24.8.85 جبر خطی ۱

* یکریختی Isomorphism :

یک یکریختی از فضای برداری V به روی فضای برداری W تبدیل خطی T از V بر W است که T یک به یک باشد.
یعنی T وارون‌پذیر باشد.

گوییم V با W یکریخت می‌باشد. $T: V \longrightarrow W$

مثال : هر فضای برداری n بعدی روی میدان F با F^n یکریخت است.

V روی میدان F و $\dim V = n$

$$T: V \xrightarrow[\text{پ}]{1-1} F^n \qquad \forall \alpha \in V ,\ T(\alpha) = [\alpha]_B$$

$B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V $\Rightarrow \forall \alpha \in V : \alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$

$$\Rightarrow [\alpha]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

هر یکریختی را نظیر یک به یک هم می‌گویند.

* اگر $T: V \longrightarrow W$ تبدیل خطی باشد، $\dim V = n$ ، $\dim W = m$ و $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V
و $B' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ پایه‌ای مرتب برای W باشد.

$$\exists! A \in F^{m \times n} \quad s.t. \quad [T(\alpha)]_{B'} = A[\alpha]_B \quad \Rightarrow A = [T]_{B,B'}$$

* قضیه : اگر V و W فضاهای برداری متناهی‌البعد با بعد n و m روی میدان F باشند و T یک تبدیل خطی از V در W باشد آنگاه در هر دو پایه‌ی مرتب B و B' به ترتیب برای V و W ، یک ماتریس یکتای $m \times n$ مانند A روی میدان F وجود دارد طوری که $[T(\alpha)]_{B'} = A[\alpha]_B$. علاوه بر این، $U: L(V,W) \to F^{m \times n}$ یک یکریختی می‌باشد.

$T: V \longrightarrow V$ ، $\dim V < +\infty$ ، B پایه‌ی مرتب برای V باشد. $[T]_B = A$

$T: V \longrightarrow W$

$U: W \longrightarrow Z$

B و B' و B'' پایه‌های مرتب برای V و W و Z باشند.

$$\Rightarrow [T]_{B,B'} = A$$
$$[U]_{B',B''} = B \Rightarrow [UT]_{B,B''} = BA$$

$T: V \longrightarrow V$ ، $U: V \longrightarrow V$

B پایه‌ی مرتب برای V $\Rightarrow [T]_B = A$ ، $[U]_B = B \Rightarrow [UT]_B = [U]_B [T]_B$

عملگر همانی $I:V\to V$ و $[I]_B = I_n$ — B هر پایه مرتب دلخواه برای V

ماتریس همانی

عملگر خطی $T:V\to V$ معکوس پذیر است اگر و فقط اگر ماتریس نمایش آن (در یک پایه مانند B) معکوس پذیر باشد.

* T معکوس پذیر است یعنی: وجود دارد عملگر خطی $U:V\to V$ بطوریکه $UT = TU = I$ و این یعنی

$$\Leftrightarrow [U]_B[T]_B = [T]_B[U]_B = I$$

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$$

* اگر $T:V\to V$ و $\dim V = n$ آنگاه به ازای هر پایه مرتب B از V، T دارای یک ماتریس نمایش یکتایی باشد.
این ماتریس های نمایش که در پایه های مختلف برای عملگر خطی T بدست می آید چه ارتباطی باهم دارند؟

* قضیه: اگر $T:V\to V$ یک عملگر خطی باشد و $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ و $B'=\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_n\}$ دو پایه مرتب برای V باشند آنگاه ماتریس معکوس پذیر $P=[P_1 \dots P_n]$ وجود دارد بطوریکه:

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P \quad , \quad P_j = [\alpha'_j]_B$$

تمرین/مثال: $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3\}$ ، $D:V\to V$ ، $B=\{1,x,x^2,x^3\}$

$=\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$ ، $B'=\{1,(x+t),(x+t)^2,(x+t)^3\}$

$=\{g_0,g_1,g_2,g_3\}$

$[D]_B=?$ $\quad [D]_{B'}=?$ و نشان دهید که $[D]_{B'}=P^{-1}[D]_B P$

$P_j=[g_j]_B$

* تعریف: اگر $A,B\in F^{n\times n}$ باشند آنگاه گوئیم ماتریس B متشابه با ماتریس A است هرگاه ماتریس معکوس پذیر $P\in F^{n\times n}$ باشد بطوریکه: $B=P^{-1}AP$

* طبق قضیه اخیر نتیجه گرفته می شود که ماتریس های نمایش عملگر خطی T در پایه های مختلف، باهم متشابه می باشند.

24.8.35

جبر خطی ۲

می‌دانیم رابطهٔ تشابه یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌باشد.

اگر B و A متشابه باشند $\Rightarrow B = P^{-1}AP \Rightarrow PB = PP^{-1}AP = IAP = AP$

خاصیت تقارن: $\Rightarrow PBP^{-1} = APP^{-1} = AI = A \Rightarrow$ A و B متشابه می‌باشند.

خاصیت انعکاسی: هر ماتریس با خودش متشابه است: $A = I^{-1}AI$ ✓

خاصیت تعدی: اگر A و B متشابه & C و A متشابه $\Rightarrow$ C و B متشابه

اثبات:
$$B = P^{-1}AP, \quad A = Q^{-1}CQ \Rightarrow B = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP)$$

---

* تابعک خطی:

* تابع f از فضای برداری V روی میدان F را یک تابعک خطی گویند هرگاه

$$\forall \alpha,\beta \in V, \ \forall c \in F: \ f(c\alpha+\beta) = cf(\alpha)+f(\beta)$$

F یک فضای برداری روی میدان F. $\quad f: V \longrightarrow F$

$dim(F) = 1$ روی خودش

پس اگر $dim V = n$ آنگاه $dim(R_f)+dim(N_f) = n$. R_f یک زیرفضای F است اگر $f \neq 0$ باشد آنگاه $R_f = F$ پس f پوشا است و $dim R_f = 1$ در نتیجه $dim N_f = n-1$

* تعریف: در یک فضای برداری با بعد n هر زیرفضای $n-1$ بعدی را یک ابرفضا گویند.

* مثال: f پیوسته $V = C[a,b] = \{f: [a,b]\}$ (f دارای مشتق دوم $C^2[a,b]$)

$$L: V \longrightarrow R \Rightarrow L(f(x)) = \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: $V = F[x]$ فضای توابع چندجمله‌ای روی میدان F

$T_t: V \longrightarrow F$

$T_t(f(x)) = f(t), \ t \in F$ الف: V را برابر فضای همهٔ توابع روی میدان F در نظر بگیرید.

مثال : تابعک خطی رد یا اثر ماتریس مربع A : (Trace)

$tr : F^{n \times n} \to F$

$tr(A) = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}$

* تمرین : کدامیک از گزینه‌های زیر درست می‌باشد :

$tr(AB) = tr(A)\, tr(B)$

$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ ✓

29.8.85 جبر خطی ۱

* فضای دوگان:

فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. $f: V \to F$ یک نگاشت خطی

$V^* = L(V,F) = \{ f: V \to F \mid f$ یک نگاشت خطی است $\}$ فضای دوگان.

اگر $\dim V = n \longrightarrow \dim V^* = n \times 1 = n$

$= \dim V$

* فصل چهارم: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

$T: V \longrightarrow V$

$\dim V = n \quad [T]_B = A$ که B پایه مرتب دلخواه

$[T]_{B'} = B \quad \Rightarrow B = P^{-1}AP$

A و B متشابه هستند.

هدف: ما به دنبال آن هستیم که یک نمایش ماتریسی مناسب برای عملگر خطی T بیابیم.

* ماتریس user friendly: 1) ماتریس همانی یا مضربی از ماتریس همانی.

2) ماتریس قطری 3) ماتریس های مثلثی

که این ترتیب نمایش به پایه B بستگی دارد. یعنی ما به دنبال پایه‌ای خاص هستیم که یک ماتریس قطری $[T]_B$

اگر چنین نمایشی برای T باشد آنگاه به سؤالات زیر به راحتی پاسخ میدهیم:

و به طور کلی هر اطلاعاتی در مورد T بخواهیم. $\operatorname{Rank} T,\ \dim R_T,\ \dim N_T.$

$$[T]_B = D = \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

D is the diagonal matrix

سؤالات 1) آیا هر عملگر خطی $T: V \to V$ $(\dim V = n)$ دارای یک نمایش به فرم ماتریس قطری است؟

2) اگر چنین نشد، کدام عملگرها دارای چنین نمایشی هستند؟

3) اگر T نمایش قطری داشته باشد، کدام نمایش مناسب‌تر است؟

* تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $T:V\to V$ یک عملگر خطی باشد، یک مقدار ویژهٔ T اسکالری مانند c از میدان F است وقتی که بردار غیرصفر α از V وجود داشته باشد بطوریکه: $T(\alpha)=c\alpha$

* تعریف: اگر c مقدار ویژهٔ عملگر خطی T باشد آنگاه هر بردار $\alpha\in V$ که در $T(\alpha)=c\alpha$ صدق کند را یک بردار ویژه مربوط به مقدار ویژهٔ c گویند.

* اگر c یک مقدار ویژهٔ T باشد گردایهٔ همهٔ αهایی که در $T(\alpha)=c\alpha$ را فضای ویژهٔ نظیر مقدار ویژهٔ c گویند.

* قضیه: اگر $\dim V=n$ و $T:V\to V$ یک عملگر خطی باشد آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

1) c مقدار ویژهٔ عملگر T است.

2) عملگر خطی $T-cI$ منفرد است.   3) $\det(T-cI)=0$

«منفرد بودن ≡ معکوس‌ناپذیر بودن است» (3) از روی (2) حاصل می‌گردد.

c مقدار ویژهٔ T است $\iff \exists\alpha\neq 0 \quad s.t \quad T(\alpha)=c\alpha \iff T(\alpha)-cI(\alpha)=0$

$(T-cI)(\alpha)=0 \iff \alpha\in ker(T-cI)=N_{T-cI} \iff Ker(T-cI)\neq\{0\}$

$\iff$ $T-cI$ منفرد است $\iff \det(T-cI)=0$

پس در واقع مقادیر ویژهٔ عملگر خطی T، ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ n، $\det(T-cI)=0$

$f(x)=\det(T-xI)$ می‌باشد. $deg(f(x))=n$

$f(x)$ یک چندجمله‌ای تکین است یعنی ضریب x^n برابر 1 می‌باشد.

$f(x)$ را چندجمله‌ای مشخصه یا سرشت‌نما گویند.

* مقادیر ویژه: مقادیر مشخصه، مقادیر آلی، مقادیر سره، مقادیر طیفی.

* مقادیر ویژهٔ ماتریس‌ها:

$[T]_B=A \rightsquigarrow \quad T-cI \iff A-cI$

معکوس‌ناپذیر باشد   معکوس‌ناپذیر است

به عبارت دیگر می‌توان گفت

$\det(T-cI)=0 \iff \det(A-cI)=0$

29.8.85 جلسه ۷

پس چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A عبارت است از : $f(x)=\det(A-xI)=\det(xI-A)$

* c را مقدار ویژه ماتریس A گوییم اگر بردار α ای مخالف صفر موجود باشد به طوری که $A\alpha=c\alpha$

که α را بردار ویژه ماتریس A نظیر مقدار ویژه c گویند.

مثال : $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ که $\underset{B\ \text{استاندارد}}{[T]}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ مقادیر ویژه T را بیابید.

$f(x)=\det(xI-A)=\begin{vmatrix}x&1\\-1&x\end{vmatrix}=x^2+1=0\Rightarrow$ $f(x)=0$ ریشه حقیقی ندارد لذا T (A) مقدار ویژه ندارد. چون اسکالر c از $F=\mathbb{R}$ باید انتخاب گردد.

* مثال : $U:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ ، $F=\mathbb{C}$ ، $V=\mathbb{C}^2$ ، $\underset{B\ \text{استاندارد}}{[U]}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}=B$ مقادیر ویژه U را بیابید.

$g(x)=x^2+1=0\Rightarrow c_1=i\ ,\ c_2=-i$

بردارهای ویژه نظیر c_1 ، c_2 :

$B\alpha=c_1\alpha\ ;\ \alpha=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ix\\iy\end{bmatrix}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}-y=ix\\x=iy\end{array}\right.\Rightarrow y/x=-x/y\Rightarrow x^2+y^2=0$$
$$\Rightarrow x=y=0\Rightarrow\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

با عمل تقسیم جواب‌های غلط را از بین بردیم پس در معادله بالا از روش جایگذاری حل می‌کنیم.

$x=i\ ,\ y=1\Rightarrow\alpha=\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$

* فضای ویژه نظیر مقدار ویژه c_1 را بیابید.

