بسمه تعالی

جزوه

جبر خطی ۱

دانشگاه

علم و صنعت

استاد

دکتر مرتضی ابراهیمی

Subject: جبر خطی Date: 3.7.85

روش‌های حل دستگاه معادلات خطی:
- مستقیم ← روش حذفی گاوس
- غیرمستقیم ← a) روش تکراری ژاکوبی b) روش گاوس - سایدل c) روش relaxation

روش‌های شبیه‌سازی محاسباتی کارآیی دارند که a) روش‌های Monte Carlo ← روش‌های شبیه‌سازی
ابعاد معادلات با بالا بوده ولی دقت روش‌های قبلی بالا نباشد.

یک دستگاه معادلات خطی $\xleftarrow{\text{گسسته‌سازی}}$ (خطی) PDE, ODE, IE معادلات

دستگاه معادلات خطی ← گسسته‌سازی ← خطی‌سازی ← (غیرخطی) PDF, ODE, IE معادلات

فصل اول: دستگاه معادلات خطی (همگن و غیرهمگن)
- اعمال سطری مقدماتی
- ماتریس‌ها

* شرط لازم و کافی وجود جواب برای $AX=0$

یعنی این معادله جواب بدیهی خواهد داشت اگر و فقط اگر $\det(A)$ $X=0 \iff \det A \neq 0$ if
نابرابر صفر باشد. اگر جواب غیرصفر داشته باشد حتماً $\det(A)=0$

* فصل دوم: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ که هر یک [illegible] می‌باشد

$\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس‌های با n سطر و n ستون با درایه‌های عضو اعداد حقیقی

هر فضای برداری دارای پایه‌ای است که ترکیب خطی آن‌ها فضا را تشکیل می‌دهند

$\dim(\mathbb{R}^n)=n$ $e_j = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ مؤلفه j ام

$j=1(1)n \Rightarrow$ یعنی n ترکیب به صورت پایه‌ای

بعد ماتریس $\mathbb{R}^{2\times 2}$ برابر با 4 است یعنی چهار ماتریس پایه استاندارد وجود دارند

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject: Date:

اگر n بردار V_1 ، ... ، V_n داشته باشیم به شرطی مستقل خطی اند که

$$A=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

* فصل سوم : تبدیلات خطی

$$V : T \longrightarrow W$$

دقت که مبدأ و مقصد در عبارت بالا یکی نشوند تا یک عملگر باشد (یعنی فضا تغییر کند) اگر V و W یکی باشند یک تبدیل می باشند

$\mathbb{R}^{2\times 2}$ ماتریس های 2×2 درمیان $\mathbb{R}$ و باشند

$\mathbb{C}^{2\times 2}$ " درمیان $\mathbb{C}$ "

* تعریف تبدیل خطی

$$\begin{matrix} \forall \alpha,\beta \in V \\ \forall c \in F \end{matrix} \Rightarrow T(c\alpha+\beta) = cT(\alpha)+T(\beta)$$

اسکالر

$\mathcal{L}(V,W)$ فضای تبدیلات از V به W

* فصل چهارم : مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

از هر تبدیل خطی می توان یک ماتریس تعریف کرد

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow [T]_{B,B'} = A$$

اگر یک ماتریس با یک ماتریس قطری متشابه باشد قطری شدنی است. $A = P^{-1}BP$

تعریف ماتریس های متشابه

* فصل پنجم : فضاهای ضرب داخلی

* منابع : ترجمه کتاب ... Hoffman جبر خطی

Subject: ① جبر خطی   Date: ۵.۷.۹۵

فصل اول : « دستگاه معادلات خطی »

مفاهیم مقدماتی :

* تعریف میدان :

مجموعه F همراه با دو عمل + و × را یک میدان گویند و با نماد $(F, +, \times)$ نشان می‌دهند هرگاه خواص زیر برقرار باشند :

① بسته بودن F نسبت به عمل اول (+) :

$\forall c_1, c_2 \in F \; ; \; c_1 + c_2 \in F$

② بسته بودن F نسبت به عمل دوم (×)

$\forall c_1, c_2 \in F \; ; \; c_1 c_2 \in F$

③ $(F, +)$ یک گروه آبلی (جابجایی) باشد

a - عضو خنثی عمل + را داشته باشد.

خواص گروه | b - وارون پذیر: به ازای هر $c \in F$ عضو $-c \in F$ وجود داشته باشد به طوریکه $c + (-c) = 0$

c - خاصیت شرکت پذیری عمل + : $\forall c_1, c_2, c_3 \; ; \; c_1 + (c_2 + c_3) = c_1 + (c_2 + c_3)$

d - خاصیت جابجایی

④ $(F, \times)$ یک گروه آبلی باشد

همه خواص بالا را دارا باشد فقط عضو خنثی عمل × برابر با 1 می‌باشد.

b) $c \times \frac{1}{c} = 1$

a) $c \times 1 = c$

⑤ توزیع پذیری عمل × نسبت به جمع (+) :

$\forall c_1, c_2, c_3 \in F \; ; \; c_1(c_2 + c_3) = c_1 c_2 + c_1 c_3$

$(\mathbb{R}, +, \times)$ یک میدان می‌باشد.

* در میدان‌ها عمل + نسبت به × توزیع پذیر نمی‌باشد

میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با جمع و ضرب $(+, \times)$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ میدان $\mathbb{R}$ زیرمجموعه میدان $\mathbb{C}$ می‌باشد

کوچکترین زیر میدان برابر با Q می‌باشد. Z میدان نیست چون $\frac{1}{2}$ وارون ضربی آن نیست

Subject: Date:

تمرین: $Q_1=\{x+\sqrt{2}y \mid x,y\in Q\}$ بررسی کنید Q_1 میدان است.

اگر y را برابر صفر بگیریم، $Q\subseteq Q_1$ می‌باشد. $\quad y=0 \Rightarrow Q\subseteq Q_1$ زیرمیدان

دستگاه معادلات خطی همگن

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \Rightarrow AX=0$$

ماتریس ضرایب A: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$

linear sys of algebraic equations

ماتریس: $A(i,j)=a_{ij}$

$i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ $\Rightarrow A\in F^{m\times n}$ یعنی A ماتریسی m سطر و n ستون است.

ماتریس مجهولات $X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix}$

یک دستگاه معادلات را با ماتریس نشان می‌دهیم.

هر معادله دستگاه ۲ یک ترکیب خطی از معادلات دستگاه ۱ باشد.

این دو دستگاه هم ارزند اگر ...

$$\begin{cases} b_{11}x_1+\cdots+b_{1n}x_n=0\\ b_{21}x_1+\cdots+b_{2n}x_n=0\\ \vdots\\ b_{m1}x_1+\cdots+b_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad BX=0$$

اگر هر معادله دستگاه ۱ یک ترکیب خطی از معادلات دستگاه ۲ و هر معادله دستگاه ۲ ترکیب خطی از معادلات دستگاه ۱ باشد، آنگاه $AX=0$ و $BX=0$ هم‌ارزند.

Subject: جبر خطی   Date: 5.7.85

* قضیه: جواب های دستگاه معادلات خطی هم ارز یکی می باشد

* قضیه بالا برای معادلات غیرخطی هم برقرار می باشد

* تعریف: ماتریس تحویل شده سطری:

ماتریس R را تحویل شده سطری گویند هرگاه در هر سطر آن اولین درایه غیرصفرش یک باشد

* تعریف: ماتریس تحویل شده سطری پلکانی:

ماتریس R را تحویل شده سطری پلکانی گویند هرگاه:

1) تحویل شده سطری باشد

2) سطرهای تمام صفر زیر همه سطرها قرار بگیرد

3) اگر درایه های غیرصفر مقدم سطر i در ستون k_i ام قرار داشته باشد $(i = 1, \ldots, r)$ آنگاه $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$

$$A \in F^{m \times n} \xrightarrow[\text{سطری پلکانی}]{\text{تحویل شده}} R \in F^{m \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

اعمال سطری مقدماتی:

1) ضرب یک اسکالر در یک سطر

2) افزودن c برابر سطر s ام به سطر r ام

3) جابجایی سطر r ام و سطر s ام

* تمام اعمال بالا وارون پذیر می باشند

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AX = 0 \Rightarrow RX = 0$ که R ماتریس تحویل شده سطری پلکانی A می باشد

Subject: Date:

* قضیه: اگر ماتریس تحویل شده سطری پلکانی ماتریس مربع $A \in F^{n\times n}$ ماتریس همانی باشد آنگاه A معکوس پذیر است.

* شیوه‌ای برای تعیین ماتریس معکوس A:

$$A \xrightarrow{\text{اعمال سطری مقدماتی}} R = I_{n\times n} \Rightarrow I \xrightarrow[\text{سطری}]{\text{همان اعمال}} A^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{پلکانی}]{\text{تحویل شده سطری}} R = I_{3\times 3}$$

$$I \longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$ یک ماتریس متقارن

تعریف ماتریس متقارن $\forall i,j: A_{ij} = A_{ji} \quad (A = A^T)$

تعریف ماتریس پادمتقارن $\forall i,j: A_{ij} = -A_{ji} \quad (A = -A^T) \rightarrow$ درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفرند

* تعریف ۱:

ماتریس‌های $A, B \in F^{m\times n}$ را هم‌ارز سطری گویند هرگاه B از روی A با تعداد متناهی عمل سطری مقدماتی بدست آید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ & & \vdots & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$ ماتریس هیلبرت

$\mathbb{Z}_2 = (F, +, \cdot)$ ، $F=\{0,1\}$ یک میدان است

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$1+1=0 \quad n=2$

$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ بار}}=0 \qquad char F = 2$

مشخصه‌های میدان F (مشخصه)

کوچکترین n ای که به ازای آن $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=0$ ، مشخصه میدان گویند

میدانی که n وجود نداشته باشد (اعداد حقیقی، مختلط) مشخصه‌ی آن را برابر صفر گیریم

ماتریس تحویل شده سطری:

ماتریس R را ماتریس تحویل شده سطری گویند هرگاه:

1) درایه مقدم غیر صفر هر سطر آن برابر 1 باشد.

2) همه درایه‌های ستونی که شامل درایه مقدم غیر صفر است، برابر صفر باشند.

$AX=0 \xrightarrow[\text{معادل}]{\text{اعمال سطری}} BX=0$ جواب‌ها یکسان می‌باشند

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad R=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تحویل سطری}} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$$

سطری تحویلی

* قضیه: به ازای هر ماتریس $m\times n$ مانند A روی میدان F، ماتریس سطری تحویل شده سطری $m\times n$ مانند R وجود دارد (که هم ارز سطری ماتریس A می‌باشد)

* قضیه: به ازای هر $A_{m\times n}$ یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی (REF) هم ارز سطری A وجود دارد.

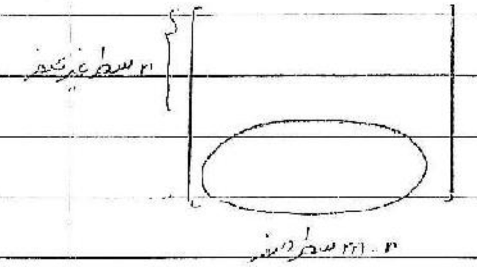
* مجموعه جواب $AX = 0$

فرض: ماتریس R دارای r سطر غیر صفر است یعنی $m-r$ سطر تمام صفر دارد. یعنی $m-r$ معادله بدیهی $(0=0)$ داریم و r معادله غیر بدیهی داریم

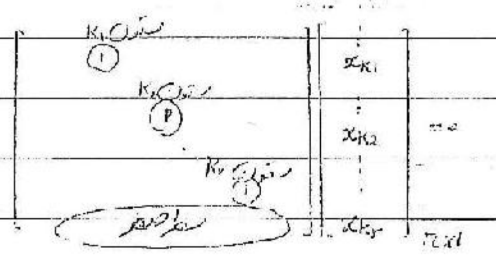
$AX=0 \longrightarrow RX=0$

R تحویل شده سطری پلکانی

درواقع r تا عنصر (درایه مقدم غیرصفر) داریم فرض کنیم درایه های مقدم غیرصفر در ستون های k_i ام قرار بگیرند $k_1<k_2<\cdots<k_r$



r تا مجهول $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$ و $n-r$ تا مجهول دیگر که آنها $u_1, \dots, u_{n-r}$



پس r معادله غیربدیهی به صورت زیر است (مجهول x_{k_i} فقط در معادله i ام ظاهر می گردد) $i=1,\dots,r$

$$1x_{k_1} + \sum_{j=1}^{n-r} C_{1j}u_j = 0$$

$$1x_{k_2} + \sum_{j=1}^{n-r} C_{2j}u_j = 0$$

$$\vdots$$

$$1x_{k_r} + \sum_{j=1}^{n-r} C_{rj}u_j = 0$$

r معادله غیر بدیهی

$m-r$ معادله $\begin{array}{|c} 0=0 \\ \vdots \\ 0=0 \end{array}$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_{k_1} = -\sum_{j=1}^{n-r} C_{1j}u_j \\ x_{k_2} = -\sum_{j=1}^{n-r} C_{2j}u_j \\ \vdots \\ x_{k_r} = -\sum_{j=1}^{n-r} C_{rj}u_j \end{array} \right.$$

ماتریس تحویل شده سطری پلکانی مثال $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

اگر $n=r$ آنگاه مجموعه جواب ها صفر است (جواب بدیهی)

