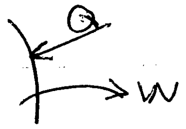
جزوه انتقال حرارت کنکور کارشناسی ارشد مهندسی شیمی

دکتر میرزازاده

(بخش اول)

انتقال حرارت:
- صورتی از انرژی
- درون سیستم.
- سیستم دارای گرما یا فاقد گرما یا کار نیست.



قانون دوم ترمو: → $\Delta U = Q - W$

قانون دوم ترمو: تبدیل گرما به کار صددرصد امکان پذیر نیست ولی برعکس صد در صد امکان پذیر هست.

$$Q \xrightarrow{\neq 100} W$$
$$\xleftarrow{100=}$$

دو روش انتقال حرارت:
1) به محیط مادی نیاز دارند
- 1) Conduction (مثل وقتی که فرد از پله پایین بیاید)
- 2) Convection (" " آسانسور پایین بیاید)

2) آنهایی که به محیط مادی نیاز ندارند ← 3) Radiation (" " خودش را از پله پرت کند)

محیط مادی
- جامد
- مایع
- گاز.

هدایت در جامدات
1) ارتعاشات شبکه‌ای
2) انتقال الکترونهای آزاد (حرکت) اما اگر وجود داشته سهم آن از عامل اول در هدایت در جامدات بیشتر است.

نتیجه ← هادی‌های الکتریسیته هادی‌های حرارتی خوبی هستند.

هدایت گرمایی ~ هدایت الکتریکی

علت بالا بودن ضریب هدایت (بطور مثال مس) وجود الکترونهای آزاد می‌باشد.

هدایت در گازها
تئوری جنبشی (سینتیک) گاز:

ثابت بولتزمان

$T \to kT$

$kT \sim \frac{1}{2} m u^2$ (سرعت حرکت مولکول)

$T\uparrow \to u\uparrow$

ملکول با دمای T_1 ○ u_1 $\xrightarrow{\text{اتصال برخورد}}$ 8 $\xrightarrow{\text{انتقال انرژی جنبشی}}$ ○ u'_1 , T'_1

مولکول با دمای T_2 ○ u_2 ○ u'_2 , T'_2

مکانیسم هدایت گازها (ملکول‌ها و سیالات) از طریق انتقال انرژی جنبشی است.

هدایت در مایعات

مایعات را شبیه گاز فرض کرده در آنها هم مکانیزم انتقال انرژی جنبشی است.

Convection

هر موقع محیط دارای حرکت باشد می‌تواند با خود انرژی را منتقل کند این شرط اساسی حرکت است.

$V \neq 0$ حرکت $\xrightarrow{\text{منشأ حرکت}}$

- اجبار Forced Convection
  - liq → Pump
  - gas → Comp. و Fan, ...
- آزاد (طبیعی) $\longrightarrow \nabla T \xrightarrow[\text{پذیر باشد}]{\text{اگر انبساط}} \nabla \rho \xrightarrow[\text{اگر}]{g \neq 0} \nabla \rho g \Rightarrow$ حرکت.

$\beta \nearrow \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$ $\quad$ $K \nearrow \left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$

انبساط پذیری در اینجا حرارتی مورد نظر است.

× در سفینه خارج جو جابجایی رخ نمی‌شود

Radiation

تابش امواج الکترومغناطیس که با سرعت نور سیر می‌کنند و هر جسم متناسب با توان چهارم دمای مطلق از خود انرژی گسیل می‌نماید.

T در انتقال حرارت یا دما را می‌خواهیم یا شار (rate

نکته: اسکالر است برای تعیین سطح انرژی ماده.

- Q rate اسکالر
- q flux برداری

روش‌های اندازه‌گیری دما:

۱) انبساط جیوه‌ای ۲) انبساط الکل ۳) ترموکوپل: تبدیل تفاوت دما به ولتاژ

۴) اندازه‌گیری مقاومت الکتریکی R.

۵) اندازه گیری C_p ۶) دمای اجسامی که نمی‌سنجیم ولی به آنها دسترسی نداریم مثل دمای ستارگان از روی طیف اندازه گیری می‌گردد.

Radiation:

$$Q = \sigma A (T_2^4 - T_1^4)$$ قانون استفان بولتزمن.

$$\sigma = 5.66\times10^{-8}\ \frac{W}{m^2\,°C}$$

جابجایی :

$$Q = hA\Delta T$$ قانون سرمایش نیوتن

$$h \rightarrow \frac{W}{m^2\,°C}$$

- ← آرام یا ناآرام بودن جریان
- ← شکل هندسی
- ← خواص فیزیکی سیال
- ← ظرفیت حرارتی
- ← جابجایی آزاد یا اجباری

هر چه که روی حرکت اثر دارد روی h اثر دارد.

هدایت :

$$Q = kA\frac{\Delta T}{L}$$ قانون فوریه.

$$= -kA\frac{dT}{dx}$$

نکاتی در مورد k :

1) واحد $\frac{W}{m\,°C}$

2) k:
- زیاد ← رساناها
- متوسط ← نیمه رساناها
- کم ← عایق حرارتی

3) $K<0$ خیر جهت هدایت عکس گرادیان بدون صرف کار ممکن نیست.

4) $k_{\text{جامدات فلزی}} > k_{\text{جامدات مولکولی}} > k_{\text{مایعات}} > k_{\text{گازها}}$

$k_{CO_2} = 0.01$

5) $k = f(T)$

برای گازها: $k \sim \sqrt{T_{\text{دمای مطلق}}}$

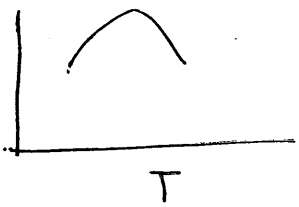
برای مایعات: $T \uparrow$ $k \uparrow$ مایعات

برای جامدات: بعضی موارد زیاد و بعضی موارد کاهش k با افزایش دما.

* برای جامدات فلزی با افزایش دما k کاهش می‌یابد.

اگر گزینه درست آن هیچ در سؤال نبود ← k با افزایش دما زیاد می‌شود را انتخاب کنید.

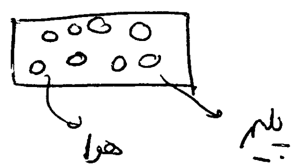
6) در مورد آب:



توجه: max: 4°c نیست.

7) k مواد اسفنجی

$k = f\left[k_{\text{هوا}}, k_{\text{پلیمر}}, \rho_{\text{دانسیته اسفنج}}\right]$

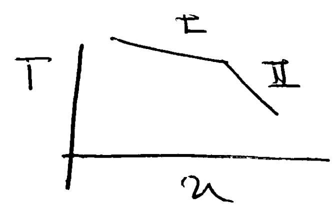


یا ترکیب درصدها.

$k_{\text{اسفنجی}} = x_1 k_1 + x_2 k_2$

8) شکست شکل: تغییر k.

شیب بیشتر ← k کمتر.



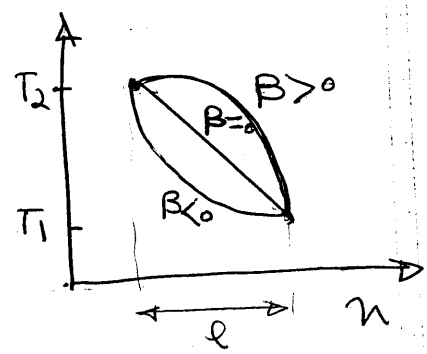
$\text{Slope}_{II} > \text{Slope}_{I} \Rightarrow k_2 < k_1$

۹) $K = K_0(1+\beta T)$

$\beta > 0$ صعودی ، $\beta = 0$ مستقیم (ازدیاد) ، $\beta < 0$ نزولی (کاهش)

$\beta > 0 \to T_2 > T_1 \to K_2 > K_1 \to \underset{\text{در نقطه } 2}{Slope} < \underset{1}{Slope}$

$\beta < 0 \to T_2 > T_1 \to K_2 < K_1 \to Slope_2 > Slope_1$



$\beta > 0 \longrightarrow T_m > \dfrac{T_1+T_2}{2} \longrightarrow$ صعودی

$\beta = 0 \longrightarrow T_m = \dfrac{T_1+T_2}{2}$

$\beta < 0 \longrightarrow T_m < \dfrac{T_1+T_2}{2}$

<u>مقاومت های حرارتی:</u>

$$\underset{\text{جریان}}{I} = \frac{\overset{\text{ولتاژ}}{V}}{R}$$

۱) هدایت در مختصات کارتزین .

$$q = KA\frac{\Delta T}{L}$$

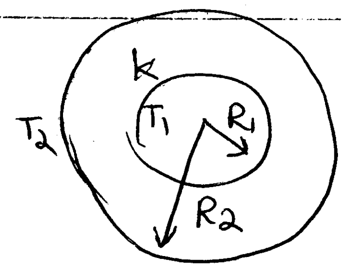
$$Q = \frac{\Delta T}{\frac{L}{KA}} \to R_{\text{هدایتی}} = \frac{L}{KA}$$

۲) هدایت استوانه ای .

$$Q = -KA\frac{dT}{dr}$$

$$Q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{2K\pi L}\ln\left[\frac{R_2}{R_1}\right]}$$

$$\boxed{R = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2K\pi L}}$$



3) هدایت کروی :

$$Q = \frac{-\int k\,dT}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{4\pi r^2}} = \frac{k\Delta T}{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]}$$

$$\boxed{R_{\text{کروی}} = \frac{1}{4k\pi}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]}$$

4)

$$Q = h \cdot A \cdot \Delta T$$

$$R_{conv} = \frac{1}{hA}$$

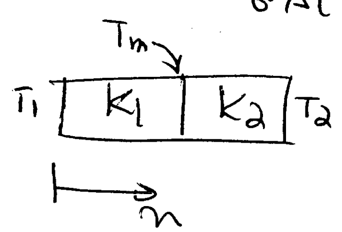
5) Radiation : (مقاومت دراین مورد خیلی مشخص نیست) .

$$Q = \sigma A (T_1^4 - T_2^4)$$

$$= \sigma A (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)(T_1 - T_2)$$

$$\begin{cases} Q = h_r \cdot A_3 \Delta T \\ h_r \sim T \end{cases} \qquad Q = h_r \cdot A \cdot \Delta T \quad h_r \sim T^3$$

$$R_{Rad} = \frac{1}{\sigma A (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}$$



6) مقاومت های سری

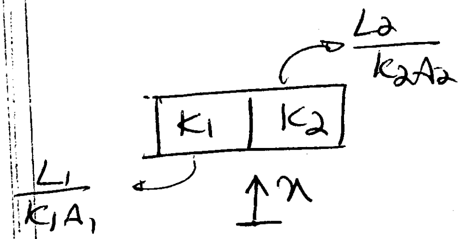
$$R = \sum R_i$$

$$= \frac{L_1}{k_1 A_1} + \frac{L_2}{k_2 A}$$

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{k_1 A_1} + \frac{L_2}{k_2 A_2}} = \frac{T_1 - T_m}{L_1 / k_1 A_1} = \frac{T_m - T_2}{L_2 / k_2 A_2}$$

$T_m = ?$

7) مقاومت موازی :

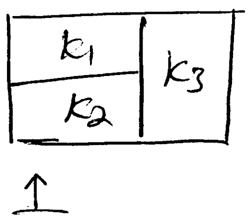


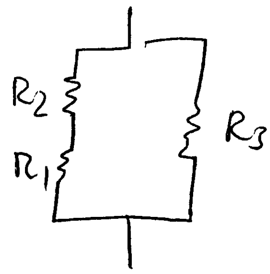
$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

A : سطح عمود بر جهت انتقال حرارت.

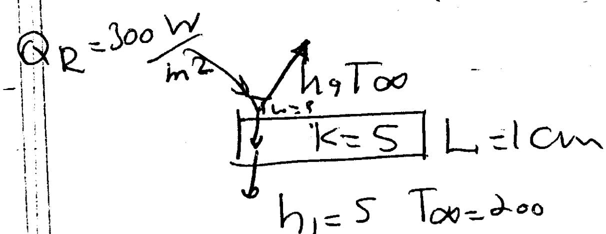
8) مقاومت‌های سری موازی :

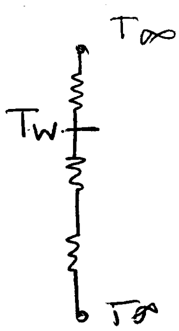




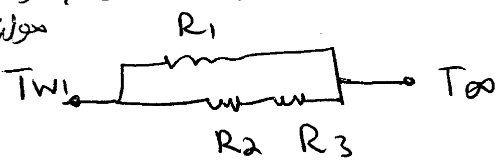
$$R = \frac{(R_1+R_2)R_3}{(R_1+R_2)+R_3}$$

مثال: ؟





درحقیقت: انتقال حرارت دست ضرب شده یعنی دو مقاومت موازی داریم



$$R_1 = \frac{1}{h} = \frac{1}{5}$$

$$R_2 = \frac{L}{k} = \frac{0.01}{5}$$

$$R_3 = \frac{1}{5}$$

$$R = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$$

$$300 = \frac{T_{w1}-20}{R} \rightarrow T_w \checkmark$$

۹) ضریب کلی انتقال حرارت :

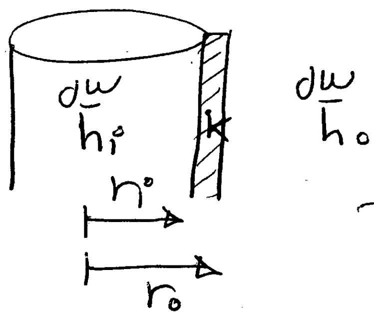
$$Q = h \cdot A \cdot \Delta T$$

$$Q = U A \Delta T = \frac{\Delta T}{R}$$

$\frac{W}{m^2\,^{\circ}C}$ U

$$U = \frac{1}{RA}$$

مثال :



$$Q = \frac{\Delta T}{R}$$

$$R = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2k\pi} + \frac{1}{h_o A_o}$$

$$U_{i,o} = \frac{1}{\left[\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln(r_o/r_i)}{2k\pi L} + \frac{1}{h_o A_o}\right] A_{i,o}}$$

$$A_i = 2\pi r_i L \qquad A_o = 2\pi r_o L$$

$$Q = U_i A_i \Delta T = U_o A_o \Delta T$$

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{r_i}{k}\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \frac{r_i}{r_o}\frac{1}{h_o}}$$

U به طول لوله بستگی ندارد

۱۰) مقاومت کنترلی :

$k \uparrow$ زیاد $\longrightarrow R \downarrow$ ناچیز

$h \uparrow \longrightarrow R \downarrow$

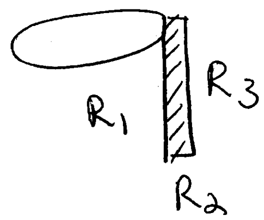
$h_{\text{Natural gas}} < h_{\text{Forced gas}} < h_{\text{Forced liquid}} < h$ جوشش و چگالش

$5-10\ \frac{W}{m^2\,^{\circ}C}$, $25-50$, $50-10^3$, تا حدود $\sim 10^5$

مثال:

بخاطر h : احساس سرما در $0°C$ > احساس سرما $-5°C$ - بدون وزش

با وزش باد (Forced)

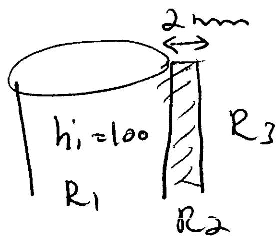


$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\quad 1 \quad\quad 2 \quad\quad 97$$

⟸ برای تغییر میزان انتقال حرارت تغییر مقاومت کنترلی شده است.

مثال: آب از داخل لوله به جنس stainless steel به ضخامت 2mm عبور می‌کند: کدام راه را برای دو برابر کردن انتقال حرارت پیشنهاد می‌کنید.



۱) دو برابر کردن ضریب convection داخل لوله از طریق ازدیاد سرعت.

۲) نصف کردن ضخامت لوله.

۳) تعویض لوله با جنسی از k دو برابر

۴) شیاردار کردن داخل لوله.

۵) دو برابر کردن h هوای بیرون با نصب Fan.

۶) دو برابر کردن سطح انتقال حرارت از طریق نصب پره حرارتی در بیرون.

R_2 ناچیز k زیاد ضخامت کم دارد.

R_1 در مقابل با R_3 ناچیز.

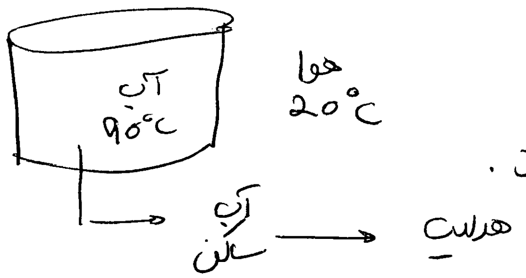
$\frac{1}{h \cdot A_o}$ ← یا h را دو برابر یا A را پره‌دار کردن

⟸ ۵ و ۶ هر دو این کار را می‌کنند ولی ۵ هزینه عملیاتی دارد و ۶ بهتر است.

ولی مورد ۵ تاثیر بیشتری دارد.

مثال:

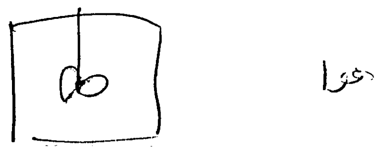
بدترین نوع Convection
از بهترین نوع Conduction بهتر است.



natural conv. ← برای مایع خیلی اهمیت ندارد.

* در مورد هدایت فلزات k بالاست ← هدایت بالا.

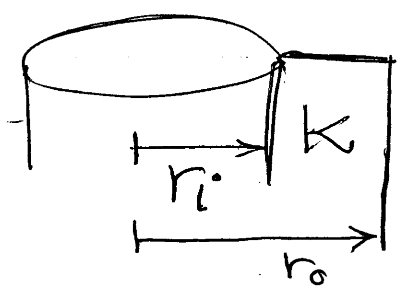
در لایه هدایت مایع از جابجایی هوا ~~بیشتر است~~ کمتر است ← گذاشتن همزن داخل تانک برای افزایش انتقال حرارت.



اگر همزن داشت مقاومت کنترل هدایت هوای بیرون است که باید هوا را به جریان درآوریم.

$$Q = \frac{\Delta T}{R}$$

1) شعاع بحرانی



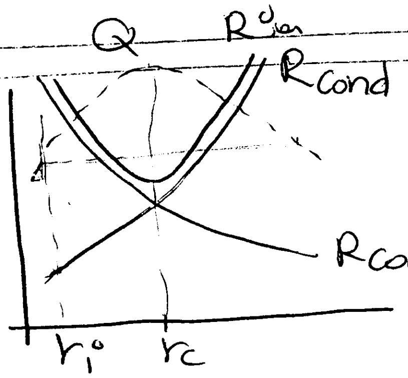
از چه زمانی به بعد عایق چه اثری بر میزان انتقال حرارت دارد؟

$$Q = \frac{\Delta T}{\frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2k\pi L} + \frac{1}{h_o(2\pi r_o L)}}$$

$r_o \uparrow \longrightarrow$ مقاومت Cond. $\uparrow$ و مقاومت Conv. $\downarrow$

$$\frac{dQ}{dr_o} = 0$$

$$\frac{0 - \left[\frac{1}{r_o(2k\pi L)} - \frac{1}{h(2\pi r_o^2 L)}\right]}{[\text{مخرج}]^2} = 0 \Rightarrow r_{cr} = \frac{k}{h}$$



* شعاع بحرانی زمانی معنی دارد که از شعاع لوله بیشتر باشد
(یعنی در صنعت اتفاق نمی افتد).

نکات شعاع بحرانی:

۱) شعاع بحرانی در مسائلی مطرح می شود که تغییر سطح داشته باشیم مانند استوانه و کره بنابراین در مختصات کارتزین شعاع بحرانی مطرح نمی شود.

۲) مقدار شعاع بحرانی در عایق پیچی استوانه ها $\frac{k}{h}$ و در عایق پیچی کره ها $\frac{2k}{h}$ می باشد.

۳) در معادله شعاع بحرانی k ضریب هدایت آخرین لایه عایق است و h ضریب کنوکسیون هوای بیرون.

۴) شعاع بحرانی زمانی معنی دارد که از شعاع لوله یا از شعاع کره بیشتر باشد.

۵) اگر شعاع بحرانی داشتیم با زیاد شدن مت عایق مجموع مقاومت ها ابتدا کاهش و پس افزایش می یابد و سرعت حرارتی ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد.

۶) اگر شعاع بحرانی نداشتیم با زیاد شدن مت عایق پیچی میزان انتقال حرارت همواره کاهش می یابد.

۷) شعاع بحرانی در لوله ها و استوانه هایی با شعاع کوچک معنی دارد مثل سیم حاوی جریان برق. در صنعت دیده نمی شود.

روش های محاسبه Q :

روش ۱) ← نوشتن بیلان ← معادله دیفرانسیل $\xrightarrow{\text{اعمال شرط مرزی.}}$ حل معادله ← پروفایل دما ← از قانون فوریه Q بدست می آید $Q = -KA\frac{\partial T}{\partial x}$

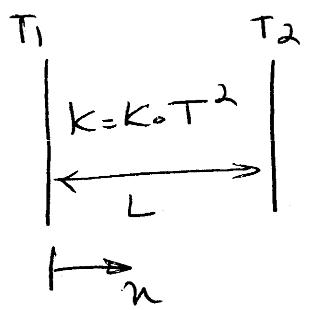
روش ۲) اگر مسئله steady state باشد و منبع حرارتی نداشته باشیم.

$$S.S \ \& \ gen = 0 \Longrightarrow In = Out$$

$$Q = cte$$

$$Q = -\frac{\int k\,dT}{\int \frac{dx}{A}}$$

فرض کنید دیواره ای داریم

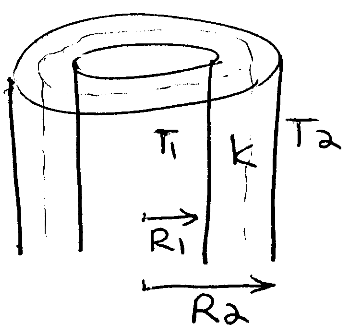


$$S.S \ \& \ gen = 0$$

$$Q = \frac{-\int_{T_1}^{T_2} k_0 T^2\, dT}{\frac{1}{A}\int_0^L dx}$$

$$Q = \frac{k_0 A}{3L}\left[T_1^3 - T_2^3\right]$$

مثال :



$$k = k_0\left[1 + \beta T\right]$$

$$Q = \frac{-\int k_0(1+\beta T)\,dT}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi r L}}$$

$$Q = \frac{2k_0\pi L\left[(T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2}(T_1^2 - T_2^2)\right]}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\beta = 0 \longrightarrow Q = \frac{2k_0\pi L\,\Delta T}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

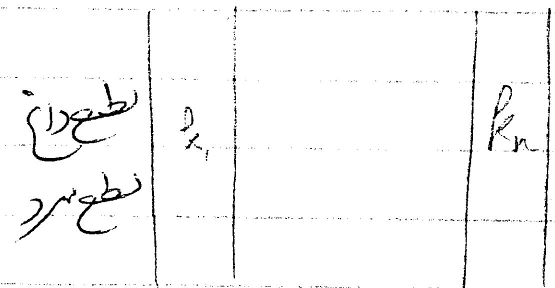
8/3 — میرزازاده — حرارت

5) اگر شعاع بحرانی داشتیم با ازدیاد ضخامت عایق مجموع مقاومتها ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد و اتلاف حرارتی ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد.

۵) اگر شعاع بحرانی نداشتیم با ازدیاد ضخامت عایق میزان انتقال حرارت همواره کاهش می یابد.

۶) شعاع بحرانی در لوله ها و استوانه هایی با شعاع کوچک معنی دارد مثل سیم حاوی جریان برق.

مورد 12) ترتیب عایق پیچی:



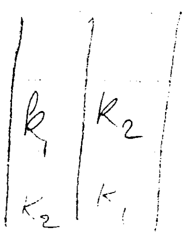
هدف: $Q\downarrow$

اگر چند لایه عایق با ضخامت یکسان داشته باشیم آیا ترتیب قرار دادن عایقها اثری بر میزان انتقال حرارت دارد یا خیر؟

① از نظر هندسه شکل:
- کارتزین
- استوانه
- کره

② از حیث وابستگی دمایی K

$L_1 = L_2 = L$

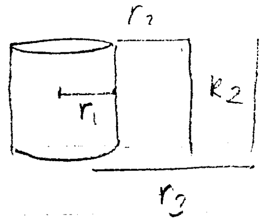


$$1:\quad Q/A = \frac{\Delta T}{L/k_1 + L/k_2}$$

$$2:\quad Q/A = \frac{\Delta T}{L/k_2 + L/k_1}$$

* در مختصات کارتزین ترتیب عایق بندی عایق‌های ثابت اثری بر میزان حرارت مبادله شده ندارد.

مختصات استوانه‌ای :



$r_1 = 5$
$r_2 = 10$
$r_3 = 15$
$k_1 = 3$ شار عددی
$k_2 = 5$

$$Q_I = \frac{\Delta T}{\frac{1}{2\pi L}\left[\frac{\ln 10/5}{3} + \frac{\ln 15/10}{5}\right]}$$

حالا جای عایق را عوض کنیم :

$$Q_{II} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{2\pi L}\left[\frac{\ln 10/5}{5} + \frac{\ln 15/10}{3}\right]}$$

$Q_1 < Q_{II}$

* در مختصات استوانه‌ای و کروی ترتیب عایق‌های ثابت از کوچک به بزرگ است.

k صعودی $T \uparrow \; k \uparrow$ حرارت از بیرون دمای زیاد می‌شود و در نزدیک کوره صعودی باشند.

k مستقل

k نزولی $T \uparrow \; k \downarrow$ حرارت در نزدیکی سطح باید نزولی باشند.

کوره 1500	k نزولی	k مستقل	k صعودی	محیط $25^\circ C$
یخچال	k صعودی	k مستقل	k نزولی	$25^\circ C$

1) اگر از صورت مسأله نتوان استنباط کرد مختصات کارتزین است یا استوانه‌ای و کره

بنا را بر استوانه و کره می‌گذاریم (یعنی k از کوچک به بزرگ).

2) اگر از صورت مسأله نتوان استنباط کرد که عایق پیچی کدام سطح یا سطح سرد مورد نظر است بنا را بر سطح گرم می‌گذاریم.