$V_1=\{\alpha\in\mathbb{C}^2\mid T\alpha=i\alpha\}=\{\alpha=\begin{bmatrix}ci\\c\end{bmatrix}\mid c\in\mathbb{C}\}$

$$B\alpha=c_2\alpha\quad\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-ix\\-iy\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=ix\\x=-iy\end{cases}\Rightarrow x=1\ ,\ y=i$$

$\Rightarrow\alpha=\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\qquad V_2=\{\alpha\in\mathbb{C}^2\mid U\alpha=i\alpha\}=\{\alpha=\begin{bmatrix}c\\ci\end{bmatrix}\mid c\in\mathbb{C}\}$

$\dim R_V = ?$ ← $\dim V_2 = 1$, $\dim V_1 = 1$, $\dim V = 2$

$\dim V_1 + \dim V_2 = 2$ $\qquad$ $c_1 = i$ مرتبهٔ تکرار $= 1$

$f(x) = (x+i)(x-i)$ $\qquad$ $c_2 = -i$ مرتبهٔ تکرار $= 1$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c_1 مرتبهٔ تکرار + c_2 مرتبهٔ تکرار $= 2 = \dim V$

if $[U]_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [U]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری

$B = \{e_1, e_2\}$ $\qquad$ $B' = \{e_2, e_1\}$

در حالت دو بعدی می‌شود که ابعاد فضا برابر با مرتبهٔ تکرار باشد یعنی $\qquad$ c_1 مرتبهٔ تکرار $= \dim V_1$

مثال: عملگر خطی $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ و $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه و فضاهای ویژه را بیابید.

$$f(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)^2 = 0$$

$c_1 = 1$, $c_2 = 2$ ⇝ مرتبهٔ تکرار $\underline{2}$

فضای ویژهٔ نظیر $c_1 = 1$:

$$V_1 = \{\alpha \in \mathbb{R}^3 \mid T(\alpha) = \alpha\} = \ker\{T - c_1 I\} = \ker\{T - I\}$$

$$\ker(T-I) = \ker(A-I) = \{\alpha \in \mathbb{R}^3 \mid (A-I)\alpha = 0\} \qquad A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

وابستهٔ خطی $\qquad$ ستون حذف

تحویل به سطری پلکانی $R_{A-I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-I)$ رتبهٔ سطری $R_{A-I} = 2$

$$\Rightarrow \dim(\ker(A-I)) = 3 - 2 = 1 = \dim V_1$$

* فضای ویژهٔ نظیر $c_2 = 2$

$$V_2 = \{\alpha \in \mathbb{R}^3 \mid T(\alpha) = 2\alpha\} = \ker(T - 2I) = \ker(A - 2I)$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad R_{A-2I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جبر خطی ۳ 29.8.85

رتبه سطری R_{A-2I} = رتبه ستونی $A-2I$ $= 2 \Rightarrow \dim(\ker(A-2I)) = 3-2 = 1$

$\rightarrow \dim V_2 = 1$

$d_1 =$ مرتبه تکرار c_1 $= 1 = \dim V_1$

$d_2 =$ مرتبه تکرار c_2 $= 2 \neq \dim V_2$

* تعریف: عملگر خطی $T: V \to V$ ، $\dim V = n$. یک عملگر قطری شدنی گویند هرگاه پایه مرتبی مانند B برای V وجود داشته باشد که نسبت به آن $[T]_B$ یک ماتریس قطری باشد.

به عبارت دیگر هرگاه V دارای پایه‌ای باشد که همه اعضای آن بردار ویژه باشند. آنگاه T قطری شدنی است.

1.9.85

$T: V \to V$ عملگر خطی مشخص است ، $\dim(V)=n$ یعنی پایه‌ای مثل $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ برای V وجود دارد طوریکه

$$[T]_B = D$$

$$[T]_B = D = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & c_k \end{bmatrix} \quad ; \quad [T(\alpha_1)]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \quad [T(\alpha_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow T(\alpha_i) = c_i\alpha_i \qquad N(T) = \{\forall \alpha\in V \mid T(\alpha)=0\}$

if $\alpha\in N_T \Rightarrow T(\alpha)=0 \qquad N_T \underset{\text{فضا}}{\subseteq} V \quad R_T \underset{\text{فضا}}{\subseteq} V \qquad \dim R_T + \dim N_T = \dim V$

$N_T \underset{\text{فضا}}{\subseteq} V \Rightarrow \alpha\in V \xrightarrow{\text{B پایه}} \alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$

$\Rightarrow T(\alpha) = x_1T(\alpha_1) + x_2T(\alpha_2) + \dots + x_nT(\alpha_n) = x_1c_1\alpha_1 + x_2c_2\alpha_2 + \dots + x_nc_n\alpha_n = 0$

$\xrightarrow{\alpha_1 \dots \alpha_n \text{ مستقل}} \quad x_1c_1 = x_2c_2 = \dots = x_nc_n = 0 \Rightarrow x_ic_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \ \vee \ c_i = 0$

اگر همهٔ x_i ها صفر باشند $\alpha=0$ در نتیجه $N_T=0$ می‌گوییم اگر $N_T\neq 0$ یعنی یکی از c_i ها صفر شده و x_i مربوط به آن صفر نمی‌باشد . اگر $c_1=0$ باشد و x_2 تا x_n صفر باشند یا ... بقیه صفر باشند.

$0: V \to V \Rightarrow f(x) = \det(xI - 0) \Rightarrow$ چندجمله‌ای مشخصه $= x^n \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$

در مواقعی مشخصه می‌توانند صفر باشند

اما R_T توسط α_i هایی تولید می‌شود که به ازای آن $c_i \neq 0$ ، N_T توسط α_i هایی تولید می‌شود که به ازای آن $c_i = 0$.

اگر c_1 تا c_n صفر باشد.

مثلاً $T(\alpha) = x_1c_1\alpha_1 + x_2c_2\alpha_2 + x_3c_3\alpha_3 = x_3c_3\alpha_3 = 0$

$c_1 = c_2 = 0 , \ c_3 \neq 0$

if $\beta \in R_T \Rightarrow \exists \alpha \in V$ s.t. $T(\alpha) = \beta$

$\beta = c_1x_1\alpha_1 + c_2x_2\alpha_2 + c_3x_3\alpha_3 = c_3x_3\alpha_3 \Rightarrow$ R_T توسط α_3 که تولید شده متناظر با آن صفر نمی‌باشد به وجود آمده و بقیه α_i ها N_T را به وجود می‌آورند.

$T:V\to V$ ، $\dim V = n$. فرض T قطری شدنی و $c_1, \dots, c_k$ مقادیر ویژه متمایز T باشند (ممکن است c_iها تکراری هم باشند)

مثال: $I:V\longrightarrow V$ ، $f(x)=\det(xI-I)$

$$= \det((x-1)I) = (x-1)^n \det(I) = (x-1)^n$$

$$\Rightarrow \text{if } A\in F^{n\times n},\ c\in F \Rightarrow \det(cA) = c^n \det(A)$$

پس I دارای n مقدار ویژه $c_1=c_2=\cdots=c_n=1$ است.

[illegible]

T دارای n مقدار ویژه متمایز $c_1,\dots,c_n$ است و $\dim V=n$ ، $T:V\longrightarrow V$

$$\Rightarrow \exists \alpha_1\neq 0 \quad s.t \quad T(\alpha_1)=c_1\alpha_1$$

$$\vdots$$

$$\exists \alpha_n\neq 0 \quad s.t \quad T(\alpha_n)=c_n\alpha_n$$

پس $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ بردارهای ویژه متمایز هستند $\Rightarrow$

لذا T قطری شدنی است.

عکس مطلب بالا لزوماً برقرار نمی‌باشد یعنی اگر c_iها متمایز نباشند ممکن است قطری شدنی نباشد یا باشد.

T قطری شدنی و $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب از V که α_iها بردار ویژه هستند.

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \overbrace{c_1 \ \cdots \ c_1}^{d_1\ \text{بار}} & & \\ & \overbrace{c_2 \ \cdots \ c_2}^{d_2\ \text{بار}} & \\ & & \ddots \\ & & & \overbrace{c_k \ \cdots \ c_k}^{d_k\ \text{بار}} \end{bmatrix} = A ,\quad d_1+d_2+\cdots+d_k=n$$

$$f(x)=\det(xI-T)=\det(xI-A)=(x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

صرف اینکه $f(x)$ به اتحاد تجزیه شود باعث نمی‌گردد که ماتریس قطری شدنی باشد.

*مثال: $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ ، $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ ، $[T]_B=A$ ، T قطری شدنی نمی‌باشد
زیرا مقدار ویژه ندارد. چون $f(x)=x^2+1$

*مثال:

$A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&2&-1\\2&2&0\end{bmatrix}$ ، $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ، $[T]_B=A$ ، T قطری

قطری نمی باشد. زیرا: $E_1 = \ker(T-I) =$ فضای ویژه متناظر با $c_1 = 1$

$\Rightarrow \dim(E_1) = 1$

E_1 پایه ای برای $= B_1 = \{\alpha_1\}$

$E_2 = \ker(T-2I) \Rightarrow \dim(E_2) = 1 \Rightarrow B_2 = \{\alpha_2\}$ پایه ای برای E_2

اجتماع پایه های ویژه نمی توانند V را تولید کنند پس T قطری شدنی نمی باشد. $B = \{B_1, B_2\}$ و $\dim V = 3$ و $|B| = 2$ ← تولید نمی کند

$E = E_1 + E_2 \Rightarrow \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) = 2$

* قضیه: اگر $T: V \to V$ و $\dim V < \infty$ و $T(\alpha) = c\alpha$ و $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ آنگاه $(f(T))(\alpha) = (f(c))\alpha$

* قضیه: اگر $T: V \to V$ یک عملگر خطی و $\dim V < \infty$ و c_k و ... و c_1 مقادیر ویژه متمایز T باشند و E_i فضای ویژه نظیر c_i باشد $E = E_1 + E_2 + \dots + E_k$ آنگاه

$\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_k$

* قضیه: اگر $T: V \to V$ یک عملگر خطی و $\dim V < \infty$ و c_k و ... و c_1 مقادیر ویژه متمایز T و E_i فضای ویژه نظیر c_i آنگاه گزاره های زیر هم ارزند:

(1) T قطری شدنی است.

(2) $f(x) = (x-c_1)^{d_1} \dots (x-c_k)^{d_k}$ & $d_i = \dim E_i$

(3) $\dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_k = \dim V$

تجزیه شدن که چند جمله ای تکی نمایان دارد. در $\mathbb{R}$ اطلاعات عینی است ولی در $\mathbb{C}$ هر چند جمله ای تجزیه پذیر.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ و $[T]_B = A$. گزاره های قضیه بالا برای مثال برقرار می باشد.

مثال: فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ و $[T]_{B \text{ استاندارد}} = A$ و $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ آیا T قطری شدنی است؟ و اگر بلی پایه قطری را بنویسید و را بیابید.

چند جمله ای مشخصه $f(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 6 \\ 1 & x-2 & -2 \\ -3 & -(x-2) & x+4 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x-5 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & x+2 \end{vmatrix}(x-2)$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} x-5 & 6 \\ -2 & x+2 \end{vmatrix} = (x-2)(x^2-3x-10+12) = (x-2)(x^2-3x+2)$$

$$= (x-1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 2 \qquad d_1 = 1,\ d_2 = 2$$

$$E_{c_1} = E_1 = \ker(T - c_1 I) = \ker(A - c_1 I) = \ker(A - I) = \{\alpha \in \mathbb{R}^3 \mid (A-I)\alpha = 0\} \Rightarrow$$

فضای جواب دستگاه $(A-I)\alpha = 0$

$$A - I = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$ مستقل خطی اند $\Rightarrow Rank(A-I) \geq 2$

طبق $\dim(\ker(T-I)) + \underbrace{Rank(A-I)}_{=\dim R_{T-I}} = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

چون $c_1 = 1$ مقدار ویژه است پس $\exists \alpha \neq 0$ s.t. $A\alpha = 1\alpha \Rightarrow (A-I)\alpha = 0$

$\Rightarrow \ker(A-I) \neq \{0\} \Rightarrow \alpha \in N_{A-I} \Rightarrow \ker(A-I) \neq \{0\} \Rightarrow \dim(\ker(A-I)) \geq 1$

رتبه Rank

$\Rightarrow Rank(A-I) = 2$, $\dim(\ker(A-I)) = 1 \Rightarrow \dim E_1 = 1$

$\Rightarrow E_{c_2} = E_2 = \ker(T - c_2 I) = \ker(A - c_2 I) = \ker(A - 2I)$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ فرم تحویل یافته سطری پلکانی $$R_{A-2I} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow Rank(A-2I) = Rank(R_{A-2I}) = 1 \Rightarrow \dim(\ker(A-2I)) = 2$

$\Rightarrow \dim E_2 = 2 = d_2 \Rightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = 1 + 2 = 3 = \dim V_2$

پس طبق قضیه اخیر T قطری شدنی است.

* مطلوب است $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ طوریکه α_i ها بردارهای ویژه باشند:

$B_1 = \{\alpha_1\}$ پایه ای برای E_1 $\qquad R_{A-I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R_{A-I} X = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$, $x_2 = -\frac{1}{3}x_3$

$\Rightarrow \alpha_1 = ? \Rightarrow (3, -1, 3)$.

1.9.85 جبر خطی II

$B_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ پایه‌ای برای α_2 $\Rightarrow R_{A-2I}X = 0 \Rightarrow x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2x_2 + 2x_3$

فرض $x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = (2,1,0)$ بردار ویژه

فرض $x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow \alpha_3 = (2,0,1)$

$\Rightarrow B = \{B_1, B_2\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ پایه‌ای برای V

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ پیوسته $\}$, $T : V \to V$ $\quad T(f(x)) = \int^x f(t)\,dt$

مقادیر ویژه عملگر T را بیابید.

فرض اینکه مقدار ویژه‌ای c این وجود دارد: $\{ f \in V \mid f(x) \neq 0 , T(f(x)) = c f(x) \}$

$\Leftrightarrow \int^x f(t)\,dt = c f(x) \Leftrightarrow f(x) = c f'(x) \Leftrightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{c} f(x)$

$\Leftrightarrow \frac{df}{f} = \frac{dx}{c} \Leftrightarrow \ln f = \frac{1}{c} x + c_1$

$c \neq 0$

تا اگر T مقدار ویژه صفر ندارد.

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{f}{k}\right) = \frac{x}{c} \Leftrightarrow c = \frac{x}{\ln\left(\frac{f}{k}\right)}$ $\Rightarrow$ SC حتماً عدد ثابتی باشد ولذا به لحاظ اینکه این تابع مقدار ویژه ندارد.

جلسه پیش نبودم!

$$T: F^{2\times 2} \to F^{2\times 2}$$
$$T(A) = BA$$
$$tr(T) = 2\,tr(B)$$

برای $tr(A)$ هیچ قاعدهٔ کلی نمی‌شود بدست آورد.

تمرین:

$$T: F^{3\times 3} \to F^{3\times 3}$$
$$T(A) = BA$$
$$Tr(T) =$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

قضیه: اگر A یک ماتریس متقارن حقیقی در $\mathbb{R}^{n\times n}$ باشد و

$$D_i = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1i} \\ A_{21} & \cdots & A_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ii} \end{vmatrix} \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

در این صورت:

الف) اگر $D_i > 0 \quad \forall i$ آنگاه A مثبت معین است.

ب) اگر برای i های زوج $D_i > 0$ و برای i های فرد $D_i < 0$ آنگاه A معین منفی است.

ج) اگر $D_n = \det(A) \neq 0$ و (الف) و (ب) برقرار نباشند آنگاه A نامعین است.