* چه وقت دستگاه جواب غیر بدیهی دارد؟ وقتی که $r<n$

* قضیه: در دستگاه $AX=0$ که $A \in F^{m\times n}$ اگر $m<n$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب غیر بدیهی است

چون همیشه میدانیم $r \le m$

\# حل $AX = Y$, $Y \neq 0$ ناهمگن

$A \in F^{m\times n}$, $Y \in F^{m\times 1}$ $\quad AX = Y \xrightarrow{\text{اعمال سطری}} [A|Y]$

اعمال سطری مقدماتی روی A را انجام می‌دهیم تا به R برسیم و همزمان همان اعمال را روی Y انجام می‌دهیم

$\Rightarrow AX = Y \Longrightarrow RX = Z$ جواب هر دو یکسان می‌باشد.

$$1x_{k_1} + \sum_{j=1}^{n-r} C_{1j} u_j = Z_1 \qquad x_{k_1} = -\sum_{j=1}^{n-r} C_{1j} u_j + Z_1$$

$$1x_{k_2} + \sum_{j=1}^{n-r} C_{2j} u_j = Z_2 \qquad x_{k_2} = -\sum_{j=1}^{n-r} C_{2j} u_j + Z_2$$

$$\vdots$$

$$1x_{k_r} + \sum_{j=1}^{n-r} C_{rj} u_j = Z_r \Rightarrow x_{k_r} = -\sum_{j=1}^{n-r} C_{rj} u_j + Z_r$$

$Z_{r+1} = \dots = Z_n = 0$ این جواب‌ها با مشخص کردن مقادیر دلخواه به $u_1, \dots, u_{n-r}$ بدست می‌آید

* این شرط وجود جواب برای $AX = Y$ آن است که $Z_i = 0$, $i = r+1, \dots, m$

* مثال:

$$AX = Y \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad [A|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 5 & -1 & y_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{اعمال سطری}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & \frac{y_1 + 2y_2}{5} \\ 0 & 1 & -1/5 & \frac{y_2 - 2y_1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + 2y_1 \end{array}\right]$$

به خصوص مطلب بالا متغیرهای آزاد — شرط وجود جواب: $y_3 - y_2 + 2y_1 = Z_3 = 0$

جواب‌ها را بدست می‌آوریم — جواب $k_1 = 1$, $k_2 = 2$

$x_{k_1} = x_1 \quad x_{k_2} = x_2 \qquad u_1 = x_3$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{3}{5} c + \frac{1}{5}(y_1 + 2y_2)$

$x_2 = \frac{1}{5} c + \frac{1}{5}(y_2 - 2y_1)$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_3 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 13x_3 = 0 \\ -\frac{7}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{8}{3}x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -13 \\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{67}{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$RX = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{5}{4}x_2 = 0 \\ x_2 - \frac{67}{24}x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_3 = c \\ c \in \mathbb{R} \end{matrix} \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{4}c, \frac{67}{24}c, c\right)$$

* ماتریس مقدماتی:

ماتریسی که تنها با یک عمل سطری مقدماتی از ماتریس همانی بدست آید را ماتریس مقدماتی گویند

مثال: $I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad e_1(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_1$ مقدماتی

تمرین: تمام ماتریس‌های مقدماتی 2×2 را بنویسید (5 حالت) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ / $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ / $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ماتریس دوگانه

if $I_{n\times n}$ عمل سطری $e \rightarrow e(I) = E$ ماتریس مقدماتی $\rightarrow e(A) = EA$

مقدماتی

$E_3E_2E_1A$? $\quad e_1(I) = E_1 \quad e_2(I) = E_2 \quad e_3(I) = E_3$

$e_3(e_2(e_1(A))) = E_3E_2E_1A$

* قضیه: اگر $A \in F^{n\times n}$، شرط لازم و کافی برای اینکه $AX = 0$ فقط جواب بدیهی داشته باشد آن است که A هم ارز سطری $I_{n\times n}$ باشد

* ضرب ماتریسی:

$A \in F^{m\times n} \qquad B \in F^{n\times p}$

$\underset{m\times p}{C} = \underset{m\times n}{A}\underset{n\times p}{B} \qquad C = [C_{ij}]_{i=1, j=1}^{m, p} \rightarrow C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$

* قضیه: اگر ماتریس‌های A، B، C طوری باشند که ضرب‌های BC، $A(BC)$ تعریف شده باشند آنگاه ضرب‌های AB، $(AB)C$ نیز تعریف شده‌اند و داریم:

$A(BC) = (AB)C$

اگر $A \in F^{m\times n}$ ، B را هم‌ارز سطری A گویند اگر و فقط اگر $B = PA$

P حاصلضرب تعداد متناهی ماتریس مقدماتی است

$A \xrightarrow{\text{اعمال سطری}} B$ $\quad$ ماتریس مقدماتی $e_1(I) = E_1$: $I_{m\times m}$

عمل سطری مقدماتی

$$e_1(A) = E_1A$$

$$e_k(\cdots e_2(e_1(A))\cdots) = B \Rightarrow E_k(\cdots(E_2(E_1A))\cdots) = B$$

$$\Rightarrow \underbrace{E_k \cdots E_2E_1}_{P} A = B$$

P حاصلضرب ماتریس‌های سطری مقدماتی می‌باشد

* معکوس‌پذیری ماتریس‌ها

تعریف: اگر $A\in F^{n\times n}$ ماتریس $B\in F^{n\times n}$ را معکوس چپ A گوییم هرگاه $BA=I$
و $C\in F^{n\times n}$ را معکوس راست A گوییم هرگاه $AC=I$

* اگر B هم معکوس چپ و هم معکوس راست A باشد آنگاه B را یک معکوس دوطرفه A گویند

* اگر B معکوس چپ A و C معکوس راست A باشد آنگاه $B=C$

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

* اگر B یک معکوس دوطرفه A باشد می‌گوییم A معکوس‌پذیر است و $A^{-1}=B$

* اگر $A\in F^{n\times n}$ معکوس‌پذیر باشد آنگاه A^{-1} معکوس‌پذیر است و $(A^{-1})^{-1}=A$

* اگر $A,B\in F^{n\times n}$ ماتریس‌های معکوس‌پذیر باشند آنگاه AB نیز معکوس‌پذیر است و $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

پس ضرب تعداد متناهی ماتریس‌های معکوس‌پذیر یک ماتریس معکوس‌پذیر است

if $A=A_1A_2\cdots A_k \Rightarrow A^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

$A_i \in F^{n\times n}$ معکوس‌پذیر

* هر ماتریس مقدماتی معکوس‌پذیر است

$e(I)=E \quad e_1(I)=E_1 \quad$ if $EE_1=E_1E=I \Rightarrow E_1=E^{-1}$

اثبات: $I = ee_1(I) = e(e_1(I)) = eE_1 = EE_1$

$I = e_1e(I) = e_1E = E_1E$

Subject: Date:

* قضیه: اگر $A \in F^{n \times n}$ باشد آنگاه گزاره‌های زیر هم ارز هستند:

1) A معکوس پذیر است

2) A هم ارز سطری ماتریس همانی $I_{n \times n}$ است

3) A حاصلضرب از ماتریس های مقدماتی است

$$A \xrightarrow[\text{عمل سطری مقدماتی}]{\text{تعداد متناهی}} R = I \qquad E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

$$A = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1} I = \underbrace{E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}}_{\text{حاصل ضرب ماتریس های مقدماتی}}$$

* اگر ماتریس $A \in F^{n \times n}$ با یک دنباله متناهی عمل سطری مقدماتی به ماتریس همانی $(R = I)$ تحویل شود آنگاه اعمال همین اعمال سطری بر I ماتریس A^{-1} را بدست می‌دهد.

* قضیه: اگر $A \in F^{n \times n}$ باشد آنگاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

الف) A معکوس پذیر است

ب) دستگاه $AX = 0$ فقط جواب بدیهی دارد

ج) دستگاه $AX = Y$ به ازای هر Y فقط یک جواب می‌باشد.

* قضیه: اگر ماتریس $A \in F^{n \times n}$ دارای یک معکوس چپ و یک معکوس راست باشد آنگاه معکوس پذیر می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم B معکوس چپ ماتریس A باشد یعنی $BA = I$

$$AX = 0 \Rightarrow BAX = 0 \Rightarrow IX = 0 \Rightarrow X = 0$$

پس $AX = 0$ فقط جواب بدیهی دارد پس طبق قضیه قبل A معکوس پذیر باشد.

اما اگر $AC = I$ یعنی A دارای معکوس چپ می‌باشد پس C معکوس A است یعنی A هم معکوس پذیر است.

* دستگاه غیر همگن:

$$AX = Y \xrightarrow[\text{سطری مقدماتی}]{\text{تحویل شده}} RX = Z \qquad Z = PY$$

P حاصل ضرب ماتریس های مقدماتی

اگر A معکوس پذیر باشد $P = A^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \; AX = Y \Rightarrow (A \mid Y) \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3y_1 + y_2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-y_1 + 2y_2}{7} \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

$I = R$ پس A معکوس پذیر است

$RX = Y \xrightarrow[\text{سطری}]{\text{اعمال}} RX = PY$

اگر A وارون پذیر باشد $P = A^{-1}$, $R = I$ $\Big\}$ $IX = A^{-1}Y \rightarrow X = A^{-1}Y$

---

* فصل دوم: « فضاهای برداری »

"Vector Space"

* تعریف: یک فضای برداری تشکیل است از میدان اسکالری F

مجموعه V از بردارها

عمل دوتایی به نام جمع برداری $+$ که به ازای هر دو عنصر α و β از V بردار $\beta+\alpha$ در V را متناظر می‌کند با شرایط زیر:

1) خاصیت جابجایی برقرار باشد $\alpha+\beta = \beta+\alpha$

2) خاصیت شرکت پذیری $\forall \alpha,\beta,\gamma \in V : (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$

3) وجود عضو خنثی (صفر) به نام بردار صفر

$\forall \alpha \in V : \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

4) وجود عضو قرینه $\forall \alpha \in V : \exists (-\alpha) \in V : \alpha + (-\alpha) = 0$

عمل دوتایی به نام ضرب اسکالری که دارای شرایط زیر می‌باشد:

1) وجود عضو خنثی $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ $(1 \in F)$ که اسکالر

2) $\forall c_1, c_2 \in F, \forall \alpha \in V : (c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$

3) $\forall c \in F, \forall \alpha,\beta \in V : c(\alpha+\beta) = c\alpha + c\beta$

4) $\forall c_1, c_2 \in F, \forall \alpha \in V : (c_1+c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$

1) مثال) $V = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in F\}$ $\quad \forall \alpha,\beta \in V, \quad \alpha+\beta = (x_1, \dots, x_n + y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

فضای برداری n تایی مرتب

1 $V = F^n$ یا $F^{1\times n}$

Subject: Date:

2) مثال $V=\{A \mid A\in F^{m\times n}\}$ $V=F^{m\times n}$ نمایش دیگر

$\forall A,B\in V \Rightarrow (A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$

3) مثال: $V=\{f \mid f: S\longrightarrow F\}$ یک عضو این فضا : تابع صفر $f(x)=0$

مجموعه غیرتهی میدان اسکالر

مثال 2 حالت خاص مثال 3 است زیرا که

$A(i,j)=A_{ij} \Rightarrow A: S\longrightarrow F$ درایه های ماتریس می شود

$i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n$ تعبیر یک تابع می باشد

*مثال 4 هم حالت خاص مثال 3 می باشد.

$X: S\longrightarrow F$

$S=\{1,\dots,n\} \Rightarrow X(1)=x_1$

$\vdots \quad \Rightarrow (x_1,\dots,x_n)=(X(1),\dots,X(n))$

$X(n)=x_n$

مثال) فضای توابع چندجمله ای درجه n

$V=\{f \mid f(x)=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n\}$

F (میدان)

$f: F\longrightarrow F$

$c_i\in F$

این مثال هم حالت خاص مثال 3 می باشد.

$V_1=F^n \xrightarrow{F=\mathbb{R}} V_1=\mathbb{R}^n$

$\xrightarrow{F=\mathbb{C}} V_2=\mathbb{C}^n$ میدان اسکالر روی $\mathbb{R}$

$V_3=\{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i\in\mathbb{C}\}$ اگر میدان $F=\mathbb{R}$ $\Rightarrow V_3\neq V_2$, $V_3\neq V_1$

$F=\mathbb{C}$ روی V_3 — $V_3=V_2$

$\mathbb{R}$ روی $V_1=\{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}$: میدان اسکالر

$\mathbb{C}$ روی $V_3=\{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i\in\mathbb{C}\}$

مثال: ماتریس خودالحاقی (هرمیتی یا selfadjoint) $A_{ji} = \overset{\text{مزدوج}}{\bar{A}_{ji}}$

مجموعه همه ماتریس‌های هرمیتی 2×2 $= V = \left\{ \begin{bmatrix} x & v \\ z & w \end{bmatrix} \;\middle|\; x, v, z, w \in F \right\}$

$$\text{if } F = \mathbb{C} \longrightarrow V = \left\{ \begin{bmatrix} x & a+ib \\ a-ib & y \end{bmatrix} ,\; x, y, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

* آیا مجموعه ماتریس‌های هرمیتی 2×2 روی میدان اسکالر $\mathbb{C}$ یک فضای برداری است؟

خیر چون ضرب یک ماتریس هرمیتی در یک عدد مختلط دیگر هرمیتی نمی‌ماند.