6_s 8/10   (میرزازاده)   حرارت

مثال: عایقکاری کوره و یخچال

$k_A = 1.3$

$k_B = 0.7(-10^{-3}T)$

$k_C = 2 \quad k_D = 0.7(1+10^{-3}T)$

$k_D = 0.7\times(1+10^{-3}T)$

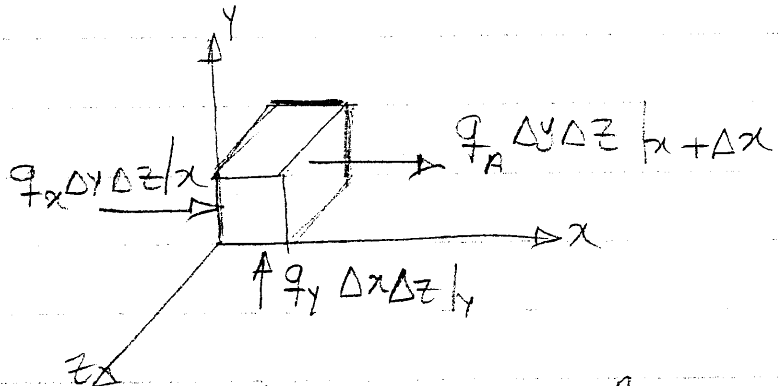
$k_e = 0.7(1+10^{-3}T^2)$

$k_F = 0.5$

کوره $|B|F|A|C|D|E|$

یخچال $|E|D|F|A|C|B|$

معادلات دیفرانسیل پیاده شده توزیع دما در انتقال حرارت هدایتی در مختصات مختلف



$$In - out + gen = Acc.$$

$$q_x \Delta y \Delta z|_x - q\Delta y \Delta z|_{x+\Delta x} + q_y \Delta x \Delta z|_y - q_y \Delta x \Delta z|_{y+\Delta y}$$

$$+ q_z \Delta x \Delta y| - q_z \Delta x \Delta y|_{z+\Delta z} + \dot{q}(\Delta x \Delta y \Delta z) = \rho(\Delta x \Delta y \Delta z)C_p \frac{dT}{dt}$$

$-k\,\partial T/\partial x$ حرارت تولید شده در واحد حجم

ساده سازی $\Longrightarrow$

$$\left[\frac{dq_x}{dx} + \frac{dq_y}{dy} + \frac{dq_z}{dz}\right] + \dot{q} = \rho C_p \, dT/dt$$

$$d^2T/dx^2 + \frac{d^2T}{dy^2} + d^2T/dz^2 + \dot{q}/k = 1/\alpha \; \partial T/\partial t$$

← در این معادله: فقط هدایت در نظر گرفته شده و k ثابت فرض شده

$\dot{q}$: حرارت تولیدی در واحد حجم $(\frac{W}{m^3})$
(در واحد زمان)

$$\nabla^2 T + \dot{q}/k = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

برای تحلیل مسائل Conduction مطرح می‌شود

$$T = f[x, y, z, t]$$
$$r\ \theta\ z$$
$$r\ \theta\ \phi$$

حالت اول: الف) Conduction : — steady state — یک بعدی

تولید حرارت $= 0$ — $\nabla^2 T = 0$

$$d^2T/dx^2 = 0 \quad \mathrm{I}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \quad \mathrm{II}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = 0 \quad \mathrm{III}$$

از روابط فوق اگر I بار انتگرال بگیریم داریم : شرایط مرزی

$\mathrm{I}:\ T = Ax + B$ — نوع اول ; $T(x=1) = T_w$

$\mathrm{II}:\ T = A\ln r + B$ — نوع دوم $\begin{cases} dT/dr\,|_{r=R} = 0 \\ dT/dr\,|_{r=R} = -q''/k \end{cases}$ q''

$\mathrm{III}:\ T = -\dfrac{A}{r} + B$

$\longrightarrow$ نوع سوم $-k\,dT/dx\,|_{x=L} = h(T_{x=L} - T_\infty) \xrightarrow{R} h, T_\infty$

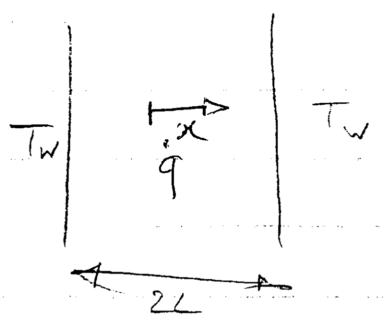
$$\nabla^2 T + \dot{q}/k = 0$$

$$d^2T/dx^2 + \dot{q}/k = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \dot{q}/k = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) + \dot{q}/k = 0$$

کارتزین



$$T = \frac{-\dot{q}x^2}{2k} + c_1 x + c_2$$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0 \longrightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$T(x = \mp L) = T_w \longrightarrow \boxed{T_w + \frac{\dot{q}L^2}{2k} = c_2}$$

$$T - T_w = \frac{\dot{q}L^2}{2K}\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

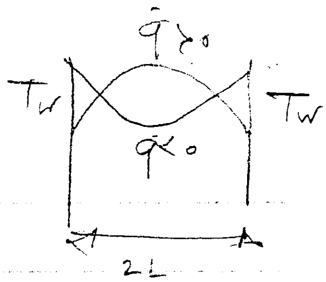
7_4 8,10 حرارت

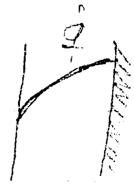
$x=0$: $T=T_0$ $\Longrightarrow$ $\boxed{T_0 - T_w = \dfrac{\dot{q} L^2}{2K}}$

دمای مرکز دیواره

اختلاف دمای مرکز و دیواره

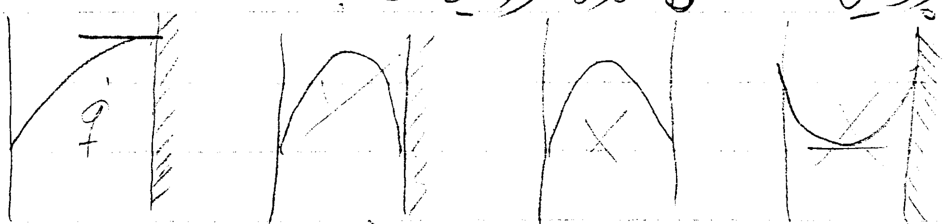
$$\boxed{\frac{T-T_w}{T_0-T_w} = 1-\left(\frac{x}{L}\right)^2}$$



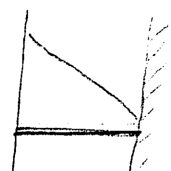


اگر در مرز عایق شیب صفر است.

کدام یک از پروفیل‌های مشخص شده مرز عایق است

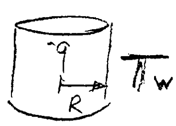


چرا که دو $\dot{q}$ داریم و انتقال حرارت که دو طرف داریم.



شیب ثابت است ولی صفر نیست

$$T = -\dot{q}r^2/4K + c_1 \ln r + c_2$$



$r=0$: $\partial T/\partial r = 0$

یا $T(r=0) = \text{finite} \Longrightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$T = T_w \longrightarrow \boxed{T_w + \dot{q}R^2/4K = C_2}$

$$T - T_w = \frac{\dot{q}R^2}{4K}\left[1-\left(r/R\right)^2\right]$$

$$\boxed{T_0 - T_w = \frac{\dot{q}R^2}{4K}}$$

اختلاف دمای مرکز و دیواره

استوانه :

$$\boxed{\frac{T-T_w}{T_0-T_w}=1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

کره :

$$T=\dot{q}r^2/6k-C_1/r+C_2$$

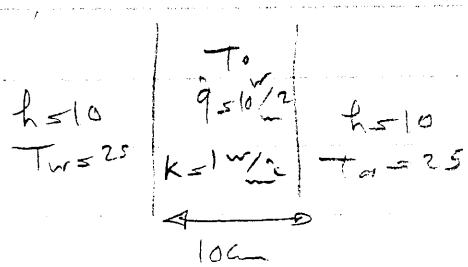
$$\partial T/\partial r\,|_{r=0}=0 \longrightarrow \boxed{C_1=0}$$

$$T(r=R)=T_w \longrightarrow \boxed{T_w+\frac{\dot{q}R^2}{6k}=C_2}$$

$$T_0-T_w=\frac{\dot{q}R^2}{6k} \qquad \boxed{\frac{T-T_w}{T_0-T_w}=1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

$\frac{T-T_w}{T_0-T_w}$	نصف ضخامت T_0-T_w	$q=-k\,dT/dr$ (ضخامت کل 2L)
$1-(x/L)^2$	$\dot{q}L^2/2k$	$\dot{q}x$
$1-(r/R)^2$	استوانه $\dot{q}R^2/4k$	$\dot{q}r/2$
$1-(r/R)^2$	$\dot{q}R^2/6k$	$\dot{q}r/3$

مثال : دیواری به ضخامت 10cm و با منبع حرارتی $\dot{q}=10^4\ W/m^3$ در محیطی با $T_\infty=25$ و $h=10\ W/m^2\,°C$ قرار دارد. $T_0-T_w=?$, T_0 , T_w ?



$$T_0-T_w=\frac{\dot{q}L^2}{2k}=\frac{10^4\times0.05^2}{2\times1}=12.5°C$$

$$\underbrace{\dot{q}(2AL)}_{\text{کل حرارت تولیدی در دیواره}}=\frac{T_w-T_\infty}{1/(h2A)} \Rightarrow \boxed{\dot{q}L/h+T_\infty=T_w}$$

$$T_w=\frac{10^4\times0.05}{10}+25=\boxed{75°C}$$

11

ب)

- S.S
- 1.D
- gen $\neq 0$

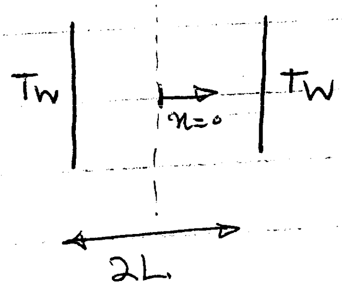
$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

کارتزین



$$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2k} + C_1 x + C_2$$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0 \rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$ بخاطر تقارن.

$$\cancel{T - T_w = \frac{\dot{q}L^2}{2k}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]}$$

$$\rightarrow \boxed{T_w + \frac{\dot{q}L^2}{2k} = C_2}$$

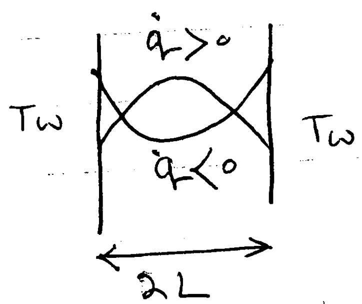
$$T - T_w = \frac{\dot{q}L^2}{2k}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

این عبارت بعد دما دارد.

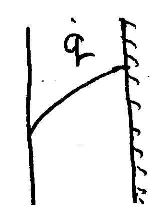
$x=0 \quad T=T_0 \Rightarrow \boxed{T_0 - T_w = \frac{\dot{q}L^2}{2k}}$ اختلاف دمای وسط و دیواره

دمای وسط دیواره

$$\frac{T-T_w}{T_0-T_w} = 1-\left(\frac{x}{L}\right)^2$$



$\frac{d^2T}{dx^2} > 0 \;,\; \dot{q} < 0$



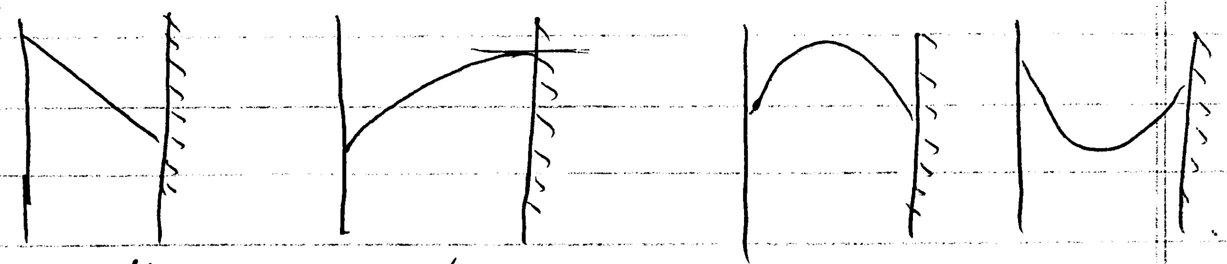
مانند نصف حالت 2L (بدون max)

max درطرف عایق.

* min و max در مرز عایق

* در مرز عایق شیب باید صفر باشد.

تست) کدام پروفایل می‌تواند وجود داشته باشد (برای عایق):



اگر این حالت درست بود:

$T = AX + B$

$\frac{dT}{dx} = A$ (I)

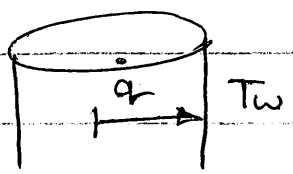
(II) در طرف عایق شیب صفر

باید باشد پس $A = 0$

مختصات استوانه‌ای

با دوبار انتگرال‌گیری:

$$T = -\frac{\dot{q} r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$



$$\left.\begin{array}{l} r = 0 \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ \text{یا} \quad T(r=0) = \text{finite} \end{array}\right\} \longrightarrow C_1 = 0$$

$$r = R \longrightarrow T = T_w \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{T_w + \frac{\dot{q} R^2}{4k} = C_2}$$

$$T - T_w = \frac{\dot{q} R^2}{4k}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

بعدها ←

$$\boxed{T_0 - T_w = \frac{\dot{q} R^2}{4k}}$$

اختلاف دمای مرکز و دیواره.

$$\frac{T-T_w}{T_0-T_w} = 1-\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

نقطه max و min در وسط استوانه.

توجه: اگر k ثابت نباشد (تابع دما):

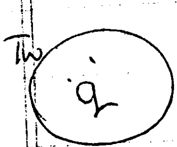
$$\nabla(k\nabla T)+\dot{q}=0$$

مختصات کروی :

$$T = \frac{\dot{q}r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \longrightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$T(r=R) = T_w \longrightarrow \boxed{T_w + \frac{\dot{q}R^2}{6k} = C_2}$$



$$T-T_w = \frac{\dot{q}R^2}{6k}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$T_0 = T_w = \frac{\dot{q}R^2}{6k}$$

$$\frac{T-T_w}{T_0-T_w} = 1-\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

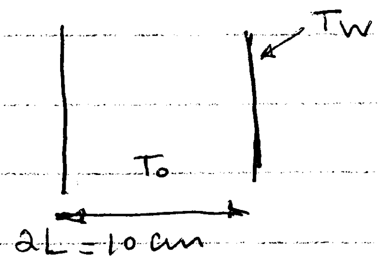
	$\frac{T-T_w}{T_0-T_w}$	T_0-T_w	$q_r=-k\frac{dT}{dr}$	بعد مشخص
کارتزین	$1-\left(\frac{x}{L}\right)^2$	$\frac{\dot{q}L^2}{2k}$	$\dot{q}x$	نصف ضخامت
استوانه‌ای	$1-\left(\frac{r}{R}\right)^2$	$\frac{\dot{q}R^2}{4k}$	$\dot{q}r/2$	نصف قطر
کروی	$1-\left(\frac{r}{R}\right)^2$	$\frac{\dot{q}R^2}{6k}$	$\dot{q}r/3$	نصف قطر

اثبات q:

دکارتزین : $T-T_w=\frac{\dot{q}L^2}{2k}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$

از این رابطه $\frac{dT}{dr}$ را حساب می‌کنیم.

مثال: دیواره‌ای داریم با ضخامت 10 cm.



$\dot{q}=10^4\ \frac{W}{m^3}$

$h=10\ W/m^2\,°C$ و $T_\infty=25$

$k=1\ W/m\,°C$

$T_0-T_w=?$ و $T_0=?$ و $T_w=?$

$$T_0-T_w=\frac{\dot{q}L^2}{2k}=\frac{10^4\times(0.05)^2}{2\times1}=12.5\,°C$$

کل حرارت تولیدی راهی ندارد مگر از دیواره تبادل نماید.

کل حرارت تولیدی ← $\dot{q}(2AL)=\frac{T_w-T_\infty}{1/hA}$

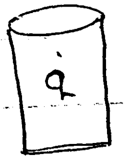
$$\boxed{T_w=\frac{\dot{q}L}{h}+T_\infty}$$

$$T_w=\frac{10^4\times0.05}{10}+25=75\,°C$$

$$T_0=75+12.5=87.5$$

توجه: T_0-T_w همواره ثابت (بستگی به $\dot{q}$، L، k) با h و T_∞ و ... تغییر نمی‌کند.

مثال ۲:



$\dot{q} = 10^4$

$k = 2$

$h = 5$

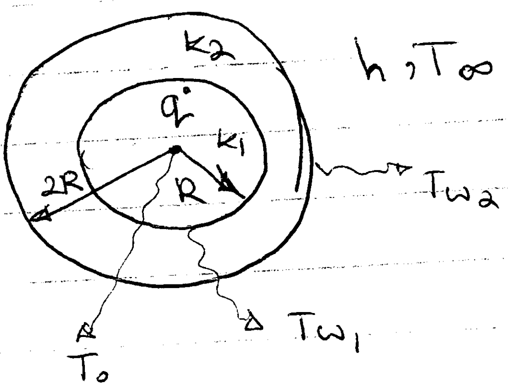
$T_\infty = 20$

$$T_o - T_w = \frac{\dot{q} R^2}{4k} = \frac{10^4 \times 0.1^2}{4 \times 2} = 12.5$$

$$\dot{q}\,(\pi R^2 L) = \frac{T_w - T_\infty}{\frac{1}{h(2\pi r L)}}$$

$$\boxed{T_w = \frac{\dot{q} R}{2h} + T_\infty}$$

مثال ۳:



$$\begin{cases} T_o - T_{w1} = ? \\ T_{w1} = ? \\ T_{w2} = ? \\ T_o = ? \end{cases}$$

مهم) * شرط استفاده از مقاومت ها $\left\{ \begin{array}{l} gen = 0 \\ S.S \\ 1\text{-}D \end{array} \right.$

$$T_o - T_{w1} = \frac{\dot{q} R^2}{6 k_1}$$

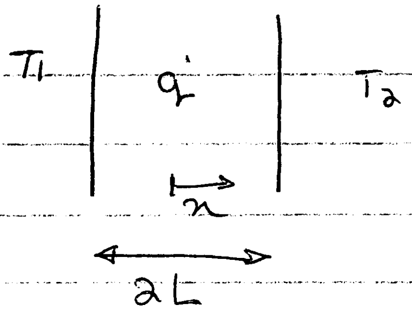
$$\underbrace{\dot{q}\left[\frac{4}{3}\pi R^3\right]}_{\text{کل حرارت تولیدی.}} = \frac{T_{w1} - T_\infty}{\frac{1}{4k_2\pi}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right] + \frac{1}{h(4\pi)(2R)^3}}$$

$$= \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{1}{4k_2\pi}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right]}$$

$$= \frac{T_{w2} - T_\infty}{\frac{1}{h(4\pi)(2R)^2}}$$

$$\rightarrow \boxed{T_{w2} = \frac{\dot{q} R}{12h} + T_\infty}$$

* دمای "بین" دو نقطه ای را در نظر می گیریم که دمای یکی از آنها معلوم باشد.



دمای max در وسط نیست (تقارن نداریم)
ولی معادله اصلی صادق است .

$$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2k} + C_1 x + C_2$$

$$T_2 = -\frac{\dot{q}L^2}{2k} + C_1 L + C_2$$

$$T_1 = -\frac{\dot{q}L^2}{2k} - C_1 L + C_2$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{T_2 - T_1}{2L} = C_1}$$

محل دمای max :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \rightarrow -\frac{\dot{q}x}{k} + C_1 = 0$$

$$x_{\underset{min}{max}} = \frac{kC_1}{\dot{q}}$$

$$x_{\underset{min}{max}} = \frac{k(T_2 - T_1)}{2\dot{q}L}$$

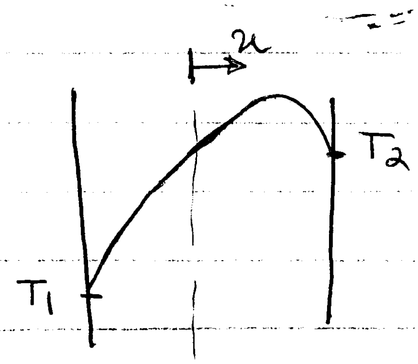
$$\cancel{T_{W2} = \frac{\dot{q}R}{12h}}$$

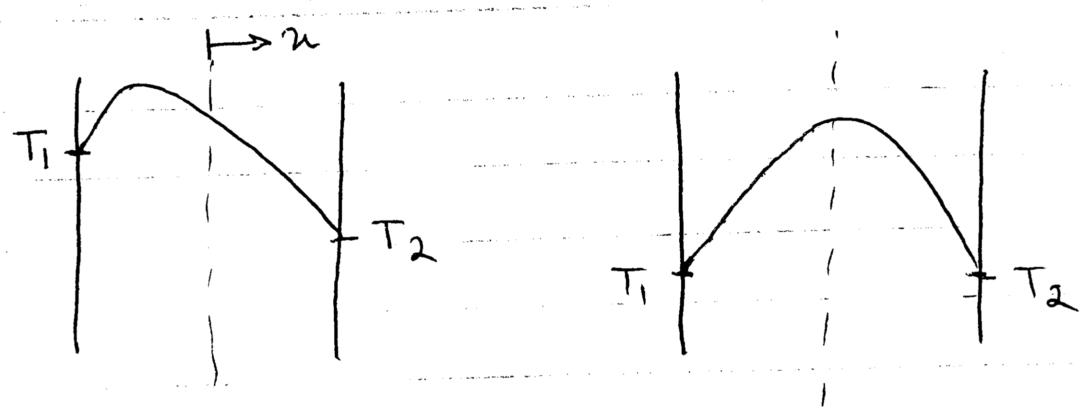
$\dot{q} > 0$

$T_2 > T_1 \rightarrow x_{max} > 0$

$T_2 = T_1 \rightarrow x_{max} = 0$

$T_2 < T_1 \rightarrow x_{max} < 0$



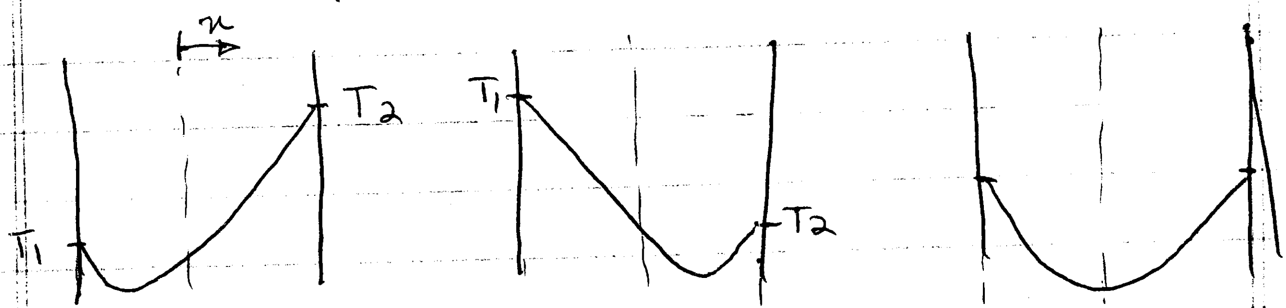


اگر در مختصات کارتزین چشمه حرارتی داشته باشیم محل دمای max به دمای بزرگتر نزدیک تر است.

$$\frac{\dot{q}<0}{T_2>T_1} \longrightarrow x_{min}<0$$

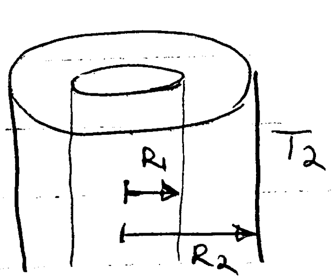
$$= \longrightarrow =0$$

$$< \longrightarrow <0$$



در مختصات کارتزین وقتی چاه حرارتی داریم محل دمای min به دمای کوچکتر نزدیک تر است.

ایجاد عدم تقارن استوانه ← توخالی کردن استوانه.



$T_1<T_2$

اگر در بدنه استوانه یک واکنش گرمازا انجام شود محل دمای max به دمای

الف) T_2 نزدیک تر است

ب) T_1 " "

ج) در $\frac{R_1+R_2}{2}$ (وسط دیواره) قرار دارد.

د) به نسبت شعاع ها قرار دارد.

$$T = -\frac{\dot{q} r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

$$T_2 = -\frac{\dot{q} R_2^2}{4k} + C_1 \ln R_2 + C_2$$

$$T_1 = -\frac{\dot{q} R_1^2}{4k} + C_1 \ln R_1 + C_2$$

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_1) + \dot{q}/4k\,[R_2^2 - R_1^2]}{\ln (R_2/R_1)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \longrightarrow -\frac{\dot{q} r}{2k} + \frac{C_1}{r} = 0$$

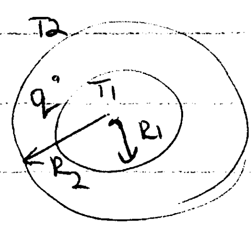
$$\underset{\text{min}}{r_{max}} = \sqrt{\frac{2kC_1}{\dot{q}}}$$

$$r_{ext} = \sqrt{\frac{2k}{\dot{q}} \times \frac{(T_2 - T_1) + \dot{q}/4k\,[R_2^2 - R_1^2]}{\ln (R_2/R_1)}}$$

مهم

درمختصات استوانه ای وهمچنین کروی محل دمای max یا min علاوه بر وضعیت دماهای نسبت شعاع ها هم بستگی دارد. (توجه شود حتی اگر $T_1 = T_2$ باشد).

مختصات کروی: (کره توخالی)



$$T = -\frac{\dot{q} r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_1) + \dot{q}/6k\,(R_2^2 - R_1^2)}{1/R_1 - 1/R_2}$$

$$r_{ext} = \sqrt[3]{\frac{3kC_1}{\dot{q}}}$$

$$r_{ext} = \sqrt[n]{\frac{nka}{\dot{q}}}$$

*فقط در کارتزین می‌توان تشخیص داد که دمای max / min کدام دما نزدیک‌تر است.

$n = 1$ کارتزین

$n = 2$ استوانه‌ای

$= 3$ کروی.

کاهش مقاومت:

$$R = \frac{1}{h_o A_o} \longrightarrow \text{مقاومت کنترلی}$$

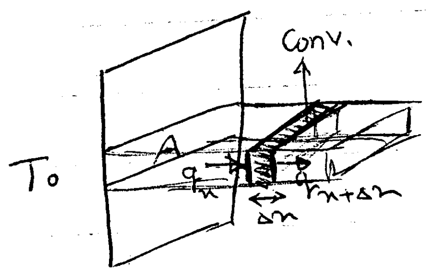
$A\uparrow$ یا $h\uparrow$

$A\uparrow \Longrightarrow$ پره‌دار کردن.

$h\uparrow \Longrightarrow$
- سیال ساکن ⟶ به حرکت درآوردن
- سیال حرکت کند ⟶ ازدیاد سرعت

توجه: پره‌دار کردن هزینه عملیاتی ندارد و معمولاً بهتر است.

پره‌های حرارتی به منظور ازدیاد تبادل حرارت از طریق ازدیاد سطح بکار می‌رود:



بدون فین: $Q = hA(T_o - T_\infty)$

موازنه: $In - out + \underbrace{gen}_{0} = \underbrace{Acc.}_{0}$

توجه: جابجایی شرط مرزی در این مسئله نیست Conv. جزئی از ~~مسئله~~ معادله است.

معادله دیفرانسیل:

$$q_x A\big|_x - q_x A\big|_{x+\Delta x} - h(P\Delta x)(T-T_\infty)=0$$

$$-\frac{d(qA)}{dx} - hP(T-T_\infty)=0$$

A ثابت:

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T-T_\infty)=0}$$

معادله دیفرانسیل غیرهمگن

$$\theta = T - T_\infty$$

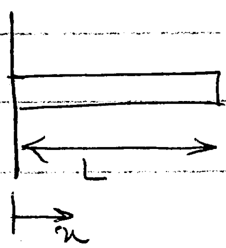
$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad , \quad m^2 = \frac{hP}{kA}$$

معادله مشخصه: $r^2 - m^2 = 0$

$$r = \pm m$$

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

یا $\theta = C_1 \sinh mx + C_2 \cosh mx$ → برای اعمال شرایط مرزی راحتتر است.

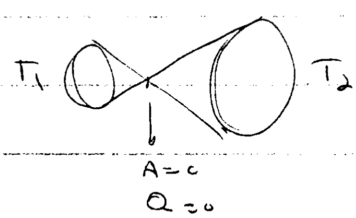


B.C.1 → $x=0 \; , \; T=T_0 \; , \; \theta=\theta_0$

B.C.2 →

- نوع اول → $L \to \infty \; , \; \theta = 0$
- دوم → $-k\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L} = h\theta_{(x=L)}$
- سوم → $\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L} = 0$

توجه:



بنابراین آنجا عایق در یک حالت می‌توان گفت سطح خیلی کوچک است.

نوع اوّل :

$$\theta_0 = C_1 e^{0} + C_2 e^{-0}$$ شرط مرزی 1

$$\theta_0 = C_1 + C_2$$ 2 " "

$$0 = C_1 e^{+\infty} + \cancel{C_2 e^{-\infty}} \rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

توزیع دما :

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-mx}$$ ← صفحه نور

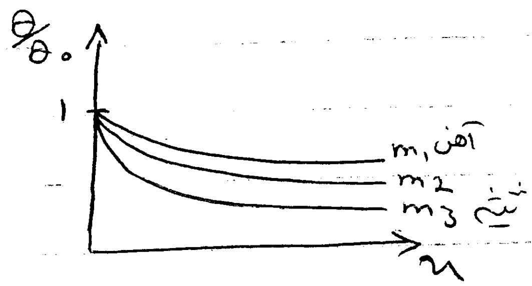
نوع دوم :

$$= \frac{\cosh m(L-x) + \frac{h}{mk} \sinh m(L-x)}{\cosh mL + \frac{h}{mk} \sinh mL}$$ صفحه نور.