د) اگر $D_n = \det(A) = 0$ باشد آنگاه A معین مثبت نیست و معین منفی نیست ولی ممکن است نیم معین (مثبت یا منفی) باشد.

A متقارن حقیقی $\leftarrow$ همهٔ مقادیر ویژه حقیقی است. اگر $\det(A) \neq 0$ باشد آنگاه همه مقادیر ویژه مخالف صفرند.

تمرین: درستی آزمون مشتق دوم برای حالت $n=2$ با استفاده از قضایای اخیر بررسی کنید.

آزمون مشتق دوم: $z = f(x,y)$ و $P_0(x_0,y_0)$ یک نقطهٔ بحرانی و یک نقطهٔ درونی دامنهٔ f (D_f) باشد

$$D(x_0,y_0) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} \Big|_{(x_0,y_0)}$$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\left(\begin{matrix} a^2+bc \\ cb+d^2 \end{matrix} \right.$

$tr(T) = tr(B)$

$a^2+d^2+2bc=0$

$(a+d)^2=0 \Rightarrow a=-d$

$f_{xx}>0 \rightarrow P_0$ min نسبی

الف) اگر $D>0$

$f_{xx}<0 \rightarrow P_0$ max نسبی

ب) اگر $\Delta<0 \rightarrow P_0$ نقطه زینی ..

ج) اگر $\Delta=0$ آزمون بی نتیجه است

$D_2=\Delta$ ← ها زوج

$D_1=f_{xx}$ ← ها فرد

← از این مطالب برای حل تمرین بالا استفاده می شود کرد.

چند نکته دیگر: **تعریف**: A را یک ماتریس خودتوان گویند هرگاه $A^2=A$

تعریف: A را یک ماتریس پوچ توان گویند هرگاه $n\in\mathbb{N}$ $(n\geq1)$ وجود داشته باشد بطوریکه $A^n=0$

تعریف: A را پوچ توان از مرتبه k گویند هرگاه $A^k=0$ و $A^{k-1}\neq0$

تمرین: اگر A یک ماتریس پوچ توان باشد از مرتبه k مطلوبست $tr(I+A)$

$$tr(A+I)=tr(A)+tr(I)=n+tr(A)$$

$$K\in N \Rightarrow A^k=0 \Leftarrow \text{پوچ توان } A$$

$$f(x)=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

$$tr(A)=c_1d_1+c_2d_2+\cdots+c_kd_k$$

آیا λ مقدار ویژه ماتریس A باشد ⇐ λ^k مقدار ویژه ماتریس A^k است؟

$A^k=0 \Rightarrow A^k\lambda^k$ چون λ^k مقدار ویژه است

$v\neq0$

$A^k v=\lambda^k v$ ← پس $\lambda^k v=0 \Rightarrow \lambda^k=0 \rightarrow \lambda=0$

پس A مقدار ویژه‌ای بجز صفر ندارد پس $f(x)=x^n$ ← چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A

پس $tr(A)=n\times0=0$

$$A^k v^k = \lambda^k v$$

9.8

$$g(x) = \det(xI - (A+I)) = \det((x-1)I - A) = (x-1)^n$$

چندجمله‌ای مشخصه $A+I$

$$\Rightarrow tr(A+I) = n \times 1 = n$$

* پس tr همه ماتریس‌های پوچ توان صفر است

اگر λ مقدار ویژه ماتریس A باشد آنگاه λ^k مقدار ویژه ماتریس A^k است.

$Av = \lambda v$ پایه استقرا

$A^n v = \lambda^n v$ فرض استقرا

اثبات: با استقرا روی k: برای $k = n+1$، $A^{n+1} v = \lambda^{n+1} v$ حکم استقرا

$$A^{n+1} v = A(A^n v) \underset{\text{فرض}}{=} A(\lambda^n v) = \lambda^n A v \underset{\text{پایه}}{=} \lambda^n \lambda v = \lambda^{n+1} v$$

$$f_1(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad A \in F^{n\times n}$$

یک چندجمله‌ای باشد روی میدان F؛ اگر λ مقدار ویژه A باشد مقدار ویژه $f_1(A)$ چیست

پاسخ: $f_1(\lambda)$ مقدار ویژه $f_1(A)$ است زیرا:

$$f_1(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

$f_1(A) v = f_1(\lambda) v$ ← باید ثابت کنیم ← متناظر با همان v است

if $Av = \lambda v \overset{?}{\Rightarrow} f_1(A) v = f_1(\lambda) v$ $\qquad$ $Av = \lambda v$ یعنی

داریم: $f_1(A) v = a_n A^n v + \cdots + a_1 A v + a_0 I v = a_n \lambda^n v + \cdots + a_1 \lambda v + a_0 v$

$$= (a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0) v = f_1(\lambda) v$$

فرض $f_2(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ یک چندجمله‌ای روی F باشد

سؤال: مقادیر ویژه ماتریس $f_2(A)\,[f_1(A)]^{-1}$ چیست؟

$f_2(A) f_1(A)$

جابجایی

$f_2(A) \forall = f_2(\lambda) v \Rightarrow v = f_2(A)$

$f_1(A) v = f_1(\lambda) v \rightarrow v = f_1^{-1}(A) f_1(\lambda) v$

پاسخ:

$$\underbrace{f_2(A) f_1^{-1}(A) f_1(\lambda) v = f_2(\lambda) v}$$

$$\text{if } AV = \lambda V \overset{?}{\Longrightarrow} f_2(A) \left[f_1(A) \right]^{-1} = \frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)} v$$

مطلب:

$$v = f_1(\lambda) \left[f_1(A) \right]^{-1} v \Leftarrow f_1(A) v = f_1(\lambda) v$$

$$f_2(A) v = f_2(\lambda) v$$

$$f_2(A) f_1(\lambda) \left[f_1(A) \right]^{-1} v = f_2(\lambda) v$$

$$\Rightarrow f_2(A) \left[f_1(A) \right]^{-1} v = \frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)} v$$

$\Rightarrow f_2(A) \left[f_1(A) \right]^{-1}$ مقدار ویژه $\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}$ است.

اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & c & a \end{bmatrix}_{n \times n}$$

یعنی A یک ماتریس سه قطری است.

در روشهای گسسته‌سازی PDE ← گسسته‌سازی

مثل FD ، FE از این نوع ماتریسها بسیار دیده می‌شود.

مقادیر ویژه این ماتریس: $\lambda_s = a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{s\pi}{n+1}\right) \quad s = 1, 2, \dots, n$

بردار ویژه متناظر با λ_s: $v_s = \left(\left(\frac{c}{b}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{s\pi}{n+1}\right), \left(\frac{c}{b}\right)^{2/2} \sin\frac{2s\pi}{n+1}, \dots, \left(\frac{c}{b}\right)^{n/2} \sin\frac{ns\pi}{n+1} \right)$

$s = 1, 2, \dots, n$

قضیه گرشگورین: اول
اگر $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ یک ماتریس $n \times n$ باشد و $\rho(A)$ شعاع طیفی ماتریس A باشد آنگاه

$$\rho(A) \leq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$\rho(A) = \max \lambda_s$ ← شعاع طیفی

۹/۸

* ← $\|A\|_\infty$ منظور ماکزیمم مجموع درایه‌ها روی ستون .

$\|A\|_1$ منظور ماکزیمم مجموع درایه‌ها روی سطر است .

قضیه دایره گرشگورین (قضیه براور) :

$A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ ، $P_s=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}|$ و λ یک مقدار ویژه دلخواه ماتریس A باشد .

P_s ← مجموع درایه‌های هر سطر جز قطر اصلی .

آنگاه λ درون یا روی مرز حداقل یکی از دایره‌های $|\lambda - a_{ss}| = P_s$ قرار می‌گیرد .

در واقع $\exists\, s \ \text{s.t.}\ |\lambda - a_{ss}| \le P_s$

ماتریس بلوکی

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}_{m\times m}$$

که A_{ij} ها ماتریس‌های $n\times n$ هستند

و همه این ماتریس‌ها دارای یک مجموعه از n بردار ویژه مستقل مشترک هستند .

در این صورت مقادیر ویژه ماتریس A عبارت است از مقادیر ویژه ماتریس زیر :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{11}^{(k)} & \lambda_{12}^{(k)} & \cdots & \lambda_{1m}^{(k)} \\ \lambda_{21}^{(k)} & \lambda_{22}^{(k)} & \cdots & \lambda_{2m}^{(k)} \\ \vdots & & & \\ \lambda_{m1}^{(k)} & \lambda_{m2}^{(k)} & \cdots & \lambda_{mm}^{(k)} \end{bmatrix}_{m\times m}}_{\text{همه مربوط به مثلاً } v_1 \text{ هستند}}$$

که در آن $\lambda_{ij}^{(k)}$ مقدار ویژه k ام A_{ij} است

$\ln(kf) = \frac{x}{c} \Rightarrow c \neq$ [illegible]

[illegible]

$$T(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$\exists f(x) \neq 0 \Rightarrow T(f(x)) = cf(x)$$

$$\text{if } c=0 \Rightarrow T(f(x))=0 \Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt = 0 \xRightarrow{\text{مشتق}} f(x)=0 \quad \text{تناقض}$$

$$c \neq 0 \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \,;\; T(f(x)) = cf(x) \Rightarrow F(x) = cf(x)$$

$$f(x) \neq 0$$

$$\text{مشتق} \Rightarrow F'(x) = cf'(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = c\frac{df}{dx} \Rightarrow \frac{df}{f} = \frac{1}{c}dx \Rightarrow \ln f = \frac{x}{c}+k \Rightarrow f(x) = e^{\frac{x}{c}+k}$$

$$= e^{\frac{x}{c}} \cdot e^{k} = ae^{\frac{x}{c}}$$

$$\text{از طرفی} \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow cf(0) = 0 \xrightarrow[c\neq 0]{} f(0) = 0$$

$$F(x) = cf(x)$$

$$0 = ae^{\frac{x=0}{c}} \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{تناقض}$$

لم: اگر $T: V \to V$ یک عملگر خطی باشد و $f(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه و c یک مقدار ویژه T باشد

$$\forall \alpha \in V \,;\; f(T)(\alpha) = f(c)\alpha \quad \text{آنگاه}$$

برهان: V یک فضای برداری روی میدان F

$$f(x) \in F[x]$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 I$$

$$\text{if } A \in F^{n\times n} : f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

$$f(T) : V \to V$$

$$f(T)(\alpha) = a_n T^n(\alpha) + a_{n-1}T^{n-1}(\alpha) + \cdots + a_1 T(\alpha) + a_0 \alpha$$

$T(\alpha) = c\alpha \Rightarrow c$ یک مقدار ویژه

$$T^2(\alpha) = T(T(\alpha)) = T(c\alpha) = cT(\alpha) = c^2\alpha \quad \longrightarrow T^n(\alpha) = c^n\alpha$$

$$f(T)(\alpha) = a_n c^n \alpha + a_{n-1} c^{n-1}\alpha + \cdots + a_1 c\alpha + a_0 \alpha$$
$$= (a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0)\alpha$$
$$= f(c)\cdot\alpha$$

* چند نکته مهم :

(۱) اگر $A, B \in F^{n\times n}$ & $(I-AB)$
معکوس پذیر باشد

Then ماتریس $(I-BA)$
نیز معکوس پذیر است

$$(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A$$

(۲) مقادیر ویژه ماتریس های AB , BA
یکسان است.

$$\det(xI-AB) = \cdots = \det(xI-BA)$$

(۳) اگر $A\in F^{n\times n}$ آنگاه
چندجمله‌ای مشخصه $f(x)=\det(xI-A)$
$$= x^n - (tr(A))x^{n-1} + g(x)$$

$g(x)$ یک چندجمله‌ای است با درجه کوچکتر از $n-1$ → $\deg(g(x)) < n-1$

(۴)
اگر $f(x) = (x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}\cdots(x-c_k)^{d_k}$
چندجمله‌ای مشخصه ماتریس $A\in F^{n\times n}$
آنگاه $tr(A) = c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_k d_k$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}$$

⑤ if $A, B \in F^{n\times n}$

آنگاه $tr(AB) = tr(BA)$

$tr: F^{n\times n} \longrightarrow F$

⑥ ماتریس های متشابه دارای رد یکسان هستند.

یعنی اگر $A, B \in F^{n\times n}$

$B = P^{-1}AP$

$\Rightarrow tr(B) = tr(A)$

⑦ ۷-۱ ← $f: F^{n\times n} \longrightarrow F$

فرض کنید f یک تابع خطی است اگر f در خاصیت زیر صدق کند آنگاه مضربی اسکالری از تابع tr است.

$f(AB) = f(BA)$

یعنی داریم: $\forall A \in F^{n\times n}$

$f(A) = c\,tr(A)$

c یک اسکالر است

۷-۲ ← اگر $f(I) = n$ آنگاه $f = tr$

⑧ $T: F^{2\times 2} \to F^{2\times 2}$: $B \in F^{2\times 2}$ یک ماتریس ثابت باشد.

$\forall A \in F^{2\times 2}: T(A) = BA$

T یک تبدیل خطی است

$tr(A) = ?$

مثال

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T(A) = A$

$[T] =$

استاندارد B

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{e_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{e_4} \right\}$$

$\Rightarrow tr(A) = A_{11} + A_{22}$

$x^2 - (A_{11} + A_{22})x + A_{11}A_{22}$

$T(e_1) = e_1$

$T(e_2) = e_2$

$T(e_3) = e_3$

بعد فضا $\times$ بعد ماتریس = بعد ماتریس

$$[T]_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = D$$

$$T(A) = T(A_{11}e_1 + A_{12}e_2 + A_{21}e_3 + A_{22}e_4)$$

* $tr(T)$ برابر است با $tr(D)$ که D ماتریس نمایش برای T در یک پایه دلخواه است.

$$tr(D) = tr(T) = 4$$

$$tr(B) = 2 \quad \Rightarrow tr(T) = 2tr(B)$$

$$tr(T) \quad ; \quad tr(A)$$

$$tr(A) = tr(T(A)) = \underset{tr(T)}{\bigcirc}$$

(9) اگر $V = F^{n\times n}$ و $W = \{D \in V \mid D = AB - BA\}$ آنگاه مقدار برداری تمام ماتریس هایی که رد آنها صفر است $= W$

$$W \subseteq V \qquad \dim V = n^2$$

$$\dim W = ?\ n^2 - 1$$

(10) اگر $A \in F^{n\times n}$ ، A مثلثی باشد آنگاه $xI - A$ مثلثی است پس:

$$f(x) = \det(xI - A) = (x - A_{11})(x - A_{22})\dots(x - A_{nn}) = 0$$

پس مقادیر ویژه ماتریس مثلثی A، درایه های روی قطر اصلی هستند.