فضاهای برداری:

فرض می‌کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد.

تعریف: بردار β روی V ترکیب خطی از بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ از V است هرگاه

$\exists c_1, \dots, c_n \in F$ s.t.

$\beta = \alpha_1 c_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$

* تعریف:

زیرمجموعه W از V را یک زیرفضای برداری از V گوییم هرگاه W با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری V خودش یک فضای برداری باشد.

مثال: $V = F^{m\times m}$, $W = \{A \in V\}$
اگر A متقارن باشد

آیا W زیرفضای V است، یعنی آیا W خودش یک فضای برداری است. $\Rightarrow W \overset{\text{مجموعه}}{\subseteq} V$

جمع برداری: $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

ضرب اسکالری: $(cA)_{ij} = cA_{ij}$

W یک فضای برداری است پس $W \overset{\text{فضا}}{\subseteq} V$ است.

* قضیه:

اگر W یک زیرمجموعه غیرتهی از V باشد آنگاه W زیرفضای V است هرگاه برای هر α, β از W و هر $c \in F$ داشته باشیم

$c\alpha + \beta \in W$

مثال: آیا مجموعه ماتریس‌های هرمیتی زیرفضای $F^{n\times n}$ است.

$F = \mathbb{C}^{2\times 2}$ ماتریس هرمیتی $A = \begin{bmatrix} x & a+ib \\ a-ib & y \end{bmatrix}$ $\Rightarrow c\alpha + \beta$ ماتریس هرمیتی است.

$c \in \mathbb{C}$ اسکالر را $\mathbb{R}$ می‌گیریم چون ماتریس‌های هرمیتی روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند

Subject: Date:

مثال: $AX=0 \quad A\in F^{m\times n} \quad X\in F^{n\times 1}$

آیا W فضای برداری است؟ $W=\{X\in F^{n\times 1} \mid AX=0\}$ جواب‌های دستگاه $AX=0$

$W\subseteq F^{n\times 1}$ یک فضای برداری است

if $X,Y\in W,\ c\in F \Rightarrow cAX+AY=0 \Rightarrow A(cX+Y)=0 \Rightarrow cX-Y\in W \Rightarrow W \overset{\text{زیرفضا}}{\subseteq} F^{n\times 1}$

* فرض این که $W_i \overset{\text{زیرفضا}}{\subseteq} V$ آنگاه $\bigcap_i W_i$ زیرفضای V است.

* آیا $\bigcup W_i$ یک زیرفضای برداری از V می‌باشد؟ خیر

* تعریف: اگر $S\subseteq V$ که در این صورت آنگاه اشتراک تمام زیرفضاهای V که شامل S هستند را فضای تولید شده توسط S گویند.

اگر $S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ (یعنی S متناهی باشد) آنگاه داریم:

فضای برداری تولید شده توسط S $=\langle \alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle$

یا

فضای برداری تولید شده توسط $\alpha_1,\dots,\alpha_n$

* تمرین مثال:

$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \quad V=\mathbb{R}^3 \quad F=\mathbb{R}$

$\alpha_1=(1,0,-1)$

$\alpha_2=(2,0,0)$

$\alpha_3=(2,0,-3)$

مطلوب است $W=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$؟

* قضیه: اگر S یک زیرمجموعه غیرتهی از V باشد آنگاه فضای برداری تولید شده توسط S عبارت است از:

مجموعه ترکیبات خطی اعضای S

جواب: $W=\{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3 \mid c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\}$

$=\{(c_1+2c_2+2c_3,\ 0,\ -c_1-2c_3) \mid c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\}$

Subject: جبر خطی ۲ Date: 19.7.85

$W=\{0\} \overset{\text{فضا}}{\subseteq} V$ و $V \overset{\text{فضا}}{\subseteq} V$ زیرفضاهای بدیهی هستند — V یک فضای برداری غیر صفر باشد. :if

if $W=\phi \rightarrow W \overset{\text{مجموعه}}{\subseteq} V \rightarrow$ آیا $W \overset{\text{فضا}}{\subseteq} V$ ؟ ← خیر چون عضو صفر ندارد.

* هر زیرمجموعه از V ، $W=\{0\}$ را شامل می‌کند.

... زیرفضا وقتی است که تحت جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد.

$S_1 \overset{\text{مجموعه}}{\subseteq} V$, $S_2 \overset{\text{مجموعه}}{\subseteq} V$

$S_1+S_2=\{\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in S_1,\ \alpha_2\in S_2\}$

مثال: فرض $V=\mathbb{R}$ $S_1=\{1,3\}$ $S_2=\{1,6,7,2\}$

$S_1+S_2=\{2,7,8,3,4,9,10,5\}$

if $W_i \overset{\text{فضا}}{\subseteq} V$, $i=1,\dots,n$: $\sum_{i=1}^{n} W_i \overset{\text{فضا}}{\subseteq} V$? تمرین

$\alpha\in W \rightarrow \alpha=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n\in W$ $c\alpha+\beta\in W$ $(c\alpha_1+\beta_1)+$ $c\alpha_1\in W_1$, $\beta_1\in W_1 \rightarrow c\alpha_1+\beta_1\in W_1$

$\beta\in W \rightarrow \beta=\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n\in W$ $c\alpha_2\in W_2$ $\beta_2\in W_2$

$W=\sum_{i=1}^{n} W_i=\{\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n \mid \gamma_i\in W_i\}$ $c\alpha_n\in W_n$ $\beta_n\in W_n$ $c\alpha_n+\beta_n$

$\alpha \quad \beta \rightarrow \omega_1+\omega_2+\dots+\omega_n=(c\alpha_1+\beta_1)+\dots+(c\alpha_n+\beta_n)\in W$

$\rightarrow c(\alpha_1+\dots+\alpha_n)+(\beta_1+\dots+\beta_n)\in W \rightarrow \boxed{c\alpha+\beta\in W}$

$\forall \alpha,\beta\in W$

$\forall c\in F \quad \Rightarrow c\alpha+\beta\in W \checkmark \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} W_i\subseteq V$

* تمرین: $W_i\subseteq\sum_{i=1}^{n} W_i$ if $\gamma_i\in W_i$

$\dots \gamma_i \dots \in \sum W_i$

$W=\bigcup_{i=1}^{n} W_i$ فضای تولید شده توسط ...

Subject: جبر خطی (1/1) Date: 85.7.29

فضای سطری ماتریس (مثال) $A\in F^{m\times n}$

$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$ فضای سطری ماتریس A : $\langle\alpha_1,\dots,\alpha_m\rangle$

$\alpha_i=(a_{i1},\dots,a_{in})$

$i=1(1)m$

فضای ستونی ماتریس A : $\langle\beta_1,\dots,\beta_n\rangle$ $A=[\beta_1,\dots,\beta_n]$

V توسط کدام مجموعه تولید می‌گردد: $V=\{f:F\to F \mid f(x)$ یک چندجمله‌ای است $\}$

حل: $f(x)=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n;\ c_i\in F$

V فضای برداری تولید شده توسط S: $f_k(x)=x^k,\ k=0,1,2,\dots \Rightarrow S=\{1,x,x^2,\dots\}$

مثال: $f(x)=1+2x^2 \quad c_0=1,\ c_1=0,\ c_2=2,\ c_i=0$

$i=3,\dots$

* پایه و بعد فضای برداری:

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری بر میدان F باشد، زیرمجموعه S از بردارهای V را وابسته خطی گوییم، هرگاه بردارهای $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n$ در S و اسکالرهای $c_0,c_1,\dots,c_n$ در F (که همگی صفر نیستند) وجود داشته باشند بطوری که:

$$c_0\alpha_0+c_1\alpha_1+\dots+c_n\alpha_n=0$$

* اگر S متناهی باشد مثلاً $S=\{\alpha_0,\dots,\alpha_n\}$ می‌گوییم بردارهای $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ وابسته خطی اند.

اگر S وابسته خطی نباشد آن را مستقل خطی گوییم.

* نکات:

1) هر مجموعه‌ای که شامل یک مجموعه وابسته خطی باشد خود وابسته خطی است.

2) هر مجموعه‌ای از یک مجموعه مستقل خطی خود مستقل خطی است.

Subject: Date:

زیرمجموعه S از بردارهای V را مستقل خطی گوییم هرگاه به ازای هر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ در S و هر اسکالر $c_1, c_2, \dots, c_n$ در F

اگر $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = 0$ نتیجه بگیریم که همه c_i ها صفر باشند

3) مجموعه‌ای که شامل بردار صفر باشد لزوماً وابسته خطی است $1 \cdot 0 = 0$

4) مجموعه S مستقل خطی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه متناهی آن مستقل خطی باشد

تعریف پایه:

یک پایه برای فضای برداری V، مجموعه مستقل خطی از بردارهای V است که V را تولید کند

* اگر فضای برداری V دارای پایه‌ای متناهی باشد، آنگاه آن را با بعد متناهی گویند

بعد V $= \dim(V) =$ تعداد عناصر پایه

مثال: $V = \mathbb{R}^n$

if $n=3 \Rightarrow V=\mathbb{R}^3$

$\underbrace{i}_{e_1}=(1,0,0)$ $\underbrace{j}_{e_2}=(0,1,0)$ $\underbrace{k}_{e_3}=(0,0,1)$ $\Rightarrow$ مستقل خطی $B=\{e_1,e_2,e_3\}$

$\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ $\xrightarrow{\text{اثبات}}$ if $\alpha=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow \alpha = ae_1+be_2+ce_3$

فضای برداری تولید شده توسط B

پس B یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

* تعمیم: $B=\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \Rightarrow$ پایه استاندارد

$e_j = \{0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{th}}, 0, \dots, 0\} \Rightarrow$ B مستقل خطی است و $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کند

پس B یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد

$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

Subject: درجه ۲

Date: 85. 7. 24

مثال: $V = F^{m\times n}$ $B=\{A\in F^{m\times n} \mid \dots\}$ ⇒ $\dim(V)=mn$

مثال $V=F^{2\times 2}$ ⇒ $B=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}}_{\alpha_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}_{\alpha_2}, \underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}}_{\alpha_3}, \underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\alpha_4}$

B مستقل خطی است و داریم

$\langle \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\rangle = V$

⇒ پایه V ، B ⇒ $\dim(V)=4$

مثال: $V=\{f: F\to F \mid$ f یک چندجمله‌ای حداکثر درجه n $\}$

$f(x)=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n$ ⇝ $B=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ B مستقل خطی است

$\langle 1,x,\dots,x^n\rangle = V$ ⇝ $\dim V = n+1$

$V_1=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2 \quad c_2\neq 0\}$ چندجمله‌ای درجه ۲

$V_2=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2\}$ $1+x$ در V_2 هست ولی در V_1 نمی‌باشد

$5\in V_2$ ولی $5\notin V_1$ می‌باشد

نتیجه V_1 زیرمجموعه V_2 است.

$1+x+x^2\in V_1$
$-x^2\in V_1$ ⟶ ترکیب خطی از V_1 با برد در V_1 باشد ⇒ $(1+x)\in V_1$ ⇒ $V_1=V_2$ هر دو تای اند

پس $\dim\{V_1\}=\dim\{V_2\}$
$=3$

$V_1=$ فضای برداری تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های درجه ۲ ⇝ $V_1=V_2$

$V_1=$ چندجمله‌ای‌های درجه دقیقاً ۲ ... فضای برداری نیست چون صفر ندارد

Subject: Date:

$V = \{ f : F \to F \mid$ یک چندجمله‌ای $f \} = F[x]$

ادعا: B یک پایه‌ای V است. $B = \{1, x, x^2, \dots\}$

ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعه متناهی از B مستقل خطی است

فرض: $B_1 = \{1, x, \dots, x^n\} \subseteq B$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = 0 \\ g : F \to F \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in F \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow$$ $g(x)$ بی‌نهایت ریشه دارد

در صورتیکه $\deg(g(x)) \le n$ و حداکثر n ریشه در F دارد پس این درست نمی‌باشد مگر اینکه $g(x) = 0$ باشد

یعنی چندجمله‌ای صفر باشد یعنی $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ باشد. پس B مستقل خطی می‌باشد.

$\therefore$ B فضای V را تولید می‌کند.

if $f(x) \in V \Rightarrow f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m \Rightarrow f(x) \in \langle 1, x, \dots, x^m \rangle$

زیرفضای B می‌باشد.

یا $f(x) \in \langle 1, x, \dots, x^m, \dots \rangle$

در واقع: $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m + 0x^{m+1} + 0x^{m+2} + \dots$

آیا V پایه‌ای متناهی دارد؟ خیر

فرض خلف: B' پایه‌ای متناهی باشد.

فرض اینکه بزرگترین درجه چندجمله‌ای‌های موجود در B' برابر با k باشد. پس B' نمی‌تواند $h(x)$ از درجه $k+1$ را تولید کند.

تمرین: $P = [P_1 \; P_2 \; \dots \; P_n]$ معکوس‌پذیر $P \in F^{n \times n}$

$\langle P_1, P_2, \dots, P_n \rangle = ? \; F^{n \times 1}$

یعنی ستون‌های یک ماتریس معکوس‌پذیر پایه‌ای برای $F^{n \times 1}$ می‌باشد.

$$PX = 0 \quad \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_nP_n = 0$$

$X \in F^{n \times n}$; $x_i \in F$

چون P معکوس‌پذیر است $\Rightarrow PX = 0$ فقط جواب صفر دارد $\Rightarrow X = 0 \Rightarrow x_i = 0 \Rightarrow$ P_i ها مستقل خطی‌اند.