نوع سوم :

$$= \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

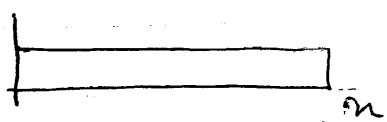
پروفایل دما :



$m = \sqrt{\frac{hP}{KA}}$

$m_3 > m_2 > m_1$

$k_3 < k_2 < k_1$



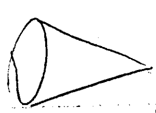
علت ساختن پره به شکل مثلثی یا مخروطی :

اقتصادی ترین حالت : در ابتدا که دما زیاد است سطح زیاد و با کم شدن گرادیان دما سطح را کم کنیم.

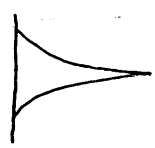
حسن ← کاهش وزن.

+ به همراه آن کاهش Q بخاطر کاهش سطح.

مثال :

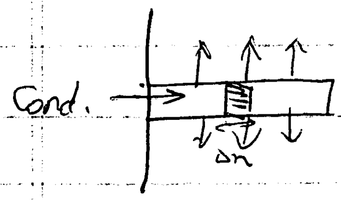


$V_2 = \frac{1}{3} V_1$



بهترین حالت تئوری : شکل منحنی توزیع دما ولی هزینه ساخت بالاست.

محاسبه تبادل حرارت از یک سطح پره دار:



راه اول:
$$Q = \begin{cases} -kA\dfrac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0} \\ h_1 (P\,dx)(T - T_\infty) \end{cases}$$
راه دوم: درالمان

بنابراین:

$$Q = \int_0^L hP\theta \, dx$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{KA}}$$

پره نوع اول:
$$Q = -kA(-m)e^{-mx}\Big|_{x=0}$$

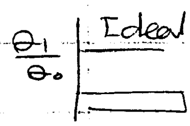
$$Q = \sqrt{hPKA}\,\theta_0$$

نوع دوم:
$$Q = \left[\frac{\sinh mL + \frac{h}{mk}\cosh(mL)}{\cosh mL + \frac{h}{mk}\sinh mL}\right]\sqrt{hPKA}\,\theta_0$$

نوع سوم:
$$Q = [\tanh(mL)]\sqrt{hPKA}\,\theta_0$$

راندمان:
$$\eta_1 = \frac{Q_{Actual}}{Q_{Ideal}}$$

Ideal: چون پره افت دما داریم زمان حالت ایده‌آل است که طول پره افت دما نداشته باشیم و پره در دمای پایه ثابت بماند $\frac{\theta}{\theta_0} = 1$ در طول پره



نوع اول:
$$Q_{Ideal} = h(PL)\theta_0$$

$$\eta = \frac{\sqrt{hPkA}\;\theta_0}{hPL\,\theta_0}$$

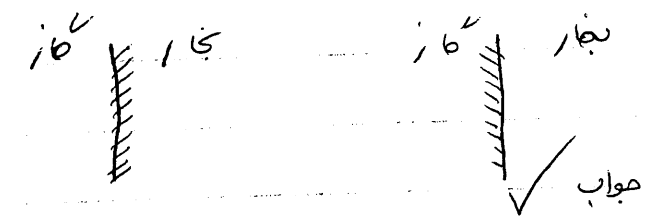
$$\boxed{\eta = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{kA}{hP}}} \qquad \boxed{\eta = \frac{1}{mL}}$$

$k\uparrow \Rightarrow \eta\uparrow$

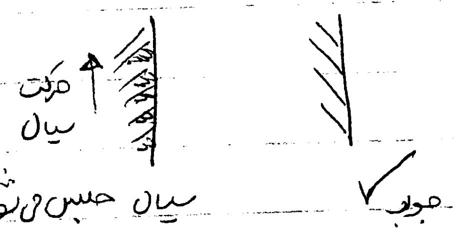
$h\downarrow \Rightarrow \eta\uparrow$

* پره‌ها را در محیط با h کم می‌گذاریم.

مثال :



پره باید سمت رو به بالا باشد



سیال حبس می‌شود :

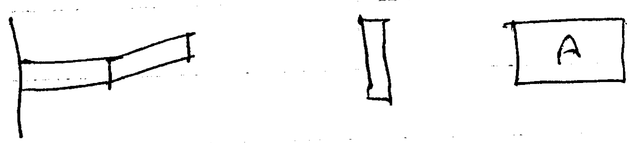
$L\downarrow \Rightarrow \eta\uparrow$

$$\eta = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{kA}{hP}}$$

ولی با کوچک کردن طول پره را بهینه نمی‌کنند.

$\frac{A}{P}\uparrow \Rightarrow \eta\uparrow$

ولی باز هم رعایت نمی‌کنیم.



پس η ، افزایش Q را دنبال نمی‌کند ~~بلکه~~ و نمی‌گوید چگونه به حالت بهینه آن تعریف شده می‌رسیم؛ بنابراین باید η_2 جدید تعریف کنیم.

$$\eta_2 = \frac{Q_{\text{با فین}}}{Q_{\text{بدون فین}}}$$

کارایی پره $\eta_2 = \dfrac{Q_{\text{بافین}}}{Q_{\text{بدون فین}}} = \dfrac{\sqrt{hPkA}\,\theta_0}{hA\,\theta_0}$

(عملکرد پره)

(چیزی بین صفر و یک نیست)

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{kP}{hA}}$$

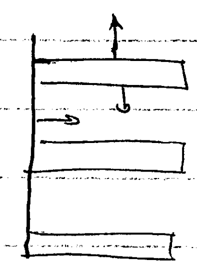
از زیاد K و قرار دادن با h کم موجب از زیاد کارایی و راندمان (هردو می‌گردد).
ولی طول در این رابطه مهم نیست و کارایی را نسبت به طول بهینه نمی‌کنند.

$$\frac{P}{A}\uparrow \Rightarrow \eta_2\uparrow$$

بنابراین پره را با سطح مقطع کم و سطح زیاد ساخته شوند.
(باریک) (بلند)

سومین نوع راندمان:

راندمان کل یک سطح پره‌دار



انتقال حرارت از فین و سطوح بین فین.

$A_f =$ سطح جانبی کل پره‌ها

$A_t =$ سطح جانبی پره‌ها و فضای خالی

$$\eta = \frac{Q}{Q_{Ideal}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_{Ideal}}$$

از پره‌ها $Q_1 = \eta_f\,[h A_f \theta_0]$

از فضاهای بین پره $Q_2 = h(A_t - A_f)\,\theta_0$

$$\eta = \frac{\eta_f h A_f \theta_0 + h(A_t - A_f)\theta_0}{h A_t \theta_0}$$

$$\boxed{\eta_t = 1 - \frac{A_f}{A_t}\left[1 - \eta_f\right]}$$

مثال ،

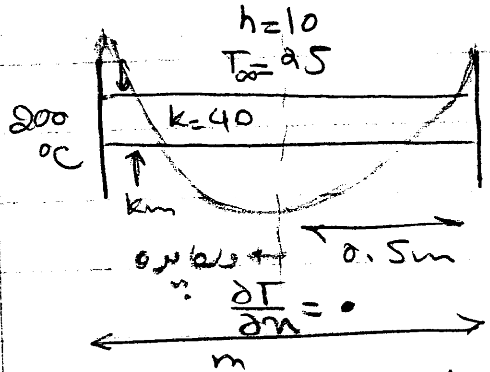
$$\eta_t = 1 - \frac{1}{2}(1 - 0.9) \longleftarrow \begin{cases} A_f = 1\,m^2 \\ A_t = 2\,m^2 \\ \eta_f = 0.9 \end{cases}$$

$$\eta_t = 0.95$$

* راندمان کل بیشتر از یک پره است .

جلسه سوم :

مثال : به علت تقارن اگر پروفایل دما در نصف پره بدست آید در طرف دیگر نیز در حقیقت ما بدست آورده‌ام .



$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

at $x = L = 0.5\,m$

$$\frac{T-25}{200-25} = \frac{1}{\cosh 5}$$

$$mL = \sqrt{\frac{hP}{KA}}\,.L = \sqrt{\frac{h\pi D}{K\pi D^2/4}} = \sqrt{\frac{4h}{KD}}\,L = \sqrt{\frac{4\times 10}{40\times 0.01}} \times 0.5 = 5$$

- نوع چهارم پره را نیز می‌توان تعریف کرد :

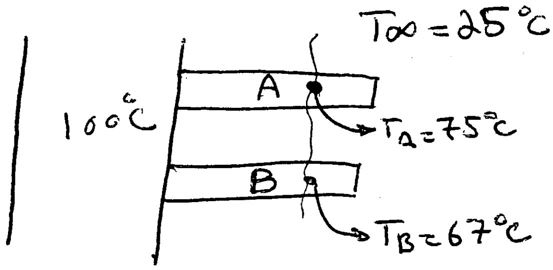
$$\left.\begin{array}{l} x = L \\ \theta = 0 \\ T = T_\infty \end{array}\right\} \text{شرط مرزی} \longrightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\sinh m(L-x)}{\sinh mL}$$

برای اعمال شرایط مرزی :

$$\theta = C_1 \sinh mx + C_2 \cosh mx$$

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{+mx}$$

$$\theta' = mC_1 \cosh mL - mC_2 \sinh mL$$



دو پره هم جنس نیستند ولی هم شکل هستند.

ارتباط بین k_A و k_B چیست؟

$$\frac{\theta_A}{\theta_0} = \exp(-m_A x)$$

$$\frac{\theta_B}{\theta_0} = \exp(-m_B x)$$

نکته در این گونه تست (مسائل مقایسه):

راه ۱) دو معادله را تقسیم کنیم بعد ln بگیریم — به جواب نمی رسد

راه ۲) اول ln بگیریم و بعد تقسیم کنیم — راه درست

$$\rightarrow \ln\left(\frac{\theta_A}{\theta_0}\right) = -m_A x$$

$$\ln\left(\frac{\theta_B}{\theta_0}\right) = -m_B x$$

$$\xrightarrow{\div} \frac{\ln\left(\frac{\theta_A}{\theta_0}\right)}{\ln\left(\frac{\theta_B}{\theta_0}\right)} = \frac{m_A}{m_B} = \sqrt{\frac{k_B}{k_A}}$$

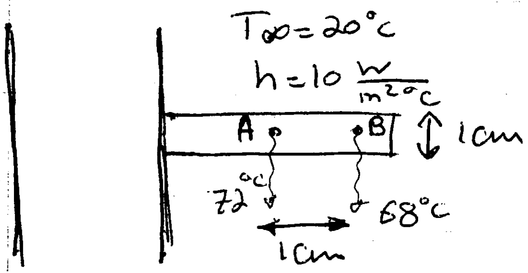
$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}$$

$$\rightarrow \frac{k_B}{k_A} = \left[\frac{\ln\left(\frac{\theta_A}{\theta_0}\right)}{\ln\left(\frac{\theta_B}{\theta_0}\right)}\right]^2$$

θ_A: 75 − 25, θ_B: 67 − 25, θ_0: 100 − 25

* هرچه رسانا کمتر اتلاف کند گرادیان دما بیشتر در طول پره وجود دارد.

مثال:



$? = k$

$$\frac{\theta_A}{\theta_0} = \exp[-m x_A]$$

$$\frac{\theta_B}{\theta_0} = \exp[-m x_B]$$

در این مسائل : اول باید روابط را تقسیم کرده سپس m را بیابیم. ...

$$\frac{\theta_A}{\theta_B} = \exp\left[m \underbrace{(x_B - x_A)}_{\Delta x}\right]$$

$$\ln\left(\frac{\theta_A}{\theta_B}\right) = m\Delta x$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} \qquad m = \frac{1}{\Delta x}\ln\left[\frac{\theta_A}{\theta_B}\right]$$

برای پره استوانه ای $\frac{P}{A} = \frac{4}{D}$

$$\frac{\overset{10}{4h}}{k\underset{.01}{D}} = \left[\frac{1}{\underset{.01}{\Delta x}}\ln\left(\frac{\overset{72-20}{\theta_A}}{\underset{68-20}{\theta_B}}\right)\right]^2 \longrightarrow k\checkmark$$

در مسائل مقایسه ای: معادله دو موقعیت را نوشته سپس تصمیم می گیریم اول تقسیم کنیم بعد ln یا برعکس

اگر هیچ چیزی در مورد نوع پره نگوید آن را نوع اول می گیریم.

انتقال حرارت هدایتی چند بعدی

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$ معادله اساسی

- Cond.
- 2 یا 3-D . دو یا سه بعدی
- S.S

دو بعدی مختصات کارتزین :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} = 0$$ معادله P.D.E

$$T = f[x, y]$$

چهار روش حل :

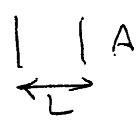
۱) تحلیلی
۲) عددی
۳) تشابه با الکتریسته
۴) ضریب شکل

تشابه با الکتریسته :

باید معادله ای بی بعد با شرایط مرزی بی بعد مشابه با معادله مورد نظر پیدا کرد .

ضریب شکل :

$$Q = kA\frac{\Delta T}{L}$$

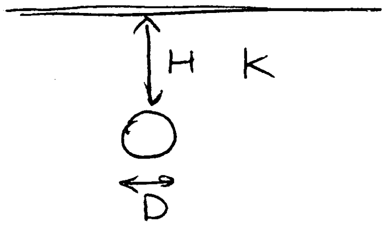


$$= k \cdot S \cdot \Delta T$$ ← نیروی محرکه

که بیانگر جنس — بیانگر شکل ما

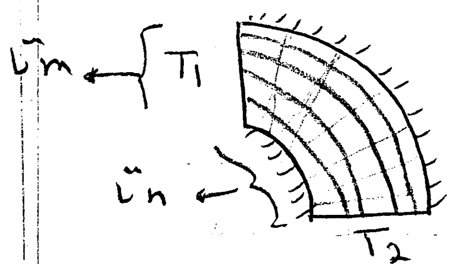
بعد ضریب شکل m است .

مثال :

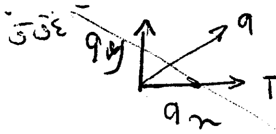


$$Q = K.S\Delta T$$

مثال :



خطوط دما ثابت و شار ثابت بر هم عمودند، چرا؟
در غیر اینصورت شار در جهت خط دما ثابت مؤلفه پیدا
می‌کند و در آن حالت یعنی در جهت دمای ثابت انتقال حرارت داریم.



$$\delta = \frac{m \cdot \Delta y \times 1}{n \cdot \Delta x}$$

روش تحلیلی و عددی :

روش تحلیلی :

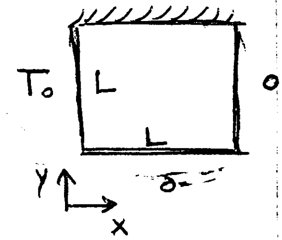
$$T = T(x,y)$$

$$T = F(x) \cdot G(y)$$

$$G F'' + F G'' = 0$$

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G}$$

مثال :



روش حل

۱) راستایی که شرط غیرهمگن داریم را شناسایی کنید.

۲) در راستای غیرهمگن شکل جواب :

- کارتزین : Sin و Cos .
- استوانه : J و Y

۱) $T_0 = T(0,y)$ غیرهمگن بودنش در راستای y است.

y ← غیرهمگن

x ← همگن

۲) $\sin \lambda_n y$ و $\cos \lambda_n y$ یا هر دو یا یک.

۳) فقط $\sin\lambda_n y$

۴) در جهت x، $\cosh\lambda_n x$ و $\sinh\lambda_n x$

۵) فقط $\sinh\lambda_n x$

at $y=0$ $T=0$

۶) $(2n+1)\pi/2L$

جواب:

$$T=\sum C_n \sin\lambda_n y \cdot \sinh\lambda_n x$$

$$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

۳) در راستای غیرهمگن اولین شرط را نگاه می‌کنیم:

نوع اول ← فقط sin

" دوم ← " cos

" سوم ← هردو.

در مورد استوانه: اگر استوانه توپر بود فقط توابع J داشته باشد.

۴) در راستای همگن:

- کارتزین ← Sinh و Cosh
- استوانه‌ای ← I و K

۵) در راستای همگن اولین شرط را نگاه کنید اگر نوع اول بود یا نوع دوم یا نوع سوم:

نوع اول ← فقط sinh

" دوم ← " cosh

" سوم ← هردو.

۶) محاسبه λ_n:

شرط مرزی راستای غیرهمگن اگر هم نوع باشند (هردو نوع اول یا دوم) ← $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$

اگر شرط مرزی‌ها غیرهم نوع باشند:

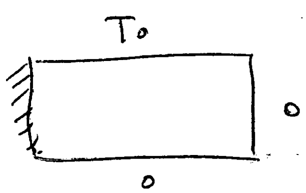
$$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

* در مورد شرط نوع سوم این روش صادق نیست.

راستا

- غیرهمگن
  - Sin , Cos
  - J یا Y
- همگن
  - I یا K
  - Sinh و یا Cosh

$(x,L)=T_0$



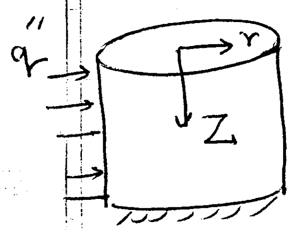
مثال:

$$T=\sum C_n \cos\lambda_n x \times \sinh\lambda_n y$$

$$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

در حل جداسازی: یا حتما معادله غیرهمگن است یا فقط شرایط مرزی تا قابل حل باشد. درغیراین صورت از اصل superposition استفاده کرد.

مثال:



$$T=\sum$$

$r=R$ و در z

$$q''=-k\frac{\partial T}{\partial r}$$

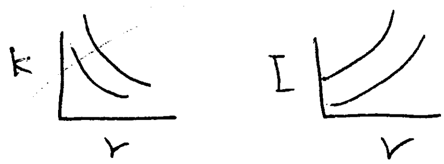
راستای Z: کارتزین محسوب می‌شود.

راستای r غیرهمگن.

راستای غیرهمگن Z است.

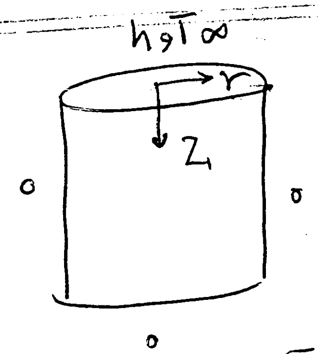
$$\sum C_n \sin\lambda_n Z \,.\, I_0(\lambda_n r)$$

استوانه توپر: ←



$$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

* چون جمله P^2 در $\lambda^2(P^2-\lambda^2)Y$ را در معادله بسل نداریم.



مثال: $r =$ غیرهمگن .

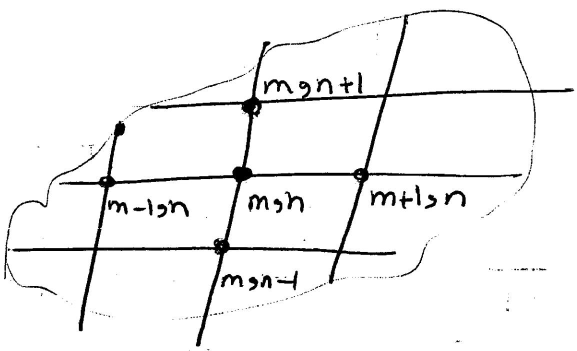
$$-k\frac{\partial T(z=0, r)}{\partial z} = h(T - T_\infty)$$

پس در راستای r ، J داریم .

در راستای r یا J یا Y ← چون توپر است

$$T = \sum C_n J_0(\lambda_n r)\cdot\left[A_n \sinh\lambda_n z + B_n \cosh\lambda_n z\right]$$

روش عددی:



$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_2 = \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_1 = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(\frac{dT}{dx}\right)}_{\phi} = \frac{d\phi}{dx}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\left.\frac{dT}{dx}\right|_2 - \left.\frac{dT}{dx}\right|_1}{\Delta x}$$

$$= \frac{[T_{m+1,n} - T_{m,n}]/\Delta x - [T_{m,n} - T_{m-1,n}]/\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{d^2T}{dy^2} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} = 0$$

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0$$

$\Delta x = \Delta y$

برای گره های داخلی درست است ،

$$T_{m,n} = \frac{1}{4}\left[T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} \right]$$

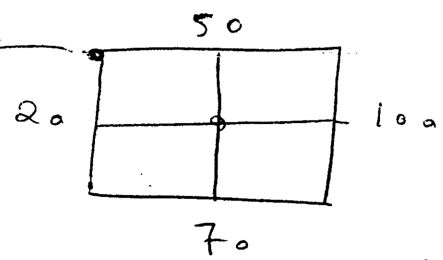
در حالت سه بعدی

$$T_{m,n,k} = \frac{1}{6}\left[T_{m,n+1,k} + T_{m,n,k-1} + T_{m-1,n,k} + T_{m+1,n,k} + T_{m,n-1,k} + T_{m,n,k+1} \right]$$

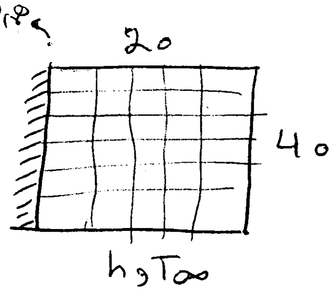
سه در راستای Z

توجه :

اثبات شود : $\frac{20+50}{2}$

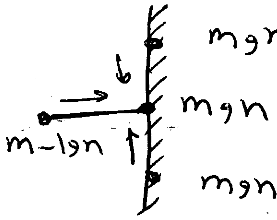


هر گره در مرز عایق یک دما دارند.



برای مرزها نیاز به معادلات جدید داریم.

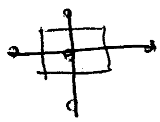
جمع جبری حرارت‌های وارد شده به گره صفر است :



$$k\,\Delta y\times 1\,\frac{T_{m-1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}+k_x\left[\frac{\Delta x}{2}\times 1\right]\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}+$$

عمق

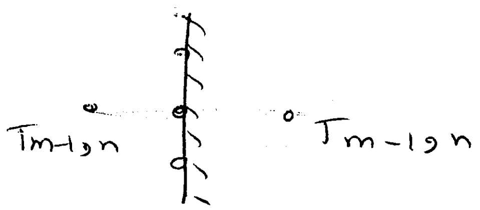
محدوده گره



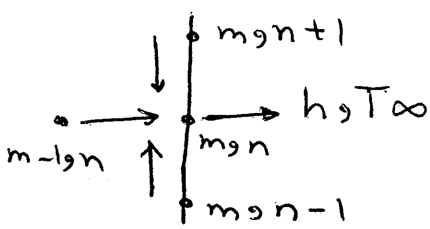
$$+k\left[\frac{\Delta x}{2}\times 1\right]\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta y}=0$$

$$\Delta x=\Delta y\longrightarrow T_{m,n}=\frac{T_{m-1,n}+\frac{1}{2}\left[T_{m,n+1}+T_{m,n-1}\right]}{2}$$

روش دوم :



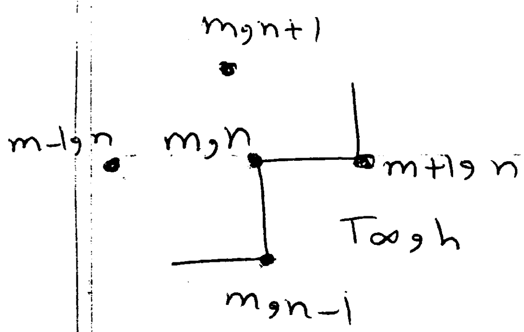
مثال :



$$K(\Delta y\times 1)\frac{T_{m-1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}+K\left(\frac{\Delta x}{2}\times 1\right)\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}+K\left(\frac{\Delta x}{2}\times 1\right)\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta y}-\frac{h}{k}\left[\Delta y\times 1\right](T_{m,n}-T_\infty)$$

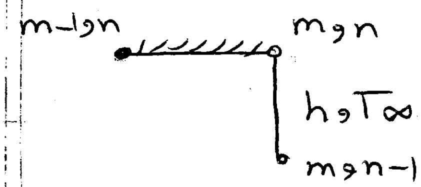
عدد Bi

$$T_{m,n}=\frac{T_{m-1,n}+\frac{1}{2}\left[T_{m,n+1}\,,\,T_{m,n-1}\right]+Bi\,T_\infty}{2+Bi}$$



مثال :

$$T_{m,n} = \frac{(T_{m,n+1} + T_{m-1,n}) + \frac{1}{2}[T_{m+1,n} + T_{m,n-1}] + Bi\,T_\infty}{3+Bi}$$



مثال

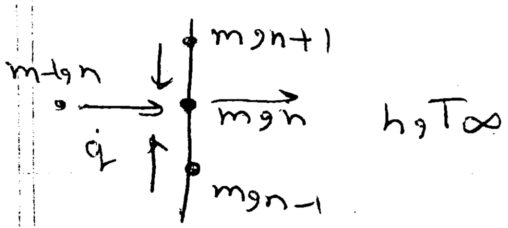
$$T_{m,n} = \frac{\frac{1}{2}[T_{m-1,n} + T_{m,n-1}] + \frac{Bi}{2}T_\infty}{1+\frac{Bi}{2}}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{\dot q}{k} = 0$$

با قرار دادن $\frac{d^2T}{dx^2}$ و $\frac{d^2T}{dy^2}$ داریم :

$$T_{m,n} = \frac{[\;\text{---}+\text{---}\;] + \frac{\dot q(\Delta x)^2}{k}}{4}$$

مثال :



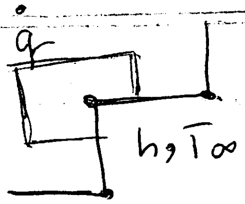
$$k\,\text{---} + k\,\text{---} + k\,\text{---}$$

$$+ \dot q\left[\frac{\Delta x}{2} \times \Delta y \times 1\right] = h(\Delta y \times 1)(T_{m,n} - T_\infty)$$

$$T_{m,n} = \frac{T_{\text{چپ}} + \frac{1}{2}[T_{\text{بالا}} + T_{\text{پایین}}] + \frac{\dot q(\Delta x)^2}{2k}}{2+Bi}$$

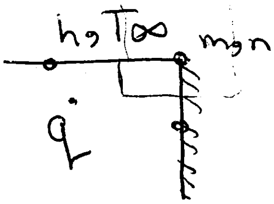
در حالت $\dot q = 0$ این جمله در این مثال صفر می گردد .

مثال:



$$T_{m,n} = \frac{Bi\,T_\infty + T_{بالا} + T_{چپ} + \frac{1}{2}\left(T_{راست} + T_{پایین}\right) + \frac{3\dot q(\Delta x)^2}{4k}}{3 + Bi}$$

مثال:



$$T_{m,n} = \frac{\frac{1}{2}\left(T_{چپ} + T_{پایین}\right) + \frac{Bi}{2}T_\infty + \frac{1}{4}\frac{\dot q\,\Delta x^2}{k}}{1 + \frac{Bi}{2}}$$

انتقال حرارت ناپایدار:

$$\nabla^2 T + \frac{\dot q}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T = f\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}, t\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ T = f(t) \quad \text{lumped} \text{ ظرفیت حرارتی فشرده.} \\ 2)\ T = f(x, y, z, t) \end{array}\right\}$$

ظرفیت حرارتی فشرده:

۱) تحت چه شرایطی $T = f(t)$ ؟

۲) در این صورت تابعیت آن چگونه است؟

شرط آنکه دما نقاط همه تابع زمان باشد $Bi < 0.1$

$$Bi = \frac{\overbrace{hL}^{\text{محیط}}}{\underbrace{k}_{\text{جسم جامد}}}$$

k جامد $\quad h$

* توجه: $Nu = \frac{hL}{k}$ ولی k مال سیال است.