اگر $A \in R^{n\times n}$ و متقارن و $X \in R^{n\times 1}$ ، $Q(x) = X^T A X$: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$Q(x) = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i A_{ij} x_j$$

فرم درجه دوم n متغیره ماتریس A

کاربرد در سیستم های کنترل درجه دوم

تعریف: گوییم ماتریس A، مثبت معین است هرگاه به ازای هر $X\neq 0$ داشته باشیم $Q(X)>0$

" " " " منفی معین " " " " " $Q(X)<0$

" " " " نیم مثبت معین " " " " " $Q(X)\geq 0$

Semi Positive Definite

" " " " نیم منفی معین " " " " " $Q(X)\leq 0$

" " " نامعین هرگاه به ازای برخی $X\neq 0$ داشته باشیم $Q(X)>0$ و به ازای برخی دیگر $Q(X)<0$ باشد.

قضیه: اگر A یک ماتریس معین در $R^{n\times n}$ باشد در این صورت:

الف) همه مقادیر ویژه A، حقیقی اند.

ب) اگر $\det(A)\neq 0$ آنگاه همه مقادیر ویژه A، مخالف صفرند.

ج) اگر همه مقادیر ویژه A مثبت باشند آنگاه A، مثبت معین است.

د) " " " " منفی " " " منفی معین است.

ر) " " " " نامنفی " " " نیم مثبت معین است.

ز) " " " " نامثبت " " " نیم منفی معین است

س) A دارای هم مقادیر ویژه منفی، هم مقادیر ویژه مثبت باشد، آنگاه A، نامعین است.

قضیه: آزمون مشتق دوم:

اگر $X_0=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ یک نقطه بحرانی تابع $f(x_1,\dots,x_n)$ باشد و X_0 یک نقطه درونی دامنه تعریف تابع f باشد و $H(X_0)$ ~~در این~~ ماتریس هسین در نقطه X_0 باشد:

(مشتقات مرتبه دوم f همگی پیوسته باشند)

$$H(X_0)=\begin{bmatrix} f_{11}(X_0) & f_{12}(X_0) & \cdots & f_{1n}(X_0)\\ f_{21}(X_0) & f_{22}(X_0) & \cdots & f_{2n}(X_0)\\ \vdots & & & \vdots\\ f_{n1}(X_0) & f_{n2}(X_0) & \cdots & f_{nn}(X_0)\end{bmatrix}$$

$$f_{12}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$$

نوع: $f_{ij}=f_{ji}$ به خاطر پیوستگی

الف) اگر H مثبت معین باشد آنگاه X_0 یک نقطه min موضعی (X_0) است

ب) اگر H منفی معین 〃 〃 〃 〃 max 〃 〃 〃

ج) 〃 $H(X)$ نامعین 〃 〃 〃 〃 〃 زینی تابع f 〃 〃 .

د) در غیراین صورت آزمون بی‌نتیجه است.

$$T: F^{3\times 3} \to F^{3\times 3}$$

$$T(A) = BA$$

$$Tr(T) =$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

قضیه: اگر A یک ماتریس متقارن حقیقی در $R^{n\times n}$ باشد و

$$D_i = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1i} \\ A_{21} & \cdots & A_{2i} \\ \vdots & & \\ A_{i1} & \cdots & A_{ii} \end{vmatrix}$$

در این صورت:

الف) اگر $D_i > 0$; $\forall i$ آنگاه A مثبت معین است.

ب) اگر برای iهای زوج $D_i > 0$ و برای iهای فرد $D_i < 0$ آنگاه A معین منفی است.

ج) اگر $D_n = \det A \neq 0$ و (الف) و (ب) برقرار نباشند آنگاه A نامعین است.

د) اگر $D_n = \det(A) = 0$ آنگاه A معین مثبت نیست و معین منفی نیست ولی ممکن است نیم‌معین (مثبت یا منفی) باشد.

اگر A متقارن و حقیقی ← همه مقادیر ویژه حقیقی است.

و اگر $\det(A) \neq 0$ ← همه مقادیر ویژه مخالف صفر است.

تمرین: درستی آزمون مشتق دوم را برای حالت $n=2$ با استفاده از قضایای اخیر بررسی کنید.

آزمون مشتق دوم: $z=f(x,y)$ و $P_0(x_0,y_0)$ یک نقطه بحرانی یک نقطه در D_f،

$$D(x_0,y_0)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\Big|_{(x_0,y_0)}$$

الف) اگر $D>0$:
- $f_{xx}>0 \rightarrow P_0$ ، $\min$ موضعی
- $f_{xx}<0 \rightarrow P_0$ ، $\max$ موضعی

ب) اگر $D<0 \rightarrow P_0$ ، نقطه زینی

ج) اگر $D=0 \rightarrow (P_0)$ آزمون بی‌نتیجه است.

چند نکته دیگر:

تعریف: A را یک ماتریس خودتوان گویند هرگاه $A^2=A$

تعریف: A را یک ماتریس پوچ توان گویند هرگاه وجود داشته باشد به طوری که $A^k=0$ $(k\geq 1)$ $k\in\mathbb{N}$

تعریف: A را پوچ توان از مرتبه k گویند هرگاه: $A^k=0$ ، $A^{k-1}\neq 0$

تمرین: اگر A یک ماتریس پوچ توان باشد از مرتبه k مطلوب است $tr(I+A)$:

$A^k=0$ پوچ توان

$$tr(I+A)=tr(I)+tr(A)$$
$$=n+tr(A)$$

اگر $f(x)=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$

$$tr(A)=c_1d_1+\cdots+c_kd_k$$

اگر λ مقدار ویژه ماتریس A باشد $\leftarrow$ λ^k مقدار ویژه ماتریس A^k است.

$$A^k=0 \Rightarrow A^kv=\lambda^kv \Rightarrow \lambda^kv=0 \xrightarrow[v\neq 0]{} \lambda^k=0 \rightarrow \lambda=0$$

زیرا λ^k مقدار ویژه است. $\leftarrow$ بنابراین ماتریس A تنها مقدار ویژه صفر دارد.

$$f(x)=\underbrace{x^n}_{(x-0)^n} \longrightarrow tr(A)=0$$

$f(x)=\det(xI-A)$

چندجمله‌ای مشخصه ماتریس $g(x)=\det(xI-(A+I))=\det((x-1)I-A)=(x-1)^n$

$$\Rightarrow tr(A+I)=n\times 1=n$$

- اگر λ مقدار ویژهٔ ماتریس A باشد آنگاه λ^k مقدار ویژهٔ ماتریس A^k است :

پایهٔ استقراء $\quad AV = \lambda V \quad (K=0)$

فرض استقراء $\quad A^n V = \lambda^n V \quad (K=n)$

حکم استقراء $\quad A^{n+1} V = \lambda^{n+1} V \quad (K=n+1)$

$$A^{n+1}V = A(A^n V) = A(\lambda^n V) = \lambda^n A V = \lambda^n \lambda V = \lambda^{n+1} V$$

فرض استقراء $\qquad$ پایه

$A \in F^{n \times n}$

(فرض) $\quad f_1(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad$ یک چندجمله‌ای باشد روی میدان F

اگر λ مقدار ویژهٔ A باشد مقادیر ویژهٔ $f_1(A)$ چیست ؟

(پاسخ) $\quad f_1(\lambda)$ مقدار ویژهٔ $f_1(A)$ است زیرا

$$f_1(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I$$

پس باید ثابت کنیم : $\quad$ if $\quad AV = \lambda V \Rightarrow f_1(A)V = f_1(\lambda)V$

داریم : $\quad f_1(A)V = a_n A^n V + \dots + a_1 AV + a_0 IV$

$$= a_n \lambda^n V + \dots + a_1 \lambda V + a_0 V$$

$$= (a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0)V = f_1(\lambda)V$$

فرض : $\quad f_2(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 \quad$ یک چندجمله‌ای روی F باشد.

سؤال : مقادیر ویژهٔ ماتریس $\quad f_2(A)[f_1(A)]^{-1} \quad$ چیست ؟

پاسخ : اگر λ مقدار ویژهٔ ماتریس A باشد آنگاه $\dfrac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}$ مقدار ویژهٔ ماتریس $f_2(A)[f_1(A)]^{-1}$ است .

حکم : باید ثابت کنیم : $\quad f_2(A)[f_1(A)]^{-1}V = \dfrac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)} V$

[illegible] : $f_1(A)V = f_1(\lambda)V$ [illegible]

[illegible]

حل مسائل جبر خطی

$f_1(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad A \in F^{n\times n}$ فرض: یک چندجمله‌ای باشد روی میدان F

اگر λ مقدار ویژه A باشد مقدار ویژه $f_1(A)$ چیست؟

پاسخ: $f_1(\lambda)$ مقدار ویژه $f_1(A)$ است زیرا:

$f_1(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I \Rightarrow f_1(A)V = f_1(\lambda)V$ اگر $AV = \lambda V$ — پس باید ثابت کنیم

$f_1(\lambda)$ مقدار ویژه f_1 است متناسب با بردار V.

داریم: $f_1(A)V = a_n A^n V + \dots + a_1 AV + a_0 IV = a_n \lambda^n V + \dots + a_1 \lambda V + a_0 V$
$= (a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0) V = f_1(\lambda)V$

فرض: $f_2(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ یک چندجمله‌ای روی F باشد.

سؤال: مقدار ویژه ماتریس $f_2(A) \times [f_1(A)]^{-1}$ چیست؟

پاسخ: اگر λ مقدار ویژه A باشد آنگاه $\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}$ مقدار ویژه ماتریس $f_2(A)[f_1(A)]^{-1}$ می‌باشد.

باید ثابت کنیم: $AV = \lambda V \Rightarrow f_2(A)[f_1(A)]^{-1} V = \frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)} V$

می‌دانیم: 1) $f_1(A)V = f_1(\lambda)V \Rightarrow V = f_1(\lambda)[f_1(A)]^{-1} V$

2) $f_2(A)V = f_2(\lambda)V$

جایگزین در 2: $f_2(A) f_1(\lambda)[f_1(A)]^{-1} V = f_2(\lambda)V \Rightarrow f_2(A)[f_1(A)]^{-1} V = \frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)} V$

*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & 0 \\ c & a & b & & \\ & c & a & b & \\ & & c & a & b \\ 0 & & & c & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$ ماتریس سه‌قطری

معمولاً در روش‌های حل PDE و ODE و ... در حالت گسسته شده به صورت ماتریس سه‌قطری ظاهر می‌گردد.

مقدار ویژه A: $\lambda_s = a + 2\sqrt{bc}\,\cos\left(\frac{s\pi}{n+1}\right)$

$s = 1, \dots, n$

بردار ویژه $V_s = \left(\left(\frac{c}{b}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{s\pi}{n+1}\right), \left(\frac{c}{b}\right)^{2/2} \sin\left(\frac{2s\pi}{n+1}\right), \dots, \left(\frac{c}{b}\right)^{n/2} \sin\left(\frac{ns\pi}{n+1}\right) \right)$

* قضیه گرشگورین : « قضیه اول » ماتریس $n\times n$ $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

در این $\rho(A)$ شعاع طیفی ماتریس A باشد آنگاه $\rho(A) \leq \max_{j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ $\|A\|_{\infty}$

$\rho(A) = \max_s |\lambda_s|$ و λ مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد.

$\rho(A) \leq \max_{i} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ $\|A\|_1$

* قضیه دوم گرشگورین : (قضیه دایره گرشگورین یا قضیه برآورد)

$A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ و $P_s = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}|$

و اگر λ مقدار ویژه دلخواه ماتریس A می‌باشد آنگاه λ حداقل در یکی از دایره های $|\lambda - a_{ss}| \leq P_s$ قرار می‌گیرد.

$J_s : |\lambda - a_{ss}| \leq P_s$

فرض کنید
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \dots & A_{2m} \\ \vdots & & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}_{m\times m}$$
که A_{ij} ها ماتریس های $n\times n$ مستقیم و متقارن

ماتریس ها دارای یک مجموعه از بردار ویژه مستقل خطی مشترک هستند. در این صورت مقادیر ویژه ماتریس A عبارت است از مقادیر ویژه ماتریس های زیر:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11}^{(k)} & \lambda_{12}^{(k)} & \dots & \lambda_{1m}^{(k)} \\ \lambda_{21}^{(k)} & \lambda_{22}^{(k)} & \dots & \lambda_{2m}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1}^{(k)} & \lambda_{m2}^{(k)} & \dots & \lambda_{mm}^{(k)} \end{bmatrix}$$
که در آن $\lambda_{ij}^{(k)}$ مقدار ویژه k-ام ماتریس A_{ij} است.

مسئله دیگر که در اینجا داریم به صورت diagonalize کردن ماتریس شکل بسته آن

مطلوب است مقادیر ویژه ماتریس A :

$$A = \begin{bmatrix} 1-2r & r & & 0 \\ r & 1-2r & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & r \\ 0 & & r & 1-2r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

if $B \in \mathbb{R}^{N\times N} \Rightarrow \lambda_s = a + 2\sqrt{bc}\,\cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right)$

$s = 1, \dots, N$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} = I_{(N-1)\times(N-1)} + rT_{N-1}$$

مقادیر ویژه ماتریس I همه یک می باشند.

مقادیر ویژه ماتریس I_{N-1} : $\lambda_s = -2 + 2\sqrt{1\times 1}\,\cos\frac{s\pi}{N} \Rightarrow \lambda_s = -2\left(1 - \cos\frac{s\pi}{N}\right) = -2\left(2\sin^2\frac{s\pi}{2N}\right)$

$s = 1, \dots, N-1$

$= -4\sin^2\frac{s\pi}{2N}$ مقادیر ویژه ماتریس T_{N-1}

مقادیر ویژه ماتریس $I = 1$ ، مقادیر ویژه ماتریس A

$\lambda = 1 - r\lambda_s = 1 - 4r\sin^2\frac{s\pi}{2N}$?