Subject: جبرخطی ۳۱ Date: ۴ . ۲۴

از بررسی تولیدشان .

$\forall Y \in F^{n\times 1} \Rightarrow \exists c_1,\dots,c_n \in F \rightsquigarrow c_1P_1 + c_2P_2 + \dots + c_nP_n = Y$

پس به ازای هر Y دستگاه غیرهمگن $PC = Y$ جواب دارد ⟸ P معکوس‌پذیر ⟸ $Y = PC\ ;\ C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

$C = P^{-1}Y$

مثال: $W = \{0\} \subseteq V \rightsquigarrow \dim(W) = ?$

$S = \phi \rightsquigarrow$ فضای تولید شده توسط S $= \{0\}$ ⟸ $\phi = S$

S مستقل خطی است ⟸ S پایه‌ای برای W ⟸ $\dim W = 0$

فضای تولید شده توسط تهی که عبارت است از اشتراک همه زیرفضاهای که شامل تهی هستند. اشتراک همه زیرفضاهای V که شامل ϕ باشند برابر $\{0\}$ می‌باشد.

* اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد که توسط بردارهای $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ تولید می‌شود آنگاه هر زیرمجموعه مستقل خطی از V حداکثر m عضو دارد.

* نتیجه: اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد آنگاه هر دو پایه از V دارای تعداد مساوی (و متناهی) عضو هستند.

$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$
$B' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k'}\}$ ⟶ B, B' دو پایه برای V $\Rightarrow$ $k \leq k'$, $k' \leq k \Rightarrow k' = k$

* بنابراین تعریف می‌کنیم $\dim(V) = n$ یعنی فضای برداری V دارای پایه‌ای با n عضو می‌باشد.

* نتیجه: فرض کنید $\dim(V) = n$ آنگاه هر زیرمجموعه بیش از n عضو وابسته خطی است و هیچ زیرمجموعه با کمتر از n عضو نمی‌تواند پایه‌ای برای V باشد.
V را تولید نمی‌کند

* سؤال: فرض کنید $A \in F^{m \times n}$

$W = \{X \in F^{n \times 1} \mid AX = 0\}$ فضای جواب دستگاه $AX = 0$

مطلوب است $\dim(W)$:

پاسخ: A ⟶ تحویل سطری پلکانی R ⟶ R r = تعداد سطرهای غیرصفر R

$\{AX = 0$ فضای جواب دستگاه$\} = \{RX = 0$ فضای جواب$\}$ $\dim($فضای جواب $RX = 0) = n - r$

چون $n-r$ عضو در بردار سطری هستند آنها را متغیر گرفته و بقیه برحسب آنها تعریف می‌گردند.

$u_1, \ldots, u_{n-r}$ را آزاد گرفته

$$x_{k_1} = -\sum_{j=1}^{n-r} c_{1j} u_j$$

یعنی فضای جواب توسط $n-r$ عضو مرتبط به $n-r$ سطر صفر ماتریس پلکانی

$$x_{k_r} = -\sum_{j=1}^{n-r} c_{rj} u_j$$

معین می‌گردد

سؤال: فرض کنید V یک فضای برداری روی F باشد و S یک زیرمجموعه مستقل خطی از V باشد.
$\beta \in V$ و $\beta \notin \langle S \rangle$ آیا $S \cup \{\beta\}$ مستقل خطی است؟

جواب: $\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k$ ترکیب خطی اعضای دیگر ... $\beta \in \langle S \rangle$ ... $\beta \in S$ یا $\beta \in V$
می‌توان این عضو را حذف

Subject: Date:

اگر B دیگر اضافه کنیم دیگر [illegible] هم α_3 باشد مستقل نمی‌باشند. نمی‌توان به اضافه کرد هر ... مخالف ... این پایه یک ... نمی‌باشد.

* قضیه: اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد و W زیرفضای V باشد آنگاه هر زیرمجموعه مستقل خطی از W جزئی از یک پایه و مستقل است.

* نتیجه 1: اگر W زیرفضای سره (محض، غیر مساوی) از فضای برداری با بعد متناهی V باشد آنگاه $\dim W < \dim V$

* نتیجه 2: هر زیرمجموعه مستقل خطی از V $(\dim V < \infty)$ جزئی از یک پایه متناهی می‌باشد.

* $A \in F^{n\times n}$ که $\alpha_i = (A_{i1}, \dots, A_{in})$ ،

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

بردارهای سطری ماتریس A

اگر α_i ها مستقل خطی باشند آنگاه تحویل شده سطری پلکانی A یعنی R سطر صفر ندارد.

دستگاه $AX=0$ فقط جواب بدیهی دارد این یعنی $\Rightarrow$ $AX=0$ بعد فضای جواب $= n-r = n-n = 0$

معکوس‌پذیر می‌باشد.

* قضیه: اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F و W_1 و W_2 دو زیرفضای برداری از V باشند آنگاه:

$$\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

مثال: $V = F^{2\times 2} \Rightarrow \dim V = 4 \Rightarrow W_1 = \left\{ A \in F^{2\times 2} \mid A = \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}, x, y, z \in F \right\}$

$W_2 = \left\{ A \in F^{2\times 2} \mid A = \begin{bmatrix} x & y \\ -x & z \end{bmatrix}, x, y, z \in F \right\}$

پایه W_1: $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\quad \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle = W_1 \Rightarrow c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow \dim W_1 = 3$

Subject: Date

W_2 پایه $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\quad \begin{bmatrix} x & y \\ -x & z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dim\{W_2\} = 3$

از $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ -x & y \end{bmatrix} \middle| x, y \in F \right\} \Rightarrow B = \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}}_{\text{پایه‌ای برای } W_1 \cap W_2}$

$\Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 2$

$\Rightarrow \dim(W_1 + W_2) = 3 + 3 - 2 = 4$

$W_1 + W_2$ زیرفضای V است و بعدش با V یکی است پس $W_1 + W_2 = V$

اگر بخواهیم با استفاده از تعریف نشان دهیم هر ماتریس 2×2 را می‌توان به صورت مجموع ... نوشت: عضو دلخواه از V

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a' & c \\ -a' & d \end{bmatrix}}_{W_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} a'' & -a' \\ e & f \end{bmatrix}}_{W_2} \Rightarrow A \in W_1 + W_2 \Rightarrow V \subseteq W_1 + W_2$

از طرفی $W_1 + W_2 \subseteq V$ پس $W_1 + W_2 = V$

$\Downarrow$

اگر a' و a'' را برابر $a/2$ بگیریم می‌توان این مطلب را نشان دهیم $\quad \begin{bmatrix} a/2 & b + a/2 \\ -a/2 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a/2 & -a/2 \\ c + a/2 & f \end{bmatrix}$

فضای برداری R روی میدان Q ؟

if $\dim(V) = 1$ $\quad$ یعنی یک عدد از R با ضرایب از Q بتواند کل R را بسازد. $\times$

if $\dim(V) = 2$, $B = \{a, b\}$ $\quad \times$ $\quad$ چون همه اعداد گنگ را نمی‌سازد.

$a \in Q \quad b \in Q'$

با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که بعد R روی Q ... است؟

$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای R $\Rightarrow \forall r \in R, \; r = q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \dots + q_n\alpha_n$

* مختصات:

فضای برداری V روی میدان F فرض. $\dim V = n$ پس $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V می‌باشد.

(ترتیب پایه‌ها مهم است ... (...))

* تعریف: یک پایه مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی V دنباله‌ای از بردارهای V است که مستقل خطی است و V را تولید می‌کند.

Subject: Date:

$V=\mathbb{R}^n$ و $F=\mathbb{R}$ و $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ پایه استاندارد

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1=(1,0,\dots,0) \\ e_2=(0,1,0,\dots,0) \\ \vdots \\ e_j=(0,\dots,\underset{j\text{-th}}{1},0,\dots) \end{cases}$$

$\forall \alpha\in\mathbb{R}^n:\ \alpha=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$= x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$

$V=\mathbb{R}^2$ ، $\alpha=(2,-3)$ مختصات در پایه $B=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ استاندارد

$\Rightarrow \alpha=(2,-3)=2(1,0)-3(0,1)=2e_1-3e_2$

* قضیه: اگر $\dim V=n$ و $\alpha\in V$ و $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V باشند آنگاه اسکالرهای یکتای x_i وجود دارند بطوریکه

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$$

اثبات یکتایی x_i ها:

$$\text{if } \alpha=\sum_{i=1}^{n}z_i\alpha_i \Rightarrow 0=\alpha-\alpha=\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)\alpha_i$$

چون α_i ها مستقل خطی اند $\longrightarrow x_i-z_i=0 \Rightarrow x_i=z_i$

ماتریس مختصات بردار α در پایه مرتب B $=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=[\alpha]_B$

* قضیه: اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد ($\dim V=n$) و B و B' دو پایه مرتب برای V باشند آنگاه ماتریس معکوس پذیر $P\in F^{n\times n}$ وجود دارد بطوریکه

$B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ $B'=\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_n\}$

$$\forall \alpha\in V:\ [\alpha]_B=P[\alpha]_{B'} \quad , \quad [\alpha]_{B'}=P^{-1}[\alpha]_B$$

که در آن P_j یعنی ستون j ام ماتریس P برابر است با: $P_j=[\alpha'_j]_B$

ستون j-th ماتریس P

از ترکیبات اعضای B نوشتن α'_j ها که اندازه اعضای ستون j-th ام می باشند.

Subject: 3/1 ترجمه Date: 26.7

قضیه: اگر $\dim V = n$ ، $B=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتب برای V باشد و $P \in F^{n \times n}$ یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد آنگاه پایه مرتب $B'=\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ برای V وجود دارد که:

$\forall \alpha \in V : [\alpha]_{B'} = P^{-1}[\alpha]_B$

کافیست $\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i$ ، $j = 1, 2, \dots, n$

V یک فضای برداری روی F.

$\dim(V)=n$ ، $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ یک پایه مرتب برای V

$$\forall \alpha\in V:\ \alpha = x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n \Rightarrow [\alpha]_B=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$ مختصات بردار α در پایه مرتب B

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$$

* قضیه ①: $\dim(V)=n$ ، $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ ، $B'=\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_n\}$ پایه‌های مرتب برای V. آنگاه ماتریس معکوس‌پذیر $P\in F^{n\times n}$ وجود دارد که:

$$\forall\alpha\in V:\ [\alpha]_B=P[\alpha]_{B'}\quad \text{و}\quad [\alpha]_{B'}=P^{-1}[\alpha]_B$$

* قضیه ②:

$\dim V=n$ ، $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه مرتب

$P\in F^{n\times n}$ ماتریس معکوس‌پذیر

آنگاه وجود دارد پایه مرتب $B'=\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_n\}$ بطوریکه:

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\alpha_i \qquad j=1,\dots,n$$

مثال: $V=\mathbb{R}^{2\times 1}$ ، $B=\{e_1,e_2\}$ پایه استاندارد

$$\Rightarrow B=\{(1,0),(0,1)\}$$

ماتریس تبدیل دوران θ

$$P=\begin{array}{cc} P_1 & P_2 \\ \hline \end{array}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow P\in\mathbb{R}^{2\times 2}\qquad \det(P)=1\neq 0\Rightarrow$$ P معکوس‌پذیر

حل. طبق قضیه (2) پایه $B'=\{\alpha'_1,\alpha'_2\}$ وجود دارد بطوریکه:

$$[\alpha]_{B'}=P^{-1}[\alpha]_B \qquad \text{if } \alpha=(x_1,x_2)\in V=\mathbb{R}^2\Rightarrow \underset{B\ \text{استاندارد}}{[\alpha]_B}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha=x_1e_1+x_2e_2$$

$$[\alpha]_{B'}=\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'_1=x_1\cos\theta+x_2\sin\theta\\ x'_2=-x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\end{cases}\Rightarrow \alpha'_1=\sum_{i=1}^{2}P_{i1}\alpha_i=P_{11}\alpha_1+P_{12}\alpha_2=$$

$$=\cos\theta(1,0)+\sin\theta(0,1)\Rightarrow\alpha'_1=(\cos\theta,\sin\theta)$$

$$\alpha_2' = \sum_{i=1}^{2} P_{i2}\alpha_i = P_{12}\alpha_1 + P_{22}\alpha_2 = -\sin\theta(1,0) + \cos\theta(0,1) = (-\sin\theta, \cos\theta) \in \mathbb{R}^2$$

یعنی برای θ های مختلف بی‌نهایت α وجود دارد.

چون پایه اول استاندارد بود می‌توان α_1', α_2' را برحسب ماتریس P نمایش داد. $\Rightarrow \alpha_1' = P_1^T \quad , \quad \alpha_2' = P_2^T$

$\alpha_1' \quad \alpha_2' \quad \alpha_3'$ ← چون پایه اولیه استاندارد می‌باشد.

*مثال: $F \subseteq \mathbb{C}$ و
$$P = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
، $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ پایه استاندارد برای F^3 ، $V = F^3$ است.