بعد مشخصه $L = \frac{V}{A}$

A: منظور سطحی است که در معرض کنوکسیون قرار دارد.

Bi کم : h کم باشد
k زیاد
L کوچک ،

$$Bi = \frac{h\,A\,\Delta T}{\frac{k}{L}A\,\Delta T} = \frac{\text{توان جابجایی}}{\text{توان هدایتی جسم جامد}} = \frac{L/kA}{1/hA} = \frac{\text{مقاومت هدایتی جسم جامد}}{\text{مقاومت جابجایی سیال}}$$

$Bi < 0.1$ توان جابجایی در مقایسه با توان هدایتی قابل صرف نظر .

مقاومت هدایتی 〃 〃 مقاومت جابجایی قابل صرف نظر .

$T = f(x, y, z, t)$

$T = f(t)$ lumped

سؤالات :

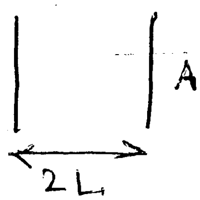
۱) کدام شرایطی که دما فقط تابع زمان است؟ جواب $Bi < 0.1$ $\qquad Bi = \frac{hL}{k}$

۲) در این شرایط تابعیت آن چگونه است؟

*) A : سطحی در معرض کنوکسیون است :

L :

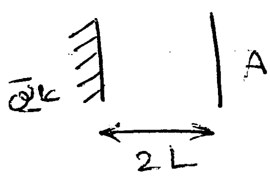
Exa 1:



$\rightarrow L = \frac{2AL}{2A}$

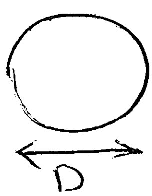
بعد مشخص $\boxed{L = \frac{A}{V}}$

Exa 2:



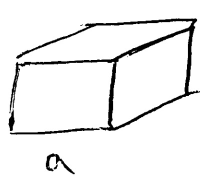
$L = \frac{2AL}{A} = 2L$

Exa 3:



$L = \frac{\frac{\pi}{6} D^3}{\pi D^2} = \frac{D}{6}$

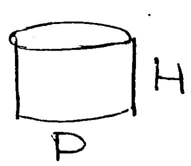
Exa. 4:



$L = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$

$L = \frac{a^3}{4a^2} = \frac{a}{4}$ اگر گفت سطح بالا و پایین عایق است

Exa. 5:



$L = \frac{\frac{\pi D^2}{4} H}{\pi D H + 2\frac{\pi D^2}{4}} \rightarrow L = \frac{DH}{4H + 2D}$

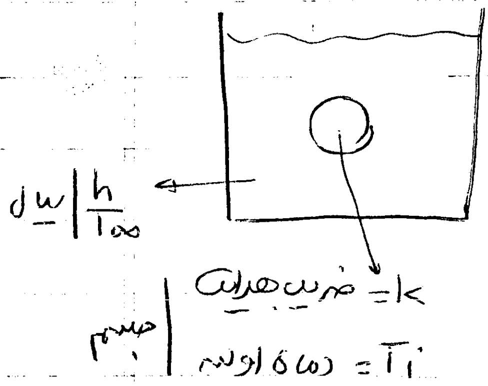
$$L = \frac{DH}{4H + 2D}$$

$\rightarrow H \gg D \rightarrow L = \frac{D}{4}$

$\rightarrow H \ll D \rightarrow L = \frac{H}{2}$

$\rightarrow H = D \rightarrow L = \frac{D}{6}$

۴) در این شرایط شکل توزیع دما چگونه است؟



$$In - out + \cancel{gen} = Acc.$$
0

$Bi < 0.1 \longrightarrow$ نیازی به انتگرال گیری نیست

$$0 - hA[T - T_\infty] = \rho V C_p \frac{dT}{dt}$$

$$T - T_\infty = \theta$$

$$\frac{\rho V C_p}{hA} = \tau$$ ثابت زمانی $\cancel{\rho V C_p}$

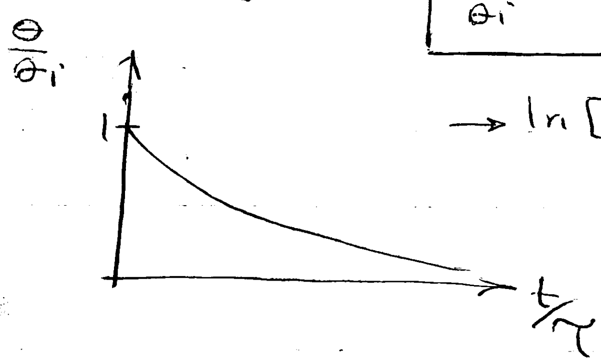
$$\tau \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0$$

نیاز به یک شرط اولیه داریم:

at $t = 0$ $T = T_i$

$\theta = \theta_i$

با حل داریم $\rightarrow$ $\boxed{\frac{\theta}{\theta_i} = \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]}$



$$\rightarrow \ln\left[\frac{\theta}{\theta_i}\right] = -\frac{t}{\tau}$$

$$\rightarrow \boxed{t_R = \tau \ln \frac{\theta_i}{\theta_R}}$$

$$t_f = \tau \ln \frac{\theta_i}{\theta_f}$$

$$\rightarrow t_f \sim \tau$$

* زمان سرد شدن یا گرم شدن با ثابت زمانی نسبت مستقیم دارد

Exa 1:

کره ای داریم به قطر a و مکعبی به یال a و هر دو هم جنس هستند. زمان سرد شدن این را مقایسه کنید:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\left(\frac{\rho V C_p}{hA}\right)_2}{\left(\frac{\rho V C_p}{hP}\right)_1} =$$

$$= \frac{\left(\frac{V}{A}\right)_2}{\left(\frac{V}{A}\right)_1} = \frac{a/6}{a/6} = 1$$

هر دو هم زمان سرد می شوند.

Exa 2:

کره و مکعبی داریم که هم وزن و هم جنس هستند. زمان سرد شدن این دو را مقایسه کنید.

$$\frac{t_2 \text{ (کره)}}{t_1 \text{ (مکعب)}} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\left(\frac{\cancel{\rho V C_p}}{hA}\right)_2}{\left(\frac{\cancel{\rho V C_p}}{hA}\right)_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

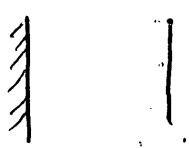
$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{6a^2}{\pi d^2}$$

$$\rho_2 V_2 = \rho_1 V_1 \rightarrow \frac{\pi}{6} d^3 = a^3 \rightarrow \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}\, d = a$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{6\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}\, d^2}{\pi d^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi/6}} > 1$$

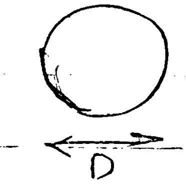
مکعب زودتر سرد می شود.

Exa 3:



$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{A_1}{A_2} = 2$$

اگر یک طرف عایق شود ثابت زمانی چه تغییری می کند.

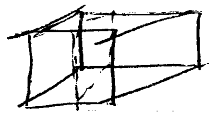


کره‌ای به قطر D در زمان 18s خشک می‌شود.
اگر این کره از وسط نصف شود زمان چند ثانیه است.

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{A_1}{A_2}=\frac{\pi d^2}{\pi d^2+2\frac{\pi d^2}{4}}=\frac{1}{1+1/2}=2/3$$

اگر مکعب را از وسط نصف می‌کردیم چه تغییری می‌کرد:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{A_1}{A_2}=$$



$$=\frac{6a^2}{8a^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow 13.5\ sec$$

$$\nabla^2 T+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

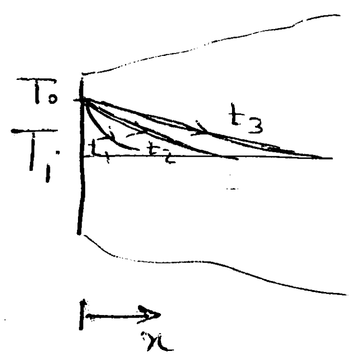
$$T=f(x,y,z,t)$$

روش‌های حل:
- تحلیلی
  - S.V (جداسازی متغیرها)
  - C.V (ترکیب متغیرها)
  - لاپلاس
- عددی
  - Explicit
  - Implicit

* راستای زمان فرم جواب پریودیک نمی‌شود و باید حالت میرا داشته باشد
غیرهمگن بودن نمی‌تواند در راستای زمان باشد.

مسئله جسم بی‌نهایت: (حل به روش ترکیب متغیرها).

یک طرف جسم بی‌نهایت با مرزهای T_1 را به T_0 تغییر می‌دهیم
در زمان‌های مختلف میزان نفوذ حرارت متفاوت
است بنابراین می‌گویند با Penetration Depth (عمق نفوذ)
سروکار داریم. (مشابه تئوری رسوخ در جرم).



برای این حالت :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt}$$

$$T(x,0) = T_i$$

$$t>0 \begin{cases} t(0,t) = T_0 \\ * \\ t(\infty,t) = T_1 \end{cases}$$

(یعنی اثرات دما به انتهای جسم نرسیده)

چون شرایط ∞ داریم می‌توانیم از روش جداسازی استفاده نماییم.

$$\eta = a x^m t^n$$

$$f'' + 2\eta f = 0$$

$$f = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

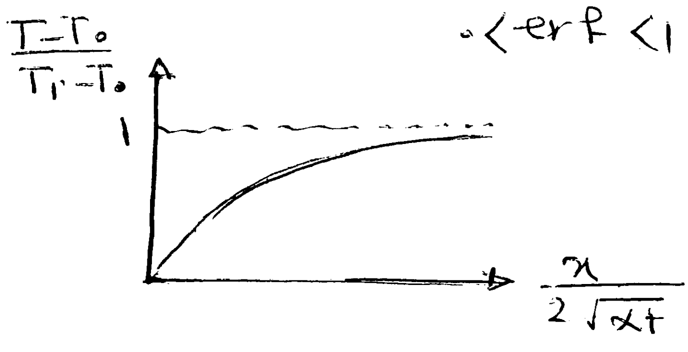
$$m = 1 ,\ n = -1/2 ,\ a = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0} = \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right]$$

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}\, d\eta$$

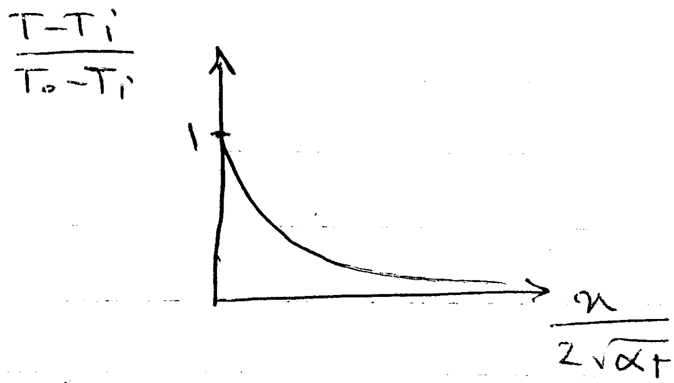
$$\operatorname{erf}(0) = 0 \qquad \operatorname{erf}(\infty) = 1$$

$$0 < \operatorname{erf} < 1$$



اگر بصورت $\frac{T-T_i}{T_0-T_i}$ بی بعد کنیم:

$$\frac{T-T_i}{T_0-T_i} = 1-erf(\eta) = erf_c(\eta)$$



اگر انتهای چند میله از جنس های مختلف روی شعله نگه داشته شود انتهای دیگر میله ای زودتر گرم می شود که:

۱) k بیشتری داشته باشد * معادله می گوید سرعت نفوذ تابع α است

۲) α " " " نه k. (جسمی ممکن k بیشتر داشته باشد

۳) k و α " " " ولی ρc_p بالا هم داشته باشد).

مقدار حرارت در جسم بی نهایت. (برای مسئله دمای دیواره ثابت).

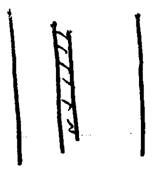
$$q = -kA\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0}$$

$$= kA\frac{(T_0-T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

یعنی هر چه زمان می گذرد شار یا فلاکس انتقال حرارت کم می شود.
(عمق نفوذ بیشتر)

در یک دیواره $q_{x=0} \neq q_x$ شده چرا:

1) همواره همین طور است.
2) هیچ وقت
3) $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$
4) $\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0$ ✓ steady نیست.
5) اگر A ثابت نباشد. ✓
6) منبع حرارتی داشته باشیم. ✓

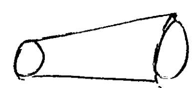


$$q_x A|_x - q_x A|_{x+\Delta x} + \dot{q} A \Delta x \quad c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

اگر
1) S.S ✓
2) $gen = 0$
3) $A = cte$

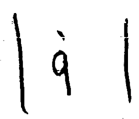
← در مختصات کارتزین مسئله با این شرایط: q ثابت است.

مثال: شرط 1 و 2 / 3 برقرار نیست



← qA = ثابت

مثال:



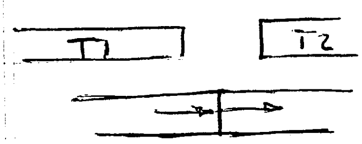
$$q = \dot{q} x$$

مثال: 3 و 2 برقرار است ولی steady state نباشد:

✱ ~~پرسش~~ مسائل شار ثابت نیست:
1) steady نباشد
2) ترم تولید حرارت داریم
3) A ثابت نباشد

در تمام مختصات ها شار ثابت نیست.

* اگر دو جسم تماس پیدا کنند در محل اتصال چیست:



$q_1 = q_2$

شرط اول: در فصل مشترک دما یکی است. (برای هر دو تا جسم)
یک نقطه نمی توانند دو دما داشته باشد

شرط دوم: هر چه حرارت به فصل مشترک می رسد به جسم
با دمای پایین منتقل می شود یعنی در فصل مشترک q ها مساوی است
چه steady باشد چه نباشد.

$$\frac{k_2 (T_c - T_1) A}{\sqrt{\pi \alpha_2 t}} = \frac{k_1 A (T_1 - T_c)}{\sqrt{\pi \alpha_1 t}}$$

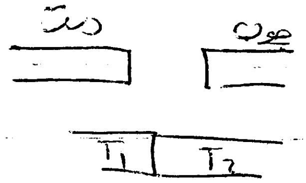
$$\frac{T_1 - T_c}{T_c - T_2} = \sqrt{\frac{k_2 \rho_2 C_{p2}}{k_1 \rho_1 C_{p1}}}$$

$\sqrt{k \rho C_p} = \text{Effusivity}$

دو جسم هم جنس داشته باشیم :

$$\boxed{T_c = \frac{T_1 + T_2}{2}}$$

چرا در زمستان سرد اجسام فلزی از چوب سردتر به نظر می رسد:
(یعنی دو جسم دمای یکسان (چون در محیط هستند) ولی یک سردتر احساس می شود).



مقدار دمای احساس شده به $k \rho C_p$ چوب و دست بستگی دارد.

$$\frac{T_1 - T_c}{T_c - T_2} = \sqrt{\frac{(k \rho C_p)_{\text{چوب}}}{(k \rho C_p)_{\text{دست}}}}$$

$$\frac{T_1 - T'_c}{T'_c - T_2} = \sqrt{\frac{(k \rho C_p)_{\text{فلز}}}{(k \rho C_p)_{\text{دست}}}}$$

جسمی که $\sqrt{k \rho C_p}$ بیشتری دارد در زمستان سردتر و در تابستان گرم تر از جسمی که $\sqrt{k \rho C_p}$ کمتری دارد به نظر می رسد. اما دو جسم هم دما هستند.
این مسئله از رفتار unsteady شروع شده.

روش های حل عددی در مسائل unsteady :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{d^2T}{dy^2} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{p+1}_{m,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta t}$$

P : شمارنده زمان است .

قرار دادن در معادله →

$$\frac{T^{p+1 \atop p}_{m+1,n} + T^{p+1 \atop p}_{m-1,n} - 2T^{p+1 \atop p}_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T^{p+1 \atop p}_{m,n+1} + T^{p+1 \atop p}_{m,n-1} - 2T^{p+1 \atop p}_{m,n}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta t}$$

اگر در سمت چپ همه دماها در گام P محاسبه شوند ← روش صریح (Explicit)

Implicit ← " " P+1 " "

Explicit:

در مسائل unsteady در $t=0$ تمام اطلاعات را داریم بنابراین دماهای گام P معلوم‌اند ولی دماها در P+1 مجهول‌اند .

$T^{p}_{m,n}$ = معلوم

$T^{p+1}_{m,n}$ = مجهول

(* ← دمای هر گره در گام جدید تابعی است از دمای خود گره و نقاط اطراف آن در گام قبل

$$T^{p+1}_{m,n} = F_o\left[T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}\right]^{p} + (1-4F_o)\,T^{p}_{m,n}$$

$\Delta x = \Delta y$

$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = F_o$

عدد فوریه : زمان بی‌بعد هم به آن می‌گویند
نسبت توان هدایتی به ترم ذخیره انرژی .

حسن روش Explicit : یک معادله یک مجهول است.

اشکال روش : اگر $1-4F_0$ مثبت نباشد

$$1-4F_0<0$$

$$F_0>\frac{1}{4}$$

Exa. $F_0=\frac{1}{4}+\varepsilon$ 60× ×60 °100 ×60 ×60

در P+1 برابر (دنگل از 60 کوچکتر است) $T^{P+1}_{m,n}<60$

در این روش اگر فرض $T^{P}_{m,n}$ منفی باشد مسئله ناپایدار می‌گردد و قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود.

<u>شرط پایداری</u>

2-D, unsteady state $\longrightarrow 1-4F_0\geq 0 \longrightarrow F_0\leq\frac{1}{4}$

1-D, unsteady $\longrightarrow$ $F_0\leq\frac{1}{2}$

3-D, unsteady $\longrightarrow$ $F_0\leq 1/6$

یعنی اگر Δt را افزایش دهیم Δx هم باید چون $\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}\leq 1/4$ $\leftarrow$ $\Delta x\geq 2\sqrt{\alpha\Delta t}$

یا " Δx " " Δt " " "

روش Implicit : (غیرصریح).

تمام دماهای سمت چپ در P+1 محاسبه می‌گردد.

$$(1+4F_0)T^{P+1}_{m+1,n}-F_0\left[T_{\text{چپ}}+T_{\text{بالا}}+T_{\text{پایین}}+T_{\text{راست}}\right]^{P+1}=T^{P}_{m,n}$$

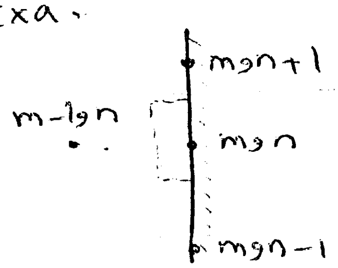
در روش ضمنی دمای هر نقطه در لحظه جدید تابعی است از دمای خود آن نقطه در لحظه قبل و نقاط اطراف در لحظه جدید. پس با چند معادله، چند مجهول سروکار داریم. حجم محاسبات بالاست ولی در عوض شرط پایداری نداریم.

	حسن	عیب
Imp.	شرط پایداری ندارد	حجم بالای محاسباتی
Exp.	یک معادله یک مجهول	شرط پایداری دارد

* روابط بدست آمده در هر دو روش برای گره های درون صادق هستند، برای گره های مرزی باید معادلات را از نو بنویسیم.

* وجود یا عدم وجود q روی شرط پایداری اثری ندارد

Exa.



دیگر نمی‌توان گفت $\sum q = 0$ بلکه

$$\text{Input} - \text{Output} = \text{Acc.}$$

$$k\left[\frac{\Delta x}{2}\times 1\right]\frac{T^{p}_{m,n+1}-T^{p}_{m,n}}{\Delta y}$$

$$+\,k\left[\Delta y\times 1\right]\frac{T^{p}_{m-1,n}-T^{p}_{m,n}}{\Delta x}$$

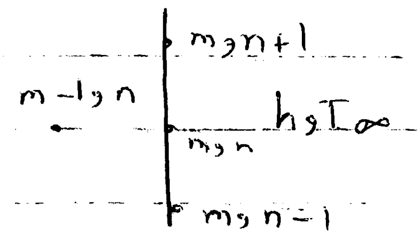
$$+\,k\left[\frac{\Delta x}{2}\times 1\right]\frac{T^{p}_{m,n-1}-T^{p}_{m,n}}{\Delta y}$$

$$=\rho\left[\frac{\Delta x}{2}\cdot\Delta y\times 1\right]C_p\,\frac{T^{p+1}_{m,n}-T^{p}_{m,n}}{\Delta t}$$

$$T^{p+1}_{m,n} = 2F_o\left[\frac{1}{2}\left(T_{\text{بالا}}+T_{\text{پایین}}\right)+T_{\text{چپ}}\right]^{p}+\left[1-4F_o\right]T^{p}_{m,n}$$

$$\begin{cases}\Delta x=\Delta y\\ \dfrac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}=F_o\end{cases}$$

شرط پایداری: $F_o \leqslant \frac{1}{4}$ در این مسئله



$$k\left[\frac{\Delta x}{2}\times 1\right]\frac{T^p_{m,n+1}-T^p_{m,n}}{\Delta y}$$

$$+\,k\left[\Delta y\times 1\right]\frac{\qquad}{\Delta x}$$

$$+\,k\left[\frac{\Delta x}{2}\times 1\right]\frac{\qquad}{\Delta y}$$

$$-\,\frac{h}{k}(\Delta y\times 1)(T^p_{m,n}-T_\infty)$$

$$=\frac{\rho}{k}\left[\qquad\right]\frac{\qquad}{\Delta t}$$

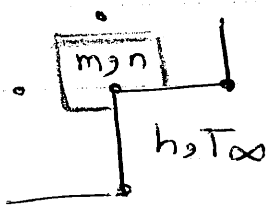
$$\rightarrow T^p_{m,n}=2F_o\left[\tfrac{1}{2}\left(T_{\text{بالا}}+T_{\text{پایین}}\right)+T_{\text{چپ}}\right]^p+\left[1-4F_o-2F_oBi\right]T^p_{m,n}$$

$F_o\leq\frac{1}{2(2+Bi)}$: شرط پایداری

شرط پایداری در حالت کلی :

$F_o \leq$ کد جمع گره $\times \frac{1}{\text{ضریب } T_{m,n} \text{ در حالت steady}}$

در حالت بالا $\frac{1}{2}$.



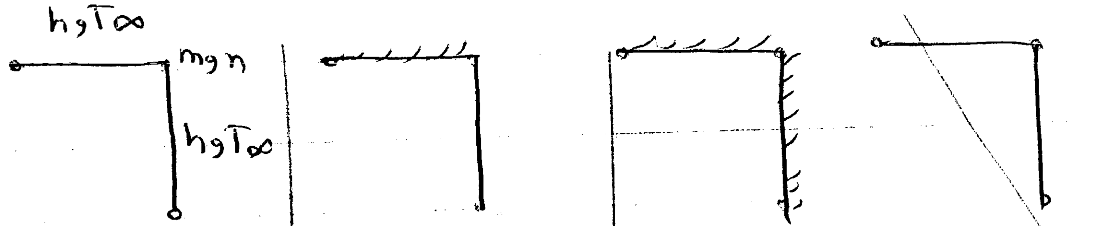
$$F_o \leqslant \frac{3}{4} \times \frac{1}{3+Bi} \longrightarrow 4F_o(3+Bi) \leqslant 3$$

اگر یک سطح عایق بود :
$$F_o \leqslant \frac{3}{4} \times \frac{1}{3+\frac{1}{2}Bi}$$

اگر دو سطح عایق بود :
$$F_o \leqslant \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

← ضریب Bi صفر بود.

مثال :



$$F_o \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+Bi}$$

$$F_o \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+Bi/2}$$

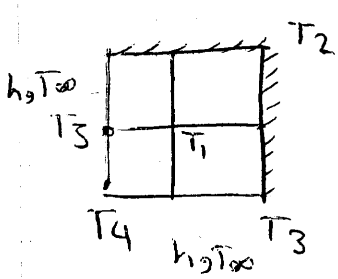
$$F_o \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{1}$$

$$F_o \leqslant \frac{1}{4}$$

$$\leqslant \frac{1}{4}$$

در کدام یک از نقاط شرط پایداری مانند گره مرکزی :

جواب : T_2



* وجود ترم تولید حرارت در شرط پایداری اثری ندارد.

* رابطه $F_o \leqslant \frac{\text{حجم}}{\text{گره}} \times \frac{1}{\text{ضریب}\ T_{m,n}}$ در تمامی حالات متفاوت در چندبعدی

1-D	2	تعداد گره اطراف
2-D	4	
3-D	6	

Convection Heat Transfer:

$\vec{V} \neq 0 \longrightarrow$ مکانیزم انتقال حرارت جابجایی است

منشاء ایجاد حرکت:

1) اجباری $\begin{cases} \text{pump} \\ \text{Comp, Fan, ...} \end{cases}$

2) آزاد $\longrightarrow \Delta T \longrightarrow \Delta\rho \neq 0 \xrightarrow{g \neq 0} \Delta\rho g \neq 0$

به شرطی که سیال از لحاظ دانسیته انبساط پذیر باشد.

نیرو ↓ عامل حرکت.

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$$

$$K = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$$

چون حرکت داریم هیچ وقت معادلات داریم به کار می آید یعنی ابتدا باید پروفایل سرعت بدست آید

باید به این ۴ سؤال جواب دهیم:

1) جابجایی Forced یا Natural

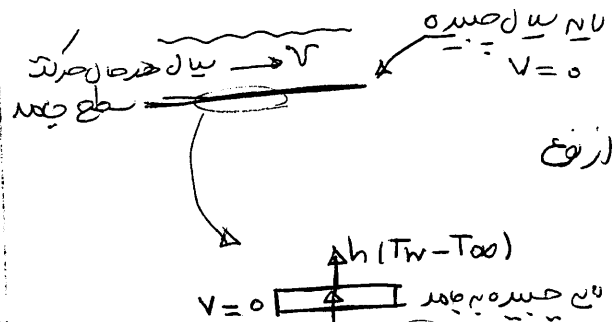
2) Laminar یا Turbulent

3) شکل هندسی مسئله چیست → Plate / Tube

پاسخ به سؤال اول مسئله از لحاظ سینماتیکی حل شده است.

4) $T_w = cte$ (دمای دیواره ثابت) و یا $q'' = cte$ شار حرارتی ثابت

Convection :



در لایه سیال چسبیده به جامد مکانیزم فقط از نوع Conduction است.

$-k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{wall}$ ← برای سیال است.

چون ضخامت لایه صفر فرض می‌شود بنابراین تجمع درون لایه نداریم. بنابراین:
خروجی = ورودی

خروجی = ورودی

$$-k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{wall} = h(T_w - T_\infty)$$

$$\boxed{h = \frac{-k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0,\ wall}}{T_w - T_\infty}}$$

این معادله بسیار مهم است و می‌گوید برای بدست آوردن h باید پروفایل دما را داشته باشیم. خود پروفایل دما از موازنه انرژی بدست می‌آید. در موازنه انرژی انتقال هم بصورت Conduction است و هم Convection بنابراین حرکت توده داریم بنابراین باید پروفایل سرعت را بدانیم. یعنی پروفایل سرعت لازمه نوشتن موازنه انرژی است. پروفایل سرعت از معادله بیلان مومنتوم بدست می‌آید.

h ← پروفایل دما ← بیلان انرژی ← پروفایل سرعت ← بیلان مومنتوم
↳ معادله پیوستگی

برای تمام مسائل درون صفحه، لوله، درهم، آرام، ... روش همین است.

سؤال اول: Forced یا Natural است؟

در Natural حرکت بخاطر اختلاف دما است بنابراین معادلات مومنتوم و حرارت جدا از هم نیستند و با هم حل می‌شوند (به شکل کوپل معادله).

سؤال دوم: جریان آرام است یا درهم.

سوم: شکل هندسی: روی صفحه، درون لوله، ....

سؤال چهارم: روی دیواره شرط مرزی چیست : دما ثابت یا شار حرارتی ثابت .