می توان مقادیر ویژه دو ماتریس را با هم جمع کرد؟

اگر یکی از دو ماتریس همانی باشد می توان این کار را انجام داد.

$f(x) = 1 + rx \Rightarrow f(T_{N-1}) = I + rT_{N-1}$

مقادیر ویژه A می باشند. $f(\lambda_s) = 1 + r\lambda_s$ = مقادیر ویژه $f(T_{N-1})$

روش کرانک نیکلسون

if $A = (2I - rT_{N-1})^{-1}(2I + rT_{N-1}) \Rightarrow \lambda_A = \dfrac{2 - 4r\sin^2\frac{s\pi}{2N}}{2 + 4r\sin^2\frac{s\pi}{2N}}$

به ازای همه $r > 0$ ، λ کوچکتر از یک میشود و روش پایدار می باشد.

روش پایدار روشی است که ازای یک ورودی کوچک، منجر به یک خروجی کوچک در خروجی داشته باشیم

چند جمله‌ای مینیمال یک عملگر خطی یا یک ماتریس :

V یک فضای برداری و $T: V \to V$ روی میدان F و $\dim V < +\infty$ یک چندجمله‌ای $P(x) \in F[x]$ را

چندجمله‌ای مینیمال گوییم عملگر T گوییم هرگاه :

الف) $P(x)$ یک چندجمله‌ای تکین باشد.

ب) $P(T) = 0$ یعنی چندجمله‌ای $P(x)$، عملگر خطی T را پوچ کند.

ج) $P(x)$ یک چندجمله‌ای با کمترین درجه در میان همه چندجمله‌ای هایی که T را پوچ می‌کنند باشد.

$$\text{if } q(T) = 0 \Rightarrow \deg P \leq \deg P$$

$$\text{if } T: V \xrightarrow{\text{عملگر خطی باشد}} V \Rightarrow \begin{array}{l} P(T): V \xrightarrow{\text{عملگر}} V \\ q(T): V \xrightarrow{\text{عملگر خطی}} V \end{array}$$

p و q دو چندجمله‌ای روی میدان F

همه چندجمله‌ای هایی که T را پوچ می‌کنند یک زیرفضا می‌باشند (یک فضای برداری) که توسط چندجمله‌ای مینیمال ایجاد می‌گردد (یعنی یک مولد تنها دارد)

$$(P+q)(T) = P(T) + q(T)$$
$$(Pq)(T) = P(q(T))$$

* چون اگر $T: V \to V$ عملگر خطی و $\dim V < \infty$، آنگاه لزوماً چندجمله‌ای مینیمال عملگر خطی T عملگر صفر نمی‌باشد.

$r(x) = 0 \Rightarrow r(T) = 0$ چندجمله‌ای صفر

اگر $A^{n \times n}$ باشد آنگاه $P(x)$ را چندجمله‌ای مینیمال A گوییم هرگاه

الف) $P(A) = 0$ ب) $P(x)$ تکین باشد.

ج) $\text{if } q(A) = 0 \Rightarrow \deg P \leq \deg q$

* اگر $[T]_B = A$ و $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، آنگاه $[P(T)]_B = P(A)$

پس چندجمله‌ای مینیمال عملگر خطی T را می‌توان همان چندجمله‌ای مینیمال ماتریس نمایش آن در نظر گرفت.

* ماتریس های متشابه دارای چندجمله‌ای های مینیمال یکسان هستند.

if A, B متشابه باشند $\Rightarrow B = P^{-1}AP$

if $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \Rightarrow g(A) = 0 \Leftrightarrow P^{-1} g(A) P = 0$

چون P ماتریس صفر نیست چون معکوس پذیر است.

$$g(B) = g(P^{-1}AP) = a_n (P^{-1}AP)^n + \dots + a_1 (P^{-1}AP) + a_0 I$$

$$(P^{-1}A\underbrace{P)(P^{-1}}_{I}AP) = P^{-1}A^2P \Rightarrow (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

$$\Rightarrow g(B) = a_n P^{-1}A^nP + \dots + a_2 P^{-1}A^2P + a_1 P^{-1}AP + a_0 I = P^{-1} g(A) P$$

$$\Rightarrow g(A) = 0 \Leftrightarrow P^{-1} g(A) P = 0 \Leftrightarrow g(B) = 0$$

چندجمله‌ای g ، A را پوچ می‌کند اگر و فقط اگر B را پوچ کند.

اگر چندجمله‌ای g، مینیمال B نباشد، چندجمله‌ای f با درجه کمتر B (حتماً) مینیمال است باید با درجه کمتر مینیمال A باشد ولی درجه g که تناقض می‌باشد چون ما فرض کردیم g مینیمال A باشد.

* رابطه میان چندجمله‌ای مینیمال و چندجمله‌ای مشخصه

* قضیه: اگر $f(x)$ و $p(x)$ به ترتیب چندجمله‌ای های مشخصه و مینیمال عملگر خطی T (یا ماتریس A) باشند آنگاه ریشه‌های f و p یکسان است اگرچه احتمالاً با مرتبه تکرار متفاوت.

$f(x) = 0 \longrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_k$ مقادیر ویژه عملگر T همان ریشه‌های f هستند

$\Rightarrow P(\lambda_i) = 0 \quad i = 1, \dots, k$

if $f(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_k)^{d_k} \Rightarrow P(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k}$

* قضیه «کیلی - همیلتون»: اگر $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصه عملگر خطی T (یا ماتریس A) باشد آنگاه $f(T) = 0$. به عبارت دیگر اگر $p(x)$ چندجمله‌ای مینیمال عملگر خطی T (یا ماتریس A) باشد آنگاه

$p(x) \mid f(x)$

مثال: $I: V \longrightarrow V$ ، $\dim V = n$ ⇐ $p(x) = x-1$

$f(x) = (x-1)^n$

$0: V \longrightarrow V$ ، $\dim V = n$ $p(x) = x$

$f(x) = x^n$

مثال: $V = \{f: F \to F \mid f(x) = a_n x^n + \dots + a_0\}$ حداکثر از درجه n ($\dim V < \infty$)

$\Rightarrow \dim V = n+1$

D عملگر مشتق‌گیری:

چندجمله‌ای مینیمال D را بیابید: $p(x) = x^{n+1}$

$P(D) = D^{n+1} \Rightarrow P(D)(f(x)) = D^{n+1}(\underbrace{f(x)}_{\text{حداکثر درجه } n}) = 0 \Rightarrow$ عملگر D را صفر می‌کند p

فرض: $q(x)$ یک چندجمله‌ای باشد که $\deg(q(x)) < \deg p(x)$ ، مثلاً $\deg(q(x)) = n$

$\Rightarrow q(D) = \dots + D^n + \dots \Rightarrow q(D)(x^n) \neq 0 \Rightarrow$ پوچ نمی‌کند.

* تعریف: عملگر خطی $T: V \to V$ را که $\dim V < \infty$ مثلثی‌شدنی گویند هرگاه یک پایه‌ای بیابیم که نسبت به آن ماتریس مثلثی (بالا مثلثی یا پایین مثلثی) داشته باشد.

* قضیه: اگر $T: V \longrightarrow V$ یک عملگر خطی باشد و $\dim V < +\infty$ در این صورت T مثلثی‌شدنی است هرگاه چندجمله‌ای مینیمال آن به حاصلضرب عوامل اول تجزیه گردد.

چندجمله‌ای $f(x) \in F[x]$ را تحویل‌ناپذیر گویند هرگاه چندجمله‌ای‌های حداقل از درجه ۱، $h(x)$ و $g(x)$ نباشند به طوری که $f(x) = h(x)g(x)$ در غیر این صورت $f(x)$ را تحویل‌پذیر گویند.

هر چندجمله‌ای غیر اسکالر (درجه‌اش صفر نباشد) تحویل‌ناپذیر را یک چندجمله‌ای اول (عامل اول) گویند.
میدان F را بسته جبری گویند هرگاه هر چندجمله‌ای اول در F از درجه یک باشد.

اگر $A^{n\times n}$ روی میدان بسته جبری F باشد آنگاه A مثلثی شدنی می‌باشد. یادآوری میدان بسته جبری F

اگر $P(x)=(x-1)(x-2)^2$ (مشخصه بود) اگر $f(A)=(A-I)(A-2I)$ صفر شد حتماً این مینیمال می‌باشد اگر نه $P(A)=(A-I)(A-2I)^2$ مینیمال می‌باشد.

ماتریس‌های متعامد:

ماتریس A در $F^{n\times n}$ را متعامد گویند هرگاه $A\cdot A^T=I$ به عبارت دیگر $A^{-1}=A^T$

مثال: $A=\begin{bmatrix}3/5 & -4/5\\ 4/5 & 3/5\end{bmatrix}$ متعامد می‌باشد.

$\Rightarrow \det(A)=1$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}3/5 & 4/5\\ -4/5 & 3/5\end{bmatrix}=A^T$$

$$\text{if}\quad AA^T=I \Rightarrow \det(AA^T)=\det(I)=1 \Rightarrow \det(A)\cdot\overbrace{\det(A^T)}^{\det(A)}=1$$

$$\Rightarrow (\det(A))^2=1 \Rightarrow \underline{\det(A)=\pm 1}$$

* تمرین: ماتریس دوبعدی متعامدی مثال بزنید که دترمینان آن -1 گردد.

* تمرین: شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس $n\times n$ A ماتریس متعامد باشد چیست؟

(جبر خطی سیمور لیپشیتز انتشارات علوی ترجمه دکتر نیکایی.

حساب دیفرانسیل و انتگرال دکتر [illegible] جلد اول فصل دوم

ماتریس هرمیتی: $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ را هرمیتی گویند هرگاه $A=\overline{A^T}$ (مزدوج A^* یا A^H ماتریس هرمیتی)

جبر خطی ۱ 15.9.95

روش بدست آوردن چند جمله‌ای مینیمال یک عملگر خطی (ماتریس)

فرض کنیم $f(x)=\det(xI-T)$ چند جمله‌ای مشخصه $f(x)=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$ که

$c_1, c_2, \dots, c_k$ مقادیر ویژه متمایز عملگر T هستند.

چند جمله‌ای مینیمال: $p(x)=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$ ، $r_i \le d_i \;;\; i=1,\dots,k$

* فرض کنیم عملگر $T:V\to V$ که $\dim V<\infty$ قطری شدنی است. و $c_1,\dots,c_k$ مقادیر ویژه متمایز عملگر T باشند. چند جمله‌ای مینیمال عملگر T را بدست آورید.

حل: چون T قطری شدنی است پس با فرض اینکه $\dim V=n$ ، V دارای پایه‌ای مانند $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ است که α_j ($j=1(1)n$) بردار ویژه T هستند.

اگر α یک بردار ویژه عملگر خطی T باشد پس وجود دارد c_i ای $i=1,\dots,k$ بطوریکه:
$(T-c_iI)(\alpha)=0$
یعنی $T(\alpha)=c_i\alpha$ پس می‌توان نوشت $\big((T-c_1I)(T-c_2I)\cdots(T-c_kI)\big)(\alpha)=0$. اکنون اگر β عضو
$P(T)(\beta)$:
دلخواه V باشد. می‌دانیم که $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n$ در نتیجه: $(T-c_1I)\cdots(T-c_kI)(\beta)=0$
پس چند جمله‌ای $P(x)=(x-c_1)\cdots(x-c_k)$ عملگر T را پوچ می‌کند و لزوماً چند جمله‌ای مینیمال T است. چون توان کمتر از این وجود ندارد.

* قضیه: اگر $T:V\to V$ یک عملگر خطی باشد ($\dim V<\infty$) در این صورت عملگر T قطری شدنی است اگر و فقط اگر چند جمله‌ای مینیمال آن بصورت $P(x)=(x-c_1)\cdots(x-c_k)$ باشد که $c_1,\dots,c_k$ بردار ویژه T می‌باشند.

مثال: $A=\begin{bmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{bmatrix}$ $\quad f(x)=(x-2)^2(x-1)$ ، $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ، $[T]_{\mathcal{B}}=A$

اگر T قطری است ماتریس A یک ماتریس قطری مشابه است.

$p(x) = (x-2)^k(x-1) \quad 0 < k \leq 2$

$\Rightarrow k=1 \Rightarrow p(x) = (x-2)(x-1)$ چون T قطری شدنی است

مثال: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x) = (x-2)^2(x-1)$ چندجمله‌ای مشخصه

قطری شدنی نمی‌باشد

$p(x) = (x-2)^k(x-1)^l$, $l=1 \Leftarrow$ $p(x) = (x-2)^2(x-1)$

$p_1(x) = (x-2)(x-1)$

$\Rightarrow p(x) = (x-2)^2(x-1) = 0$ ✓ چون مرتبه ۳ است.

$(A-2I)(A-I) \neq 0 \Rightarrow$ چون قطری شدنی نمی‌باشد $\Rightarrow p(x) = f(x)$

مثال) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $[T]_B = A$, $f(x) = x^2+1$

مقدار ویژه حقیقی ندارد؛ پس چندجمله‌ای مینیمال همان $f(x)$ می‌باشد

مثال: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ مطلوب است تعیین چندجمله‌ای مینیمال ماتریس A:

$A = [T]_B$, $T: R^4 \to R^4$

حل: $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ پس چندجمله‌ای

$p(x) = x^3 - 4x$

$= x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$

$A^3 = 4A \Rightarrow A^3 - 4A = 0$

$P(A) = A^3 - 4A = 0$ ؛ ماتریس A را پوچ می‌کند ولی $\Rightarrow$ حال چندجمله‌ای مینیمال را پیدا می‌کنیم:

$\times\ P(A) = A = 0 \longleftarrow p(x) = x$

$\times\ A = 2I \Leftarrow P(A) = A - 2I \longleftarrow p(x) = x - 2$

$\times\ A = -2I \longleftarrow P(A) = A + 2I = 0 \longleftarrow p(x) = x + 2$

پس $p(x)$ مینیمال است

15.9.85

$p(x)$ از درجه دوم باشد.

