{s2}}{T_{s2} - T_{\infty}} = \frac{L/KA}{1/hA} = \frac{R_{\text{هدایت}}}{R_{\text{جابجایی}}} = Bi \quad (\text{Biot number عدد بیو})$$

اگر $Bi < 0.1$ ، قطعه کوچک محسوب می شود ، با این شرط از قانون سرد شدن نیوتنی

می توان استفاده کرد . تغییر درجه حرارت در داخل قطعه سریع انجام می شود . چون قطعه کوچک

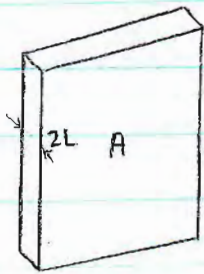
است می توان از شبیه حرارتی صرف نظر کرد . در غیر این صورت ، تغییرات زیاد است :



$$Bi \equiv \frac{h L_c}{K_{\text{جامد}}}$$

شبهه رابطی Nu است :

$$Nu \equiv \frac{h L_c}{K_{\text{سایه}}}$$



$$L_c = \frac{V}{A_{\text{انتقال حرارت}}}$$

$$L_c = \frac{A \times 2L}{2A} = L$$

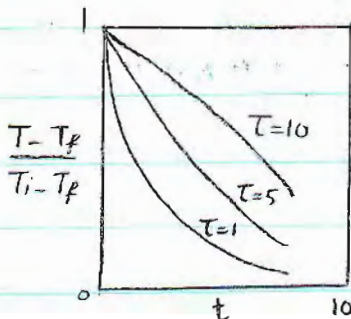
$$\text{استوانه : } L_c = \frac{\pi R^2 L}{2\pi R L} = \frac{R}{2} \quad ; L, R$$

$$\text{کره : } L_c = \frac{R}{3}$$

$$\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \exp\left(-\frac{h A t}{\rho c_p V}\right)$$

$$\frac{h A}{\rho c_p V} = \frac{1}{\tau} \quad \left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{ثابت زمانی}$$

این ثابت زمانی سرعت هم در داشتن قطعه



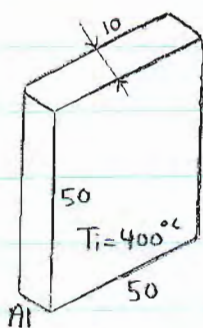
بسیار در نشان می دهد .

$$\frac{hAt}{\rho c_p V} = \frac{ht}{\rho c_p L_c} \cdot \frac{L_c}{L_c} \cdot \frac{k}{L} = \frac{hL_c}{k} \cdot \frac{tk}{\rho c_p L_c^2} = Bi \cdot \frac{t\alpha}{L_c^2} = Bi \cdot Fo$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad ; \quad Fo = \frac{t\alpha}{L_c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \exp(-Bi \cdot Fo)$$

این راجه‌ل خیلی ساده است فقط باید شرط $Bi \leq 0.1$ رعایت شود.



25°C

$$h = 4400 \frac{W}{m^2 K}$$

در زمان t درجه حرارت 50°C می‌شود.

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{4400 \times 0.05}{238} = 0.089 < 0.1 \quad \text{سرد شدن نیوتنی}$$

$$\alpha = \frac{238}{2700 \times 900}$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2} = 3.92 \times 10^{-3} t$$

$$\frac{50 - 25}{400 - 25} = \exp(-0.084 \times 3.92 \times 10^{-3} t) \Rightarrow t = 823 (s)$$

چون جسم را هم دما در نظر گرفتیم، این دما، هم دمای داخل و هم دمای خارج (سطح) قطعه است.

در واقع چون $Bi < 0.1$ است، شبیه‌ترین در داخل قطعه ناچیز است.

$$-V \rho c_p \frac{dT}{dt} = hA(T - T_f) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{h}{\rho L_c c_p} (T - T_f) = -1.23 \frac{K}{s}$$

\uparrow
 $t=0, T=400$

با کاهش اختلاف (درجه حرارت)، سرعت سرد شدن هم کمتری می‌شود. پس در $t=0$ ، سرعت

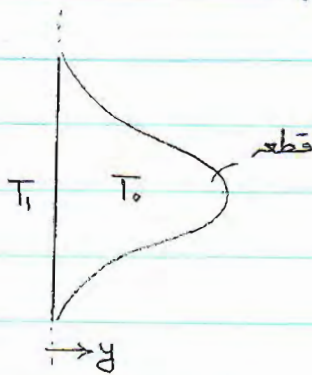
max است.

قطعه نیمه بینهایت:

صنخامت قدری بزرگ است که عمق قطعه تحت تأثیر درجه حرارت بیرون قرار نمی گیرد.

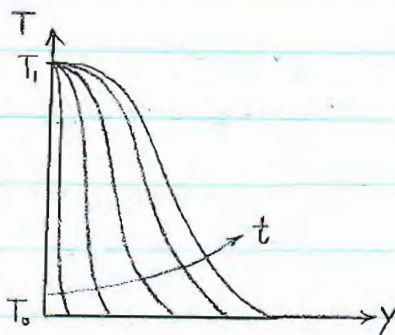
نیمه بینهایت بودن به زمان وابسته است. در $t = \infty$ واقعی، هیچ قطعه ای نیمه بینهایت

نیست. در این جا، یک طرف قطعه در تماس با سیال است:



$$T = T(y, t)$$

$$\begin{cases} T(y, 0) = T_0 \\ T(0, t) = T_1 \end{cases}$$



$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

I.C: $t = 0 \quad T = T_0 \Rightarrow \theta = 0$ (شرط اولیه نیست). (شرط اولیه است)

B.C.1: $y = 0 \quad T = T_1 \Rightarrow \theta = 1$

B.C.2: $y = \infty \quad T = T_0 \Rightarrow \theta = 0$

حل معادله کلاسیک (دیفیازین) : بدون بعد : $\eta = \frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}$; $\theta = \theta(\eta)$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \cdot \frac{d\eta}{dy}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\eta}{t} \cdot \frac{d\theta}{d\eta}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \Rightarrow \theta = c_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + c_2$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = h \Rightarrow h' + 2\eta h = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta=0 \rightarrow \theta=1 \\ \eta=\infty \rightarrow \theta=0 \end{array} \right.$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = c_1 e^{-\eta^2} \quad ; \quad c_2 = 1$$

$$c_1 = \frac{-1}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} \Rightarrow \theta = 1 - \frac{\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = 1 - \frac{\overbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta}^{\text{erf}(\eta)}}{\underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta}_{=1}}$$

$$\Rightarrow \theta = 1 - \text{erf}(\eta) = \text{erfc}(\eta)$$

η از صفر تا ∞ تغییر می‌کند و $\text{erf}(\eta)$ از صفر تا 1.