Forced Convection :

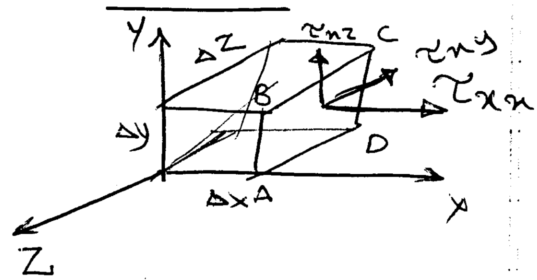
معادله پیوستگی بدون قید و شرط :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0$$

معادله پیوستگی ترم تولید ندارد . چون طبق اصل بقای جرم میگوییم جرم از بین نمی رود و یا تولید نمی شود
ترم تولید یا مصرف برای جزء است .

برای سیالات تراکم ناپذیر : $\boxed{\nabla\cdot\vec{V}=0}$ این معادله شرط steady state بودن را ندارد .

معادله مومنتوم :



* بردار نرمال ABCD در جهت x است .

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\sum\vec{F}_{x,y,z}=ma_{x,y,z}$$

$$m=\rho\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}\qquad a_x=\frac{dV_x}{dt}\qquad a_y=\cdots\qquad a_z=\cdots$$

نیروها :
- Body Force : به مرکز ثقل (گرانیگاه) اعمال می شوند : مثال : وزن ، گریز از مرکز ، نیروی میدان مغناطیسی
- Surface Force : به سطح وارد میشوند : shear stress ، Normal stress
- تغییرات اندازه حرکت نسبت به زمان : $\frac{mV}{t}=\dot{m}V$ حاصلضرب $\dot{m}$ در سرعت

بررسی عمده دیگر این است که سیال تنش به صورت سیال داریم یا فقط ویسکوزیته که تنش داریم
یا الاستیسیته هم داریم .

τ تنسور است یعنی علاوه بر مقدار دو مؤلفه دیگر نیز دارد :

$\tau_{\bigcirc\bigcirc}$

که تنش روی چه سطحی اعمال می شود .

راستای تنش را نشان می دهد . نشان می دهد در روی چه جهتی وارد می شود .

توجه : هر صفحه را با بردار نرمال آن می شناسند

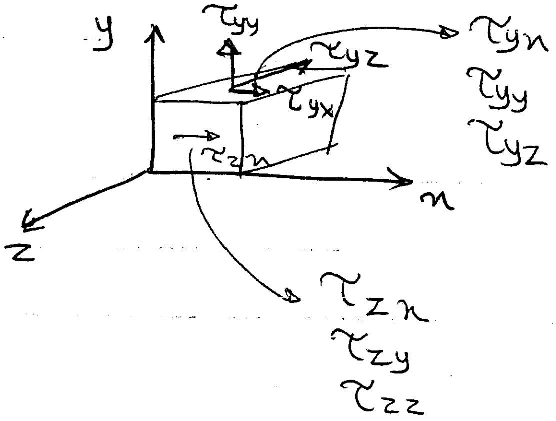
روی هر صفحه سه مؤلفه تنش داریم دو تا مماس و یکی قائم .

در روی هر صفحه فقط یک مؤلفه در جهت x است

τ_{xx}

τ_{yx}

τ_{zx}



** علامت این دو قرینه است ، (در دو جهت مخالف)

$$(P+\tau_{xx})\Delta y\Delta z\big|_x-(P+\tau_{xx})\Delta y\Delta z\big|_{x+\Delta x}$$

$$\tau_{yx}\Delta x\Delta z\big|_y-\tau_{yx}\Delta x\Delta z\big|_{y+\Delta y},$$

$$\tau_{zx}\Delta y\Delta x\big|_z-\tau_{zx}\Delta y\Delta x\big|_{z+\Delta z}$$

تغییرات مومنتوم :

$$+\rho\Delta x\Delta y\Delta z\, g_x+(\rho v_x\Delta y\Delta z)v_x\big|_x-\cdots\big|_{x+\Delta x}+$$

Boady Force

(توجه : اگر $\tau=\mu\frac{du}{dy}$ در نظر بگیریم شرایط ورزی خودش منفی را ایجاد می نماید .)

$$+(\rho v_y\Delta x\Delta z)v_x\big|_y-\cdots\big|_{y+\Delta y}$$

$$+(\rho v_z\Delta x\Delta y)v_x\big|_z-\cdots\big|_{z+\Delta z}$$

$$=\rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial v_x}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(v_x v_x) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(v_x v_y) = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

* مجموع سه جمله بخاطر پیوستگی صفر می‌شود: توجه

و فقط سه جمله می‌ماند.

تقسیم طرفین بر $\Delta x \Delta y \Delta z$:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\rho\left[v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right] - \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] + \rho g_x$$

فرم برداری معادله مومنتم (با تنها شرط ثابت معادله پیوستگی).

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \tau - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla P} + \vec{g}$$

چون برداری است به عبارتی که معادله است. (خودش سه معادله است).

حال برحسب اینکه $\tau = f(\dot{\gamma})$ سیال نیوتنی و غیرنیوتنی داریم؛

$$\tau = -\eta \dot{\gamma}$$

$\dot{\gamma}$ تنسور است.

توجه :

$A \cdot B$	$\leftarrow$	$\Sigma-1$	اسکالر
AB	$\leftarrow$	Σ	تنسور
$A \times B$	$\leftarrow$	$\Sigma-1$	بردار
$A : B$	$\leftarrow$	$\Sigma-4$	

← معادله پیوستگی و انرژی چون بردار نداریم

$$In - out + gen = Acc.$$

کل انرژی هدایتی Convection

$$\left[q_x + \rho v_x C_p T\right] \Delta y \Delta z \big|_x - \cdots \big|_{x+\Delta x}$$

فقط سهم هدایت

کل انرژی

$$\left[q_y + \rho v_y C_p T\right] \Delta x \Delta z \big|_y - \cdots \big|_{y+\Delta y}$$

$$\left[q_z + \rho v_z C_p T\right] \Delta x \Delta y \big|_z - \cdots \big|_{z+\Delta z}$$

$$+\dot{q}\,\Delta x \Delta y \Delta z + \Phi\,\Delta x \Delta y \Delta z = \rho\,\Delta x \Delta y \Delta z\, C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

به عنوان مثال: ΔH_{rxn}

$\dot{m} C_p T$: آهنگ انتقال انرژی توسط توده سیال.

تلفات ویسکوز، تلفات زبری

جمع این سه جمله صفر است.

$$T\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x\frac{\partial T}{\partial x}$$
$$T\frac{\partial V_y}{\partial y} + V_x\frac{\partial T}{\partial y}$$
$$T\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}$$

طرفین معادله تقسیم بر $\Delta x \Delta y \Delta z$ و میل دادن به سمت صفر:

بازهم سه جمله بجا طمعادله پیوستگی حذف شده

$$-\frac{dq_x}{dx} - \frac{dq_y}{dy} - \frac{\partial q_z}{\partial z} - \rho c_p\left[V_x\frac{\partial T}{\partial x} + V_y\frac{\partial T}{\partial y} + V_z\frac{\partial T}{\partial z}\right] + \dot{q} + \Phi = \rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \alpha\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} + \frac{\Phi}{\rho c_p} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}T$$

تغییر انتالپی بر اثر Convection — Conduction

$\alpha\nabla^2 T$: انتقال حرارت با مکانیزم conduction

$\frac{\dot{q}}{\rho c_p}$: واکنش شیمیایی ΔH_{rxn} و ... $\dot{q}$ می‌تواند + یا − باشد

$\frac{\Phi}{\rho c_p}$: تلفات زبری همواره + است (فقط تولیدی است) بجا طاصطکاک لایه‌های سیال. اگر $V=0$ حذف می‌شود.

$\frac{\partial T}{\partial t}$: تجمع حرارتی

$\vec{V}\cdot\vec{\nabla}T$: انتقال حرارت با مکانیزم Convection

اگر $V=0$ معادله به معادله هدایت تبدیل می‌شود.

* در معادله انرژی بر اثر Convection دو جمله اضافی داریم:
۱) $\vec{V}\cdot\vec{\nabla}T$ نمایانگر انرژی منتقل شده توسط حرکت توده سیال است
۲) $\frac{\Phi}{\rho c_p}$ نمایانگر تولید شده ناشی از اصطکاک میان لایه‌های در حال حرکت سیال است

سه معادله:

$$1)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$$

$$2)\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\vec{V} = \left(-\frac{1}{\rho}\nabla\tau\right) - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{g}$$

تنش چسبندگی — فشار

اگر سیال نیوتنی باشد: $\nu\nabla^2\vec{V}$

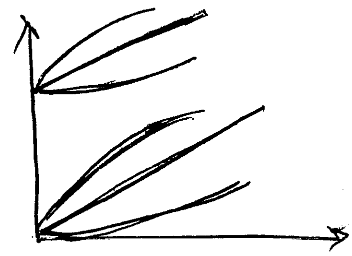
اگر سیال نیوتنی باشد معادله ناویر استوکس

$$3)\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla T = \alpha\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} + \frac{\Phi}{\rho c_p}$$

1) جریان Forced convection
2) Laminar
3) plate
4) $T_w = cte$

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dx} + \dfrac{dV_y}{dy} = 0 \\[2mm] V_x \dfrac{dV_x}{dy} + V_y \dfrac{dV_x}{dy} = \nu \dfrac{d^2 V_x}{dy^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} \\[2mm] V_x \dfrac{\partial T}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial T}{\partial y} = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{2\mu}{\rho C_p}\left[\dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right]^2 \end{cases}$$

چون $\Phi = -\tau : \nabla v$



این سه معادله را بی‌بعد کرده :

$\vec{V}_x = \dfrac{U_x}{u_\infty}$, $\vec{V}_y = \dfrac{U_y}{u_\infty}$, $\bar{x} = \dfrac{x}{L}$, $\bar{y} = \dfrac{y}{L}$

$\bar{T} = \dfrac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$, $\bar{P} = \dfrac{P}{\rho u_\infty^2}$

بنابراین مثلاً هرجا V_x داریم $u_\infty \bar{V}_x$ را جای آن می‌نویسیم.

یا مثلاً : $\partial T \longrightarrow (T_w - T_\infty)\,\partial \bar{T}$; یا مثلاً : $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{u_\infty \partial^2 \bar{V}_x}{L^2 \partial \bar{x}^2}$

فرم بی‌بعد شده معادلات :

$$\frac{d\bar{V}_x}{d\bar{x}} + \frac{d\bar{V}_y}{d\bar{y}} = 0 \qquad A = \frac{\mu}{\rho u_\infty L} = \frac{1}{Re_L} \qquad B = 1$$

$$\bar{V}_x \frac{d\bar{V}_x}{d\bar{x}} + \bar{V}_y \frac{d\bar{V}_x}{d\bar{y}} = A \frac{d^2 \bar{V}_x}{d\bar{y}^2} - B \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}}$$

$(T_w - T_\infty)\,\partial \bar{T}$

$$\bar{V}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = C \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + D\left[\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}}\right]^2$$

$\bar{V}_x u_\infty$, $L\,\partial\bar{x}$

$\dfrac{u_\infty \Delta T}{L}$

A و B و C و D بی‌بعد است.

A : می‌گوید ترم جریان تابع درجا یا اجباری تابع عدد رینولدز است.

$$c = \frac{k}{\rho u_\infty C_p L \mu} = \frac{\mu}{\rho u_\infty L} \cdot \frac{k}{\mu C_p} = \frac{1}{Re\, Pr}$$

بی بعد کردن معادله اساسی :

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}}{T_w - T_\infty}$$

$$h = \frac{-k\cancel{(T_w - T_\infty)}\, \frac{\partial \bar{T}}{L\, \partial \bar{y}}}{\cancel{T_w - T_\infty}}$$

Nu : توان جابجایی سیال به توان هدایتی سیال.

$$\frac{hL}{k} = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}$$

سیال.

عدد Nu به پروفایل بی بعد شدگی دما بستگی دارد.

پروفایل بی بعد دما به (در Forced convection) تابعی است از Re، Pr، ...

$$Nu = f[Re, Pr, \dots]$$

سؤال: چه موقع می‌توان از تلفات لزجتی صرف نظر کرد و چه زمان دارای اهمیت است :

$$\frac{\mu}{\rho C_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$\rightarrow \mu \uparrow$

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \uparrow$

} اهمیت دارند.

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \gg \frac{\mu}{\rho C_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

آنالیز مرتبه بزرگی :

$$\alpha \frac{T}{\delta^2} >> \frac{\mu}{\rho C_p}\left[\frac{u_\infty}{\delta}\right]^2$$

$$1 >> \underbrace{\frac{\mu/\rho}{\alpha}}_{Pr} \cdot \underbrace{\frac{u_\infty^2}{C_p T}}_{Ec}$$

اکرت $Ec = \frac{u_\infty^2}{C_p T}$: ~~اکرسیال~~ نسبت انرژی جنبشی به انتشار انرژی .

اگر سیال با سرعت u_∞ به صفحه‌ای برخورد کند انرژی جنبشی

وقتی می‌توان از اثر لزجت صرف نظر کرد که عدد برینکمن کوچکتر از یک باشد

برینکمن $\boxed{Br = Ec \cdot Pr < 1}$

عدد D :

$$\frac{\frac{2\mu}{\rho C_p}\,\frac{u_\infty^2}{L^2}}{\frac{u_\infty \Delta T}{L}} \rightarrow \boxed{\frac{2Ec}{Re} = D}$$

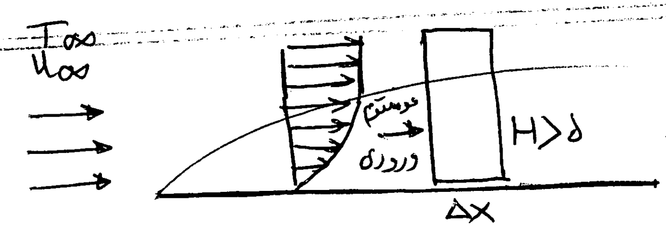
و

ضریب ← ضریب $\frac{\partial T}{\partial x}$ آن طرف معادله

بی‌بعد پروفایل دما تابعی است از Ec و Pr ، Re

پس عدد Nu سه عدد بی‌بعد Ec ، Pr ، Re تأثیر دارند و اگر از تلفات ویسکوز صرف نظر کنیم فقط تابع Pr و Re .

ضمناً عدد Sh تابع Ec نیست متفاوت جرم و حرارت .



تئوری بلازیوس $\longrightarrow \frac{u}{u_\infty} = 0.99 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \simeq 0$ وقتی که این اتفاق می‌افتد را ضخامت لایه مرزی می‌گویند.

حل به روش تقریبی <u>Von-Karman</u>

فرضیات: ۱) بیلان را اسکالر می‌نویسیم. (یک طرف المان خارج لایه).

$$\underbrace{\int_0^H (\rho u\, dy \times 1)\, u}_{\text{مومنتوم ورودی}} \Big|_x - \cdots \Big|_{x+\Delta x}$$

$$\tau_w \times \Delta x \times 1$$

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^H u(u_\infty - u)\, dy = \nu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

توابع سرعت در این معادله و شرایط مرزی باید صدق کند بنابراین ون کارمن $u = a + by + cy^2 + dy^3$ صدق کند.

$$y = 0 \quad \begin{cases} u = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

$$y = \delta \quad \begin{cases} u = u_\infty \\ \frac{du}{dy} = 0 \end{cases}$$

از شرط سوم در $y=0$:

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{0} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}}_{\simeq 0}$$

ون کارمن : ۱) بیان را انتگرالی گرفت.

۲) ~~...~~ پروفایل سرعت و دما را حدس زد.

با اعمال شرایط مرزی → $$\boxed{\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3}$$ → این معادله شرایط مرزی را ارضا می‌کند

باید معادله انتگرالی را نیز ارضا کند:

$$\frac{d}{dx}\int_0^H u(u_\infty - u)\,dy = \nu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\int_0^H = \int_0^\delta + \cancel{\int_\delta^H} \rightarrow 0$$

با قرار دادن $\frac{u}{u_\infty}$ در معادله انتگرالی و قرار دادن حدود یک تابع از δ داریم:

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(\delta) = \frac{3}{2\delta} u_\infty \nu}$$

یک معادله ODE:

$$\int_0^\delta \delta\, d f(\delta) = \int_0^x \frac{3 u_\infty \nu}{2}\, dx$$

احتیاج به یک شرط مرزی: $X = 0 \quad \delta_{at} = 0$

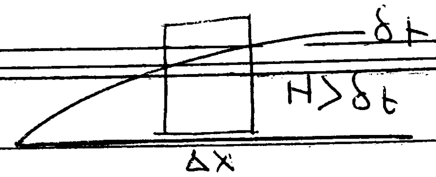
با حل داریم:

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}}}$$

$$Re_x = \frac{\rho u_\infty x}{\mu}$$

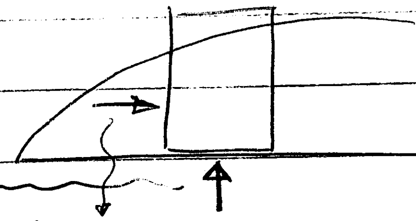
$\frac{u}{u_\infty}$ ← ۴ شرط مرزی را ارضا کرد، در معادله انتگرال صدق می‌کند و ضخامت لایه مرزی را می‌دهد.

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \longrightarrow \text{حل دقیق}$$



$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}}$$



$$-k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}(dx \times 1)$$

$$\int \rho u (dy \times 1) c_p T \Big|_x - \cdots\cdots \Big|_{x+\Delta x}$$

کل انرژی که با جریان وارد می‌گردد

(انتگرالی) از موازنه انرژی برای لایه $\Rightarrow$

معادله انتگرالی انرژی ون کارمن :
$$\frac{d}{dx}\int_0^H u(T_\infty - T)\,dy = \alpha\frac{\partial T}{\partial y}$$

از پروفایل سرعت

$$T = a + by + cy^2 + dy^3$$

$$y=0 \begin{cases} T = T_w \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

با این شرطها
چهارم

$$\cancelto{0}{u}\frac{\partial T}{\partial x} + \cancelto{0}{v}\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$y=\delta_t \begin{cases} T = T_\infty \\ \dfrac{dT}{dy} = 0 \end{cases}$$

صرفنظر از تلفات لزجت
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

* شبیه پروفایل سرعت

شباهت ← با این شروط پروفایل سرعت و دما یکی می‌شود

$$\frac{d}{dx}\int_0^H \longrightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t} + \frac{d}{dx}\int_{\delta_t}^H$$

با قرار دادن پروفایل و انتگرالگیری :

معادله دیفرانسیل : ODE
$$\frac{d}{dx}R(\delta_t, \delta) = \frac{3\alpha}{2\delta_t}(T_\infty - T_w)$$

با شرط :

$x = 0 \quad \delta = 0$

$x = 0 \quad \delta_t = 0$

یا $x = x_0 \quad \delta_t = 0$

* لایه مرزی حرارتی و هیدرولیکی الزاماً نباید از ابتدای صفحه آغاز شود ولی لایه مرزی مومنتوم حتماً از ابتدای صفحه آغاز می‌گردد.

مهم:

باحل معادله ODE $\longrightarrow$ $$\frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1.024} Pr^{-1/3}$$

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}}$$

نکات:

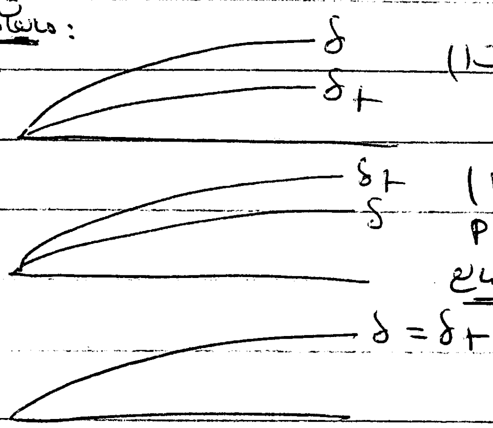
1) $\delta = f(Re)$

2) $\frac{\delta_t}{\delta} = f(Pr)$

3) $\delta_t = f(Re, Pr)$

باتوجه به Pr سه حالت داریم:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k}$$



حالت ۱) مایعات معمولی: $\nu > \alpha$, $Pr > 1$

حالت ۲) $Pr < 1$ فلزات مایع

حالت ۳) گازها $Pr = 1$

قدم آخر محاسبه h:

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}\big|_{y=0}}{T_w - T_\infty}$$

$$= \frac{-k \times \frac{3}{2\delta_t}(T_\infty - T_w)}{T_w - T_\infty} = \boxed{\frac{3k}{2\delta_t}}$$

یعنی ضخامت لایه مرزی

هرچه زیادتر شود h کم، یعنی بطول صفحه h کاهش می‌یابد.
(نسبت عکس).

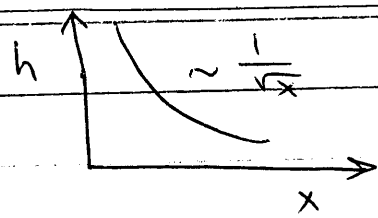
$$h = \frac{3k}{2\left[\frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}}\right]\frac{1}{1.024}Pr^{-1/3}}$$

$$\boxed{Nu = \frac{hx}{k} = 0.332\, Re_x^{1/2} Pr^{1/3}} \longrightarrow$$

برای:
- Forced
- $Re < 5 \times 10^5$ laminar
- Plate
- $T_w = cte$

نکات :

۱) $h \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$:



(افزایش ضخامت = جلو رفتن در طول صفحه ← کاهش h)

2) $Q = \bar{h} A \Delta T \longrightarrow \bar{h} = \frac{\int_0^L h\,dx}{\int_0^L dx}$

$$\boxed{\underset{Sh}{\overset{\text{یا}}{Nu}} \sim x^n \longrightarrow h \sim x^{n-1}}$$

⇒ اگر $h = \beta x^{n-1}$

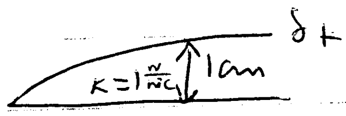
$$\bar{h} = \frac{\int_0^L \beta x^{n-1}\,dx}{\int_0^L dx} = \frac{\beta}{n}\frac{L^n}{L} = \frac{1}{n}\beta L^{n-1}$$

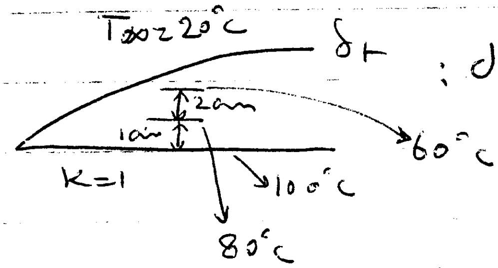
$$\Rightarrow \boxed{\bar{h} = \frac{1}{n} h_{x=L}}$$

n : توان متناسب برای $\underset{Sh}{Nu}$ است ← $n = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\bar{h} = 2h_{x=L}}$$

مثال :





1) $h = \frac{3K}{2\delta_t} = \frac{3\times 1}{2\times 0.01} = 150 \frac{W}{m^2 °C}$

2) $h = \frac{-K \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_w - T_\infty}$ ——— پس نزدیک ترین جا (1cm) را در نظر میگیریم

$$h = \frac{-1\times \frac{80-100}{0.01}}{100-20}$$

$$= 25 \frac{W}{m^2 °C}$$

بررسی h در جریان آرام اجباری روی صفحه با شرط شار حرارتی ثابت.

- Forced - Plate - laminar - $q'' = cte$

مسئله تا جایی که شرایط مرزی دما را اعمال کنیم مثل حالت قبل است:

$$y = 0 \qquad T = T_w$$

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

در این حالت:

$$\boxed{Nu = 0.453\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}}$$

نکات:

۱) $h \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

۲) $\bar{h} = 2h_{x=L}$ و $\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k}$

$$\overline{Nu} = 2Nu_{x=L}$$

$$= 2\frac{h_{x=L}}{k}$$

سؤال: در مسئله حرارتی شار ثابت دمای صفحه چگونه تغییر می‌کند؟

$$\left.\begin{aligned} q'' &= h(T_w - T_\infty) \\ q'' &= cte \\ h &= \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}\right\} \rightarrow T_w - T_\infty \sim \sqrt{x} \longrightarrow T_w - T_\infty = \beta\sqrt{x}$$

بنابراین اختلاف دما در طول دیواره تغییر می‌کند.

برای محاسبه متوسط اختلاف دما:

$$\overline{T_w - T_\infty} = \frac{\int_0^L (T_w - T_\infty)\,dx}{\int_0^L dx}$$

$$= \frac{\beta\int_0^L \sqrt{x}\,dx}{L} = \frac{2}{3}\beta\sqrt{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{T_w - T_\infty} = \frac{2}{3}(T_w - T_\infty)_{x=L}}$$

متوسط اختلاف دما در طول صفحه

2/3 " " انتهای صفحه است

تشابه: similarity:

تحت شرایط زیر معادلات حرارت، جرم و مومنتوم مشابه هستند:

۱) تلفات ناشی از اصطکاک (زبری)، گرادیان فشار، $\dot{q}$، R_A (همزمان) و g همگی صفر باشند

$$\Phi = \nabla P = \dot{q} = R_A = g = 0$$

۲) رژیم جریان یکی (laminar یا Turbulent)

۳) Geometry (شکل هندسی یکی)

۴) شرط مرزی بی بعد یکی باشد.

۵) $\nu = \alpha = D_{AB}$ در جریان آرام

یا $E_\nu = E_H = E_D$ " درهم

۶) شدت های انتقال تا حد امکان کم باشد.

اگر این شرایط برقرار باشد:

آنالوژی رینولدز کلبرن:

$$J_H = J_D = \frac{C_f}{2}$$

$$J_H = St \cdot Pr^{2/3}$$

$$J_D = St \cdot Pr^{2/3}$$

$$St = \frac{Nu}{Re.Pr} = \frac{h}{\rho u_\infty C_p}$$

۱) گروه بی بعد St ضریب h را در داخل خود دارد بنابراین اگر در مسئله ای ضریب اصطکاک را بتوان اندازه گیری کرد به تبع آن h را می توان حساب کرد.

۲) به هر میزان C_f تغییر کند به همان میزان h تغییر می کند.

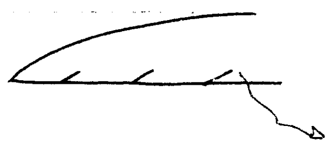
۳) $C_f \sim \Delta P$

$$h \sim C_f \sim \Delta P$$

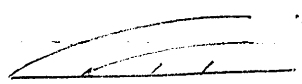
توجه: C_f با $\frac{\varepsilon}{D}$ متناسب نیست.

~~یعنی تغییر ضریب~~

۴) آنالوژی رینولدز به جز جریان آرام درون لوله ها در بقیه موارد صادق است.



بنابراین این موانع:
ضریب انتقال حرارت
را زیاد ولی افت فشار را هم زیاد می کند. مثل Baffle ها،
و ~~...~~ در هر مانع لایه مرزی مجدداً آغاز می شود.
یعنی از رشد بی رویه لایه مرزی جلوگیری می کند.