ضمن قضیه ۲ وجود دارد: $B' = \{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\}$ طوریکه $[\alpha]_{B'} = P^{-1}[\alpha]_B$

ابتدا P معکوس: $\Rightarrow \det[P] = -16 \Rightarrow$ معکوس‌پذیر باشد
$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 11/8 \\ 0 & 1/2 & 3/16 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

$$[\alpha]_{B'} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} \quad , \quad [\alpha]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 + \frac{11}{8}x_3 \\ x_2' = \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{16}x_3 = 0x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{16}x_3 \\ x_3' = \frac{1}{8}x_3 = 0x_1 + 0x_2 + \frac{1}{8}x_3 \end{cases}$$

$$\text{if } \alpha = (3, 2, -8) = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow [\alpha]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1' = -10 \quad , \quad x_2' = -1/2 \quad , \quad x_3' = -1 \Rightarrow [\alpha]_{B'} = \begin{bmatrix} -10 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1' = (-1, 0, 0) \quad \alpha_2' = (4, 2, 0) \quad \alpha_3' = (5, -3, 8)$$

$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$: فضای توابع از $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad f_1(x) = 1 \ , \ f_2(x) = e^{ix} \quad f_3(x) = e^{-ix}$

الف) ثابت کنید f_1, f_2, f_3 مستقل خطی اند.

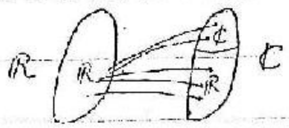
ب) $g_1(x) = 1 \ , \ g_2(x) = \cos x \ , \ g_3(x) = \sin x$ مطلوب است $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ که P معکوس‌پذیر باشد و

$$g_j = \sum_{i=1}^{3} P_{ij} f_i \qquad j = 1, 2, 3$$

اگر $c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=c_1+c_2e^{ix}+c_3e^{-ix}=0 \Rightarrow$ ضرایب صفر باشند.

$\Rightarrow c_3+c_1e^{ix}+c_2e^{2ix}=0 \Rightarrow c_2(e^{ix})^2+c_1(e^{ix})+c_3=0$ اگر $e^{ix}=t$

$\Rightarrow c_2t^2+c_1t+c_3=0\ (*)$ معادله درجه ۲، دو ریشه دارد. باید $c_1=c_2=c_3=0$ لذا f_i ها مستقل خطی می باشند.



* تمام توابع حقیقی را می توان از $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ بیان کرد.

* اگر V را درست انتخاب نمایید.

* آیا مجموعه فضای برداری توابع حقیقی از $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با بعد متناهی است (میدان $\mathbb{R}$ می باشد)

روی میدان Q، $\mathbb{C}$ فضای برداری است؟ همین طور آن را چک کنیم.

ادامه حل: $g_1(x)=1f_1(x)+0f_2(x)+0f_3(x)=1$

$$g_2(x)=0f_1(x)+\frac{1}{2}f_2(x)+\frac{1}{2}f_3(x) \Rightarrow P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2i}&-\frac{1}{2i}\end{bmatrix}$$

$$g_3(x)=0f_1(x)+\frac{1}{2i}f_2(x)-\frac{1}{2i}f_3(x)$$

* مثال: $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2\}$ حداکثر از درجه ۲

t یک پارامتر در $\mathbb{R}$

$g_1(x)=1 \quad , \quad g_2(x)=(x+t) \quad , \quad g_3(x)=(x+t)^2$

الف) ثابت کنید $B=\{g_1, g_2, g_3\}$ یک پایه برای V است.

ب) $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$ مطلوب است مختصات f در پایه مرتب B.

الف) $d_0g_1(x)+d_1g_2+d_2g_3=d_0+d_1(x+t)+d_2(x+t)^2$

$=(d_0+d_1t+d_2t^2)1+(d_1+2d_2t)x+d_2x^2=0 \quad (*)$

$\{1, x, x^2\}$ مستقل خطی اند $\Rightarrow \begin{cases} d_0+d_1t+d_2t^2=0\\ d_1+2d_2t=0\\ d_2=0\end{cases} \Rightarrow d_0=d_1=d_2=0 \Rightarrow$ مستقل خطی اند

حال با شرط مربوط آن را ... کرد. معادله $(*)$ را با $c_0+c_1x+c_2x^2$ معادل قرار دهیم.

$d_2=c_2 \quad , \quad d_1+2d_2t=c_1 \quad d_0+d_1t+d_2t^2=c_0$

$\Rightarrow d_1=c_1-2c_2t \quad d_0=c_0-(c_1-2c_2t)t-c_2t^2$

$$3\ [f(x)]_{\text{پایه}} = \begin{bmatrix} c_2\\ c_1-2c_2t\\ \end{bmatrix}$$

$A \in F^{m \times n}$ و $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ و $\alpha_i = (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})$ سطر iام

$i = 1, \dots, m$

* فضای سطری ماتریس A = $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$

(فضای تولید شده توسط بردارهای سطری ماتریس A)

* اگر $P \in F^{k \times m}$ آنگاه $PA \in F^{k \times n}$ فرض کنیم $B = PA$ در نتیجه $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$ باشد که داریم

$\beta_j = (B_{j1}, \dots, B_{jn})$ سطر j-th ماتریس B باشد

می‌خواهیم بردارهای سطری ماتریس B را به صورت ترکیب خطی از بردارهای سطری ماتریس A بنویسیم

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & & & \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & & & \\ P_{k1} & P_{k2} & \cdots & P_{km} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \beta_i = P_{i1}\alpha_1 + P_{i2}\alpha_2 + \dots + P_{im}\alpha_m \Rightarrow$ در نتیجه β_i در فضای تولید شده توسط

$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ قرار دارد در نتیجه

فضای سطری ماتریس A $\subseteq$ فضای سطری ماتریس B $\Leftarrow$

اکنون اگر P یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد آنگاه با توجه به اینکه $B = PA$ نتیجه می‌گیریم که B هم‌ارز سطری ماتریس A می‌باشد

و چون هم‌ارز سطری بودن یک رابطه هم‌ارزی است پس A نیز هم‌ارز سطری ماتریس B می‌باشد در نتیجه فضای سطری ماتریس B

تعبیر: $A = P^{-1}B$ فضای سطری ماتریس B $\subseteq$ فضای سطری ماتریس A

* نتیجه: فضاهای سطری ماتریس‌های هم‌ارز سطری یکسان هستند

* نتیجه: اگر R یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی باشد آنگاه بردارهای سطری غیرصفر R پایه‌ای برای فضای سطری ماتریس R هستند

۱۰ و ۹

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -x & z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

پایه‌ای برای W_2 است.

$\to \dim W_2 = 3$

اما :

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ -x & y \end{bmatrix} \mid x, y \in F \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

پایه‌ای برای $W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 2$

$$\dim(W_1 + W_2) = 3 + 3 - 2 = 4 = \dim(V)$$

سؤال / آیا $W_1 + W_2 = V$ ؟

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a' & c \\ -a' & d \end{bmatrix}}_{W_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} a'' & -a'' \\ e & f \end{bmatrix}}_{W_2} \Rightarrow V \subseteq W_1 + W_2$$

$A \in W_1 + W_2$

A یک عضو دلخواه از V :

$a'' = a' - \frac{a}{2}$;

$c = b + \frac{a}{2}$

$e = c + \frac{a}{2}$

- بُعد R روی Q چیست؟

تمرین :

$\dim(V) =$ نامتناهی

فرض خلف

$\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای R $\Rightarrow \forall r \in R \; ; \; r = q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \dots + q_n\alpha_n$

تناقض

مختصات :

V فضای برداری بر میدان F

فرض $\dim V = n$ پس

$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

پایه‌ای برای V است.

تعریف : یک پایه مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی V، دنباله‌ای از بردارهای V است که مستقل خطی اند و V را تولید می‌کنند.

$F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ پایه استاندارد

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$

$\vdots$

$e_j = \underbrace{(0, \dots, 0, 1}_{j}, 0, \dots, 0)$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$V = \mathbb{R}^2$

مختصات α در پایه استاندارد $B = \{e_1, e_2\}$

$\alpha = (2, -3)$

$= 2(1, 0) - 3(0, 1)$

$= 2e_1 - 3e_2$

به طور کلی اگر $\dim V = n$, $\alpha \in V$, $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V باشد آنگاه اسکالرهای (x_i) یکتا (وابسته به پایه) وجود دارند به طوری که

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

اثبات یکتایی x_i ها :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} z_i \alpha_i$$

اگر $\alpha = \sum_{i=1}^{n} z_i \alpha_i$ ، $0 = \alpha - \alpha = \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)\alpha_i$

چون α_i ها ... $\longrightarrow \dots = 0 \longrightarrow x_i = z_i$

ماتریس مختصات بردار α در پایه مرتب B $= X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\alpha]_B$

قضیه: اگر V یک فضای برداری بر میدان F باشد $(\dim V = n)$ و B و B' دو پایه مرتب برای V باشند آنگاه ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{n\times n}$ وجود دارد به طوری که:

$$B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

$$B' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

$$\forall \alpha \in V;\ [\alpha]_B = P[\alpha]_{B'}$$

یا $[\alpha]_{B'} = P^{-1}[\alpha]_B$

همراه

ستون j ام ماتریس P

$$P_j = [\alpha'_j]_B$$

قضیه: اگر $\dim V = n$ و $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V باشد، و $P \in F^{n\times n}$ یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد، آنگاه پایه مرتب $B' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ برای V وجود دارد به طوری که

$$\forall \alpha \in V: [\alpha]_{B'} = P^{-1}[\alpha]_B$$

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i$$ همراه

$$\forall\ j = 1, \dots, n$$

V یک فضای برداری روی F

$$B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایه‌ای مرتب برای V

$$\dim(V) = n$$

$$\forall \alpha \in V:\ \alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$$

$$[\alpha]_B = X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

مختصات بردار α در پایه مرتب B

قضیه :

$$\dim V = n$$
$$B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$
$$B' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

پایه‌های مرتب برای V

آنگاه ماتریس معکوس‌پذیر $P \in F^{n\times n}$ وجود دارد به طوری که :

$$\forall \alpha \in V : \quad [\alpha]_B = P[\alpha]_{B'}$$
$$\text{یا} \quad [\alpha]_{B'} = P^{-1}[\alpha]_B$$

قضیه :

$$\dim V = n$$
$$B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایه‌ای مرتب و $P \in F^{n\times n}$ یک ماتریس معکوس‌پذیر :

آنگاه وجود دارد پایه مرتب $B' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ به طوری که

$$\forall \alpha \in V : \quad [\alpha]_B = P[\alpha]_{B'}$$
$$\text{یا} \quad [\alpha]_{B'} = P^{-1}[\alpha]_B$$

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\,\alpha_i \; ; \; j = 1, \dots, n$$

مثال :

$$V = \mathbb{R}^2$$
$$B = \{e_1, e_2\}$$

پایه استاندارد

$$B = \{(1,0), (0,1)\}$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$\det(P) = 1 \neq 0 \Leftarrow$ P معکوس‌پذیر است

طبق قضیه ۲ : پایه $B' = \{\alpha'_1, \alpha'_2\}$ وجود دارد به طوری که

$$[\alpha]_{B'} = P^{-1}[\alpha]_B$$

$$\text{if } \alpha = (x_1, x_2) \in V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow [\alpha]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

استاندارد

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$[\alpha]_{B'} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ x_2' = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{cases}$$

$$\alpha_1' = \sum_{i=1}^{2} P_{i1}\alpha_i = P_{11}\alpha_1 + P_{21}\alpha_2$$

$$= \cos\theta(1,0) + \sin\theta(0,1)$$

$$= (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\alpha_2' = \sum_{i=1}^{2} P_{i2}\alpha_i = P_{12}\alpha_1 + P_{22}\alpha_2$$

$$= -\sin\theta(1,0) + \cos\theta(0,1)$$

$$= (-\sin\theta, \cos\theta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \alpha_1' = P_1^T \qquad \alpha_2' = P_2^T$$

$$P_2 = \frac{dP_1}{d\theta}$$

<u>مثال</u>: $F \subseteq \mathbb{C}$ ، $P = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ پایه استاندارد برای $V=F^3$ پس

طبق قضیه ۲ وجود دارد $B'=\{\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'\}$ به طوری که

$$[\alpha]_{B'} = P^{-1}[\alpha]_B$$

$\det P = -16 \Rightarrow$ P معکوس پذیر است $\Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{11}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 + \frac{11}{8}x_3 \\ x_2' = \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{16}x_3 \qquad \text{if} \quad \alpha = (13, 2, -8) = (x_1, x_2, x_3) \\ x_3' = \frac{1}{8}x_3 \end{cases}$$

$$[\alpha]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = -10 \\ x_2' = -\frac{1}{2} \\ x_3' = -1 \end{cases} \Rightarrow [\alpha]_{B'} = \begin{bmatrix} -10 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{11}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ P = & \left[\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{matrix}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1' = (-1, 0, 0) \\ \alpha_2' = (4, 2, 0) \\ \alpha_3' = (5, -3, 8) \end{cases}$$

مثال $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ پیوسته $\}$

$f_1(x) = 1$; $f_2(x) = e^{ix}$, $f_3(x) = e^{-ix}$

الف) ثابت کنید f_1 ، f_2 و f_3 توابعی مستقل خطی هستند.