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\alpha t}}$$

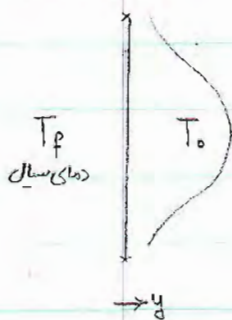
$$\eta = 2 : \text{erf}(\eta) = 0.99 \Rightarrow \theta \approx 0$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_0}{T_i - T_0} \approx 0 \Rightarrow T \approx T_0 \Rightarrow y \geq 4\sqrt{\alpha t} \quad \text{شرط نیمه بی‌نهایت بودن}$$

$$\theta = \frac{T - T_i}{T_0 - T_i} \quad \text{اگر باشد}$$

$$\theta = \text{erfc}(\eta)$$

86.3.1



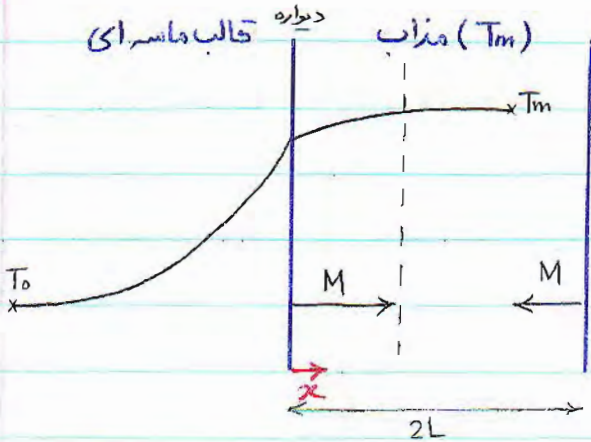
$$-k \frac{dT}{dy} = h [T_p - T]$$

$$\frac{T - T_0}{T_p - T_0} = \text{erfc} \left[\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}} \right] - e^{-\gamma} \text{erfc} \left[\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}} + \frac{h}{k} \sqrt{\alpha t} \right]$$

جسم نیمه بی‌نهایت:

$$x = \frac{h}{k} \sqrt{\alpha t} \left[\frac{y}{\sqrt{\alpha t}} + \frac{h}{k} \sqrt{\alpha t} \right]$$

ریخته‌گری (رقالب ماسه‌ای):



M: جبهه‌ی انجماد

فرض: قطعه نیمه بی‌نهایت

سرعت جذب حرارت توسط قالب =
سرعت از دست دادن گرمای بقیه دونه

$$\frac{T - T_m}{T_0 - T_m} = \text{erf} \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$q|_{x=0} = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{k(T_m - T_0)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

$$q|_{x=0} = \rho_l H_f \frac{dM}{dt}$$

↓ دانسیته سیال

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

← دانسیته جامد

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{(T_m - T_0) \sqrt{k \rho c_p}}{\rho_l H_f \sqrt{\pi t}}$$

I.C: $t=0 \quad M=0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{T_m - T_0}{\rho_l H_f} \right] \sqrt{k \rho c_p} \sqrt{t}$

M: طول انجماد (جبهه انجماد) $M=L$ زمان انجماد کامل: t_p

$$t = C \left[\frac{V}{A} \right]^2 \quad \xrightarrow{\text{استرانه}} \quad \frac{R}{2}$$

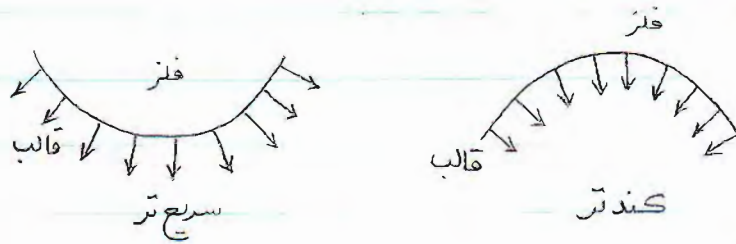
قاعده‌ی چرونوف:

t: زمان پایان انجماد V : حجم قطعه A : سطوحی که انتقال حرارت دارند

$$C = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\rho_l H_f}{T_m - T_0} \right]^2 \left[\frac{1}{k \rho c_p} \right]$$

ضریب چرونوف

این قاعده یک اصل رارعايت نوي کند. و آن هم شکل قالب است.



برای رفع این مشکل:

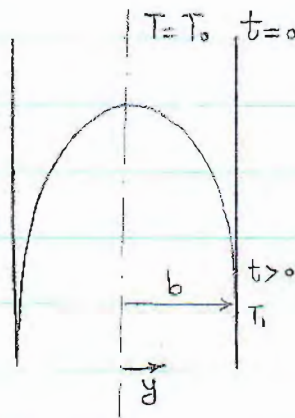
$$\beta = \gamma \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{a\beta} \right] \text{ پارامتر شکل } a$$

کره $a=3$ استوانه بلند $a=4$ صفحه $a=\infty$

$$\gamma = \left[\frac{T_m - T_0}{\rho_i H_f} \right] \rho c_p$$

$$\beta = \frac{V/A}{\sqrt{\alpha t}}$$

انتقال حرارت گذرا همراه با شیب حرارتی:



$$\text{معادله انرژی: } \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$I. : T = T_0 : t = 0$$

$$B.C. 1-2 : y = \pm b : T = T_1$$

$$y = 0 : \frac{dT}{dy} = 0$$

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} \quad , \quad \eta = \frac{y}{b} \quad , \quad \tau(F_0) = \frac{\alpha t}{b^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad \tau = 0, \theta = 1 \quad , \quad \eta = \pm 1, \theta = 0$$