سوال: h بدست آمده از آنالوژی برای دما ثابت است یا شار ثابت.

$$\underset{\text{سیال}}{C_f = \checkmark} \xrightarrow{\text{آنالوژی}} h = \checkmark \rightarrow \begin{cases} T_w = cte \\ q'' = cte \end{cases}$$

شرایط مرزی باید یکی باشند:

دما ثابت:

$y = 0 \qquad \frac{u}{u_\infty} = 0$

$T_w = cte \qquad \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = 0$

شار ثابت:

$$\theta = \frac{T - T_w}{\frac{q'' L}{k}}$$

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

$$q'' = -k \frac{q'' L}{k} \frac{\partial \theta}{L \partial \bar{y}} \rightarrow \boxed{\frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}}\Big|_{y=0} = -1}$$

[illegible] یکدیگر نیستند

بنابراین h محاسبه شده از ضریب اصطکاک، h برای حالت دما ثابت را می‌دهد

جریان درهم :

بررسی حالت :

- Forced
- Turbulent
- plate
- $T_w = cte$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(u_\infty - u)\,dy = \nu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

و داریم : معادله تجربی : $\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$

مشکل رابطه این است که این رابطه تنش روی دیوار را ∞ می‌دهد

$$\tau_w = \infty$$

بنابراین از آنالوژی استفاده می‌کنیم :

$Re > 5\times10^5$ درهم

$$\begin{cases} \dfrac{C_f}{2} = 0.0296\, Re^{-1/5} \\ \text{و} \\ \dfrac{C_f}{2} = \dfrac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} \end{cases}$$

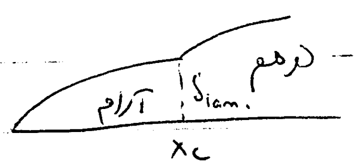
$$\rightarrow \frac{\tau_w}{\rho} = 0.0296\, Re^{-1/5}\, u_\infty^2$$

حال اگر u را در معادله انتگرالی قرار دهیم داریم :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}F(\delta) = 0.0296\, Re^{-1/2}\, u_\infty^2 \\ x = x_c \qquad \delta = \delta_{lamina} \end{cases}$$

شرط مرزی

یعنی : $Re = 5\times10^5 = \frac{\rho u_\infty x_c}{\mu}$



ضخامت $\delta_{laminar} = \frac{4.64\, x_c}{\sqrt{5\times10^5}}$

معادله فوق با شرط مرزی حل می‌گردد. در جریان درهم نیز با افزایش x ضخامت لایه افزایش می‌یابد. ولی ما حل نمی‌کنیم و از آنالوژی استفاده می‌کنیم

$$St \cdot Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

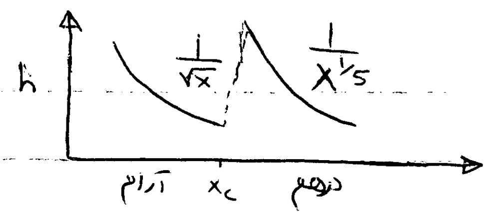
$$\frac{Nu}{Pr \cdot Re} \cdot Pr^{2/3} = 0.0296\, Re^{-1/5}$$

$$\boxed{Nu = 0.0296\, Re^{4/5} \cdot Pr^{1/3}}$$ → برای حالت اجباری (درهم) روی صفحه دما ثابت.

چون از آنالوژی استفاده شده برای دما ثابت است

1) $h \sim \frac{1}{x^{0.2}}$

2) $\bar{h} = \frac{5}{4} h_{x=L}$



* در جریان آرام h max در ابتدای صفحه است.

اگر جریان درهم باشد ممکن است در Re=500000 هم max شود. باید امتحان کنیم

برای حالت شار ثابت از آنالوژی نمی‌توان استفاده کرد.
برای شار ثابت از معادله زیر استفاده می‌کنیم:

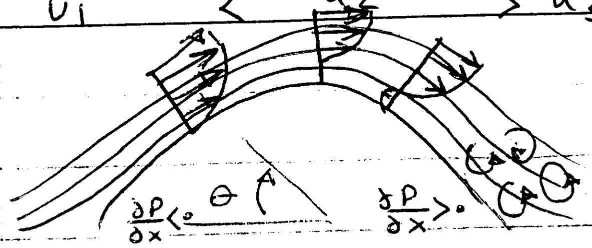
$$Nu\Big|_{q''=cte} = 1.04\, Nu\Big|_{T_w=cte}$$ (برای حالتی که هیچ رابطه‌ای نداشتیم

روابط دما ثابت را با .04 اختلاف بپذیریم

جریان از روی سطوح منحنی

$A_1 > A_2 < A_3$

$u_1 < u_2 > u_3$



$u_1 < u_2 > u_3$

$P_1 > P_2 < P_3$

نقطه جدایی :

$$\frac{\partial P}{\partial x}>0 \quad \text{و} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$$

شرط: $u=0$ $y=0$ ربطی به نقطه جدایی ندارد.

برگشت جریان بعد از نقطه جدایی ایجاد آشفتگی می‌کند که ضریب انتقال حرارت را زیاد می‌کند.

در نقطه جدایی h، min است.

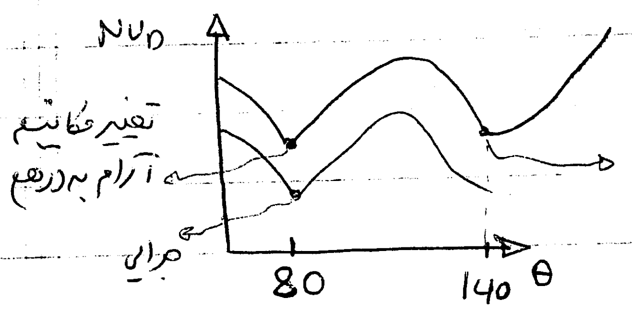
ولی بعد از آن یک جهش داریم.

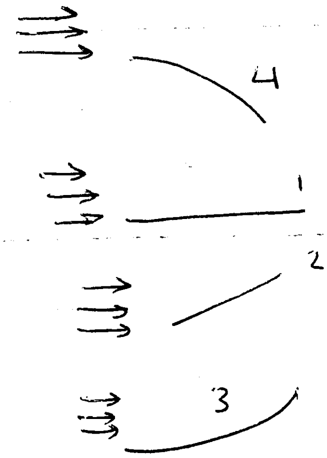
یعنی تا خود نقطه جدایی روند

طبیعی نزولی ادامه دارد

و پس از جدایی جهش داریم

(که آنی نیست)





$h_1 < h_2$: چون انحراف بیشتر است

$h_3 > h_2$: " " " "

در 4 ممکن است جدایی هم اتفاق بیفتد

بنابراین

$$h_4 > h_3 > h_2 > h_1$$

بررسی حالت جریان اجباری ، آرام ، صفحه دما ثابت و $Pr<<1$:
(فلزات مایع)

$$Nu = 0.332\, Re^{0.5}\, Pr^{1/3}$$ ← از این رابطه

نمی توان استفاده کرد چون این معادله در صورتی است که $Pr>>1$ را دارد
چون ما فقط از یک پروفایل سرعت استفاده کردیم یعنی فرض ما تابع
جزئی وارد که از سیالات باشد

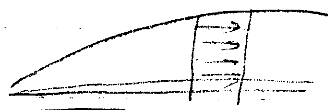
$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} \dots + \frac{d}{dx}\int_{\delta}^{\delta_t} \dots = \dots$$

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)\dots \qquad u = u_\infty$$

فرض : $\delta_t >> \delta$ ⇐

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t} u_\infty (T_\infty - T)\, dy = \dots$$

فرض خیلی غلط نیست .



در جریان فلزات مایع :

$$\boxed{Nu = 0.54\sqrt{Re\,Pr} = 0.54\sqrt{Pe}}$$

$$Pe = Re \cdot Pr$$

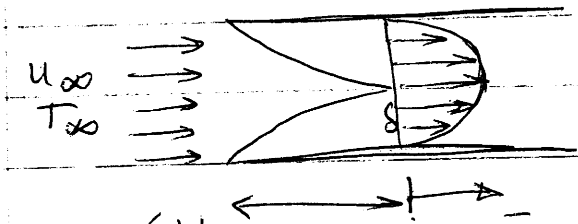
$$Nu = f(Pr)$$
$$= f(Re)$$
$$= f(Re, Pr)$$
$$= f(Pe)\ \checkmark$$ ← بهترین گزینه چون هم بیان می‌کند توان Re و Pr یکی است .

حث به پدیده فلز مایع در جرم نداریم به همین دلیل : $0.6 < Sc$ ، $\dots < Pr$

بررسی حالت : آرام ، درون لوله ، جریان اجباری

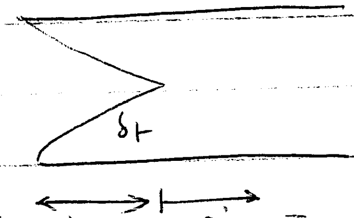
دما ثابت

شار ثابت



$x_{fd,h}$: طولی که لازم است تا جریان از نظر سیالاتی توسعه یافته شود

توسعه یافته
Fully Developed



$x_{fd,t}$: طولی که لازم است تا جریان از نظر حرارتی توسعه یافته شود.

توسعه یافته حرارتی

شرط توسعه یافتگی هیدرودینامیکی

u تابع r است و تابع x نیست.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{x_{fd,h}}{D}=0.05\, Re_D \qquad Re=\frac{\rho u D}{\mu}$$

به بیان دیگر شرط توسعه یافتگی $\boxed{\delta = R}$

شرط توسعه یافتگی حرارتی :

$\frac{\partial T}{\partial x}\neq 0$ چون در آن صورت تبادل حرارتی نداریم.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T_s-T}{T_s-T_m}\right]=0$$

T_m : دمای متوسط بالک ، دمای فنجان ، دمای توده ای ، دمای کپه ای.

$$\boxed{T_m = \frac{\int_0^R \rho u (2\pi r dr) C_p T}{C_p \int_0^R \rho u (2\pi r) dr}}$$

یعنی انرژی کل سیال

Tm: برابر است با $\int_0^R \rho u (2\pi r dr) C_p T$

$$\boxed{T_m = \frac{\int_0^R u r T dr}{\int_0^R u r dr}}$$

* Tm می‌تواند تغییر کند ولی فقط دمای بی‌بعد $\frac{T_s - T}{T_s - T_m}$ تغییر نمی‌کند.

* Ts همان $T(r=R)$ است

طول لازم برای توسعه یافتگی داریم:

$$\boxed{\frac{X_{fd,t}}{D} = 0.05 Re.Pr}$$

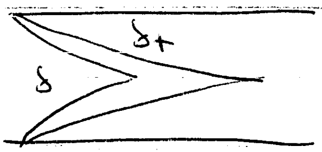
از $X_{fd,h}$ می‌توان همین رابطه

سه حالت داریم:

حالت ۱) جریان ابتدا از حالت سیالاتی توسعه یافته می‌گردد و سپس از لحاظ حرارتی.

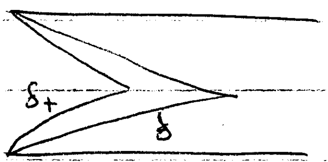
حالت ۲) ابتدا از لحاظ حرارتی سپس سیالاتی توسعه می‌یابد.

$x_{fd,t} > x_{fd,h}$



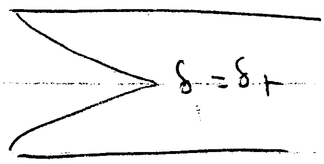
$Pr > 1$ مایعات

$x_{fd,t} < x_{fd,h}$



فلزات مایع $Pr << 1$

=



گازها $Pr = 1$

$$\boxed{\frac{X_{fd,t}}{X_{fd,h}} = Pr}$$

در ناحیه توسعه یافته حرارتی: $h = cte$

در ناحیه توسعه یافته حرارتی h مقدار ثابت است.
چون ضخامت لایه مرزی ثابت شده (h با ضخامت لایه مرزی نسبت عکس دارد)

$$\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left[\frac{T_s - T}{T_s - T_m}\right]}_{\neq f(x)} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{T_s - T}{T_s - T_m}\right] \neq f(x)$$

دمای دیواره تابع شعاع نیست (ولی ممکن است در طول تغییر کند).
دمای متوسط نیز تابع r نیست.
بنابراین Ts و Tm وابستگی شعاعی ندارند بنابراین با مشتق گیری داریم:

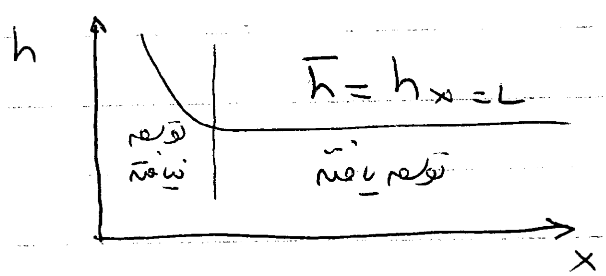
$$\frac{-\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R}}{T_s - T_m} \neq f(x) \qquad (۴)$$

تعریف h در لوله:

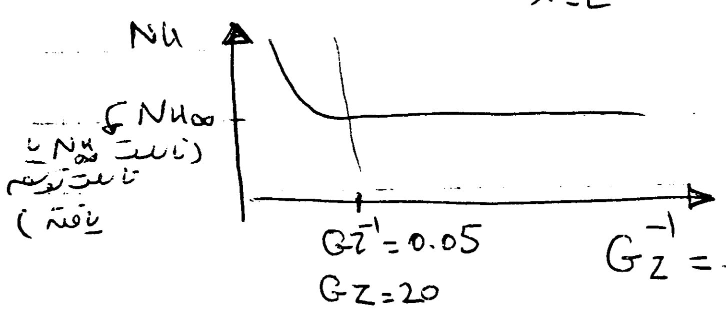
$$h = \frac{-k\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R}}{T_s - T_m}$$

$$\longrightarrow h \neq f(x)$$

در جریان درون لوله h به طول (در حالت توسعه یافته) بستگی ندارد.

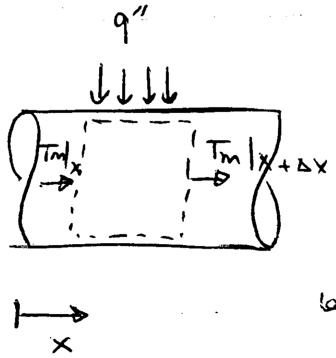


در حالت توسعه یافته مقادیر موضعی و متوسط با هم برابرند: $\bar{h} = h_{x=L}$



$$G_z^{-1} = \frac{x/D}{Re.Pr}$$

جابجایی در لوله ها :



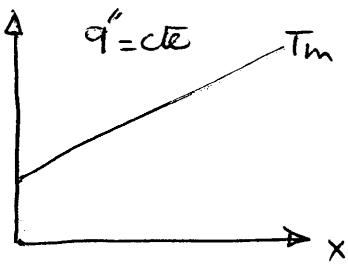
① $\underbrace{\dot m C_p dT_m}_{\text{کل انرژی دریافتی توسط سیال}} = \begin{cases} q''(P dx) & q''=cte \quad ② \\ h(T_s-T_m)(P dx) & T_s=cte \quad ③ \end{cases}$

در حالت شار حرارتی ثابت : $q''=cte$:

$1\ و\ 2 \rightarrow \frac{dT_m}{dx} = \frac{q''P}{\dot m C_p} = cte$

$\rightarrow T_m = T_{mi} + \frac{q''P}{\dot m C_p}x$

یعنی در جریان در لوله ها در حالت شار ثابت دمای توده به طور خطی تغییر می کند.
چه جریان توسعه یافته باشد و چه جریان توسعه یافته نباشد.
ربطی در همی و آرام بودن هم ندارد.



توجه : در حالت شار ثابت هم برقرار است ولی T_s ثابت نیست

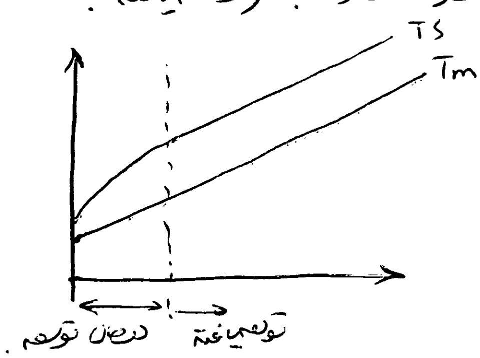
در نتیجه

$2\ و\ 3 \rightarrow q''=h(T_s-T_m) \rightarrow T_s-T_m = \frac{q''}{h}$

اگر توسعه یافته باشد h ثابت است و q'' هم که ثابت است بنابراین :

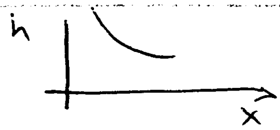
$$T_s - T_m = cte$$

$$\underbrace{\frac{dT_s}{dx} = \underbrace{\frac{dT_m}{dx}}_{\text{با شرط شار ثابت}} = cte}_{\text{با شرط شار ثابت و توسعه یافته}}$$



یعنی دمای سطح هم خطی تغییر می کند (موازی با T_m)
ولی در صورتیکه جریان توسعه یافته باشد.

ناحیه توسعه یافته :



$$T_s - T_m = \frac{q''}{h}$$

یعنی h کاهش می‌یابد.

$\xrightarrow[\text{در طول لوله}]{} h\downarrow \rightarrow T_s - T_m \uparrow$

ناحیه در حال توسعه اختلاف T_s و T_m در حال افزایش است (بطور غیرخطی).

شرط توسعه یافتگی :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T_s - T}{T_s - T_m}\right] = 0$$

$$\frac{\left[\frac{\partial T_s}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\right](T_s - T_m) - \left[\frac{\partial T_s}{\partial x} - \frac{\partial T_m}{\partial x}\right](T_s - T)}{(T_s - T_m)^2} = 0$$

فقط برای توسعه یافته $\rightarrow$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_s}{\partial x} - \left(\frac{T_s - T}{T_s - T_m}\right)\frac{\partial T_s}{\partial x} + \left(\frac{T_s - T}{T_s - T_m}\right)\frac{\partial T_m}{\partial x}$$

برای حالت توسعه یافته و شار ثابت $\rightarrow$

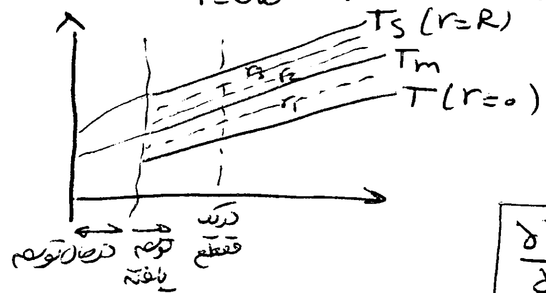
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_s}{\partial x}$$

که T عبارت است از دما در یک x و r :

$$T = T(x, r)$$

بنابراین در هر شعاع می‌توانیم دما بر حسب x را رسم کنیم.

$Nu = 4.36 \qquad q'' = cte$



* هر خط در یک شعاع رسم می‌گردد.

در هر مقطع لوله متوسط دماها T_m می‌باشد.

حفظ

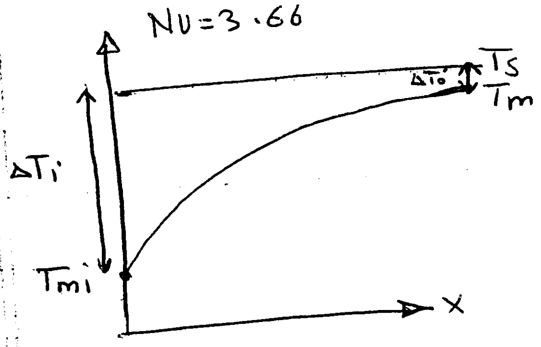
$$\boxed{\frac{\partial T_s}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_m}{\partial x} = cte}$$

در حالت دمای دیواره ثابت :

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} = 0$$

$T_s = cte$

$Nu = 3.66$



$$1 \text{ و } 3 \longrightarrow \frac{dT_m}{T_s - T_m} = \frac{hP}{\dot m C_p}\, dx$$

← h متوسط چون در حالت توسعه نیافته h تغییر می‌کند ولی در توسعه یافته ثابت است

$$-\ln(T_s - T_m) = \frac{\bar h P}{\dot m C_p}\, dx$$

* یعنی T_m به شکل اکسپوننشیال تغییر می‌کند .

ارتباط به مشتقات :

از شرط توسعه یافتگی $\longrightarrow \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial T_s}{\partial x} - \left(\dfrac{T_s - T}{T_s - T_m}\right)\dfrac{\partial T_s}{\partial x} + \left(\dfrac{T_s - T}{T_s - T_m}\right)\dfrac{\partial T_m}{\partial x}$

در حالت دما ثابت $\longrightarrow \boxed{\dfrac{\partial T}{\partial x} = \left(\dfrac{T_s - T}{T_s - T_m}\right)\dfrac{\partial T_m}{\partial x}}$ حفظ

$$\frac{dT_m}{T_s - T_m} = \frac{hP}{\dot m C_p}\, dx \xrightarrow{\int} \int_{T_{mi}}^{T_{mo}} \frac{dT_m}{T_s - T_m} = \int_0^L \frac{hP}{\dot m C_p}\, dx$$

$$\longrightarrow -\ln\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i} = \frac{h(\pi D)}{\rho u \frac{\pi D^2}{4} C_p} \cdot L$$

$$\ln\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i} + \frac{h}{\rho u C_p} \cdot \frac{4L}{D} = 0$$

$$\boxed{\ln\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i} + St\,\frac{4L}{D} = 0}$$ → معادله بی بعد برای دما ثابت لوله .

در حالت دما ثابت :

$$\underbrace{\dot{m}C_p(T_{mo}-T_{mi})}_{\text{کل انرژی دریافتی توسط سیال (که از دیواره آمده)}} = \bar{h}\underbrace{(\pi DL)}_{\text{سطح جانبی لوله}} \cdot \underbrace{LMTD}_{}$$

چون توزیع دما لگاریتمی است از متوسط لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

$$LMTD = \frac{\Delta T_o - \Delta T_i}{\ln \frac{\Delta T_o}{\Delta T_i}}$$

اگر مسئله ای جنبه محاسباتی داشت می‌توان از رابطه بالا یا رابطه ی بعد صفحه قبل استفاده نمود.

در حالت شار ثابت :

$$\dot{m}C_p(T_{mo}-T_i) = q''\pi DL$$

واحد $q'' = \frac{W}{m^2}$

محاسبه Nu در حالت شار ثابت :

چون پروفایل سرعت در سیالات معین شده نیازی به نوشتن معادله مومنتوم نیست.

آرام ، توسعه یافته : $\frac{v}{v_m} = 1-\left(\frac{r}{R}\right)^2$

$$\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} + \vec{v}\cdot\nabla T = \alpha\nabla^2 T + \cancel{\frac{\dot{q}}{\rho C_p}} + \cancel{\frac{\Phi}{\rho C_p}}$$

steady state مسئله است.

$V_r = 0$

$V_x \neq 0$

$V_\theta = 0$

صفر (منبع حرارتی نداریم) واکنش هم نداریم.

سرعت خیلی بالا نیست در سیال هم ویسکوز نیست

در راستای حرکت Convection اهمیت داریم و در راستای غیر حرکت Conduction :

در راستای x Convection و در راستای r Conduction اهمیت دارد.

$$V_x\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

در حالت

اگر شار ثابت باشد $\longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_m}{\partial x} = cte$

یعنی در حالت شار ثابت با معادله ODE سروکار داریم.

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$$U_m \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \underbrace{\frac{\partial T_m}{\partial x}}_{\text{ثابت}} = \frac{\alpha}{r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

یعنی این معادله یک معادله دیفرانسیل معمولی است که فقط تابعیت r دارد.
باید دوبار انتگرال بگیریم.

$$r\frac{dT}{dr} = \underbrace{\int \frac{U_m}{\alpha}\left(\frac{\partial T_m}{\partial x}\right) r\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] dr}_{f(r)} + C_1$$

$$T = \int \frac{f(r)}{r}\, dr + C_1 \ln r + C_2$$

توزیع دما:

$$\boxed{T = g(r) + C_1 \ln r + C_2}$$

با اعمال شرط مرزی C_1 و C_2 بدست می‌آید:

$$B.C \left| \begin{array}{ll} r=0 & \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (\text{تقارن}) \text{ : بدیهی} \\ r=R & q'' = -k\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=0} \end{array} \right.$$

برای h:
به وفایل دما را داریم صورت بدست آید

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R}}{T_s - T_m}$$

برای مخرج: T_s که آنجا که $r=R$ است $T_s = T(r=R)$

و برای T_m داریم:

$$T_m = \frac{\int_0^R u r T dr}{\int_0^R u r dr}$$

$$\longrightarrow h = \frac{48 K}{11 D} \longrightarrow \frac{hD}{K} = \frac{48}{11}$$

$$\boxed{Nu = \frac{hD}{k} = \frac{48}{11} = 4.364}$$

در حالت ثابت $q''=$ در حالت توسعه یافته:
با شرط:
① جریان آرام
② توسعه یافته
③ درون لوله
④ شار ثابت

محاسبه Nu در حالت دما ثابت:

$$U_m \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T}{\partial r}\right]$$

در این حالت دیگر $\frac{\partial T}{\partial x}$ ثابت نیست بنابراین معادله دیفرانسیل PDE با ضرایب غیرخطی با روش های عددی یا تقریبی حل می‌گردد:

$$B.C \begin{cases} \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \\ T(r=R) = T_s \end{cases}$$

با حل داریم:

$$\boxed{Nu = 3.66}$$

- جریان آرام
- توسعه یافته
- درون لوله
- دمای دیواره ثابت.

جریان درهم درون لوله:

از تشابه استفاده می‌کنیم عدد St را به Cf ارتباط دهیم (و با روابط تجربی). درنتیجه داریم:

رابطه تجربی: $Nu = 0.023\, Re^{0.8}\, Pr^{n}$

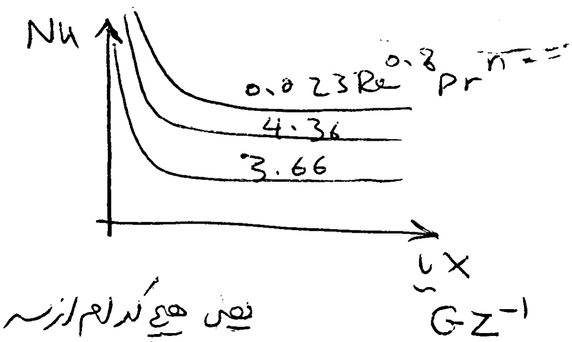
$$\begin{cases} n = 0.4 & \text{Heating} \\ n = 0.3 & \text{Cooling} \end{cases}$$

① جریان درهم و آرام در ناحیه توسعه یافته:

درهم $\bar{h} = h_{x=L}$

آرام $\bar{h} = h_{x=L}$

یعنی تابعیت با x ندارد.



یعنی هیچ کدام از سه حالت Nu تابع x نیست.

چرا در جریان آرام لوله آنالوژی رینولدز کالبرن صادق نیست؟

$$St . Pr^{2/3} = C_f/2$$

$$\frac{Nu}{Re\,Pr} . Pr^{2/3} = \frac{8}{Re}$$

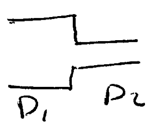
$$Nu = 8\,Pr^{1/3}$$

ولی ما داریم $Nu = 3.66$

یعنی اگر آنالوژی صادق باشد به تناقض می رسیم.

در حالت شار ثابت هم که بحث آنالوژی نداریم.

سؤال:



$$D_1 = 3D_2$$

$$\frac{h_2}{h_1} = ?$$

اگر جریان آرام:

$$Nu = 3.66 \text{ یا } 4.36$$

$$h \sim \frac{1}{D}$$

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{D_1}{D_2} = 3}$$

اگر هم جریان درهم:

$$Nu \sim Re^{0.8}$$

$$h \sim D^{-0.2} . u^{0.8}$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \left[\frac{D_2}{D_1}\right]^{-0.2} \left[\frac{V_2}{V_1}\right]^{0.8}$$

ولی معادله پیوستگی می گوید:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

$$\longrightarrow \frac{h_2}{h_1} = \left[\frac{D_2}{D_1}\right]^{-0.2} \left[\frac{D_1}{D_2}\right]^{1.6} \longrightarrow \boxed{\frac{h_2}{h_1} = \left[\frac{D_1}{D_2}\right]^{1.8}}$$

* در جریان آرام اگر قطر لوله را تغییر دهیم rate (شار Flux) تغییر نمی‌کند:

$$Q = h(\pi D L)\Delta T$$

چون h متناسب است با $1/D$ بنابراین rate (Q) مستقل از D می‌شود.

سؤال: اگر $\Delta P_2 = 2\Delta P_1$

h چه تغییر می‌کند: $\frac{h_2}{h_1} = ?$

اگر جریان درهم باشد از آنالوژی استفاده می‌کنیم: $St \cdot Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$

$$C_f \sim \Delta P$$

$$\longrightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{C_{f2}}{C_{f1}} = \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1}$$

اگر جریان آرام باشد آنالوژی برقرار نیست و باید بررسی کنیم

$$h \sim \frac{1}{D}$$

و h تابع u نیست.