$P(x) = x(x-2) = x^2 - 2x \Rightarrow P(A) = 0 \Rightarrow A^2 - 2A = 0 \Rightarrow A^2 = 2A$ ✗

$P(x) = x(x+2) \Rightarrow P(A) = 0 \Rightarrow A^2 + 2A = 0 \Rightarrow A^2 = -2A$ ✗

$P(x) = (x-2)(x+2) = x^2 - 4 \Rightarrow P(A) = 0 \Rightarrow A^2 - 4I = 0 \Rightarrow A^2 - 4I$ ✗

$\Rightarrow P(x) = x(x-2)(x+2)$

چند جمله‌ای مینیمال است!

$\deg(P(x)) = 4$ اگر درجه چند جمله‌ای مشخصه ۴ باشد

بوسیله مقادیر ویژه متمایز. چند جمله‌ای مینیمال $P(x) = 0$

$c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = -2$

$\Rightarrow P(x) = x(x-2)(x+2) \Rightarrow \ker(A - c_1 I) = \ker(A) = 4 - (A\ \text{رتبه}) = 4 - 2 = 2$

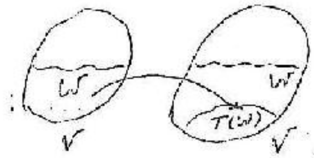
$\ker(A - c_2 I) = \ker(A - 2I)$, $\ker(A - c_3 I) = \ker(A - 3I)$

فضای ویژه متناظر با مقدار ویژه c_1 دارای بعد ۲ است یعنی تکرار $c_1 = 0$ در P برابر با ۲ است.

* ماتریس‌ها و عملگرهای مثلثی شدنی:

* فرض کنید ماتریس A مثلثی شدنی است. چگونه ماتریس B را بیابیم بطوریکه B مثلثی باشد و با A متشابه باشد.

* تعریف زیرفضای پایا: فرض کنیم $T: V \to V$ یک عملگر خطی باشد و W زیرفضای V باشد. گوئیم W تحت T پایا است هرگاه: $\forall \alpha \in W \Rightarrow T(\alpha) \in W$



$T(W) \subseteq W$

مثال: $T: V \to V$, $W_1 = \{0\}$, $T(W_1) = \{0\} \subseteq W_1$

$W_2 = V$, $T(W_2) = R_T \subseteq V$ پس همواره زیرفضاهای $\{0\}$ و V تحت T پایا هستند.

$W_3 = R_T \Rightarrow T(W_3) \subseteq W_3$

$W_4 = N_T \Rightarrow T(W_4) \subseteq W_4$

تحت T پایا هستند.

پس R_T (برد T) و N_T (فضای پوچ T)

مثال: $V = F[x]$ فضای توابع چند جمله‌ای روی میدان F ، $D: V \to V$ عملگر مشتق گیری

فضای توابع چند جمله‌ای که...

تمرین: D پایا است

$W = \{ f : F \to F \mid f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \}$

$D(W) = \{ g : F \to F \mid g(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} \}$

$\Rightarrow D(W) \subseteq W$

* عملگر انتگرال‌گیری پایا نمی‌باشد.

(Δ)

* قضیه: اگر V یک فضای برداری روی میدان F و $\dim V < +\infty$ و $T : V \to V$ یک عملگر خطی و $W \subsetneq V$ (W زیرفضای ناسره از V) و چندجمله‌ای مینیمال T به صورت:
(W تحت T پایا باشد) $p(x) = (x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k}$
آنگاه وجود دارد $\alpha \in V$ به طوری که:

الف) $\alpha \notin W$ ب) برای یک مقدار ویژه T مانند c: $(T - cI)(\alpha) \in W$

مثلثی

* الگوریتم: برای تعیین پایه مرتبی مانند $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ که به ازای آن $[T]_B$ مثلثی باشد ... $B = P^{-1}AP$

1) $T : V \to V$ ، $W_1 = \{0\}$ تحت T پایا است (به شرط اینکه چندجمله‌ای مینیمال به عوامل خطی تجزیه شده باشد)

با توجه به قضیه (Δ) بردار α_1 را می‌یابیم. ($\alpha_1 \notin W_1$)

قضیه Δ

2) قرار می‌دهیم $W_2 = \langle \alpha_1 \rangle$ ، W_2 تحت T پایا است ـــــ α_2 را بدست می‌آوریم. ($\alpha_2 \notin W_2$)

3) $W_3 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ ، W_3 " ـــــ " α_3 " ($\alpha_3 \notin W_3$)

این کار را n بار ($\dim V = n$) ادامه می‌دهیم.

تمرین) از مثال‌های قبلی یکی را انتخاب کنید (مثلثی‌شدنی باشد) و الگوریتم فوق را برای فرم مثلثی آن اجرا کنید.

20.9.85

جلسه ۱۱

نکاتی پیرامون دترمینان ماتریس‌ها و عملگرهای خطی : ...

$$A\in F^{n\times n} \Rightarrow \det(A)=\sum(-1)^{i+j}A_{ij}\det(A(i|j))$$

دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر i-ام و ستون j-ام ماتریس A می‌باشد.

$$\underbrace{(-1)^{i+j}\det(A(i|j))}_{\text{همسازه } ij \text{ ام}} \qquad A^{-1}=(\det(A))^{-1}\operatorname{adj}(A)$$

$\operatorname{adj}(A)=$ ... ماتریس الحاقی کلاسیک A ــــ ترانهاده ماتریس همسازه A

$$(\operatorname{adj}(A))_{ij}=(-1)^{i+j}\det A(j|i)$$

$$D=\begin{bmatrix} A & B\\ O & C\end{bmatrix} \qquad A\in F^{r\times r},\ B=F^{r\times s},\ O\in F^{s\times r},\ C\in F^{s\times s} \Rightarrow D\in F^{(r+s)(r+s)}$$

$$\Rightarrow \det(D)=\det(A)\det(C)$$

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & 0\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k\end{bmatrix} \qquad A_i\in F^{n_i\times n_i} \quad i=1,\dots,k \Rightarrow A\in F^{(n_1+\dots+n_k)\times(n_1+\dots+n_k)}$$

$$\Rightarrow \det(A)=\det(A_1)\cdots\det(A_k)$$

$T: V\to V$, $U: V\to V$ دو عملگر خطی روی V ، $\dim V<\infty$

الف) $\det(TU)=\det(T)\det(U)$

ب) T معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر دترمینان T مخالف صفر باشد.

V فضای ماتریس‌های $n\times n$ روی میدان F

$L_B: V\to V$, $R_B: V\to V$; $V\in F^{n\times n}$

B ماتریس ثابت است $\Rightarrow \forall A\in V:\ L_B(A)=BA$

$$R_B(A)=AB$$

ثابت می‌شود که : $\det(L_B)=\det(R_B)=\det(B)^n$

$T_B : V \to V \qquad T_B(A) = AB - BA \Rightarrow \det(T_B) = 0$

* قضیه: اگر $A \in F^{n\times n}$ حقیقی و متقارن باشد و اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A و $v_1, v_2, \dots, v_n$ ~~...~~ بردارهای ویژه نظیر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (به ترتیب) باشند آنگاه:

$$C^T A C = D \qquad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ یک ماتریس قطری

[illegible]

$$\Rightarrow C = [e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n] \qquad e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|} \Rightarrow \|e_i\| = 1$$

$\|v_i\|$: اندازه بردار v_i ← نرم اقلیدسی

e_i بردارهای دو به دو متعامد باشند: $e_i \cdot e_j = 0$ if $i \neq j$ ، $e_i \cdot e_i = 1$

پس $C^T = C^{-1}$ یعنی C یک ماتریس متعامد باشد.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = +\sqrt{2}, \ \lambda_3 = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow C = [e_1 \ e_2 \ e_3] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} A C = C^T A C = D = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \sqrt{2} & \\ 0 & & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad A_i \in F^{n\times n} \Rightarrow D \in F^{2n\times 2n}$

با فرض آنکه A_i ها ماتریس‌های جابجا شونده‌ای باشند آنگاه: $\det(D) = \det(A_1A_4 - A_2A_3)$

(جابجا شونده یعنی اینکه خاصیت جابجایی داشته باشد)

* تجزیه مقدار منفرد singular value decomposition (SVD)

* تعریف: ماتریس $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را یک ماتریس یکانی (unitary) گوییم هرگاه $U^H = \overline{U^T} = U^*$, $UU^H = I$

* قضیه: اگر $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد آنگاه ماتریس یکانی U وجود دارد طوریکه:

$$U^H A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

لزوماً صفر نمی‌باشد

20.9.85

مرجعی ...

* قضیه: اگر $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ یک ماتریس هرمیتی باشد ($A=\bar{A}^T$) آنگاه $U^{-1}AU = U^HAU = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n\end{bmatrix}$

که λ_iها مقادیر ویژه ماتریس A می باشند و

$U=[e_1\ \ e_2\ \cdots\ e_n]$ (که U یک ماتریس یکانی می باشد) و e_iها بردارهای ویژه نظیر متناظر λ_iها

شکل کلی ماتریس های هرمیتی 2×2: $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ ، $\begin{bmatrix}x & a+ib\\ a-ib & y\end{bmatrix}$

* قضیه: اگر A یک ماتریس $m\times n$ روی میدان $\mathbb{C}$ باشد آنگاه $(A^HA)_{n\times n}$ یک ماتریس هرمیتی معین مثبت می باشد.

ضمناً اگر $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A^HA باشند آنگاه $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots\geq\lambda_n\geq 0$ می باشند.

قرار می دهیم $\sigma_k^2=\lambda_k$ ، $K=1(1)n$ ، $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\dots\geq\sigma_n$ ، σ_kها را مقادیر منفرد ماتریس A گویند.

* اگر $Rank(A)=r$ آنگاه تعداد مقادیر غیرصفر منفرد ماتریس A برابر r می باشد.

* قضیه: اگر A یک ماتریس $m\times n$ دلخواه باشد آنگاه ماتریس های یکانی $U_{m\times m}$ و $V_{n\times n}$ موجودند بطوریکه (SVD)

$U^HAV=\Sigma$

که در آن $\Sigma=\begin{bmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ که $D=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_r\end{bmatrix}$ که $r=rank(A)$ و $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ مقادیر غیرصفر منفرد

ماتریس A می باشند. اکنون می توان ~~...~~ نوشت $A=V^H\Sigma U$ که این تجزیه را تجزیه مقدار منفرد A گویند.

① نمره * تمرین: با استفاده از قضیه فوق یک ماتریس 3×3 و یک ماتریس 4×3 در نظر بگیرید و SVD آن را تعیین کنید. (قبل از امتحان)

کتاب های مرجع reference: Introduction to numerical analysis
"stoer" فصل 7 و 8
"Atkinson"

* فضای ضرب داخلی:

میدان $F=\mathbb{C}$ ، $F=\mathbb{R}$ ماتریس

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow \alpha\cdot\beta=|\alpha||\beta|\cos\alpha$ یا $\alpha=(x_1,x_2,x_3)$ و $\beta=(y_1,y_2,y_3)$

$\Rightarrow \alpha\cdot\beta=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

$|\alpha|=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$ = طول یا اندازه α

* تعریف فضای برداری: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. یک ضرب داخلی روی V تابعی است که به هر زوج α و β از V یک اسکالر $\alpha\cdot\beta$ را نسبت دهد:

الف) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ ، $\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$

ب) $c\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot c\beta=c(\alpha\cdot\beta)$ ، $\forall\alpha\in V$ ، $\forall c\in F$

ج) $\alpha\cdot\beta=\overline{\beta\cdot\alpha}$ (مزدوج)

$\rightarrow \cancel{(c\alpha+\beta)\cdot\gamma} \quad \alpha(c\beta+\gamma) \overset{(\text{ج})}{=} \overline{(c\beta+\gamma)\cdot\alpha} \overset{\text{الف}}{=} \overline{c\beta\cdot\alpha} + \overline{\gamma\cdot\alpha} = \bar{c}(\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)$

$\alpha\cdot(c\beta+\gamma) = \alpha\cdot(c\beta) + \alpha\cdot\gamma = c(\alpha\cdot\beta) + \alpha\cdot\gamma$

23.9.85

جبر خطی ۱

* فضاهای ضرب داخلی:

فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. بردارهای α و β را متعامد گویند هرگاه $\langle \alpha , \beta \rangle = 0$.

مثال: $V=\mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی استاندارد ... فضای اقلیدسی.

$\alpha = (x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} \Rightarrow \quad \beta = (y_1, y_2, y_3) = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$

$\alpha . \beta = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \|\alpha\| \|\beta\| \cos\theta$

$\alpha . \beta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$

* اگر $S \subseteq V$ ، S را یک مجموعه متعامد گویند هرگاه اعضای آن دو به دو متعامد باشند.

مثال: $V=\mathbb{R}^n$ با ضرب داخلی استاندارد $B = \{e_1, \dots, e_n\}$

B یک مجموعه متعامد می‌باشد. $\Leftarrow e_i . e_j = 0$

* قضیه: اگر V یک فضای برداری با بعد n باشد و $\beta_1, \dots, \beta_n$ ، n بردار مستقل خطی از V باشند آنگاه

~~[illegible]~~

در این صورت می‌توان بردارهای متعامد $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ را چنان ساخت که به ازای هر $k = 1, \dots, n$ مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ پایه‌ای برای زیر فضای تولید شده توسط $\beta_1, \dots, \beta_k$ باشد.

* نتیجه: اگر V یک فضای ضرب داخلی با بعد n باشد آنگاه دارای یک پایه متعامد می‌باشد.

اثبات قضیه: روند متعامدسازی گرام-اشمیت می‌باشد.

$\alpha_1 = \beta_1$

$$\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle \beta_{m+1}, \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k$$

مثال: $V=\mathbb{R}^3$ با ضرب استاندارد $\beta_1 = (3,0,4)$

$\beta_2 = (-1,0,7)$ ، $\beta_3 = (2,9,11)$ یک پایه متعامد برای $\mathbb{R}^3$ بیابید.