روش جدا کردن متغیرها (Separation of variables)

$$\Rightarrow \theta = \cosh Nx - (\tanh N) \sinh Nx \quad \text{or} \quad \theta = \frac{\cosh N(1-x)}{\cosh N}$$

میک شود ۱

$$Q = \int q dA = \int h(T-T_0) dA = \int_0^L \int_0^W h(T-T_0) dz dy = \int_0^L \theta dz \int_0^W h dz$$

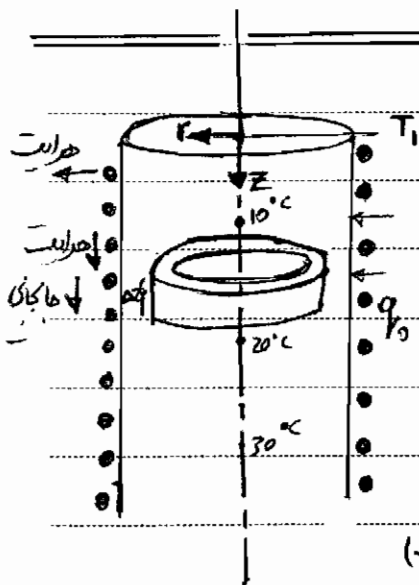
\uparrow $hwL(T_w - T_0)$

حرارت معنی دار می باشد
حرارت در جهت عمود بر سطح

$$\eta = \frac{\int_0^L \int_0^W h(T-T_0) dz dy}{\int_0^L \int_0^W h(T_w - T_0) dz dy} = \frac{\int_0^L \theta dz}{\int_0^L dz} = \frac{\tanh N}{N}$$

کنوسون (فصل هفتم) Convection

کنوسون طبیعی - کنوسون اجباری
Natural Con. Forced Con.



در هنگامی که مایع در معرض گرمی است، در ارتفاع z حرارت برحالی که تأثیر دارد در عکس جهت سیال می باشد

در جهت r: $2\pi r \Delta z q_r - 2\pi(r+\Delta r) \Delta z q_{r+\Delta r}$

در جهت z (سپاری): $2\pi r \Delta r q_z - 2\pi r \Delta r q_{z+\Delta z}$

در جهت z (حرکتی): $2\pi r \Delta r v_z \rho H \Big|_z - 2\pi r \Delta r v_z \rho H \Big|_{z+\Delta z}$

$$\frac{\pm 2\pi \Delta z \Delta r}{\Delta z, \Delta r \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + r \frac{\partial q_z}{\partial z} + r \rho v_z \frac{\partial H}{\partial z} \right] = 0$$

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \rho \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

۱۴ / ۲ / ۱۶

دانشی که خصوصی نمیشد در زمان سردی است. در این حالت سیال از گرم حرارت برحالی که تأثیر دارد در عکس جهت سیال می باشد

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

بار دگر به معادله هالون پیرسون

$$V_z = V_{z,max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \Rightarrow V_{z,max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

B.C.1: $r=0 \rightarrow T = \text{finite}$

B.C.2: $r=R \rightarrow k \frac{dT}{dr} = q_0$

B.C.3: $z=0 \rightarrow T = T_1$

حال به حل مسئله معادله رنوالدسون فوقی می پردازیم:

بدون بعدی کنیم $T_0 z, r$

$$\varepsilon = \frac{r}{R}$$

از B.C.2 در شرایط $\Delta T = \frac{q_0 R}{k}$

$$\theta = \frac{T - T_1}{q_0 R / k}$$

تعمیر بار دگر رسم بدون کدره با داشتن دو بار دگر بدون کدره و در دگر است می آید - هر چه در معادله با دگر و است

$$\xi = \frac{z}{\rho c_p V_{z,max} R^2 / k}$$

(ξ و θ هر دو بار دگر رسم بدون کدره است)

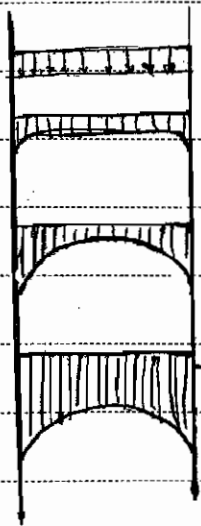
$$(1 - \varepsilon^2) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right)$$

B.C.1: $\varepsilon=0 \Rightarrow \theta = \text{متریک لانه}$

B.C.2: $\varepsilon=1 \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} = 1$

B.C.3: $\xi=0 \Rightarrow \theta = 0$

حل این معادله نیز در شرایط هالون انجام می دهم



باز پس تر آمدن
تعداد جریان در هر مقطع تغییر
می کند ولی شکل پروفیل عوض
نمی شود. (حالت کاملاً هم یافتیم)

حاله
چون برای حالتی سرد است کاملاً در هر دو
جاری به سرد است کاملاً سطح با هم برابر
که در این حالت

$$\theta(\varepsilon, \xi) = C_0 \xi + f(\varepsilon)$$

در داخل معادله جاری کنیم

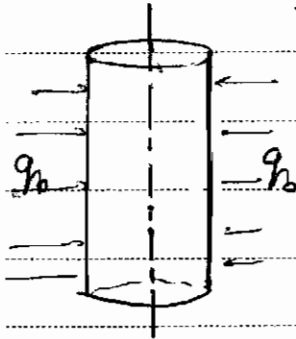
$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\varepsilon \frac{df}{d\varepsilon} \right) = C_0 (1 - \varepsilon^2)$$

اسرائل

$$\theta(\xi, \xi) = C_0 \xi + C_1 \left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^4}{16} \right) + C_2 \ln \xi + C_3$$

محل شرایط مرزی را اعمال می کنیم

مشاهده می شود که شرط $z=0$ در دیواره های با نسبت زیاد $z=0$ بر وزن کابین هم برآید
 برهان های نسبت که برای دانش شرط سوم، معادله دیفرانسیل انرژی حل می کنیم



$$q_0 (2\pi R z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho v_z c_p (T - T_1) r dr d\theta$$

$$\xi = \int_0^1 \theta(\xi, \xi) (1 - \xi^2) d\xi$$

$$C_1 = 0 \quad C_3 = 4 \quad C_2 = -\frac{7}{24}$$

$$\theta(\xi, \xi) = 4\xi + \xi^2 - \frac{1}{4}\xi^4 - \frac{7}{24}$$

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R T(r, z) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}$$

توسط (۱)

توسط این داریم که

$$T_m = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) T(r, z) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}$$

Cup mixing temp.