روش‌های تغییر ΔP:

۱) تغییر دبی در قطر ثابت: $h_2 = h_1$ در این حالت — چون قطر ثابت است

روابط هاگن پوازی: $Q = \frac{\pi \cdot \Delta P \cdot d^4}{128 \mu L}$ I

$$\longrightarrow u = \frac{\Delta P \cdot d^2}{32 \mu L} \quad \text{II}$$

۲) تغییر قطر در دبی ثابت: $\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$

بنابراین در حالت ۲: $\frac{d_1}{d_2} = \sqrt[4]{\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1}} = \sqrt[4]{2}$

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{D_1}{D_2} = \sqrt[4]{2}}$$

۳) تغییر سرعت در قطر ثابت: یعنی همان حالت یک است

$$h_2 = h_1$$

۴) تغییر قطر در سرعت ثابت: از رابطه II: $\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{2}$$

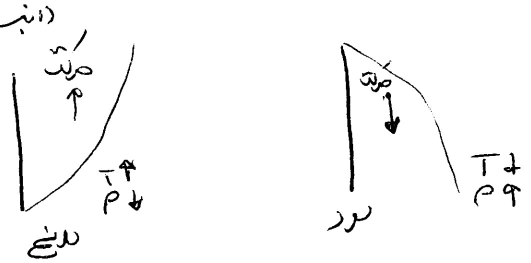
* اگر از صورت مسئله معلوم نباشد که علت تغییر فشار چیست بنابراین تغییر ΔP در اثر تغییر سرعت یا دبی قرار می‌دهیم که در این صورت h تغییر نمی‌کند.

* اگر در مسئله ای بگویند زبری نسبی لوله دو برابر شده، h چگونه تغییر می‌کند؟
در جریان آرام اثری ندارد.
در جریان درهم موجب ازدیاد h می‌شود ولی دو برابر نمی‌شود فقط می‌توان گفت که زیاد می‌شود.

جابجایی آزاد: Natural Convection

$\Delta T \rightarrow \Delta \rho \rightarrow \Delta \rho g \rightarrow$ حرکت $V \neq 0$

اگر سیال تراکم پذیر باشد
(انبساط پذیر باشد)



برای انبساط پذیری:

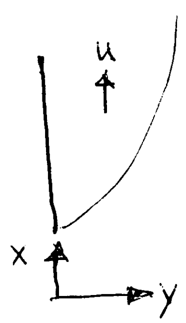
$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

Ideal Gas: $\boxed{\rho = \frac{PM}{RT}}$, $\cancel{\left[\frac{-PM}{RT^2}\right]}$

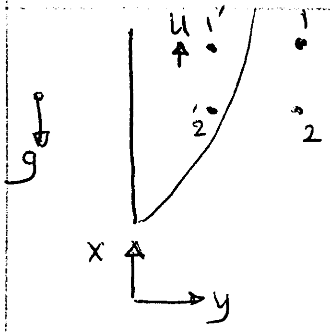
$$\beta = -\frac{1}{\frac{PM}{RT}} \cdot \left[\frac{-PM}{RT^2}\right]$$

برای گاز ایده آل β عکس دما می‌باشد. $\boxed{\beta = \frac{1}{T}}$

توجه (دما) باید مطلق.



در راستای x :



$P_1 = P_1'$ و $P_2 = P_2'$

معادله مومنتوم در راستای x

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - g$$

در راستای y حرکت قابل توجه نداریم : (v ناچیز است).

در راستای y :

$$v=0 \qquad \cancel{v\frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}} = \nu \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \rightarrow P \neq f(y)$$

$\begin{cases} P_1 = P_1' \\ P_2 = P_2' \end{cases} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}$ را می‌توان بیرون لایه مرزی بدست آورد.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_\infty g$$

از جمع دو معادله در راستای x و y $\longrightarrow$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} g$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{1}{\rho}\frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T}$$

$$\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} = \beta (T - T_\infty)$$

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) & \text{معادله مومنتوم ;} \\ u\dfrac{\partial T}{\partial x} = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} & \text{معادله انرژی ;} \end{cases}$$

معادلات مومنتوم و انرژی مستقل نیستند.

* باید β ، g و $T - T_\infty$ وجود داشته باشد

اگر معادلات را بی بعد کنیم :

$$\bar{u} = \frac{u}{U_0} , \quad \bar{y} = \frac{y}{L} , \quad \bar{x} = \frac{x}{L} , \quad \bar{T} = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

برای بی بعد کردن یک سرعت گرفتیم

$$\bar{u} U_0 \frac{U_0 \partial \bar{u}}{L \partial \bar{x}} = \nu \frac{U_0 \partial^2 \bar{u}}{L^2 \partial \bar{y}^2} + g\beta (T_w - T_\infty) \bar{T}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \underbrace{\frac{\nu}{U_0 L}}_{\frac{1}{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{g\beta \Delta T L}{U_0^2} \bar{T}$$

$$\frac{g\beta\Delta T L}{U_0^2}\cdot\frac{L^2}{L^2}\cdot\frac{\nu^2}{\nu^2}=\frac{\frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}}{Re^2}$$

$$Gr=\frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu}$$

$$\bar{U}\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}=\frac{1}{Re}\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\bar{y}^2}+\underbrace{\frac{Gr}{Re^2}\bar{T}}$$

Natural با Forced وجه تمایز

$\frac{Gr}{Re^2}$ یعنی داشتن و نداشتن جابجایی آزاد

۱) معیار $\frac{Gr}{Re^2}$

$$\frac{Gr}{Re^2}=\begin{cases}\gg 1 & \text{Natural Convection} \\ \simeq 1 & \\ \ll 1 & \text{Forced :}\end{cases}$$

جابجایی آزاد غالب است.

هر دو مکانیسم

جابجایی اجباری غالب است

اگر معادله انرژی را بی بعد کنیم:

$$\bar{U}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}}=\frac{1}{Re\cdot Pr}\cdot\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2}\quad \text{I}$$

و داریم:

$$Nu=-\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}}\Big|_{\bar{y}=0}\quad \text{II}\quad\longleftarrow\quad h=\frac{-k\frac{\partial T}{\partial y}}{T_w-T_\infty}$$

یعنی Nu به بی بعد پروفایل دما بستگی دارد.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{II}\rightarrow & Nu=f(\bar{T})\\ \text{I}\rightarrow & \bar{T}=f(\bar{U},Re,Pr)\\ \text{بی بعد معادله مومنتم}\rightarrow & \bar{U}=f(Re,Gr)\end{array}\right\}\longrightarrow Nu=f[Re,Pr,Gr]$$

وقتی هر دو مکانیسم را داریم.

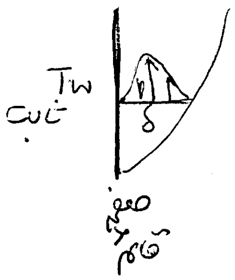
$$\frac{Gr}{Re^2}\gg 1\Rightarrow Nu=f[Gr,Pr]$$

هر دو $\quad\simeq 1\Rightarrow Nu=f[Re,Pr,Gr]$

اجباری $\quad\ll 1\Rightarrow Nu=f[Re,Pr]$

Gr نقش Re در جابجایی آزاد را دارد.

$$Gr = \frac{\text{نیروهای شناوری}}{\text{نیروهای ویسکوز}}$$



حالت:

- Natural
- vertical plate
- laminar
- $T_w = cte$

روش Von-karman:

حدس پروفایل سرعت و دما:

$$\frac{u}{u_x} = a + by + cy^2 + dy^3 \qquad T = a + by + cy^2$$

$$\begin{cases} y=0 \begin{cases} u=0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{g\beta\Delta T}{\nu} \end{cases} \\ y=\delta \begin{cases} u=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases} \end{cases}$$

* شرط مرزی ها معلوم هستند.

برای شرط چهارم: از معادله مومنتوم

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T-T_\infty)$$

$y=0$

$$y=0 \begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ T=T_w \end{cases} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-g\beta(T_w-T_\infty)}{\nu}$$

$$\frac{u}{u_x} = f\left[g, \beta, \Delta T, \nu, \delta, u_x\right] \times \frac{y}{\delta}\left[1-\frac{y}{\delta}\right]^2$$

u_x طوری انتخاب می شود که این ضریب یک شود.

بنابراین پروفایل سرعت:

$$\frac{u}{u_x} = \frac{y}{\delta}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2$$

چون در $y=0$ و $y=\delta$ صفر است بنابراین باید دارای سرعت max باشیم:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \boxed{y_{max} = \frac{\delta}{3}}$$

۵.

$$\begin{cases} T = a + by + cy^2 \\ y = 0 \quad T = T_w \\ y = \delta \quad T = T_\infty \\ y = \delta \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

با حل داریم:

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{y}{\delta}\right]^2$$

چون تنها با اختلاف سرعت داریم که اختلاف دما داشته باشیم.

در جابجایی آزاد داریم $= \frac{\delta}{\delta_t}$

1) 1 √   2) $1<$ 3) $1>$ 4) بستگی به Pr.

ادامه بحث جابجایی آزاد

$$\frac{v}{v_x} = \frac{y}{\delta}\left[1-\frac{y}{\delta}\right]^2$$

$$\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty} = \left[1-\frac{y}{\delta}\right]^2$$

$$h = \frac{-k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}}{T_w-T_\infty} = \frac{-k[2]\left[-\frac{1}{\delta}\right]\left[1-\frac{y}{\delta}\right]_{y=0}(T_w-T_\infty)}{T_w-T_\infty}$$

$$= \frac{2k}{\delta}$$

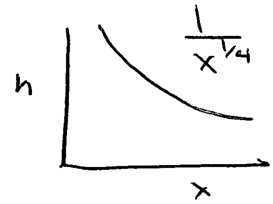
$$\rightarrow \boxed{Nu = \frac{hx}{k} = a\,Gr_x^{1/4}\cdot Pr^n}$$

$$\boxed{\bar{h} = \frac{4}{3}h_{x=L}}$$

جابجایی آزاد، جریان آرام، صفحه قائم و دمای ثابت در دیواره.

$$Nu \sim x^n \rightarrow n=\frac{3}{4}$$

بنابراین در جابجایی آزاد هم :



* لیوان چای در زمین زودتر از کره ماه خنک می‌شود چون Gr در زمین بیشتر است.

در حالت : جابجایی آزاد، آرام، صفحه قائم و شار حرارتی ثابت در دیواره.

$$Gr = \frac{g\beta(T_w-T_\infty)x^3}{\nu^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} q'' = h(T_w-T_\infty) \\ q'' = cte \\ h \text{ متغیر است} \end{array}\right\} \rightarrow T_w \text{ متغیر است}$$

* چون در طول صفحه ضخامت لایه مرزی ثابت است

T_w تغییر می‌کند یعنی علاوه بر طول باید دمای هر نقطه را هم بدانیم بنابراین Gr برای حالت شار ثابت مناسب نیست بنابراین از Gr اصلاح شده استفاده می‌کنیم.

گراشف اصلاحی $Gr^* = Gr.Nu = \frac{g\beta \Delta T x^3}{\nu^2} . \frac{hx}{k}$

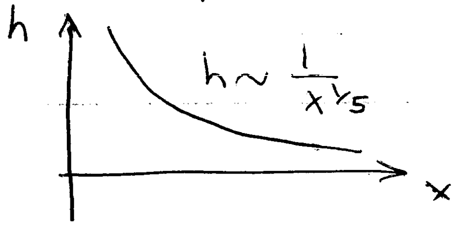
$Gr^* = \frac{g\beta q'' x^4}{k\nu^2}$. حاصلضرب $h\Delta T$ ثابت است.

Gr^* در جابجایی آزاد و در حالت شار ثابت استفاده می گردد.

$$\boxed{Nu = a\, Gr^{*\,1/5} . Pr^n}$$

در حالت آزاد، آرام، شار ثابت
صفحه قائم

$$\bar{h} = \frac{5}{4} h_{x=L}$$



حالت جابجایی آزاد، درهم، صفحه قائم، دما ثابت.

$$\boxed{Nu = a\, Gr^{1/3} . Pr^m} \rightarrow \bar{h} = (1) h_{x=L}$$

حالت جابجایی آزاد، درهم، صفحه قائم، شار ثابت

$$\boxed{Nu = a\, Gr^{*\,1/4} . Pr^m}$$

$$\bar{h} = h_{x=L}$$

* در جریان توسعه یافته درون لوله و این دو حالت $\bar{h} = h_{x=L}$

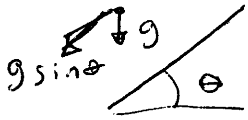
شرط درهم شدن:

$Ra = Gr.Pr$ رایلی

در گازها Pr حدود یک و Ra نزدیک Gr است پس برای رژیم جریان از Ra استفاده می کنیم.

$$Ra > 10^9$$

صفحه مایل:



هرچه صفحه از حالت قائم دورتر شود h کاهش می‌یابد.
چون Gr کاهش می‌یابد.

روابط ساده برای هوا:

$$Nu = a\,Gr^{1/4}\cdot Pr^{n}$$

$$Nu = \frac{hL}{k}, \qquad Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$$

جریان آرام: $\longrightarrow h \sim \left[\frac{\Delta T}{L}\right]^{1/4}$

$$\boxed{h = k_1\left[\frac{\Delta T}{L}\right]^{1/4}}$$

$$Nu = a\,Gr^{1/3}\cdot Pr^{m}$$

$$Nu = \frac{hL}{k}, \qquad Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$$

جریان درهم: (برای هوا) $\longrightarrow$ $\boxed{h = k_2\,\Delta T^{1/3}}$

$T_1 > T_2$

T_1 سبک - گرم

T_2 سنگین - سرد

stable

مکانیسم Conduction

$T_1 < T_2$

سنگین - سرد

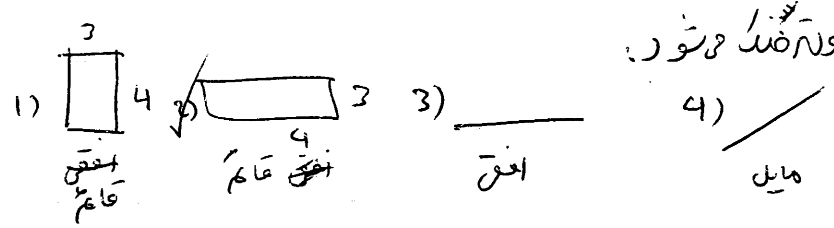
سبک - گرم

مکانیسم Convection ← هر سه مکانیسم هست و Convection حاکم است.

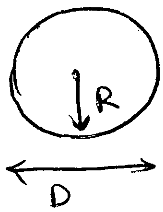
بیشترین تبادل حرارت سطح گرم از وجه بالا می‌باشد. ← سطح گرم ______

بیشترین تبادل حرارت از وجه پایین. ← صفحه سرد ______

در کدام حالت صفحه گرم زودتر خنک می‌شود:



جابجایی آزاد در کره ها:



هوای ساکن

اختلاف دما کم باشد ← مکانیسم هدایت است.

اختلاف دما زیاد است ← " جابجایی است.

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{4k\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$: ΔT کم ← هدایت

$r_1 = R$ (دلخواه (دور از کره))

$r_2 = r$

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{4k\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)} = \frac{4k\pi r R \Delta T}{r - R}$$

$$q = \frac{kr}{(r-R)R}(4\pi R^2) \cdot \Delta T$$

$$h = \frac{kr}{(r-R)R} \longrightarrow \frac{hR}{k} = \frac{r}{r-R}$$

$$\frac{hD}{k} = \boxed{Nu = \frac{2r}{r-R}}$$

$$r \longrightarrow \infty$$

$$\boxed{Nu = 2}$$

اگر هوای اطراف که به حرکت درآید : حرکت به صورت طبیعی باشد

حرکت اجباری

$$Nu = 2 + \begin{cases} a\,Gr^n . Pr^m \\ a . Re^n . Pr^m \end{cases}$$

جابجایی طبیعی

حرکت سیال اطراف اجباری باشد.

اگر چیزی که کنار هم باشند ممکن است Nu یا Sh ای کمتر از ۲ باشد.

جهت جریان در اطراف پنجره در تابستان و زمستان:

داخل　　بیرون

شیشه

تابستان

دمای بیرون بیشتر از داخل

داخل　　بیرون

شیشه

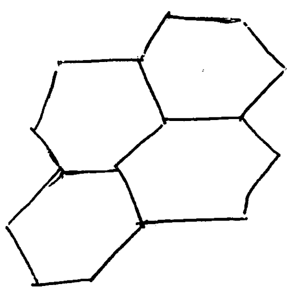
زمستان

دمای داخل بیشتر از بیرون

* در زمستان شیشه برای هوای بیرون سطح گرم است و برای هوای داخل یک سطح سرد

* اگر در تابستان و زمستان دمای اتاق 20 باشد چون جهت حرارت از اتاق در زمستان از داخل به بیرون است و در تابستان برعکس بنابراین احساس سرما در زمستان بیشتر است.

حاصلضرب $V\Delta T$ تعیین کننده احساس سرما و گرما است.



* جریان هوای گرم و سرد با هم مخلوط نمی‌شوند در شش وجهی بنارد در یک شش وجهی مثل یک کانال هوای گرم حرکت می‌کند و در شش وجهی دیگر هوای سرد

خلاصه روابط جابجایی

Forced

$$Nu = f(Re, Pr)$$

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\frac{\delta_t}{\delta} = Pr^{-1/3}$$

$y = 0$: $u = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $T = T_w$, $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

$y = \delta$: $u = u_\infty$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; $T = T_\infty$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

$$h = \frac{3k}{2\delta_t}$$

$\bar{h} = 2h_{x=L}$ صفحه - آرام

$h \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ آرام - صفحه

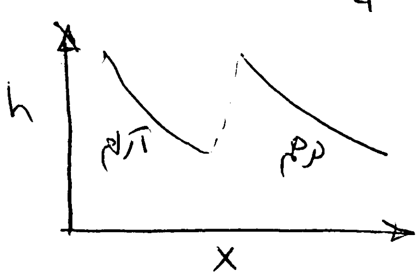
$T_w \sim \sqrt{x}$ آرام - شار ثابت

$\overline{T_w - T_\infty} = \frac{2}{3}(T_w - T_\infty)_{x=L}$

$St \cdot Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$ آنالوژی رینولدز کالبرن (همواره بجز آرام لوله).

صفحه آرام فلز مایع $\longrightarrow Nu = f(Pe)$

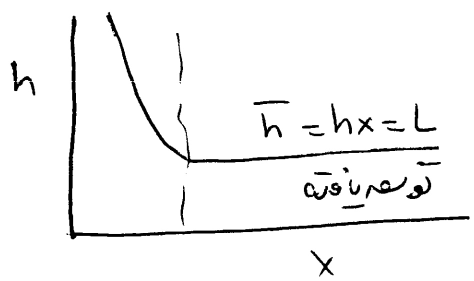
صفحه درهم : $\bar{h} = \frac{5}{4} h_{x=L}$ ، $h \sim \frac{1}{x^{1/5}}$

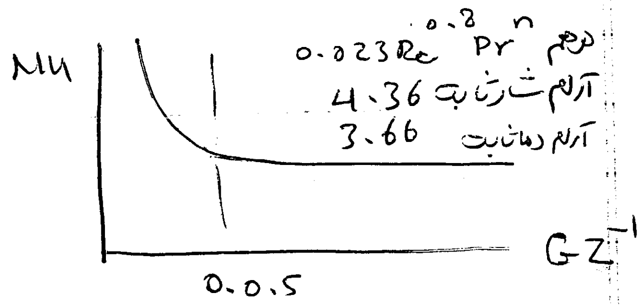


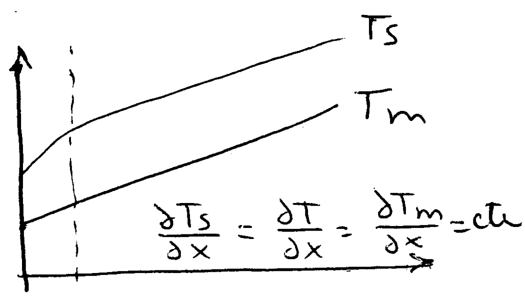
لوله

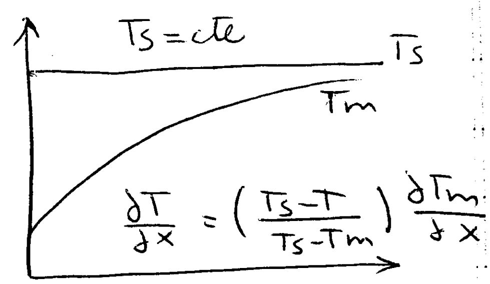
$$\begin{cases} \dfrac{X_{fd,h}}{D} = 0.05\, Re_D \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{شرط توسعه یافتگی} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{X_{fd,t}}{D} = 0.05\, Re\, Pr \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{T_s - T}{T_s - T_m}\right] = 0 \quad \text{شرط توسعه یافتگی} \end{cases}$$









آزاد

$$Nu = f[Gr, Pr]$$

معیار مقایسه همرفت و آزاد : $\dfrac{Gr}{Re^2}$ $\begin{cases} \gg 1 & \text{آزاد} \\ \approx 1 & \text{درهم است} \\ \ll 1 & \text{اجباری} \end{cases}$

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$$

$y = 0 \;\Big|\; u = 0,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{g\beta\Delta T}{\nu} \neq 0$ (مهم)

Gr : چون نقش Re

Ra : " " Pe

$y = \delta \;\Big|\; u = 0$ (مهم)$,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$\frac{u}{u_x} = \frac{y}{\delta}\left[1-\frac{y}{\delta}\right]^2$$

$$y_{max} = \frac{\delta}{3}$$

$$\frac{\delta_t}{\delta} = 1$$ همواره (مستقل از Pr)

$\bar{h} = \frac{4}{3} h_{x=L} \rightarrow Nu \sim Gr^{1/4}$ آرام-آزاد-دما ثابت

" = 1 " $\sim Gr^{1/3}$ درهم " "

" = $\frac{5}{4}$ " $\sim Gr^{1/5}$ آرام-آزاد-شار ثابت

" = 1 " $\sim Gr^{1/4}$ درهم " "

در شار ثابت از Gr^* اصلاحی استفاده می‌شود.

$$Gr^* = Gr \cdot Nu = \frac{g\beta q'' L^4}{k\nu^2}$$

صفحه مایل

$$g \longrightarrow g\sin\theta < g$$

$T_1 > T_2$ — Conduction: $\frac{\partial T}{\partial x} < 0$ و $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$ (T_1 بالا، T_2 پایین)

$T_1 < T_2$ — Convection: $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$ و $\frac{\partial \rho}{\partial x} < 0$

$$\underset{\text{کره}}{Nu} = \underbrace{2}_{\text{سهم هدایت}} + \begin{cases} a\,Gr^m Pr^n \\ a\,Re^m Pr^n \end{cases}$$

Radiation : تابش امواج الکترومغناطیس که با سرعت نور سیر می‌کنند. مکانیسم انتقال حرارت که به محیط مادی نیاز ندارد.

$C = \lambda \nu$

سرعت نور ، طول موج ، فرکانس

$$u_\lambda = \frac{8\pi h \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1}$$ ← از ترمودینامیک آماری

چگالی انرژی در واحد حجم در واحد طول موج $\frac{J}{m^3 \cdot m}$

ثابت پلانک : $h = 6.62\times 10^{-24}\ J/s$

ثابت بولتزمن $K = 1.38\times 10^{-23}\ \frac{J}{mol\,°K}$

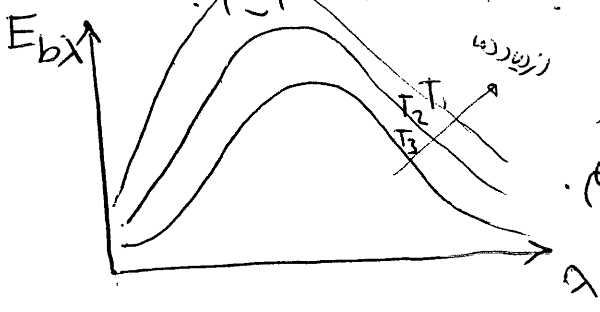
قانون پلانک :

$$E_{b\lambda} = \frac{u_\lambda \overset{\text{سرعت}}{C}}{4}$$

توان گسیل یک جسم سیاه در واحد طول موج $\frac{W}{m^2 \cdot m}$ واحد طول موج ، در واحد سطح

$$E_{b\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2/\lambda T}-1}$$

توان گسیل جسم سیاه تابع دما و طول موج که اگر آن را رسم کنیم :



* در هر دمای طول موجی وجود دارد که در آن طول موج حداکثر تابش را داریم.
* هرچه این دما زیاد می‌شود طول موج max کمتر می‌شود.

$$\boxed{\lambda_{max} \cdot T = 2897.6\ \mu \cdot °K}$$: قانون وین ←

بنابر در هر طول موج تابش داریم بنابراین E_b (توان گسیل جسم سیاه) :

$$E_b = \int_0^\infty E_{b\lambda}\, d\lambda \quad \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

با انتگرال گیری فقط تابعیت T می‌ماند :

$$\boxed{E_b = \sigma T^4}$$ قانون استفان بولتزمن

ثابت استفان بولتزمن $\sigma = 5.66\times 10^{-8}\ \frac{W}{m^2 \cdot °K^4}$

هر جسم متناسب با توان چهارم دمای مطلق خود انرژی گسیل می‌کند.

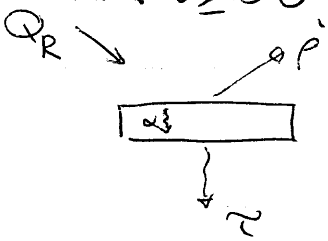
اجسام کسری از E_b را گسیل می‌کنند : Emissivity : ε ضریب گسیل

$$\boxed{\varepsilon = \frac{E}{E_b}} \qquad 0<\varepsilon<1$$

اجسام سیاه $\varepsilon \to 1$

اجسام براق $\varepsilon \to 0$

تابش:
- هنگام دادن تابش
- هنگام گرفتن تابش : رفتار جسم در مقابل تابش رسیده.



جسم یا تابش رسیده را جذب می‌کند یا عبور می‌دهد و یا منعکس می‌کند :

کسری از تابش که جذب می‌شود : α

" " منعکس " : ρ

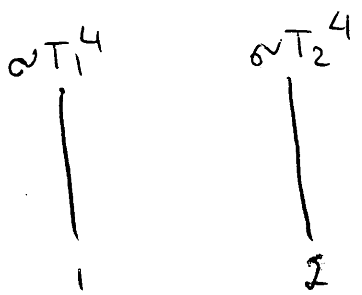
" " عبور " : τ

$$\alpha+\rho+\tau=1$$

* ε هنگام دادن و α، ρ و τ هنگام ~~دادن~~ گرفتن تشعشع.

$$\boxed{\text{برای اجسام سیاه و خاکستری} : \alpha=\varepsilon}$$

* برای اکثر اجسام α و ε متناسب هستند یعنی ε بالا معادل α بالا ولی ε هنگام دادن تابش و α هنگام گرفتن تابش است.



چه عاملی باعث می‌شود Q تبادل کمتر از $\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4$ است.

$$Q = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{R}$$

حداکثر تبادل ممکنه است.

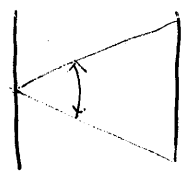
R: مقاومت

* ~~نحوه~~ مقاومت
  - ← نحوه قرار گرفتن سطوح نسبت به هم: مقاومت فضایی
  - ← غیرسیاه بودن سطوح: مقاومت سطحی

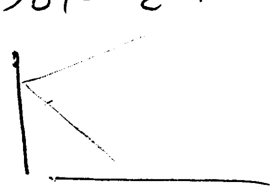
مقاومت فضایی:

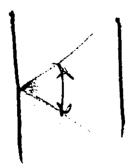
ضریب شکل: F_{ij}: کسری از تابش که سطح i را ترک کرده و بر سطح j فرود می‌آید.