ب) $g_1(x) = 1$; $g_2(x) = \cos x$; $g_3(x) = -\sin x$

مطلوب است $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ که P معکوس‌پذیر باشد.

$$g_j = \sum_{i=1}^{3} P_{ij} f_i$$

$$j = 1, 2, 3$$

الف) $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = c_1 + c_2 e^{ix} + c_3 e^{-ix} = 0$

$\Rightarrow c_3 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} = 0$

$\Rightarrow c_2 (e^{ix})^2 + c_1 e^{ix} + c_3 = 0$

$\Rightarrow c_2 t^2 + c_1 t + c_3 = 0$ (*) معادله درجه ۲ حداکثر ۲ ریشه دارد

پس برای اینکه (*) درست باشد باید $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

لذا f_i ها مستقل خطی هستند.

$\sin z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

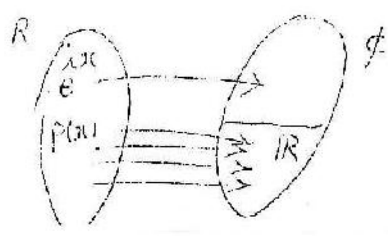
$\sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad \mathbb{C}$ نمی‌شود

$e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$e^{ix} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$



$f(x) = x$

* فصل سوم : تبدیلات خطی

تعریف : فرض کنیم V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند. یک تبدیل خطی از V در W تابعی است مانند T که برای هر α و β از V و هر اسکالر c از F داشته باشیم :

$$T(c\alpha+\beta)=cT(\alpha)+T(\beta)$$

تبدیلات خطی نوع خاصی از دسته توابع می باشند

مثال ۱) V یک فضای برداری روی میدان F

$I: V \longrightarrow V$ تبدیل همانی

$\forall \alpha \in V: I(\alpha)=\alpha$

مثال ۲)

$O: V \longrightarrow V$

$\forall(\alpha)\in V: O(\alpha)=0$ بردار صفر

تبدیل خطی صفر

* تبدیل همانی همانند عنصر خنثی عمل ضرب تبدیلات می باشد.

مثال ۳) $V=\{f: F\longrightarrow F \mid f(x)=c_0+c_1x+\dots+c_kx^k\}$, $c_i\in F$

$D: V \longrightarrow V$

D تبدیل مشتق گیری $f(x)\in V$, $D(f(x))=c_1+2c_2x+\dots+kc_kx^{k-1}$

مثال ۴) فرض $A\in F^{m\times n}$, $T: F^{n\times 1}\longrightarrow F^{m\times 1}$

$\forall X\in F^{n\times 1}: T(X)=AX$ | $V=F^{n\times 1}$, $W=F^{m\times 1}$

* مثال ۵) $U: F^m \longrightarrow F^n$

$\forall \alpha \in F^m: U(\alpha)=\underset{1\times m}{\alpha}\,\underset{m\times n}{A}$

در مثال 4 : $\forall X, Y\in F^{n\times 1}$

$\Rightarrow T(X)=AX$, $T(X)=AY$

$\Rightarrow T(cX+Y)=cT(X)+T(Y) \Rightarrow$ این T تبدیل خطی می باشد.

* مثال ۴) $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f$ پیوسته $\}$ $\quad T:V\longrightarrow V$

$$\forall f(x)\in V:\ T(f(x))=\int^{x} f(t)\,dt$$

اگر f تابعی پیوسته باشد انتگرال بالا تعریف می‌باشد (انتگرال ریمان)

$f(x),\ g(x)\in V,\quad c\in\mathbb{R}$

$$T(cf(x)+g(x))=\int_0^{x}(cf(t)+g(t))\,dt=c\int^{x}f(t)\,dt+\int^{x}g(t)\,dt=cT(f(x))+T(g(x))$$

* قضیه: اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد و $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V باشد.

و $\beta_n,\dots,\beta_1$ بردارهای دلخواهی از فضای برداری W باشد. آنگاه تبدیل خطی یکتای T از V به W

وجود دارد بطوریکه: $\quad \forall j:1(1)n:\quad T\alpha_j=\beta_j$

(دقت کنید W محدودیتی ندارد ولی بعد V متناهی باشد)

$V=\mathbb{R}^2,\quad W=\mathbb{R}^3$

مثال: $\alpha_1=(1,2)\quad \alpha_2=(3,4),\quad B=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ پایه‌ای مرتب برای V

$\beta_1=(3,2,1)\quad \beta_2=(6,5,4)$

مطلوب است تبدیل خطی $T:V\longrightarrow W$ بطوریکه $T(\alpha_1)=\beta_1,\quad T(\alpha_2)=\beta_2$

* اثبات قضیه:

$\alpha\in V\Rightarrow \alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n$

$$[\alpha]_B=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\Rightarrow T(\alpha)=[x_1,\dots,x_n]\begin{bmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{bmatrix}\Rightarrow T(\alpha)=x_1\beta_1+x_2\beta_2+\dots+x_n\beta_n$$

B مرتب

اولاً T تبدیل خطی می‌باشد؟

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i\quad \beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i\quad \alpha,\beta\in V,\quad c\in F$$

$$T(c\alpha+\beta)=T\left(\sum_{i=1}^{n}(cx_i+y_i)\alpha_i\right)$$

از طرفی: $\quad cT(\alpha)+T(\beta)=c\sum_{1}^{n}x_i\beta_i+\sum_{1}^{n}y_i\beta_i=\sum_{i=1}^{n}(cx_i+y_i)\beta_i\ (*)$

8.8.85 مرجعش z_i

$c\alpha+\beta = \sum_{i=1}^{n} (cx_i+y_i)\alpha_i \Rightarrow [c\alpha+\beta]_B = \begin{bmatrix} cx_1+y_1 \\ cx_2+y_2 \\ \vdots \\ cx_n+y_n \end{bmatrix} \Rightarrow T(c\alpha+\beta) = [cx_1+y_1, \cdots, cx_n+y_n]\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$

$= \sum_{i=1}^{n} (cx_i+y_i)\beta_i \overset{*}{=} cT(\alpha)+T(\beta) \Rightarrow$ تا حال نشان داده‌ایم که T یک تبدیل خطی می‌باشد

* آیا خاصیت $T(\alpha_j)=\beta_j$ برقرار می‌باشد؟

$\alpha_j = 0\alpha_1+\cdots+1\alpha_j+0\alpha_{j+1}+\cdots+0\alpha_n \Rightarrow [\alpha_j]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T(\alpha_j) = 0\beta_1+\cdots+1\beta_j+\cdots+0\beta_n$

$\Rightarrow T(\alpha_j)=\beta_j$

* شیوه بدست آوردن ضابطهٔ تبدیل خطی T طوریکه $T(\alpha_j)=\beta_j$

$T(\alpha_1)=\beta_1, \ T(\alpha_2)=\beta_2, \dots, \ T(\alpha_n)=\beta_n$

$\Rightarrow T(\alpha_1)+T(\alpha_2)+\cdots+T(\alpha_n) = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$

$\Rightarrow x_1T(\alpha_1)+x_2T(\alpha_2)+\cdots+x_nT(\alpha_n) = x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n$

$\xrightarrow{}$ T تبدیل خطی است $T(x_1\alpha_1)+T(x_2\alpha_2)+\cdots+T(x_n\alpha_n) = x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n$

$\Rightarrow T(\underbrace{x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n}_{\alpha}) = x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n$

* اثبات یکتایی T با خاصیت $T(\alpha_j)=\beta_j$

فرض $U: V\longrightarrow W$ تبدیل خطی با خاصیت $U(\alpha_j)=\beta_j$

$\forall \alpha\in V : \alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \Rightarrow U(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} x_iU(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i = T(\alpha)$

$\Rightarrow U=T$

روش دوم بدست آوردن ضابطهٔ تبدیل

$\alpha\in V \Rightarrow T(\alpha) = T(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n)$ از طرفی T تبدیل خطی می‌باشد

$\Rightarrow = x_1T(\alpha_1)+\cdots+x_nT(\alpha_n)$

$= x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n$ و باید داشته باشیم $T(\alpha_1)=\beta_1, \ \vdots, \ T(\alpha_n)=\beta_n$

مثال: $\forall\alpha\in V : \alpha = x_1\alpha_1+x_2\alpha_2 = x_1(1,2)+x_2(3,4) = (x_1+3x_2, 2x_1+4x_2)$

$[\alpha]_{B=\{\alpha_1,\alpha_2\}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

قسمت سیاه اشاره

$\longrightarrow \begin{cases} x_1+3x_2 = x \\ 2x_1+4x_2 = y \end{cases} \qquad [\alpha]_{B'} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$B' = \{(0,1),(1,0)\} \quad T(1,0) = T(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)$

$$(1,0) = c_1(1,2) + c_2(3,4) = 1\alpha_1 - 2\alpha_2 \longrightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 1 \\ 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_2 = 1 \\ c_1 = -2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow T(1,0) = T(\alpha_1 - 2\alpha_2)$$

$$T(0,1) = T(c_1'\alpha_1 + c_2'\alpha_2) \Rightarrow (0,1) = c_1'(1,2) + c_2'(3,4) = -\frac{1}{2}\alpha_1 + 3/2\,\alpha_2$$

$$\begin{cases} c_1' + 3c_2' = 0 \Rightarrow c_1' = -3c_2' \\ 2c_1' + 4c_2' = 1 \Rightarrow c_2' = -1/2 \end{cases} \Rightarrow T(0,1) = T(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2)$$

$$\Rightarrow T(\alpha_1 - 2\alpha_2) = T(\alpha_1) - 2T(\alpha_2) = (3,2,1) - 2(6,5,4) = (-9,-8,-7)$$

$$T(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2) = -\frac{1}{2}T(\alpha_1) + \frac{3}{2}T(\alpha_2) = -\frac{1}{2}(3,2,1) + 3/2\,(6,5,4)$$

$$= (\frac{15}{2}, \frac{13}{2}, 11/2)$$

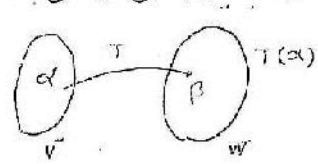
$$[\alpha]_{B'} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow T(\alpha) = T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1)$$

$$= x(-9,-8,-7) + y(\frac{15}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}) = (-9x + \frac{15}{2}y, -8x + \frac{13}{2}y, -7x + \frac{11}{2}y)$$

$$\Rightarrow T(0+0) = T(0) + T(0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0 \qquad T: V \to W$$

فقط در مورد تبدیلات خطی اینطور می باشد.

$$T_V = \{ \beta \in W \mid \exists \alpha \in V \text{ s.t. } T(\alpha) = \beta \}$$



R_T = برد T نشان دهید که R_T یک زیرفضای برداری از W است. باید ثابت کنیم اگر $\beta_1, \beta_2 \in R_T$ فرض باشند، $c \in F$ اسکالر آنگاه $c\beta_1 + \beta_2 \in R_T$

$$\beta_1 \in R_T \Rightarrow \exists \alpha_1 \in V \Rightarrow T(\alpha_1) = \beta_1$$

$$\beta_2 \in R_T \Rightarrow \exists \alpha_2 \in V \Rightarrow T(\alpha_2) = \beta_2$$

از طرفی $T(\underbrace{c\alpha_1 + \alpha_2}_{\in V}) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2 \Rightarrow c\beta_1 + \beta_2 \in R_T$

پس R_T زیرفضای برداری W است.

* تعریف: هسته تبدیل خطی T یا فضای پوچ تبدیل خطی T (Kernel)

$$N_T = \{ \alpha \in V \mid T(\alpha) = 0 \}$$

چون $T(0) = 0 \Rightarrow 0 \in N_T \Rightarrow N_T \neq \phi$

علاوه بر این N_T یک زیرفضای برداری از V می باشد

$$\text{if } \alpha_1, \alpha_2 \in N_T \Rightarrow T(\alpha_1) = 0,\ T(\alpha_2) = 0$$

$$\text{if } c \in F \Rightarrow T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c \times 0 + 0 = 0 \Rightarrow c\alpha_1 + \alpha_2 \in N_T \Rightarrow$$ N_T زیرفضای V

جبر خطی ۸۵/۸/۱۰

قضیه: اگر V فضای برداری با بعد متناهی باشد و T یک تبدیل خطی از V در W باشد آنگاه داریم

$$\dim(R_T) + \dim(N_T) = \dim(V)$$

اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد

$$R_T = \{\beta \in W \mid \exists \alpha \in V \;\; T(\alpha) = \beta\}$$

$$N_T = \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = 0\}$$

اگر $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(R_T) = T$ رتبه

&

$\dim(N_T) = T$ پوچی

$T: V \to W$

$N_T \overset{\text{زیرفضا}}{\subseteq} V$ ، $R_T \overset{\text{زیرفضا}}{\subseteq} W$

اثبات: فرض کنیم $\dim V = n$ و $\dim(N_T) = K$

پس پایه‌ای مثل $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_K\}$ برای N_T وجود دارد

$\dim(R_T) = \dim(V) - \dim(N_T) = n - K$

چون $N_T \overset{\text{زیرفضا}}{\subseteq} V$ پس $\{\alpha_1, \dots, \alpha_K\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از V است

طبق قضایای قبل بردارهای $\alpha_{K+1}, \dots, \alpha_n$ وجود دارند به طوری که مجموعه $B' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_K, \alpha_{K+1}, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشند

(می‌خواهیم) ثابت کنیم $\dim(R_T) = n - K$

پس باید بتوانیم پایه‌ای متشکل از $n-K$ بردار برای R_T بیابیم

اول اینکه $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_K), T(\alpha_{K+1}), \dots, T(\alpha_n)$ فضای R_T را تولید می‌کنند؟ زیرا

if $\beta \in R_T \Rightarrow \exists \alpha \in V \; ; \; T(\alpha) = \beta$

چون B' پایه V است و $\alpha \in V$ است پس

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_K\alpha_K + c_{K+1}\alpha_{K+1} + \dots + c_n\alpha_n$$

T تبدیل خطی $\Rightarrow \beta = T(\alpha) = c_1 T(\alpha_1) + \dots + c_K T(\alpha_K) + \dots + c_n T(\alpha_n)$

$$\Rightarrow \beta \in \langle T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_K), T(\alpha_{K+1}), \dots, T(\alpha_n) \rangle$$

β دلخواه بود از R_T پس $R_T = \langle T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_K), \dots, T(\alpha_n) \rangle$

چون $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in N_T$ پس $T(\alpha_1) = \dots = T(\alpha_k) = 0$

پس در واقع $R_T = \langle T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n) \rangle$

کافی است ثابت کنیم $T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)$ مستقل خطی هستند

فرض: $d_{k+1} T(\alpha_{k+1}) + \dots + d_n T(\alpha_n) = 0$

$\overset{T \text{ تبدیل خطی}}{\Longrightarrow} T(d_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + d_n\alpha_n) = 0 \Rightarrow (d_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + d_n\alpha_n) \in N_T$

$\overset{\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \text{ پایه‌ای برای } N_T}{\Longrightarrow} d_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + d_n\alpha_n = b_1\alpha_1 + \dots + b_k\alpha_k$

$\overset{-d_j = b_j,\ j = k+1, \dots, n}{\Longrightarrow} b_1\alpha_1 + \dots + b_k\alpha_k + b_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + b_n\alpha_n = 0$

چون $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ پایه‌ای برای V هستند پس $b_1 = \dots = b_k = b_{k+1} = \dots = b_n = 0$

$\Rightarrow d_{k+1} = \dots = d_n = 0 \Rightarrow T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)$ مستقل خطی هستند

مستقل خطی هستند و تولید هم می‌کنند پس پایه‌ای برای R_T هستند پس $\dim(R_T) = n - k$

پس $T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)$ پایه‌ای برای R_T هستند:

$\dim(R_T) = n - k$

$A \in F^{m \times n}$

$AX = 0$

$AX = y$

$A = [A_1\ A_2\ \dots\ A_n]$

$\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ = فضای ستونی ماتریس A

رتبه ستونی = بعد فضای ستونی ماتریس A

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

سطر iام α_i

ستون jام A_j

$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ = فضای سطری ماتریس A

رتبه سطری = بعد فضای سطری

$A^{m \times n} \xrightarrow[\text{سطری مقدماتی}]{\text{اعمال}} R^{m \times n}$ تحویل شده سطری پلکانی

اگر تعداد سطرهای غیرصفر $R = r$

r = تعداد سطرهای غیرصفر R = پایه‌ای برای ... رتبه سطری A

فضای جواب $AX = 0$ = فضای جواب $RX = 0$

$\dim(AX=0$ فضای جواب $) = n-r$

قضیه: اگر $A\in F^{m\times n}$ آنگاه رتبه سطری A = رتبه ستونی A

اثبات: فرض کنیم $T: F^{n\times 1} \to F^{m\times 1}$ با ضابطه $T(X)=\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{X}$ باشد

واضح (تبدیل ماتریسی شده) است که یک تبدیل خطی است.

$$N_T = \{X\in F^{n\times 1} \mid T(X)=0\} = \{X\in F^{n\times 1} \mid AX=0\} =$$ فضای جواب دستگاه $AX=0$

$$R_T = \{Y\in F^{m\times 1} \mid \exists X\in F^{n\times 1};\ T(X)=Y\}$$
$$= \{Y \mid AX=Y\}$$

$$\dim(R_T)+\dim(N_T) = \dim(F^{n\times 1})$$
$$(n-r)+\dim(R_T) = n \Rightarrow \dim(R_T) = r$$

r رتبه سطری A

R_T تعریف $\Rightarrow R_T = \langle A_1,\dots,A_n\rangle$ ؟ فضای ستونی ماتریس A

if $Y\in R_T \Rightarrow \exists X\in F^{n\times 1};\ AX=Y$

اگر $X=\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$ $\quad x_1A_1+\dots+x_nA_n = Y$

پس بعد R_T با بعد فضای ستونی ماتریس A یکی است یعنی رتبه سطری و رتبه ستونی با هم مساوی هستند.

r = رتبه ستونی = رتبه سطری

جبر تبدیلات خطی: اگر V و W دو فضای برداری بر میدان F باشند

$T: V\to W$ و $U: V\to W$ دو تبدیل خطی

جمع برداری: $\forall \alpha\in V:\ (U+T)(\alpha) = U(\alpha)+T(\alpha)$

$U+T$ یک تبدیل خطی از V در W است

اگر $C\in F$ اسکالر دلخواه باشد آنگاه $\underbrace{(CT)\alpha = CT(\alpha)}_{\text{ضرب اسکالری}}$

که پس CT یک تبدیل خطی از V در W است.

* ملاحظه: اگر $L(V,W) = \{T: V\to W \mid T$ یک تبدیل خطی$\}$ آنگاه $L(V,W)$ یک فضای برداری با جمع برداری و ضرب اسکالری تعریف شده می‌باشد.

اگر $\dim(V)=n$ و $\dim(W)=m$ آنگاه $\dim(L(V,W))=mn$

روی $L(V,W)$ یک ضرب برداری نمی‌توان تعریف کرد

$\forall\, T,U \in L(V,W)$

$TU(\alpha) = T(U(\alpha))$

* وقتی روی $L(V,W)$ یک ضرب برداری می‌شود تعریف کرد که $V=W$

$T: V \to V$

$U: V \to V \Rightarrow$ ترکیب آنها هم $V \to V$

فضای برداری که بتوان روی آن ضرب برداری تعریف کرد جبر خطی می‌گوییم

پس $L(V,V)$ یک جبر خطی است.

if $\dim(V)=n \Rightarrow \dim(L(V,V)) = n^2$

اگر $T: V \to V$ یک تبدیل خطی باشد آنگاه T را یک عملگر خطی گوییم

اگر $U: V \to V$ و $T: V \to V$ یک عملگر خطی باشد آنگاه TU و UT نیز عملگرهای خطی از V به V هستند اما UT همیشه با TU برابر نیست

اگر $V = \{ f : F \to F \mid$ تابع چندجمله‌ای $f(x) \}$

$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$

$U: V \to V$

$U(f(x)) = x \cdot f(x)$ عملگر خطی روی V

$T: V \to V$

$T(f(x)) = f'(x)$

$(TU)(f(x)) = T(U(f(x))) = T(x f(x))$

$= T(c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1}) = c_0 + 2c_1 x + 3c_2 x^2 + \cdots + (n+1) c_n x^n$

$(UT)(f(x)) = U(T(f(x))) = U(c_1 + 2c_2 x + \cdots + n c_n x^{n-1})$

$= c_1 x + 2c_2 x^2 + \cdots + n c_n x^n$

پس $(TU)(f(x)) \neq (UT)(f(x))$ که یکسان نیستند

$(TU)(f(x)) - (UT)(f(x)) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = f(x)$

پس $TU - UT = I$

عملگر همانی

جبر خطی ۱/۱ .8.15

* دوجن : V فضای برداری توابع چندجمله‌ای روی میدان F

$F[x] = V = \{ f : F \longrightarrow F \mid f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k \}$

عملگر $D : V \longrightarrow V$ عملگر مشتق‌گیری

1) $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

if $n = m = 1$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع حقیقی یک متغیره .

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تابع برداری

3) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع n متغیره (میدان اسکالر)

4) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$n \neq 1 , m \neq 1$. میدان برداری

مشتق برای هر دسته از توابع بالا تعریف می‌گردد .

$\frac{\partial^m f}{\partial x^m}$, $D_{\vec{u}} f(P_0)$ تغییرات تابع f در جهت بردار یکه $\vec{u}$ در نقطه P_0

مشتق جزئی مرتبه m (به عنوان کلی نشد)

$= \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{u}$

مشتق تابع معلوم نسبت به یک متغیر نامعلوم (مشتق حساسیت)

$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

مشتق تابع متغیر نسبت به متغیر نامعلوم : $X(t)$. (ریاضیات Ito)

مشتق‌گیری کسری : $f(x)^{3/2}$ ، انتگرال‌گیری کسری $\int^{5/2}$

عملگر انتگرال‌گیری با تعریف $\{E : V \longrightarrow V$

عملگر D به‌خاطر وجود ثابت c یک‌به‌یک نمی‌باشد.

پوشایی: $\{\forall f(x) \in V : \exists g(x) \in V \mid D(f(x)) = g(x)\}$

یعنی عملگر D پوشا می‌باشد. زیرا برای هر $f(x) \in V$، یک مشتق وجود دارد

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

عملگر E یک‌به‌یک می‌باشد چون $\forall f, g \in V,\ f(x) \neq g(x) \Longrightarrow E(f) \neq E(g)$

E پوشا نمی‌باشد چون ثابت c را نمی‌پوشاند مثلاً هیچ تابعی را با c نمی‌باشد.

$$L(V, V) = \{T : V \longrightarrow V \mid T \text{ خطی}\}$$

فضای عملگرها

$$\text{if } T, U \in L \longrightarrow TU : V \longrightarrow V$$

$$TU(\alpha) = T(U(\alpha))$$

$$, UT : V \longrightarrow V \quad , U(T(\alpha)) = U(T(\alpha))$$

$$T : \quad V \xrightarrow{\text{خطی}} W$$

$$U : \quad W \xrightarrow{\text{خطی}} Z$$

$$UT : \quad V \longrightarrow Z$$

Z و W و V سه فضای برداری روی میدان F

یک عملگر خطی

$$DE(f(x)) = D(E(f(x)) = D\left(c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{c_k x^{k+1}}{k+1}\right)$$

$$= c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k = f(x) \Rightarrow DE = I$$

E معکوس راست D است یا D معکوس چپ E

$$E(D(f(x)) = E(c_1 + 2c_2 x + \cdots + k c_k x^{k-1}) = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k \neq f(x)$$

$\Rightarrow ED \neq I \Rightarrow$ E معکوس چپ D نمی‌باشد.

$\Rightarrow$ انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری معکوس هم نمی‌باشند.

جبر خطی ۲۱ $15.8.85$

تابع $T: V \to W$ معکوس پذیر است هرگاه تابع $U: W \to V$ باشد بطوریکه $UT = I_V$, $TU = I_W$ (بر روی W) در این صورت $U = T^{-1}$ و U یکتاست.

* تابع T معکوس پذیر است اگر و فقط اگر T یک به یک و پوشا باشد.

در مورد فضاهای با بعد متناهی (هم مبدأ و هم مقصد دارای بعد متناهی و یکسان باشند) مفاهیم یک به یک بودن، پوشا بودن و معکوس پذیر بودن هم معنی می باشند.

می خواهیم T، معکوس چپ D را بیابیم.

$$T: V \to V \quad : \quad T(f(x)) = (E + C_0 I)(f(x))$$

$T_n = E\{f(x)\}$

می خواهیم معکوس راست E را بیابیم. این $E(U(f(x)) = f(x)$ ...

$$E(U(f(x))) = f(x)$$

$$E(U(C_0 + C_1x + \cdots + C_k x^k)) = E(U(0) + C_1U(x) + \cdots + C_kU(x^k))$$

$$= C_0 + C_1 x + \cdots + C_k x^k$$

$\Rightarrow \quad E(U(0)) \neq C_0$ چون انتگرال عدد ثابت نمی دهد

$C_1 E(U(x)) \neq C_1 \ldots \quad \to$ این معکوس وجود ندارد.

$\vdots$

V فضای برداری روی میدان F

$c \in F$

$U: V \to V$

$T_1: V \to V$

$T_2: V \to V$

1) $IU = UI = U$

2) $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$ — U خطی باشد

3) $(T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U$

4) $c(UT_1) = c(UT_1) = U(cT_1)$

*) آیا خواص ۱-۶ برای ترکیب هم تأثیر دارند؟ یعنی آیا خطی بودن اثری دارد؟

$T: V \longrightarrow V$

$T^2 : TT$

$T^n : \underbrace{TT\dots T}_{n \text{ بار}} \qquad T^0 = I \;,\; T \neq 0$

* تعریف: $T: V \longrightarrow V$ عملگر خطی T را نامنفرد گوییم هرگاه $N_T = \{0\}$

T نامنفرد است هرگاه از اینکه $T(\alpha) = 0$ نتیجه شود $\alpha = 0$

* T نامنفرد است هرگاه اگر و تنها اگر یک به یک باشد.