اینجا T_m پیدا می کنیم
 در واقع درون آن مخلوط کنیم و در نهایت میانگین بگیریم
 معادله در این رابطه هم داریم

$$= T_1 + 4\xi \frac{q_0 R}{k}$$

توی این جا $T_m =$

توی این جا

$$r = R \Rightarrow \xi = 1$$

$$\theta = \theta_{\text{surface}} = \theta_s = 4\xi + 0.46$$

$$T_s - T_1 = \frac{q_0 R}{k} (4\xi + 0.46) \quad \text{و} \quad (T_m - T_1) = 4\xi \frac{q_0 R}{k}$$

$$T_s - T_m = \frac{q_0 R}{k} (0.46)$$

$$h (T_s - T_m) = q_0 \Rightarrow h = \frac{q_0}{T_s - T_m} = \frac{q_0}{q_0 R (0.46/k)} \Rightarrow h = \frac{2k}{D(0.46)}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

کنوسهون احدی، هدایت از Z کم، بر مبنای حرارتی شکل یافته بارز

44

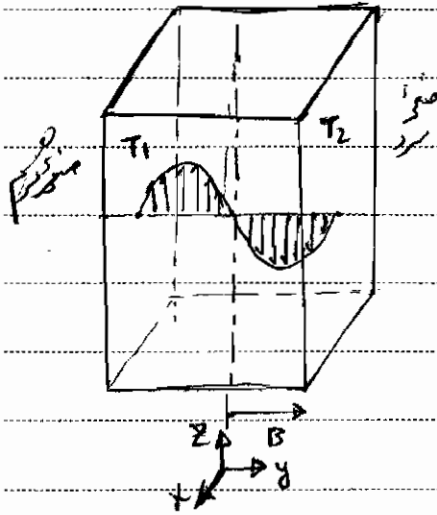
$\frac{hD}{k} = 4.36 =$ عدد نامست $Nu = 4.36$ Nusselt Number

برای لایه استوانه‌ای $T_{rs=R} = T_0 \rightarrow Nu = 3.66$

$Nu = \frac{q_{conv}}{q_{cond}}$ در حالت کنوسهون اجباری اشیاء خواهد بود $Nu = Nu(Re, Pr)$

Natural Convection

کنوسهون طبیعی



$v_x = v_y = 0$

$v_z = v_z(y)$

$T = T(y)$

ΔT (تفاوت دما)

در جهت y: حرارت

در جهت z: حرکت

$[T, v] = 0$

$-\frac{dv_z}{dy} = 0 \Rightarrow k \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$

B.C.1: $y = -B, T = T_1$

B.C.2: $y = +B, T = T_2$

$T = \frac{q}{k}y + C_2$

$\Rightarrow T = \bar{T} - \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{B} y$

which $\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2}$

$\Delta T = T_1 - T_2$

این معادله نادر است $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} - \rho g_z$

برای حالت نادر است $\frac{dp}{dz} + \rho g = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}$

فردی در حالت نادر است چون در حالت نادر است

اما در این حالت نیست، می توان ρ را به \bar{T} ربط داد (رابطه استوار) و خواهم داشت:

$\rho = \rho|_{T=\bar{T}} + \frac{d\rho}{dT}|_{T=\bar{T}}(T-\bar{T}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\rho}{dT^2}|_{T=\bar{T}}(T-\bar{T})^2$ (توجه به ریزه به ریزه و ریزه کنیم)

از طرف دیگر $\beta = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_{\rho}$

$\Rightarrow \rho = \bar{\rho} - \bar{\rho} \beta (T - \bar{T})$

فرض اینکه خطی

فرض اینکه خطی در \bar{T}

در معادله نادر است و می توانیم:

$\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{d\rho}{dz} + \bar{\rho} g - \bar{\rho} g \beta (T - \bar{T})$

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \left(\frac{dp}{dz} + \bar{\rho}g \right) + \frac{1}{2} \bar{\rho}g\beta \Delta T \frac{y}{B}$$

B < y < 2B y = ±B v_z = 0

از انتگرال → $v_z = \frac{(\bar{\rho}g\beta \Delta T)B^2}{12\mu} \left[\left(\frac{y}{B} \right)^2 - \left(\frac{y}{B} \right) \right] + \frac{B^2}{12\mu} \left(\frac{dp}{dz} + \bar{\rho}g \right) \left[\left(\frac{y}{B} \right)^2 - 1 \right]$

در هر دو طرف انتگرال بگیریم → $\int_{-B}^0 \rho v_z dy = 0$

رابطه بین دما و سرعت

با فرض دما یکنواخت در طول کانال → $\Delta T^2 = 0$ → $\frac{dp}{dz} + \bar{\rho}g = 0$

برای بررسی دمای یکنواخت

$$v_z = \frac{(\bar{\rho}g\beta \Delta T)B^2}{12\mu} \left[\left(\frac{y}{B} \right)^3 - \left(\frac{y}{B} \right) \right]$$

$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^B v_z dy}{\int_0^B dy} = \frac{\bar{\rho}g\beta \Delta T B^2}{48\mu}$