$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \quad n=3 \Rightarrow \alpha_1 = (3,0,4)$

$\alpha_2 = \beta_2 - \sum_{k=1}^{1} \frac{\langle \beta_2, \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k = (-4,0,3) \qquad \alpha_3 = (0,9,0)$

$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0, \dots$

* محاسبه " e^{tA} " :

* حساب توابع ماتریسی :

$P(t)$ یک تابع ماتریسی است و $P_{ij}(t)$ توابع حقیقی اند.

$$P(t) = \left[P_{ij}(t) \right]_{i,j=1}^{m,n}$$

- انتگرال، پیوستگی و مشتق پذیری توابع ماتریسی :

با فرض آنکه $P_{ij}(t)$ بر $[a,b]$ انتگرال پذیر باشند.

$$\int_a^b P(t)\,dt = \left[\int_a^b P_{ij}(t)\,dt \right]_{i,j=1}^{m,n}$$

$$* \quad (P(t))' = \left[P'_{ij}(t) \right]_{i,j=1}^{m,n}$$

* در حساب ماتریسی باید در ضرب توابع دقت کرد.

مثلاً : با فرض آنکه PQ تعریف شده باشد.

$$(P(t)\,Q(t))' = P'Q + PQ' \qquad (P^2)' = (PP)' = P'P + PP'$$

برای تعریف P^2 تابع باید مربع باشد.

$$* \quad (P^3)' = (P^2P)' = (PP^2)' \ldots$$

تابع $P(t)$ در یک نقطه وقتی مشتق پذیر است که همه P_{ij} ها در آن نقطه مشتق پذیر باشند.

گوئیم P در نقطه $t = t_0$ پیوسته است هرگاه $\longleftarrow$

$$\lim_{t \to t_0} P(t) = P(t_0)$$

$$\lim_{t \to t_0} P(t) = \left[\lim_{t \to t_0} P_{ij}(t) \right]_{i,j=1}^{m,n}$$

* قاعده زنجیره‌ای : فرض $g(t)$ یک تابع حقیقی باشد و $F(t)$ یک تابع حقیقی باشد. مطلوب است :

$$(F(g(t)))' = g'(t)\,F'(g(t))$$

* سری‌های نامتناهی از ماتریس‌ها :

فرض کنید $\{C_K\}_{K=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نامتناهی از ماتریس‌های $m \times n$ (حقیقی یا مختلط) باشد. گوئیم سری ماتریسی

$\sum_{K=1}^{\infty} C_K$ همگرا است هرگاه هر mn سری عددی $\sum_{K=1}^{\infty} C_{ij}^{(K)}$ همگرا باشد.

27.9.85 ادامه جلسه 21

$$C^K = \left[c_{ij}^{(k)} \right]_{i,j=1}^{m,n} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} C_k = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} c_{11}^{(k)} & \sum_{k=1}^{\infty} c_{12}^{(k)} & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} c_{1n}^{(k)} \\ & & \vdots & \\ & & \cdot & \sum_{k=1}^{K} c_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

* آزمون همگرایی سری های ماتریسی :

- نرم ماتریسی :

اگر A یک ماتریس m×n باشد نرم ماتریس A بصورت زیر تعریف می گردد :

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$$

* خواص : $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ، $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ $\quad |c| \, \|A\| = \|cA\|$

* قضیه : سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ همگراست ، اگر سری عددی $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ همگرا باشد .

* مثال : e^{tA} را چگونه تعریف کنیم ؟

$F = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ ، $A \in F^{n \times n}$

$$e^{A} = e^{a_{ij}} \quad \text{if } [A] = [a_{ij}] \quad (*)$$

تعریف (*) دارای خواص زیر نمی باشد .

$$1) \; e^{0} = I \qquad 2) \; \forall s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$$

پس با توجه به $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ تعریف می کنیم

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

$$\text{if } \underbrace{E(t) = e^{tA}}_{\text{یک تابع ماتریسی}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k)} \quad , \quad A^k = \left[c_{ij}^{(k)} \right]_{i,j=1}^{n}$$

$$\Rightarrow E'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} A^k$$

$E(t) = e^{tA}$ را بعنوان تابعی از t در نظر بگیریم (A ثابت)

$$\xrightarrow[\text{اندیس}]{\text{تغییر}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) t^k}{\underbrace{(k+1)!}_{(k+1)k!}} \underbrace{A^{k+1}}_{\underbrace{A^k A}_{A^0 A^k}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) A = E(t) A = A E(t)$$

این تابع دارای خاصیت توابع ماتریسی جابجایی می‌باشد. ⟵ $e^{tA}A = Ae^{tA}$

در واقع یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد. ⟵ یک معادله دیفرانسیل ⟵ $E'(t) = E(t)A$

در مورد e^{tA} بیان شده خاصیت $e^{0}=I$, $e^{(t+s)A} = e^{tA}.e^{sA}$ برقرار می‌باشد.

$$\text{if } t=1,\ A=0 \Rightarrow e^{A} = I + \underbrace{\frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots}_{} = I$$

$$f(x) = e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \qquad f(A) = e^{A} = I + \frac{A}{1!} + A^2/2! + \cdots,\ f(0) = I$$

$0^{\infty} = 0$ $\quad 0^{0}$: مبهم

$$\forall t,s \in \mathbb{R} : e^{(t+s)A} = e^{tA}.e^{sA}$$

$$A,B \in F^{n\times n} \Rightarrow e^{A}e^{B} \overset{?}{=} e^{A+B}$$

* اگر A و B دو ماتریس جابجا شونده باشند $e^{A}e^{B} = e^{A+B}$ آن وقت این حالت درست می‌باشد.

مثال) $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow e^{A}e^{B} \neq e^{A+B}$, $e^{B}e^{A} \neq e^{A+B}$

و $e^{A}.e^{B} \neq e^{B}e^{A}$

* طریقه‌ی سوم e^{tA} : ⟸ $\boxed{e^{tA} = \mathcal{L}^{-1}\left((sI-A)^{-1}\right)}$

اما در حالات خاص:

حالت اول: اگر A یک ماتریس قطری باشد یعنی $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

آنگاه با توجه به اینکه $A^{k} = diag(\lambda_1^{k}, \ldots, \lambda_n^{k})$ بدست می‌آید.

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = diag\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\lambda_1^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\lambda_2^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\lambda_n^k}{k!}\right)$$

$$= diag\left(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \ldots, e^{t\lambda_n}\right)$$

29.9.85

جبر خطی 3n

حالت دوم: اگر ماتریس A قطری نباشد ولی قطری شدنی باشد یعنی ماتریس معکوس پذیر (نامنفرد) C باشد طوریکه:

$C^{-1}AC = D$: که D یک ماتریس قطری باشد $\Rightarrow A = CDC^{-1}$

$$\Rightarrow A^2 = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1} \Rightarrow A^k = CD^kC^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k C D^k C^{-1}}{k!} = C\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!}\right)C^{-1} = Ce^{tD}C^{-1}$$

با توجه به حالت اول روی قطر اصلی D مقادیر ویژه A می باشند.

بردار ویژه نظیر مقادیر ویژه ستون های ماتریس C می باشند.

تمرین: این کار را برای ماتریس 3×3 قطری شدنی خودتان انجام دهید.

مثال:

e^{tA} را برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ محاسبه کنید.

حل $\lambda_1 = 6 \quad \lambda_2 = 1$ مقادیر ویژه A

$C^{-1}AC = D$, $D = diag(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\Rightarrow AC = CD$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 4c , b = -d$$

فرض $c = d = 1 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}$$

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^{t} & 4e^{6t} - 4e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + 4e^{t} \end{bmatrix}$$

محاسبه e^{At} در حالت کلی : (روش دوم)

* یادآوری: قضیه کیلی - هامیلتون :

اگر $A\in F^{n\times n}$ باشد و $f(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+c_1\lambda+c_0$

چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A باشد.

$$\Rightarrow f(A)=A^n+c_{n-1}A^{n-1}+\dots+c_1A+c_0I=0$$

نتیجه: A^n را می‌توان به صورت ترکیب خطی از A^{n-1}، ...، A و I نوشت، همچنین توانهای A^{n+1}، A^{n+2}

را نیز می‌توان به صورت ترکیب خطی از A^{n-1}، ...، A و I نوشت :

مثال :

$$A=\begin{bmatrix}5&-4&0\\1&2&0\\1&2&2\end{bmatrix},\quad n=3$$

A^4 را برحسب A^2، A و I بنویسید.

حل :

$$f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)=\lambda^3-9\lambda^2+20\lambda-12$$

$$\Rightarrow f(A)=A^3-9A^2+20A-12I=0\ \Rightarrow\ A^3=9A^2-20A+12I$$

$$\Rightarrow A^4=9A^3-20A^2+12A=9(9A^2-20A+12I)-20A^2+12A$$

$$=61A^2-168A+108I$$

$$A^3-9A^2+20A=12I\Rightarrow A(A^2-9A+20I)=12I\Rightarrow A\Big[\underbrace{\tfrac{1}{12}(A^2-9A+20I)}_{B}\Big]=I$$

یعنی B معکوس ماتریس A می‌باشد. در نتیجه B معکوس بدون محاسبه ماتریس الحاقی و دترمینان A بدست می‌آید:

$$A^{-1}=B=\frac{1}{12}(A^2-9A+20I)$$

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}$$

چون A^k، $k\geq n$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از A^{n-1}، ...، A و I

نوشت، پس هر جمله $\frac{t^kA^k}{k!}$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از

t^kI، t^kA، ...، t^kA^{n-1}

نوشت و لذا می‌توان نوشت :

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{n-1}q_k(t)A^k$$

* قضیه سیلوستر :

اگر A یک ماتریس $n\times n$ با مقادیر ویژه متمایز λ_1، ...، λ_n باشد

Tooba Stationary Products

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t)P_k(A)$$

که در آن $P_k(A)=\prod_{m=1}^{k}(A-\lambda_m I)$, $P_0(A)=I$

و $r_{k+1}(t)$, $K=1,\dots,n-1$ جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر باشند

$$\begin{cases} r_1'(t)=\lambda_1 r_1(t) \; ; \; r_1(0)=1 \\ r_{k+1}'(t)=\lambda_{k+1} r_{k+1}(t)+r_k(t) \; , \; r_{k+1}(0)=0 \quad K=1,\dots,n-1 \end{cases}$$

مثال: فرض کنید A یک ماتریس 2×2 با مقادیر ویژه تکراری باشد. مطلوب است محاسبه e^{tA}

حل) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$

$$P_0(A)=I \; , \; P_1(A)=(A-\lambda I)$$

$$\begin{cases} r_1'(t)=\lambda r_1(t) \quad r_1(0)=1 \\ r_2'(t)=\lambda_2 r_2(t)+r_1(t) \quad r_2(0)=0 \end{cases} \Rightarrow r_1(t)=e^{\lambda t} \longrightarrow r_2(t)=te^{\lambda t}$$

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{1} r_{k+1}(t)P_k(A)=r_1(t)P_0(A)+r_2(t)P_1(A)=e^{\lambda t}I+te^{\lambda t}(A-\lambda I)$$

$$=e^{\lambda t}(1-\lambda t)I+te^{\lambda t}A$$

مثال ۲) مثال ۱ را برای حالتی که مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 متمایز باشند حل کنید. $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=\mu$, $\lambda\neq\mu$ مقادیر ویژه

$$P_0(A)=I \quad P_1(A)=A-\lambda I$$

$$\begin{cases} r_1'(t)=\lambda r_1(t) \quad r_1(0)=1 \\ r_2'(t)=\mu r_2(t)+r_1(t) \quad r_2(0)=0 \end{cases} \longrightarrow r_1(t)=e^{\lambda t} \Rightarrow r_2(t)=\frac{e^{\lambda t}-e^{\mu t}}{\lambda-\mu}$$

$$y'+f(x)y=g(x) \Rightarrow y(x)=e^{-\int f(x)dx}\left[\int g(x)e^{\int f(x)dx}+c\right]$$

$$\Rightarrow e^{tA}=e^{\lambda t}I+\frac{e^{\lambda t}-e^{\mu t}}{\lambda-\mu}(A-\lambda I)=\left(\frac{\lambda e^{\mu t}-\mu e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}\right)I+\left(\frac{e^{\lambda t}-e^{\mu t}}{\lambda-\mu}\right)A$$

اگر λ و μ مختلط باشند $\lambda=\alpha-i\beta$, $\mu=\alpha+i\beta$

$$\Rightarrow e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

$$\Rightarrow e^{tA}=e^{(\alpha+i\beta)t}I+\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i\beta}\left[A-(\alpha-i\beta)I\right]$$

1 2 3 4 5 6 7 10 11 12 13 14 15 16

4.10.85

Tooba Stationary Products

$$= \frac{e^{\alpha t}}{\beta}\left[\left(\beta \cos\beta t - \alpha \sin\beta t\right) I + \sin\beta t \, A\right]$$

* محاسبه e^{tA} به حالت های دیگر

الف) اگر ماتریس $n\times n$ A فقط یک مقدار ویژه λ داشته باشد.

ب) اگر ماتریس $n\times n$ A دارای n مقدار ویژه متمایز باشد یعنی هیچ مقدار ویژه‌ای تکراری نباشد (فرض λ_k ها ...)

ج) اگر ماتریس $n\times n$ A دارای دو مقدار ویژه λ و μ باشد که λ با مرتبه تکرار $n-1$ و μ با مرتبه تکرار ۱ باشد.