فرض: T یک به یک باشد $\quad \forall \alpha, \beta \in V : T(\alpha) = T(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta \quad$: اثبات

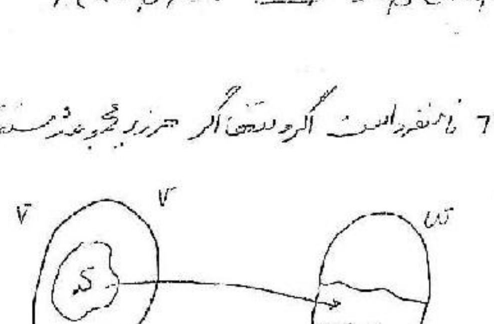
$T(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

$\Downarrow$

$\alpha - \beta \in N_T \;,\; \alpha - \beta = 0$

برعکس $\quad T(\alpha - \beta) = 0 \longrightarrow \alpha - \beta \in N_T \;,\; N_T = \{0\} \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

* قضیه: تبدیل خطی $T: V \longrightarrow W$ نامنفرد است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه مستقل خطی V را به یک زیرمجموعه مستقل خطی W تصویر کند.



اگر S مستقل خطی $\longrightarrow$ T(S) مستقل خطی

فرض $S \subseteq V$ (مستقل خطی) و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ زیرمجموعه دلخواهی از S. چون S مستقل خطی است پس $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ مستقل خطی است پس:

$c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k = 0 \longrightarrow \underline{c_i = 0}$

ثابت می کنیم $\{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)\} \subseteq T(S)$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از T(S) باشد.

می گیریم $\quad c_1T(\alpha_1) + \dots + c_kT(\alpha_k) = 0 \xrightarrow{T \text{ خطی}} T(c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k) = 0$

$\Rightarrow c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k \in N_T \xrightarrow{T \text{ نامنفرد}} c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k = 0$

$\underline{\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \text{ مستقل}} \qquad c_1 = \dots = c_k = 0$

15.8

جبر خطی ۵.

فرض: T هر زیرمجموعه مستقل خطی را به یک زیرمجموعه مستقل خطی تبدیل کند. باید ثابت کنیم:

$\forall \alpha \in V , \quad T(\alpha) \neq 0$

$\alpha \neq 0$

قرار میدهیم:

چون T تابع است.

$T(S) = \{T(\alpha)\} \longrightarrow S = \{\alpha\}$

مستقل خطی، $\alpha \neq 0$

طبق فرض $T(S)$ مستقل خطی هستند، $T(\alpha) \neq 0$

پس تنها به ازای $\alpha = 0$ داریم $T(\alpha) = 0$ یعنی $N_T = \{0\}$ یعنی T نامنفرد است.

*قضیه: اگر $T: V \to W$ یک تبدیل خطی، $\dim W = \dim V$ ($\dim V < \infty$، $\dim W < \infty$)

در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزش باشند.

1) T معکوس‌پذیر است

2) T نامنفرد است (T یک به یک است)

3) T پوشا است (یعنی $R_T = W$)

4) اگر $\{\alpha_1 , \ldots , \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد آنگاه $\{T(\alpha_1) , \ldots , T(\alpha_n)\}$ پایه‌ای برای W می‌باشد.

5) پایه‌ای مانند $\{\alpha_1 , \ldots , \alpha_n\}$ برای V وجود دارد بطوریکه $\{T(\alpha_1) , \ldots , T(\alpha_n)\}$ پایه‌ای برای W باشد.

برای اثبات می‌توان از 1 بترتیب به 5 رسید و از 5 دوباره به 1 رسید.

مرجع حل ½

17.8.

میان ترم ۶ نمره - پایان ترم ۱۰ ، حضور منظم کلاس ۱.۵ نمره ، پروژه : < ۱.۵ نمره ← ترجمه درس به صورت digital ؛ ۲-۳ نمره ← برنامه نویسی یا تحقیق

یک سوال اختیاری ۲ نمره . (برای پایان ترم)

عنوان تحقیق : تقریب مقادیر ویژه یک ماتریس .

یک ماتریس A $n \times n$ مستقطری (مستقطر لقطر غالب) وجود دارد که ماتریس $\hat{A}$ بدست آورده و نشان داده شود مقادیر ویژه A از $\hat{A}$ کوچکتر است یعنی مقادیر ویژه $\hat{A}$ از A بزرگتر است پس مقادیر ویژه A از این کوچکتر بوده و پایین‌تری باشد $|\hat{\lambda}|<|\lambda|$

برنامه نویسی با MATLAB .

نمایش ماتریسی تبدیلات خطی :

اگر $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ $(\dim V = n)$ پایه‌ای برای V باشد و $\beta_1,\dots,\beta_n$ بردارهایی در W باشند یک تبدیل $T: V \to W$ وجود دارد که یکتا است

$$\forall \alpha \in V: \quad T(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i \qquad [\alpha]_B=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad , \quad T(\alpha_j)=\beta_j$$

* اگر V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند و $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ و $B'=\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_m\}$ به ترتیب پایه‌هایی مرتب برای V و W باشند ، آنگاه برای هر تبدیل خطی $T: V \to W$ ، وجود دارد ماتریس $m \times n$ مانند A روی میدان F بطوریکه :

$$\forall \alpha \in V: [T(\alpha)]_{B'} = A[\alpha]_B$$

$$\text{if } \alpha \in V \longrightarrow \alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \qquad T(\alpha)=T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i T(\alpha_i)$$

$$\text{از طرفی } T(\alpha_i)\in W \longrightarrow T(\alpha_i)=\sum_{j=1}^{m} y_{ji}\alpha'_j \Rightarrow T(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} y_j \alpha'_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{ji}x_i\right)\alpha'_j$$

$$=\sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha'_j \qquad T: V \to W$$

$$\dim(V)=n ; \dim(W)=m$$

$$\text{if } \quad [\alpha]_B=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=X \longrightarrow [T(\alpha)]_{B'}=\ ?$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

ستون j-th ماتریس A $= \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow AX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_n$$

$$AX = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} A_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} A_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} A_{mi} x_i \end{bmatrix} = A[\alpha]_B \Rightarrow T(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ji} x_i \right) \alpha'_j \Rightarrow [T(\alpha)]_{B'} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} A_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} A_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} A_{mi} x_i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(\alpha)]_{B'} = A[\alpha]_B$$

تبدیل خطی T توسط ماتریس A مشخص میگردد.

* به ماتریس A، ماتریس نظیر تبدیل خطی T نسبت به پایه‌های B و B' گوییم و به صورت زیر نشان میدهیم:

$$[T]_{B,B'} = A$$

اگر $T: V \to V$ یک عملگر خطی و $\dim V = n$ و $B = B'$ در نظر بگیریم، $[T]_B = A^{n\times n}$

* در هر پایه برای T یک ماتریس خاص وجود دارد که این ماتریس یکتاست.

ستون i-th ام $A_i = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{mi} \end{bmatrix}$ $\qquad B' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m\}$, $j = 1, \ldots, m$

$$\cancel{T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ji}\alpha'_i = A_{j1}\alpha'_1 + A_{j2}\alpha'_2 + \cdots + A_{jm}\alpha'_m}$$

$$\Rightarrow T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{m} A_{ji}\alpha'_j = A_{1i}\alpha'_1 + A_{2i}\alpha'_2 + \cdots + A_{mi}\alpha'_m$$

$$\Rightarrow [T(\alpha_i)]_{B'} = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{mi} \end{bmatrix} =$$ ستون i-th ماتریس A

مثال: $T: F^2 \longrightarrow F^2$ ،

$T(x_1, x_2) = (0, x_1)$

$T(c\alpha+\beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$

$\alpha = (x_1, x_2)$ ، $\beta = (y_1, y_2)$ $\Rightarrow c\alpha+\beta = (cx_1+y_1, cx_2+y_2)$

$T(c\alpha+\beta) = (0, cx_1+y_1)$

$T(\beta) = (0, y_1)$ $\quad cT(\alpha)+T(\beta) = c(0, x_1)+(0, y_1) = (0, cx_1+y_1) = T(c\alpha+\beta)$

تبدیل خطی است.

* طرف دوم یعنی $(0, x_1)$ چون مقادیر خطی است (عدد ثابت ندارد) معلوم است که تبدیل خطی است.

مطلوب است ماتریس نمایش T در پایه استاندارد:

$B = \{e_1, e_2\}$; $e_1(1, 0)$ $\quad e_2(0, 1)$

$T(\underbrace{e_1}_{\alpha_1}) = T(1, 0) = (0, 1) = \underbrace{0}_{A_{11}} \underbrace{e_1}_{\alpha'_1} + \underbrace{1}_{A_{21}} \underbrace{e_2}_{\alpha'_2}$

$T(\underbrace{e_2}_{\alpha_2}) = T(0, 1) = (0, 0) = \underbrace{0}_{A_{21}} \overbrace{e_1}^{\alpha'_1} + \underbrace{0}_{A_{22}} \overbrace{e_2}^{\alpha'_2}$ $\quad \Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

* مثال: فضای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه 3 : $V = \{f: F \longrightarrow F \mid f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3\}$

$D: V \longrightarrow V$ عملگر مشتق گیری ، $B = \{\underbrace{f_1}_{\alpha_1}, \underbrace{f_2}_{\alpha_2}, \underbrace{f_3}_{\alpha_3}, \underbrace{f_4}_{\alpha_4}\}$ (در عملگر خطی پایه مبدا و مقصد یکی هستند)

$f_j(x) = x^{j-1}$ $\quad f_1(x) = 1$ $\quad f_2(x) = x$ $\quad f_3(x) = x^2$ ، $\quad f_4(x) = x^3$

پایه استاندارد چند جمله‌ای ها

* مطلوب است $[D]_B = ?$

$D(\alpha_1) = D(f_1) = 0 = 0\overbrace{f_1}^{\alpha'_1} + 0\overbrace{f_2}^{\alpha'_2} + 0\overbrace{f_3}^{\alpha'_3} + 0\overbrace{f_4}^{\alpha'_4}$

$D(\alpha_2) = D(f_2) = 1 = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4$

$D(\alpha_3) = D(f_3) = 2x = 0f_1 + 2f_2 + 0f_3 + 0f_4$

$D(\alpha_4) = D(f_4) = 3x^2 = 0f_1 + 0f_2 + 3f_3 + 0f_4$

$$\Rightarrow [D]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* تمرین: با فرض آنکه $B' = \{g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)\}$ که $g_j(x) = (x+t)^{j-1}$

$\Rightarrow g_1(x) = 1 \quad g_2(x) = x+t \;, \dots$

مطلوب است ماتریس نمایش $[D]_{B'}$ ، t ثابت عددی.

$D(g_1(x)) = 0g_1 + 0g_2 + 0g_3 + 0g_4$

$D(g_2(x)) = 1 = 1g_1 + 0g_2 + 0g_3 + 0g_4$

$D(g_3(x)) = 2(x+t) = 0g_1 + 2g_2 + 0g_3 + 0g_4$

$D(g_4(x)) = 3(x+t)^2 = 0g_1 + 0g_2 + 3g_3 + 0g_4 \Rightarrow [D]_{B'} = [D]_B$

مطلوب است $[D]_{B,B'} = ?$

$\Rightarrow D(f_1) = 0 = 0g_1 + 0g_2 + 0g_3 + 0g_4$

$D(f_2) = 1 = 1g_1 + 0g_2 + 0g_3 + 0g_4$

$D(f_3) = 2 - 2t\,g_1 + 2g_2 + 0g_3 + 0g_4$

$D(f_4) = \dots$

$[D]_{B',B}$ از اثر D روی پایه B' یعنی ها را حساب کرده در حسب B بدست می‌آوریم.

*

if $\quad T: V \longrightarrow V \;;\; [T]_B = A$

$\quad\;\; U: V \longrightarrow V \;;\; [U]_B = B \quad \Rightarrow [cT+U]_B = cA + B$

$c \in F$

ثابت کنید

اثبات $\quad [T(\alpha)]_B = A[\alpha]_B \;;\; A_i = [T(\alpha_i)]_B$

$[U(\alpha)]_B = B[\alpha]_B \;;\; B_i = [U(\alpha_i)]_B$

$\Rightarrow cA_i + B_i = c[T(\alpha_i)]_B + [U(\alpha_i)]_B$

$= [cT(\alpha_i) + U(\alpha_i)]_B = [(cT+U)(\alpha_i)]_B$

if $\;[T]_B = A \;,\; [U]_B = B \;,\; [I]$ ماتریس همانی $= I \Rightarrow [T^2 - 2IU + T^3U] = A^2 - 2B + A^3B$

اگر $T: V \longrightarrow W$ و $U: W \longrightarrow Z$ باشند آنگاه $UT: V \longrightarrow Z$ نیز خطی است.

* خاصیت خطی به ترکیب به ارث می‌رسد

* فرض B و B' و B'' به ترتیب پایه‌های مرتبی برای V و W و Z باشند و ماتریس نمایش $[T]_{B,B'} = A$ و $[U]_{B',B''} = B$ آنگاه $[UT]_{B,B''} = BA$

فرض $\forall \alpha \in V : [\underbrace{T(\alpha)}_{\in V}]_{B'} = A[\alpha]_B$; $\cancel{[UT(\alpha)]_{B}} = A$

$$\left[(UT)(\underbrace{\alpha}_{\in V})\right]_{B''} = C[\alpha]_B$$

$$\left[(UT)(\alpha)\right]_{B''} = \cancel{[UT(\alpha)]} \cdot \left[U(\underbrace{T(\alpha)}_{\in W})\right]_{B''} = B\left[T(\alpha)\right]_{B'} \quad (*)$$

چون ماتریس‌های نمایش یکتا هستند، $(*) : B\left[A[\alpha]_B\right] = BA[\alpha]_B \Rightarrow \underline{C = BA}$