سرعت متوسط از B تا B - صفر است

$\bar{y} = \frac{y}{B}$ $\bar{v}_z = \frac{B v_z \rho}{\mu}$

توزیع سرعت بر حسب دما یکنواخت در کانال

$$\bar{v}_z = \frac{\bar{\rho}^2 g \beta B^3 \Delta T}{12\mu^2} (\bar{y}^3 - \bar{y})$$

$$Gr = \left[\frac{\bar{\rho}^2 g \beta \Delta T B^3}{\mu^2} \right] \rightarrow \text{Grashof Number}$$

$\Delta p = \bar{\rho} \beta \Delta T$

تفاوت دما در طول کانال

$$\equiv \left[\frac{\bar{\rho} g \beta^3 \Delta p}{\mu^2} \right]$$

برای بررسی دما یکنواخت

$$(\Delta p = \rho_1 - \rho_2 = \bar{\rho} - \bar{\rho} \beta (T - \bar{T}))$$

$$\bar{v}_z = \frac{1}{12} Gr (\bar{y}^3 - \bar{y})$$

برای بررسی دما یکنواخت

$$\begin{cases} Nu = f(Re, Pr) \\ Nu = f(Gr, Pr) \end{cases}$$

معادله انرژی

General Energy Equation = انتقال حرارت در یک طرف + انتقال حرارت در یک طرف دیگر + انتقال حرارت در یک طرف دیگر + انتقال حرارت در یک طرف دیگر

مکانیزم انتقال حرارت در یک طرف + مکانیزم انتقال حرارت در یک طرف دیگر + مکانیزم انتقال حرارت در یک طرف دیگر + مکانیزم انتقال حرارت در یک طرف دیگر

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) = \Delta y \Delta z (e_{ix} - e_{ixmax}) + \Delta x \Delta z (e_{iy} - \dots) + \rho \Delta x \Delta y \Delta z (v_x g_x + \dots)$$

برای سه بعد اول

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right] = - [\nabla \cdot (\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u) v] - (\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot p v) - \nabla [T \cdot v] + \rho [v \cdot g]$$

$$u \in H = (P/\rho)$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = - (\nabla \cdot q) - \underbrace{(\tau : \nabla v)}_{\text{ویند}} - \rho (\nabla \cdot v) - \left(\frac{\partial \rho_p}{\partial t} \right) / \rho \frac{DP}{Dt} *$$

● فرض های غالب معادله انرژی
1- کارایی اول

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -1$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + \dots$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T$$

2- میان درجه حرارت

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$$

3- ثابت

معادله بوزنیت (تربیب بوزنیت) (توزین طبیعی)

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = (-\nabla p + \bar{\rho} g) - (\nabla \cdot \tau) - \bar{\rho} g \beta (T - \bar{T})$$

آنالیز ابعادی

تقسیم π با سیستم

n متغیر | $n-m$ متغیر مستقل
 m متغیر وابسته

$h: (\bar{v}, \rho, k, \mu, c_p, D)$

راه‌های برای سبک کردن رابطه

① تعداد m

② n بظ

③ به تعداد m متغیر اصلی

④ متغیرهای باقی‌مانده

$m:$
 $L:$ طول
 $T:$ دما
 $M:$ جرم
 $A:$ سطح

$\rho = ML^{-3}$ $c_p = L^2 \theta^{-2} T^{-1}$

$D = L$ $\mu = ML^{-1} \theta^{-1}$

$\bar{v} = L \theta^{-1}$ $k = ML \theta^{-3} T^{-1}$

$h = M \theta^{-3} T^{-1}$

$n = 7, m = 4 \quad \pi = 7 - 4 = 3$

$\pi_1 =$

تعدادی که در انتهای سیستم باقی‌مانده چهار متغیر اصلی باقی‌مانده:

$\pi_1 = \frac{h}{\bar{v}^a D^b \rho^c k^d}$

$$\begin{cases} m: 1 = 0 + a + b + c + d \\ l: 0 = a + b - 3c + d \\ \theta: -3 = -a - 3d \\ -1 = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

از \bar{v}, D, k, ρ ← ③

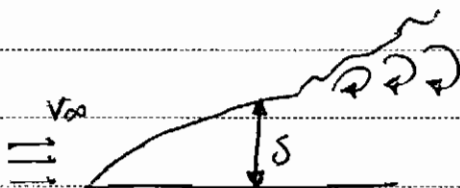
$\Rightarrow \pi_1 = \frac{hD}{k} = Nu$

$\pi_2 = \frac{\bar{v} \rho D}{\mu} = Re$

$\pi_3 = \frac{c_p \mu}{k} = Pr$

$Nu = f(Re, Pr)$

لایه‌های مرزی حرارتی

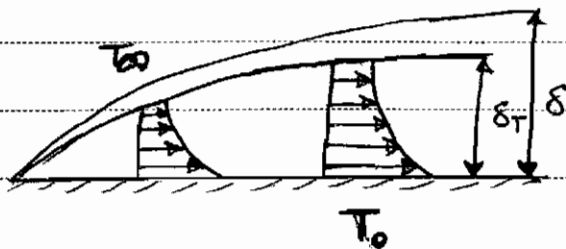


$\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$

رکب سیال در انتهم

$f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2}$

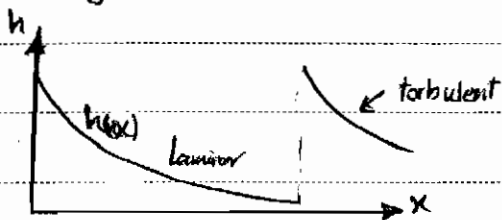
لایه مرزی در واقع مجرای است که سیال هنوز حرکت مایع هم می‌کند است. در درجه اول نیز همین مجرای دارد



$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_{\infty}} = 0.99$

$h = \frac{q_{y=0}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_0 - T_{\infty}}$

این دو هم ظاهر می شود و می تواند درست باشد
 و این منطقی است



هنگامی که وارد نقطه توربولنت شدیم مکانیزم انتقال حرارت از هرات به جای کنونی می شود و انتقال حرارت بیشتر از طریق می باشد
 بیشتر از طریق می باشد