الف) قضیه *

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k$$

ب) قضیه *

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} L_k(A)$$

ج) قضیه *

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k + \left(\frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k\right)(A-\lambda I)^{n-1}$$

$$L_k(A) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}\frac{A-\lambda_j I}{\lambda_k-\lambda_j}$$

مثال: $n=3$ باشد:

الف) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda \Rightarrow e^{tA} = e^{\lambda t} I + t e^{\lambda t}(A-\lambda I) + \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda t}(A-\lambda I)^2$

ب) $\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3$

*فرض: λ, μ, ν مقادیر ویژه متمایز ماتریس باشند

$$L_1(A) = \frac{(A-\mu I)(A-\nu I)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} \qquad L_2(A) = \frac{(A-\lambda I)(A-\nu I)}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}$$

$$L_3(A) = \frac{(A-\lambda I)(A-\mu I)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)} \Rightarrow e^{tA} = e^{\lambda t}L_1(A) + e^{\mu t}L_2(A) + e^{\nu t}L_3(A)$$

مثال) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبهٔ e^{tA} :

حل) ابتدا مقادیر ویژه را می‌یابیم

$\lambda_k = 1, 1, 2 \Rightarrow \lambda = 1$ با مرتبهٔ تکرار 2

$\mu = 2$ با مرتبهٔ تکرار 1 $\qquad n = 3 \longrightarrow n-1 = 2$

پس حالت خ اتفاق می‌افتد $\Rightarrow$

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k + \left\{ \frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k \right\} (A-\lambda I)^{n-1}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = e^t \{ I + t(A-I) \} + \frac{e^{2t} - e^t}{(2-1)^2}(A-I)^2 - \frac{te^t}{(2-1)}(A-I)^2 =$$

$$= (-2te^t + e^{2t}) I + \{ (3t+2)e^t - 2e^{2t} \} A - \{ (t+1)e^t - e^{2t} \} A^2$$

با محاسبهٔ A^2 داریم:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & (3t+2)e^t - 2e^{2t} & -(t+1)e^t + e^{2t} \\ -2(t+1)e^t + 2e^{2t} & (3t+5)e^t - 4e^{2t} & -(t+2)e^t + 2e^{2t} \\ -2(t+2)e^t + 4e^{2t} & (3t+8)e^t - 8e^{2t} & -(t+4)e^t + 4e^{3t} \end{bmatrix}$$

خاصیت مارکوف: یک sys که وضعیت آن در هر زمان تنها به وضعیت قبلی وابسته است می‌باشد.

$$P(X_{n+1}=y \mid X_1=x_0, X_2=x_1, \dots, X_n=x) = P(X_{n+1}=y \mid X_n=x)$$

- random process ای که با پارامتر گسسته که دارای خاصیت مارکوف باشد زنجیره مارکوف گویند.

* الگوریتم یا فلوچارتی برای تولید (شبیه‌سازی) زنجیره مارکوف در هر یک از حالات بنویسید تحویل دهید.

* حل دستگاه معادلات خطی:
  - روش‌های مستقیم (حذفی گاوس و ...)
  - روش‌های تکراری:
    - روش گرادیان، تکرار ژاکوبی - سایدل
    - روش SOR (یکی از روش‌های Relaxation)

* شرط پایداری sys $AX=b$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$ نرم بینهایت یا نرم max سطری

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$ نرم max ستونی یا نرم یک

فرض کنید sys دارای جواب یکتا باشد $(AX=b)$

مسئله پایداری: جواب یکتا داشته باشد و اختلال کوچک در ورودی باعث اختلال کوچک در خروجی گردد.

A و b ورودی‌های ما باشند.

$$b \xrightarrow{\text{اختلال}} b+r \Rightarrow A\tilde{X} = b+r \qquad \tilde{X} - X = e$$

$$\Rightarrow A(\tilde{X}-X) = (b+r)-b \Rightarrow Ae = r \Rightarrow \|Ae\| = \|r\| \Rightarrow \|A\|\,\|e\| = \|r\|$$

$$\Rightarrow e = A^{-1}r \Rightarrow \|e\| = \|A^{-1}\|\,\|r\|$$

شرط پایداری sys $AX=b$ این است که:

$$\frac{\dfrac{\|e\|}{\|X\|}}{\dfrac{\|r\|}{\|b\|}}$$ کراندار باشد.

$r \in \mathbb{R}^n \quad A \in F^{n\times n} \quad b \in \mathbb{R}^n$

(r اختلال نسبی کوچک می‌باشد) یعنی نسبت اخیر زیاد بزرگ از یک نگردد.

با توجه به اینکه $AX=b$ و درنتیجه $\|b\| = \|AX\| \le \|A\|\,\|X\|$ و $e = A^{-1}r \Rightarrow \|e\| \le \|A^{-1}\|\,\|r\|$

می‌توان ثابت کرد که $\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|e\|}{\|x\|} \le \frac{\|r\|}{\|b\|}\|A\|\|A^{-1}\|$

cond(A) بستگی به نوع نرم تغییر می‌کند. عدد وضعیت $\|A\|\|A^{-1}\| = cond(A)$

اگر cond(A) نزدیک به یک باشد آنگاه دستگاه پایدار می‌باشد.

اگر $Cond(A) \gg 1$ باشد آنگاه sys ناپایدار می‌باشد که در این حالت گوییم sys ill conditioned

می‌باشد (بدوضع یا "ill-posed")

$$Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \ge \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$$

برای آنکه cond(A) به نرم وابسته نباشد از نامساوی $r_\sigma(A) \le \|A\|$ استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \ge r_\sigma(A)\, r_\sigma(A^{-1}) = \frac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|} = cond^*(A)$$

$\sigma A =$ مجموعه مقادیر ویژه ماتریس A

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda\in\sigma_A}|\lambda|$$

* اگر $\lambda \neq 0$ مقدار ویژه ماتریس A باشد آنگاه λ^{-1} مقدار ویژه ماتریس A^{-1} می‌باشد. پس

$$r_\sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\cancel{\max_{\lambda\in\sigma_A}|\lambda|}} \min_{\lambda\in\sigma_A}|\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma_A}\left|\frac{1}{\lambda}\right|$$

* قضیه: اگر A یک ماتریس مربعی باشد آنگاه $r_\sigma(A) \le \|A\|$

اگر $\frac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|}$ نزدیک یک باشد sys پایدار می‌باشد.

* قضیه: اگر A یک ماتریس مربعی باشد در این صورت $r_\sigma(A) < 1$ اگر و تنها اگر برای یک نرم ماتریسی داشته باشیم $\|A\| < 1$

* قضیه: اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $r_\sigma(A) < 1$ آنگاه $(I-A)^{-1}$ وجود دارد و عبارت است از:

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{I-A} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$$

* $\lim_{m\to\infty} A^m = \;\Leftrightarrow\; \|A\| < 1$

A مربعی

6.10.85

جزوه عددی

خاصیت مارکوفی: یک sys که وضعیت آن در هر زمان تابع فقط وضعیت قبلی می باشد.

$$P(X_{n+1}=y \mid X_1=x_0, X_2=x_1, \dots, X_n=z) = P(X_{n+1}=y \mid X_n=x)$$

به random process ای و یا پایدار گسسته که دارای خاصیت مارکوفی باشد زنجیره مارکوفی گویند.

* الگوریتم یا فلوچارتی برای تولید و شبیه سازی زنجیره مارکوف در فضای حالت بنویسید.

* حل دستگاه معادلات خطی
- روش های مستقیم (حذفی گاوس، گاوس جردن)
- روش های تکراری
  - روش ژاکوبی، تکرار گاوس - سایدل
  - روش SOR (یکی از روش های Relaxation)

* شرط پایداری sys $AX=b$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$ نرم بینهایت یا نرم max سطری

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$ نرم max ستونی یا نرم یک

فرض کنید sys دارای جواب یکتا باشد $(AX=b)$

مسئله پایداری جواب یکتا را مطالعه می کند. اختلال کوچک در ورودی باعث اختلال کوچک در خروجی گردد.

A و b ورودی ها و داده ها باشند.

$$b \xrightarrow{\text{اختلال}} b+r \Rightarrow A\tilde{X} = b+r \qquad \tilde{X}-X=e$$

$$\Rightarrow A(\tilde{X}-X) = (b+r)-b \Rightarrow Ae=r \Rightarrow \|Ae\| = \|r\| \Rightarrow \|A\|\,\|e\| = \|r\|$$

$$\Rightarrow e = A^{-1}r \Rightarrow \|e\| = \|A^{-1}r\|$$

شرط پایداری sys $AX=b$ این است که:

$$\frac{\dfrac{\|e\|}{\|X\|}}{\dfrac{\|r\|}{\|b\|}}$$ کراندار باشد.

$$r\in\mathbb{R}^n \quad A\in F^{n\times n} \quad b\in\mathbb{R}^n$$

(r اختلال نسبی کوچکی در b باشد) تغییر نسبی اختیر زیاد دیگر اتفاق نگردد.

می دانیم که $AX=b$ و درنتیجه $\|b\| = \|AX\| \le \|A\|\,\|X\|$ و $e = A^{-1}r \Rightarrow \|e\| \le \|A^{-1}\|\,\|r\|$

می‌توان ثابت کرد که $\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|e\|}{\|x\|} \le \frac{\|r\|}{\|b\|}\|A\|\|A^{-1}\|$

$cond(A)$ بستگی به نوع نرم تعریفی دارد. عدد حالت $\|A\|\|A^{-1}\| = cond(A)$

اگر $cond(A)$ نزدیک به یک باشد آنگاه دستگاه پایدار می‌باشد.

اما اگر $Cond(A) \gg 1$ باشد آنگاه sys ناپایدار می‌باشد که در این حالت گوییم sys ill conditioned می‌باشد (در مقابل "ill-posed")

$$Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \ge \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$$

به جای آنکه $cond(A)$ به نرم وابسته باشد از نامساوی $r_\sigma(A) \le \|A\|$ استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \ge r_\sigma(A)\, r_\sigma(A^{-1}) = \frac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|} = cond^*(A)$$

$\sigma A =$ مجموعه مقادیر ویژه ماتریس A

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda\in\sigma_A}|\lambda|$$

* اگر $\lambda \neq 0$ مقدار ویژه ماتریس A باشد آنگاه λ^{-1} مقدار ویژه ماتریس A^{-1} می‌باشد. پس

$$r_\sigma(A^{-1}) = \cancel{\frac{1}{\max_{\lambda\in\sigma_A}|\lambda|}\min_{\lambda\in\sigma_A}|\lambda|} = \max_{\lambda\in\sigma_A}\left|\frac{1}{\lambda}\right|$$

* قضیه: اگر A یک ماتریس مربعی باشد آنگاه $r_\sigma(A) \le \|A\|$

اگر $\frac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|}$ نزدیک یک باشد sys پایدار می‌باشد.

* قضیه: اگر A یک ماتریس مربعی باشد در این صورت $r_\sigma(A) < 1$ اگر و تنها اگر به ازای یک نرم ماتریسی داشته باشیم $\|A\| < 1$

* قضیه: اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $r_\sigma(A) < 1$ آنگاه $(I-A)^{-1}$ وجود دارد و معکوس پذیر است و

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{I-A} = I + A + A^2 + \dots + A^n$$

* $\lim_{m\to\infty} A^m = 0 \iff \|A\| < 1$

A [illegible]

6.10.85 [illegible]

$$\text{if } \|A\| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+A^2} = I - A^2 + A^4$$

برهان: دو sys $AX=b$ جواب یکتا دارد یعنی A ماتریس نامنفرد است (وارون‌پذیر) $\frac{1}{1+\ln A} = \dots$

* قضیه: اگر A یک ماتریس مربع باشد و δA و δb به ترتیب اختلالات نسبی در A و b باشند

و $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ آنگاه $A+\delta A$ یک ماتریس نامنفرد است و علاوه بر آن:

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\mathrm{Cond}(A)}{1-\mathrm{Cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left[\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right]$$

که در آن δX جواب دو sys $(A+\delta A)(X+\delta X)=b+\delta b$ است.

* روش‌های تکراری:

1) روش تکرار ژاکوبی:

$$AX=b \Rightarrow X=\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix};\quad b=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix},\quad A\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

$$x_i=\left[b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right]\cdot\frac{1}{a_{ii}};\quad i=1,\dots,n$$

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3=4 \longrightarrow x_1=\frac{1}{5}(4-2x_2+x_3)\\ 3x_1-2x_2+x_3=8 \Rightarrow x_2=\dots\\ -x_1+4x_2-3x_3=1 \Rightarrow x_3=\dots\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]\quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_{ii}}_{\text{عناصر روی قطر اصلی}} x_i^{(k+1)}=b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}=b_i-\underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)}}_{\text{عناصر زیر قطر اصلی}}-\underbrace{\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}_{\text{عناصر بالای قطر اصلی}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \ddots & j>i\\ & i=j\\ j<i & \ddots\end{bmatrix}=D+L+U;\quad D=\mathrm{diag}(a_{11},\dots,a_{nn})$$

$$\Rightarrow DX^{(k+1)}=b-LX^{(k)}-UX^{(k)}=b-(L+U)X^{(k)}$$

$$\Rightarrow X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\Rightarrow \underbrace{X^{(k+1)} = H_j X^{(k)} + C_j b}_{\text{Jacobi}} \qquad X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

معیار توقف $\quad \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon$

روش تکرار گاوس - سایدل

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\Big[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_i\Big], \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big]$$

$$\Rightarrow DX^{(k+1)} + LX^{(k+1)} = b - UX^{(k)} \Rightarrow (D+L)X^{(k+1)} = -UX^{(k)} + b$$

$$\Rightarrow X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}UX^{(k)} + (D+L)^{-1}b$$

روش SOR : "Successive Over Relaxation method"

از گاوس سایدل

$$r_{ii} = a_{ii} x_i^{(k+1)} - a_{ii} x_i^{(k)} \Rightarrow x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} = \frac{\omega r_{ii}}{a_{ii}}$$

ضریب تخفیف برای بالابردن سرعت همگرایی.

$$= \frac{\omega}{a_{ii}}\Big[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - a_{ii} x_i^{(k)}\Big]$$

$$\Rightarrow a_{ii} x_i^{(k+1)} = (1-\omega) a_{ii} x_i^{(k)} - \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \omega \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + \omega b_i$$

$$\Rightarrow \Big(a_{ii} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)}\Big) x_i^{(k+1)} = (1-\omega) a_{ii} x_i^{(k)} - \omega \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + \omega b_i$$

$$\Rightarrow (D + \omega L) X^{(k+1)} = (1-\omega) DX^{(k)} - \omega UX^{(k)} + \omega b$$

if $\omega = 1 \longrightarrow$ Gauss-Seidel

$$\Rightarrow X^{(k+1)} = (D+\omega L)^{-1}\big[(1-\omega)D - \omega U\big]X^{(k)} + \omega (D+\omega L)^{-1} b$$

$$\Rightarrow X^{(k+1)} = H_s X^{(k)} + C_s b$$

اگر A یک ماتریس مربع باشد آنگاه روش تکراری $X^{(k+1)} = HX^{(k)} + cb$ همگراست اگر $\|H\| < 1$ باشد