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L h_x dx}{\int_0^L dx} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \quad \bar{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k}$$

$$h_x = 0.332 k Pr^{0.343} \left[\frac{v_{\infty}}{v_x} \right]^{1/2}$$

این معادلات از روی تجربیات

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332 Pr^{0.343} Re_x^{0.5} \quad Pr \gg 0.6$$

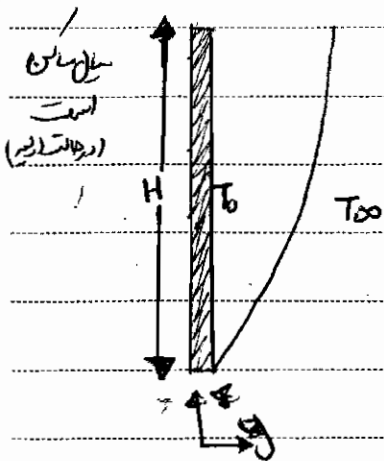
$$\bar{h} = 0.664 Pr^{0.343} \left[\frac{v_{\infty}}{v_L} \right]^{1/2}$$

$$\bar{Nu}_x = 0.664 Pr^{0.343} Re^{0.5}$$

$$\frac{\delta_T}{\delta} = 0.975 Pr^{-1/3} \quad Pr > 0.5$$

$$\begin{aligned} Pr \ll 1 &\Rightarrow \delta_T > \delta \\ Pr \approx 1 &\Rightarrow \delta_T = \delta \\ Pr > 1 &\Rightarrow \delta_T < \delta \end{aligned}$$

مای از منوی کون طبیعی



$$v_z \ll v_z(z, y)$$

$$v_y \ll v_z$$

$$v_x(z, y)$$

$$T(z, y)$$

$$v_x = 0$$

در این حالت با این که T_{∞}

$$\rho (v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g \beta (T - T_0)$$

$$\rho c_p (v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}) = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

$$3-T \text{ B.C.I } y=0 \quad v_z = 0 \quad T = T_0$$

$$y=\infty \quad v_z = 0 \quad T = T_{\infty}$$

$$z=0 \quad v_z = 0 \quad T = T_{\infty}$$

در این حالت h می باشد

PAPCO

$$\theta(\eta, \tau) = f(\eta) \cdot g(\tau)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = f(\eta) \cdot \frac{dg}{d\tau} \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = g \cdot \frac{df}{d\eta} \quad \mapsto \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = g \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

$$\Rightarrow f \frac{dg}{d\tau} = g \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\eta^2} = -\beta^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = -\beta^2 \quad \mapsto \quad g = A e^{-\beta^2 \tau}$$

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \beta^2 f = 0 \quad \mapsto \quad f = B \sin \beta \eta + C \cos \beta \eta$$

$$\Rightarrow \theta = e^{-\beta^2 \tau} (D \sin \beta \eta + E \cos \beta \eta)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad \mapsto \quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = E e^{-\beta^2 \tau} (\cos \beta \eta)$$

$$\eta = 1 \quad , \quad \theta = 0 \quad \mapsto \quad 0 = E e^{-\beta^2 \tau} \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = (n + \frac{1}{2})\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \tau} \cos[(n + \frac{1}{2})\pi \eta]$$

$$\tau = 0 \quad , \quad \theta = 1 \quad \mapsto \quad 1 = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos[(n + \frac{1}{2})\pi \eta]$$

طرفین ضرب شود در : $[\cos(m + \frac{1}{2})\pi \eta] d\eta \quad ; \quad -1 \leq \eta \leq 1$

$$\theta = 0 \quad (m \neq n) \quad , \quad \theta = 1 \quad (m = n)$$

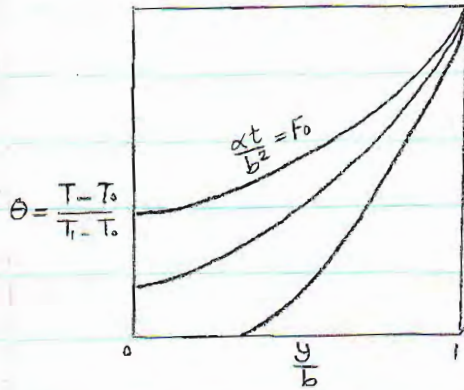
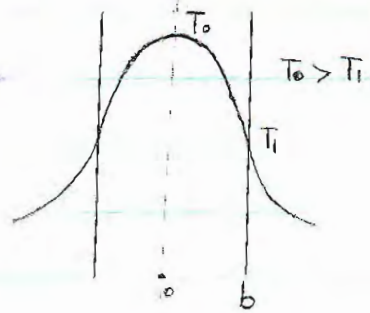
$$\mapsto E_m = \frac{2(-1)^m}{(m + \frac{1}{2})\pi} = E_n$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})\pi} \exp(-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \alpha t / b^2) \times \cos[(n + \frac{1}{2})\frac{\pi y}{b}]$$

86.3.6

در معادله‌ی اخیر، عدد فوریه و مختصات بیرون بعد $(\frac{y}{b})$ دیده می‌شود.

به جای حل سری فوق، نمودار زیر رسم می‌کنند:



اگر بجای دمای سطح، دمای سیال را داشته باشیم:

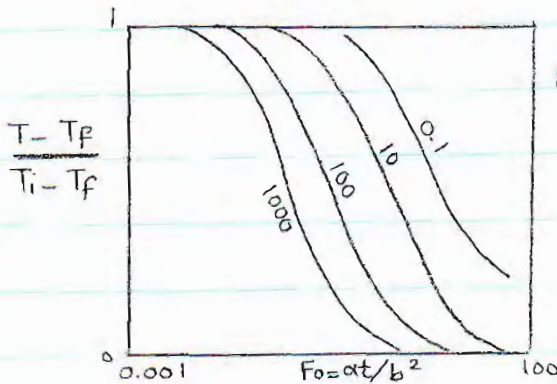
B.C.2: $-k \frac{dT}{dy} = h(T - T_f)$

$\cos \beta = 0$ در سمت چپ

$\cot \beta_n b = \frac{k_s}{hb} (\beta_n b) = Bi (\beta_n b)$

$\frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_n b}{\beta_n b + \sin(\beta_n b) \cos \beta_n b} \exp(-\beta_n^2 \alpha t) \cos \beta_n y$

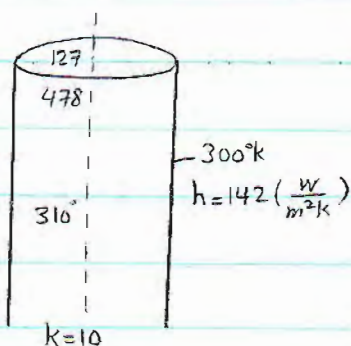
اما بجای آنکه سری را حل کنیم، می‌توان از نمودارهای « Heisler » استفاده کرد.



$Bi = \frac{hL}{k}$

مرکز $\frac{r}{R} = 0$

مثال - چقدر طول می کشد که دمای مرکز به 310°K برسد؟



شماره های مربوط به استوانه را نگاه می کنیم.

استوانه: $Bi = \frac{hR}{2k}$

آماره نمودار $Bi = \frac{hR}{k}$ در نظر گرفته شده است. برای کره

هم ضریب 3 حذف شده است. برای مرکز: $\frac{r}{R} = 0$

$\theta = 0.056$

$Bi = \frac{142 \times 0.0638}{16} = 0.563$

ابتدا با انجمنی Bi می فهمیم که سرد شدن

$Fo = \frac{\alpha t}{b^2} = 3.2$
استوانه ای: $b^2 = R^2$

$\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = 5$: $t = 1(\text{hr})$ نیوتنی نیست.

برای سطح: $\frac{r}{R} = 1$: $t = 3200(\text{s})$

اگر \min زمان مطرح باشد، به \max عدد Bi مراجعه می کنیم.

$Fo = 0.6 \rightarrow t = 600(\text{s})$: \min زمان که مرکز به 310°K برسد.

تابش:

برای انتقال حرارت توسط این مکانیزم، محیط مادی نیاز نیست.

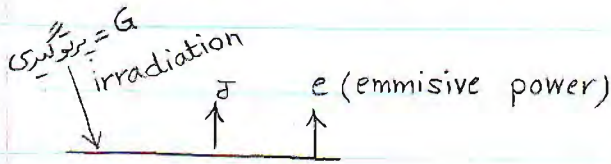
طیف امواج $100\mu\text{m} - 0.1$ است. (فوتورمتری: $0.4 - 0.7\mu\text{m}$)

تابش توسط امواج الکترومغناطیسی روی بی‌دهنده

سرعت انتقال حرارت وابسته است به دمای قطعه ، سطح و جنس

وابسته به سطح بودن : برای مایعات و جامدات مربوط به لایه‌های آخراتی می‌شود که تابش را

دریافت می‌کنند . $e = \sigma T^4$: شار انرژی تابشی

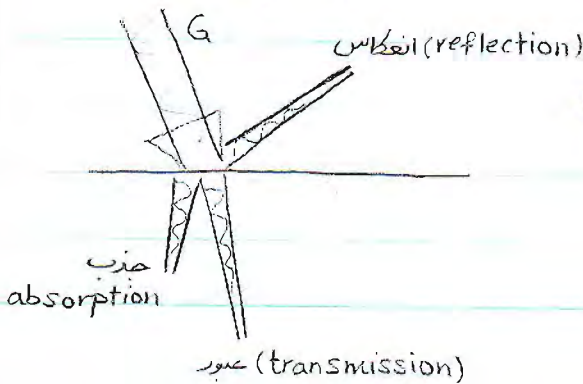


سطح هم تابش دریافت می‌کند ، هم انعکاس

J : شار انرژی تابشی (radiosity) (ρG) پرتو دهی

بی‌دهنده و می‌فرستد .

$$J = \rho G + e$$



$$G = \alpha G + \rho G + \tau G$$

α : ضریب جذب

ρ : " انعکاس

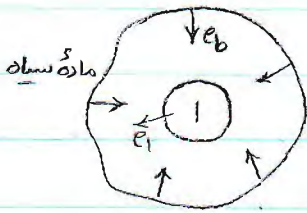
τ : " عبور

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad ; \quad \alpha + \rho = 1 \quad : \quad \tau = 0 \quad : \quad \text{کدر}$$

$\alpha = 1$ ، $\rho = 0$: block body radiation : جسم سیاه

تمام پرتو ورودی را جذب می‌کند . هم چنین حداکثر توان تابشی را دارد . (e_b)

$$e = \epsilon e_b \quad \text{ضریب نشر}$$



$$q_{r,net} = e_1 - \alpha_1 e_b$$

جزیبی کند ساطع می کند

$$= \epsilon_1 e_b - \alpha_1 e_b = e_b (\epsilon_1 - \alpha_1)$$

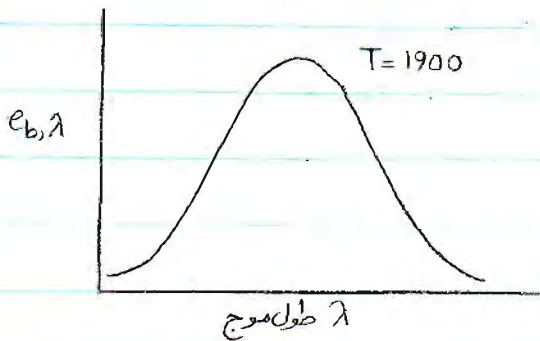
$$\Rightarrow \epsilon_1 = \alpha_1$$

تعداد حرارتی: $q_{net} = 0$

قانون کیرشهف: اگر یک جسم در تعادل با ماده سیاه باشد: $\epsilon = \alpha$

اگر چندین جسم داشته باشیم در تعادل با ماده سیاه:

$$\frac{\epsilon_1}{\alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} = \dots = 1$$



تعریف برای e_b :

$$e_b = \int_0^{\infty} e_{b,\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{\exp\left[\frac{ch}{k_B \lambda T}\right]} d\lambda = \sigma T^4$$

σ : استفان - بولتزمن k_B : بولتزمن h : پلانک

$$\sigma = 5.669 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K} \quad , \quad e = e_b \epsilon \quad , \quad e = \epsilon \sigma T^4$$



جسم سیاه:

وقتی پرتویی وارد می شود، مقدار خیلی کم بیرون می رود

86.3.6

$$e = \epsilon e_b (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

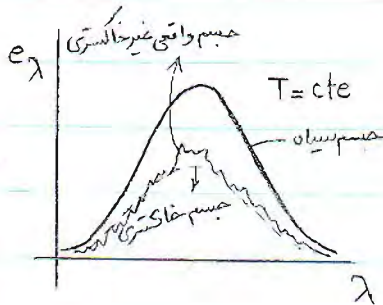
در هر بار برخورد، یک ضریب ρ وارد می شود.

$$e = \epsilon e_b \times \frac{1}{1-\rho} \quad ; \quad \alpha + \rho = 1 \quad (T=0)$$

$$e \text{ حفره} = \frac{\epsilon e_b}{\alpha}$$

86.3.8

جسم خاکستری:



$$e_b = \int_0^{\infty} e_{b,\lambda} d\lambda$$

$$e = \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda} e_{b,\lambda} d\lambda \quad \text{حالت کلی:}$$

توان نشر جسم سیاه از خاکستری بیشتر است. (سطح زیر منحنی)

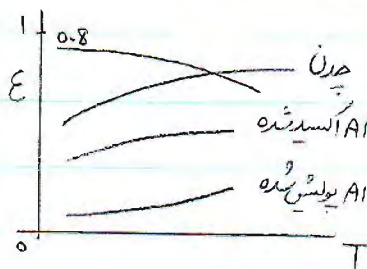
$$e = \epsilon_{\lambda} \int_0^{\infty} e_{b,\lambda} d\lambda$$

$$\epsilon_{\lambda}, \alpha_{\lambda} \neq f(\lambda)$$

در حالت کلی: 1: دمای تارده جذب کننده α_{12} 2: دمای مانده پخش کننده

$$\alpha_{12} = \alpha_{11} = \alpha_1 = \epsilon_1$$

برای جسم خاکستری:



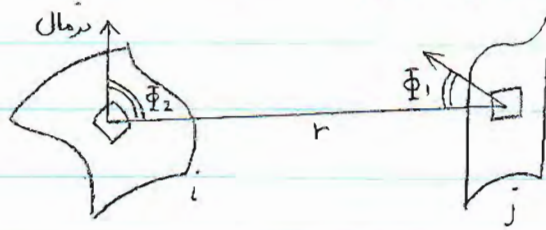
در یک محدوده دمای، اگر ضریب نفوذار

کم نباشد، می توان جسم را خاکستری فرض نمود.

$\alpha(\phi)$ سطوح آینه ای

سطوح پخش
diffusive

فاکتور دید: (view factor)

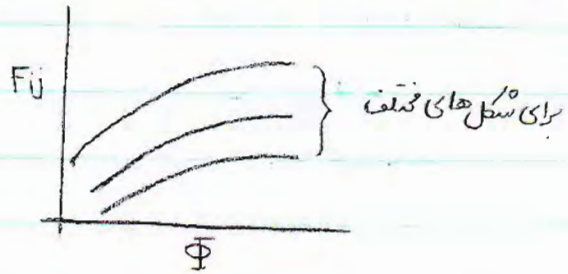
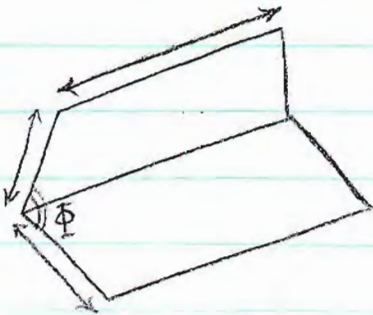


نسبت به زاویه ای که این دو سطح با هم می سازند، یک درصدی از انرژی دریافتی کنه

$$F_{ij} = \frac{\text{تشدیدی که از i در تمام جهات می شود}}{\text{تشدیدی که به j می رسد}}$$

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi} \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos \Phi_1 \cos \Phi_2}{r^2} dA_1 dA_2$$

به جای محاسبه ی انتگرال، یک سری منحنی داریم.



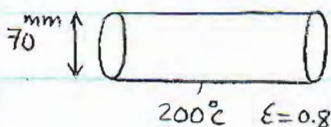
جسم داخل جسم سیاه باشد: $A. \quad e_1 = \epsilon_1 \sigma T_1^4$ نشری کنه

جذب می کنه: $B. \quad \alpha_{12} e_{b2} = \alpha_{12} \sigma T_2^4$ دهای جسم: T_1

$$q_{i, total} = A - B = \sigma (\epsilon_1 T_1^4 - \alpha_{12} T_2^4) \quad \alpha_{12} = \alpha_{11} = \epsilon_1$$

$$= \sigma \epsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

مثال: یک لوله ی فولادی بخار حاوی کنه. محیط جسم سیاه است: $T = 25^\circ C, h = 15 \frac{W}{m^2 K}$



توان نشری: $\epsilon \sigma T_1^4 = 0.8 \times 5.67 \times 10^{-8} (473)^4$

86.3.8

$$\Rightarrow \text{توان ششکلی} = 2270 \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

- شار انرژی تابشی به سطح واردهی شود: $G = \sigma T_2^4 = 5.67 (T_2)^4 = 447 \left(\frac{W}{m^2} \right)$

- کل شار گرمایی خارج شده از لوله:

$$q = \overbrace{h(200 - 25)}^{\text{وارد می شود}} + \overbrace{\epsilon \sigma T_1^4}^{\text{خارج می شود}} - \alpha \sigma T_2^4 = 998 \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

$$E_{12} = e A_1 = \underbrace{e_{b1}}_{\text{معمولاً}} A_1 F_{12}$$

$$E_{21} = e_{b2} A_2 F_{21}$$

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad \text{کاملاً بستری باشد}$$

$$F_{12} + F_{13} + \dots + F_{1n} = 1$$