(بستگی به وضعیت قرار گرفتن صفحات)



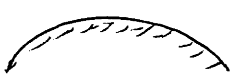
* اگر دو صفحه مساحت ∞ داشتند تمام تشعشعی که یک سطح را ترک می‌کرد به سطح دوم می‌رسید.



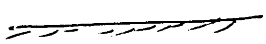


کاو:

کوژ:

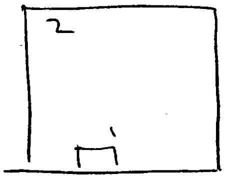


$F_{ii} = 0$



$F_{ii} = 0$

$F_{ii} \neq 0$



جسم یک داخل سطح دو : $F_{12} = 1$

روابط میان ضرایب شکلی :

$n =$ عده سطوح

$n^2 =$ عده ضرایب شکلی

$$\begin{matrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \cdots & F_{2n} \\ \vdots & & & & \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & \cdots & F_{nn} \end{matrix}$$

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} + \cdots + F_{1n} = 1$$

(برای هر سطح) $\sum F_{ij} = 1$ ← n معادله بدست می‌آید

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

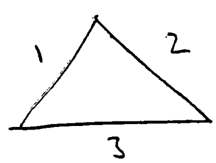
تعداد معادلات : $\binom{n}{2}$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

جمع روابط $= n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

عده ضرایب شکلی به طریق غیر از حل معادلات باید معلوم شوند $= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

مثال :



$n = 3$

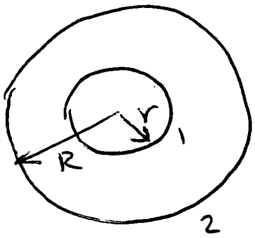
$n^2 = 9$

عده معادلات $= \frac{3\times4}{2} = 6$

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{3\times2}{2} = 3$$

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

مثال:



F_{11} F_{12}

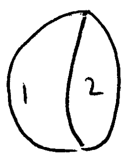
F_{21} F_{22}

$$\begin{cases} F_{11}+F_{12}=1 \longrightarrow \boxed{F_{12}=1} \\ F_{21}+F_{22}=1 \\ A_1F_{12}=A_2F_{21} \longrightarrow F_{21}=\dfrac{A_1}{A_2}=\left[\dfrac{r}{R}\right]^2 \\ F_{11}=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow F_{22}=1-\frac{A_1}{A_2}$$

$$F_{22}=1-\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

مثال: ضریب شکل نیمکره (۱) به دایره عظیمه (۲).



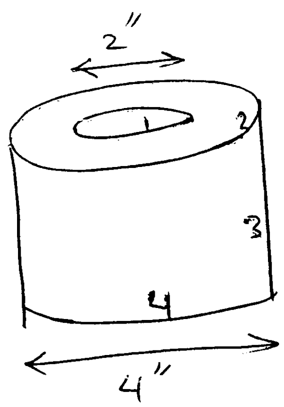
$F_{12}=?$

$$F_{11}+F_{12}=1$$

$$F_{21}+\cancel{F_{22}}^{\,0}=1 \longrightarrow F_{21}=1$$

$$F_{12}=\frac{A_2}{A_1}=\frac{\pi R^2}{2\pi R^2}=\frac{1}{2}$$

مثال:



$F_{41}=0.04$

$F_{13}=?$

F_{13} در نمودار وجود ندارد ← رابطه تقابل

ΣF_{ij}

$$F_{13}=1-[\cancel{F_{11}}^{\,0}+\cancel{F_{12}}^{\,0}+F_{14}]$$

$$\hookrightarrow F_{14}=\frac{A_4}{A_1}F_{41}$$

$$F_{13}=\frac{A_3}{A_1}F_{31}$$

$$F_{14}=\left[\frac{4}{2}\right]^2\times 0.04$$

$$=0.16$$

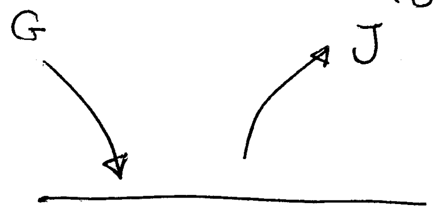
$$\longrightarrow F_{13}=1-0.16=0.84$$

حداکثر تبادل بین دو سطح

$$Q = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{1/A_1 F_{12}}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{A_i F_{ij}}}$$ مقاومت فضایی تابش

تابش بین اجسام غیرسیاه : (مقاومت سطحی).



سطح غیرسیاه

G : رادیوسیتی

J : تابش دهی

G : میزان حرارتی که به طریق تابش وارد سطح می گردد. (میزان حرارت وارد شده بر واحد سطح).

J : میزان انرژی که به طریق تابش از واحد سطح خارج می گردد.

برای J دو منبع داریم : ۱) بخشی از G منعکس می گردد ρG

۲) هر جسمی در هر دمایی مقداری انرژی گسیل می نماید. εE_b

$$Q_{net} = J - G$$ خالص انرژی که به طریق تابش سطح را ترک می کند. (در واحد سطح).

$$J = \rho G + \varepsilon E_b$$

$$\rho = 1 - (\alpha + \tau)$$

* اگر اجسام کدر $\tau = 0$ (بجز اجسام شفاف، شیشه) (حتی شیشه در طول موج بالا کدر است)

$$\rightarrow \boxed{\rho = 1 - \alpha = 1 - \varepsilon}$$ * در اکثر اجسام $\alpha = \varepsilon$.

جسم خاکستری : جسمی که ε مستقل از λ (طول موج) است.
یعنی ضریب گسیل تک فام (تک رنگ) است.

$$J = \rho G + \varepsilon E_b \qquad \rho = 1 - \alpha = 1 - \varepsilon \;\longrightarrow\; J = (1-\varepsilon)G + \varepsilon E_b$$

$$\longrightarrow G = \frac{J - \varepsilon E_b}{1-\varepsilon}$$

$$\frac{Q_{net}}{A} = \frac{E_b - J}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$$

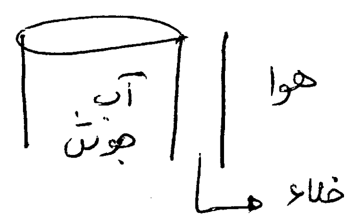
$$\longrightarrow Q = \frac{E_b - J}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}}$$

$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}$: مقاومت سطحی جسم (ناشی از غیر سیاه بودن سطح) .

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A} = R$$

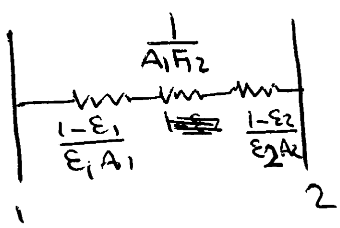
$$\varepsilon \to 1 \quad \to R \to 0$$

بنابراین سطح فلاسک چای را با سطوح آینه ای می سازند : $\varepsilon \to 0$ ، $R \to \infty$



در خلاء هدایت و جابجایی نداریم، تشعشع باقی می ماند که با آینه ای ساختن سطوح : $\varepsilon \to 0$ ، $R \to \infty$

یعنی سطوح آینه ای عایق تابشی هستند



هر سطح یک مقاومت سطح دارد ← دو مقاومت

و یک مقاومت فضایی هم داریم .

به کمک مدار این معادله. ←

$$\boxed{Q = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}}$$

حالت 1

$A_1 = A_2$

$F_{12} = 1$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

تابش بین دو جسم سیاه نامحدود

$$\frac{Q}{A} = \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

حالت 2

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

$A_1 = A_2$

$F_{12} = 1$

$$\frac{Q}{A} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$$

$$\neq \sigma \varepsilon (T_1^4 - T_2^4)$$

حالت 3

$\varepsilon_1 = 1$

$\varepsilon_2 = 1$

$F_{12} = 1$

$A_1 = A_2$

تابش میان

بین جسم سیاه و غیرسیاه

که همدیگر را کاملاً می‌بینند.

$$\frac{Q}{A} = \sigma \varepsilon (T_1^4 - T_2^4)$$

حالت 4

ε_1

ε_2

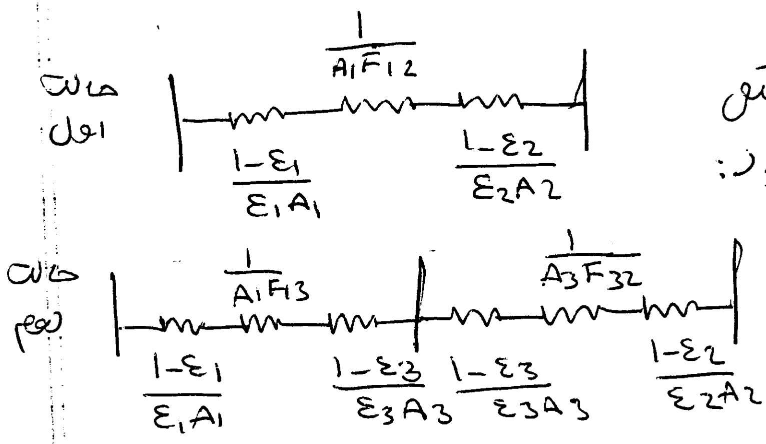
$F_{12} = 1$

$A_1 = A_2$

$$\frac{Q}{A} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}$$

سپره های حرارتی :

جهت کاهش انتقال حرارت تشعشعی اگر بین دو صفحه، صفحه سومی قرار گیرد:



$$Q_1 = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{R_1} \quad , \quad Q_2 = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{R_2}$$

اگر $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ (صفحات هم جنس).

و $A_3 = A_1 = A_2 = A$

و $F_{12} = F_{13} = F_{23} = 1$

حالت اول :

$$\left.\frac{Q_t}{A}\right|_1 = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$$

بدون سپر $R_1 = \frac{2}{\varepsilon} - 1$

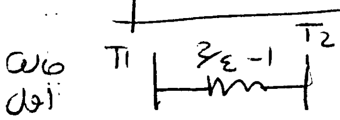
در حالت دوم :

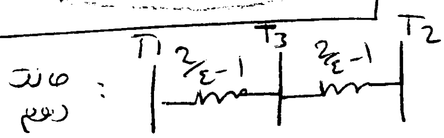
با یک سپر $R_2 = 2\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)$

دو تا سپر $R_3 = 3\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)$

$$\boxed{\text{سپر } n \qquad R = (n+1)\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)}$$

محاسبه دمای سپر :
مانند حالت قبل بین هر دو نقطه انتقال ثابت :





$$\frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{2\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_3^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \rightarrow \boxed{T_3 = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}}}$$

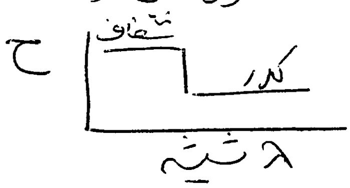
$$R_{\text{با n سپر}} = (n+1) R_{\text{بدون سپر}}$$

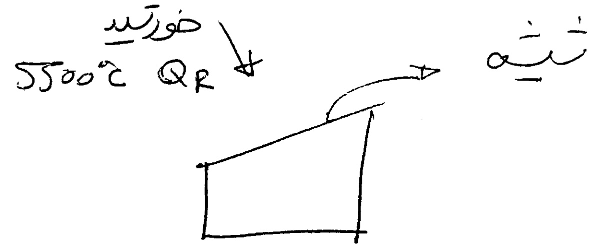
$$\boxed{q_{\text{با n سپر}} = \frac{1}{n+1} Q_{\text{بدون سپر}}}$$ ← با سه فرض گفته شده

پدیده گلخانه:

شیشه کسر تابش عبوری در طول موج کوتاه زیاد و در طول موج کوتاه کم است.

برای شیشه:





$$\lambda_{max} T = 2897.6\ \mu °K$$

تابش رسیده از خورشید با طول موج کم است از شیشه عبور می‌کند.

ولی اجسام داخل گلخانه دما کم و λ_{max} زیاد است که ~~...~~ شیشه برای این طول موج‌ها کدر است بنابراین ورودی زیاد و خروجی کم بنابراین انباشت انرژی داریم.

* علت ~~...~~ انباشت:

طول موج کوتاه $\tau \uparrow$ و α و ρ کم

طول موج بلند $\tau \downarrow$ و α و ρ هم زیاد

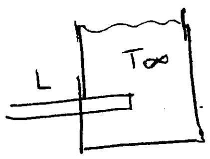
جو زمین برای زمین همان نقش شیشه برای گلخانه را دارد.

مولکول متقارن و غیرقطبی مانند جسم شفاف عبور دهنده است.

نکاتی در مورد ترموکوپل ها :

۱) اختلاف دما را به اختلاف اهم تبدیل می کنند.

۲) طول قاب ترموکوپل باید بلند باشد. $L \uparrow$



$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-mx}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-mL}$$

یعنی می خواهیم در طول معین به T_∞ برسیم.

هدف ⟸ at $x = L$

$T \to T_\infty$, $\theta \to 0$

بنابراین طول (قاب) غلاف ترموکوپل باید بلند باشد (مانند کشتی ها)

۳)

$$\frac{\theta}{\theta_i} = e^{-t/\tau}$$

$$\theta = T - T_\infty$$

هدف ⟸ $T \to T_\infty$, $\theta \to 0$

یا باید زمان طولانی باشد (که مطلوب نیست) و یا باید τ کم باشد ~~تا~~ چون پاسخ معکوس از τ است.

مثلاً : $V/A = D/6$

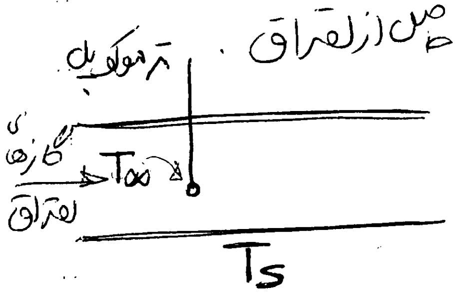
$$\tau = \frac{\rho V C_p}{hA} \downarrow$$

یعنی هرچه ترموکوپل کوچک‌تر باشد دما را سریع‌تر (درست) نمایش می دهد

بنابراین وزن ترموکوپل باید کم باشد.

۴ و ۵)

خطای تابش ← در دماهای بالا مطرح است مثلاً گازهای حاصل از احتراق.



ترموکوپل به طریق ~~تشعشع انرژی~~ کنوکسیون انرژی گرفته و به صورت تشعشع به دیواره ها می دهد در حالت steady:

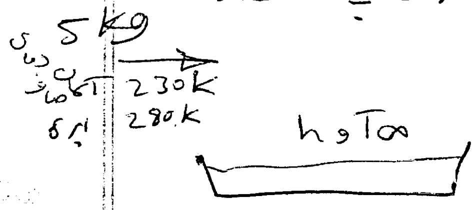
فرض : $h(T_\infty - T_t) = \sigma \varepsilon (T_t^4 - T_s^4)$

* دیوارها سیاه و ...

$$\underbrace{T_\infty - T_t}_{\text{خطا}} = \frac{\sigma \varepsilon (T_t^4 - T_s^4)}{h}$$

* ترموکوپل در محیطی که h بیشتر دارد خطای کمتر دارد (سرعت بالاتر Re↑ و ...)

* مقاومت تابشی باید زیاد شود بخاطر جمله $\sigma\varepsilon(T_t^4 - T_s^4)$
هرچه $\varepsilon\downarrow$ (جسم آینه‌ای، براق‌تر) خطای اندازه‌گیری کمتر است
واین تنها راه نیست. راه دیگر گذاشتن سپر بین ترموکوپل و دیواره.



دمای محیط؟ تا آب یخ بزند.
ممکن است T_∞ بالاتر از صفر باشد:

$$h(T_\infty - T_{ice}) = \sigma\varepsilon(T_{ice}^4 - T_{sky}^4)$$

در هوای صاف $T_{ice} > T_{sky}$ یعنی جمله مثبت است + بنابراین T_∞ می‌شود از T_{ice} بیشتر بوده ولی آب یخ بزند (مثلاً 3 یا 4)
ولی در هوای ابری حتماً باید دمای T_∞ زیر صفر باشد.
* در هوای صاف بدلیل تشعشع احساس سرمای بیشتر می‌کنیم.

$$h(T_\infty - T_{ice}) = \sigma\varepsilon(T_{ice}^4 - T_{sky}^4)$$

10   273   .3

* ترموکوپل سری برای دقت
و موازی برای متوسط‌گیری می‌بندیم.

Heat Exchanger — مبدل های حرارتی :

تقسیم بندی از حیث الگوی جریان

⇉ Parallel Flow

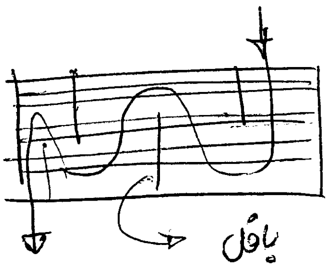
⇄ Counter "

Cross "

تقسیم بندی از حیث ساختار مبدل :

1) Double Pipe

2) Shell & Tube



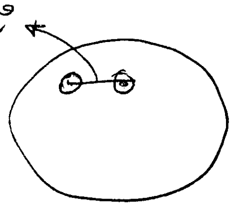
بفل صرفاً به منظور افت فشار ثبت نمی گردد.

موجب مرطوب شدن کل سطح می گردد.

افت فشار ← عیب : فشار آوردن به پمپ و کمپرسور

ولی h را افزایش می دهد.

بفل ← U و A را زیاد می کند.



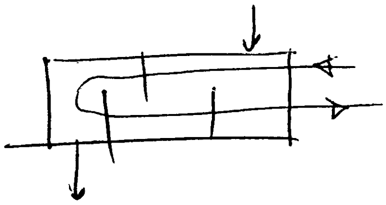
$$Pitch = 1\frac{1}{4}\ O.D.$$

آرایش : مربعی   مثلثی (Triangle)

افت فشار مثلثی بیشتر ، h بیشتر اما آرایش ها خاصیت رسوب زایی داشته باشد آرایش مربعی راحت تمیز می گردد.

لوله Pass :

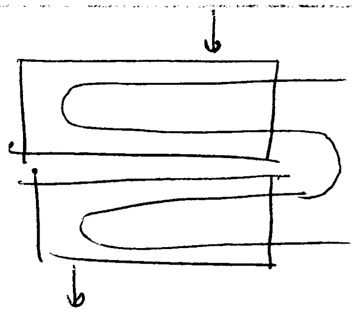
پوسته Pass :



مبدل 1-2

1 ← عدد پاس پوسته

2 ← عدد Pass لوله



مبدل 2-4 :

علت چند pass کردن لوله :

قابل قبول بودن المادل مبدل .

عدد pass لوله هیچ اثری بر ضریب کلی انتقال حرارت ندارد

hi ho ~ لا ربطی به تعداد pass ندارد .

علت چند pass کردن پوسته :

افزایش عدد pass پوسته جریان را به حالت counter flow نزدیک کرده و ضریب تصحیح را افزایش می دهد .

(F)

شرط طراحی مبدل : $F>0.8$

زمانی از F استفاده می‌کنیم که جریان خالص co یا counter نباشد مثل مبدل 2-4 که در بالا نشان داده شده .

$$Q = U.A.F.LMTD$$

در طراحی اول 1-pass پوسته می‌گیریم با توجه به دماها F را حساب می‌کنیم اگر $F>0.8$ قابل قبول است اگر $F<0.8$ باید A زیاد باشد بنابراین تعداد پوسته را زیاد می‌کنیم .

فاصله بین بفل : Baffle spacing

کاهش Baffle spacing ← $\uparrow \Delta P$

* هیچ دو نفری یک مبدل را یک طراحی نمی‌کنند .

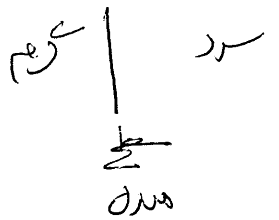
۳) Kettle Type

۴) Compact Heat Exchanger : A زیاد دارند.

برای جایی که h کم است.

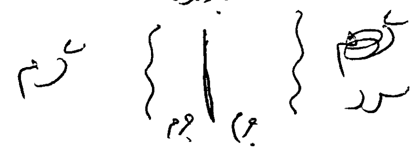
حجم کوچک A بالا ...

مانند Air cooler



۵ تا مقاومت وجود دارد :

جرم و رسوب در دو طرف جداره لوله .



$$U_{o,i} = \frac{1}{RA_{o,i}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{h_iA_i} + \frac{R_{fi}}{A_i} + \frac{\ln\frac{r_o}{r_i}}{2k\pi L} + \frac{R_{fo}}{A_o} + \frac{1}{h_oA_o}\right] A_{o,i}}$$

$$\cancel{U_o = \frac{1}{RA_o}}$$

ضریب فولینگ $R_f = \frac{1}{U_{\text{کثیف}}} - \frac{1}{U_{\text{تمیز}}}$

R_f : بستگی به جنس سیال (مهمترین عامل چون رسوب پایین آمده)، دمای عملیات، طول دوره سرویس کاری مبدل

محاسبات مبدل های حرارتی :

۱) روش LMTD

۲) روش $\varepsilon - NTU$

$$q = \dot{m}_c Cp_c (T_{co} - T_{ci}) = \dot{m}_c \lambda_c$$
$$q = \dot{m}_h Cp_h (T_{hi} - T_{ho}) = \dot{m}_h \lambda_h$$

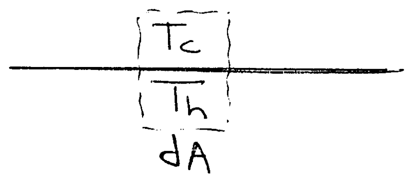
برای حالت تغییر فاز.

* روش دوم براساس روش اول.

فرض : مبدل بدون پرت حرارتی دو رابطه بالا صادق است.

$\dot{m}\, cp\big)_{h \text{ یا } c} = C_h$ → سیال گرم

c یا → سیال سرد



$$dq = -C_h\, dT_h$$
$$= C_c\, dT_c$$
$$= U (dA)\, \Delta T$$
$$\Delta T = T_h - T_c$$

$$\Delta T = T_h - T_c$$
$$d(\Delta T) = dT_h - dT_c$$
$$d(\Delta T) = -\frac{dq}{C_h} - \frac{dq}{C_c}$$

$$d(\Delta T) = -dq \left[\frac{1}{C_h} + \frac{1}{C_c} \right]$$

$$d(\Delta T) = -U(dA)\, \Delta T \left[\frac{1}{C_h} + \frac{1}{C_c} \right]$$
$$\int_{\Delta T_i}^{\Delta T_o} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\int^{A} U \left[\frac{1}{C_h} + \frac{1}{C_c} \right] dA$$

توضیحات روش LMTD :

① U در کل مبدل ثابت است.

② ظرفیت های گرمایی در طول مبدل ثابت است.

جریان Parallel flow:

$$\ln\frac{T_{ho}-T_{co}}{T_{hi}-T_{ci}} = -U\left[\frac{1}{C_h}-\frac{1}{C_c}\right]A \qquad (\text{معادله} *)$$

بنابراین:

$$\rightarrow \ln\frac{T_{ho}-T_{co}}{T_{hi}-T_{ci}} = -U\left[\frac{T_{hi}-T_{ho}}{q}+\frac{T_{co}-T_{ci}}{q}\right]A$$

$$\rightarrow q = UA\,\frac{(T_{ho}-T_{co})-(T_{hi}-T_{ci})}{\ln\left[\frac{T_{ho}-T_{co}}{T_{hi}-T_{ci}}\right]}$$

$$\rightarrow Q = UA\ \text{LMTD}$$

LMTD: متوسط لگاریتمی اختلاف دما در طرفین.

جریان Counter: فرمول LMTD متفاوت است.

$$\text{LMTD})_{\substack{CF\\(\text{counter flow})}} \geq \text{LMTD})_{\text{Parallel flow}}$$

حالت تساوی برای زمانی است که یکی از سیال‌ها تغییر فاز می‌دهد.

مثال:

$250 \rightarrow 170$
$110 \leftarrow 20$

$250 \rightarrow 170$
$20 \leftarrow 110$

مثال ۲:

$100 \rightarrow 100$
$20 \rightarrow 80$

$100 \rightarrow 100$
$20 \leftarrow 80$

بنابراین در حالت q یکسان در دو جریان :

$$A_{\text{Parallel Flow}} \cdot LMTD\Big|_{\text{Parallel Flow}} = A_{\text{Counter Flow}} \cdot LMTD_{\text{Counter Flow}}$$

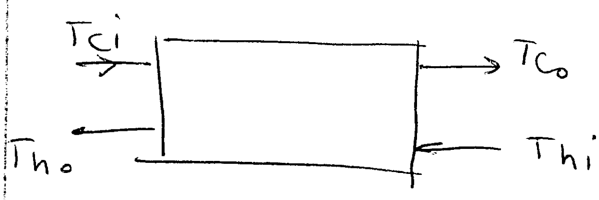
U : ربطی به الگوی جریان ندارد.

$$\frac{A_{PF}}{A_{CF}} = \frac{LMTD_{CF}}{LMTD_{PF}} \geq 1$$

در سطح یکسان q مبدل Counter بیشتر از Parallel است.

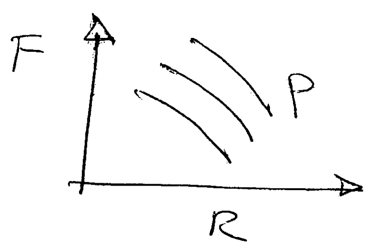
اگر یک مبدل نتوان گفت جریان دقیقاً Counter است یا Co. در این صورت معادله را تصحیح می‌کنند :

$$Q = U \cdot A \cdot F \cdot LMTD$$



F : نزدیک بودن به حالت Counter را می‌رساند.

F : ضریب تصحیح.

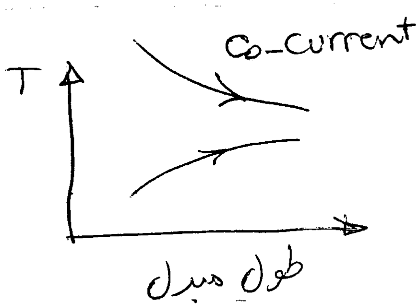


$$R, P = f\left[T_{ci}, T_{co}, T_{hi}, T_{ho}\right]$$

هرچه تعداد Pass پوسته زیاد شود F بیشتر می‌گردد.

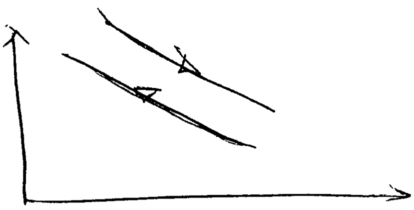
* در مبدل جوشش و چگالش $F=1$ است. (دیگر F ارتباطی به نوع مبدل ندارد).

منحنی های توزیع دما در مبدل های حرارتی :



* در طول مبدل اختلاف دمای قابل قبول داریم.

مبدل Counter که $\dot{m}c_p$ دو سیال برابر است . * تمام خطوط راست نیست فقط دو خط موازی اند



خطوط دما تقریباً موازی اند :

$T_{hi}-T_{co} = T_{ho}-T_{ci}$

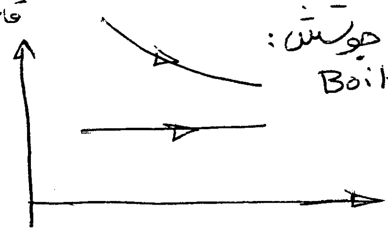
$\Rightarrow T_{hi}-T_{ho} = T_{co}-T_{ci}$

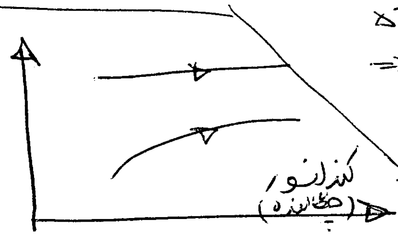
$\Delta T_h = \Delta T_c$

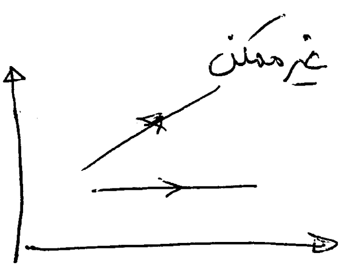
$\Rightarrow \frac{q}{C_h} = \frac{q}{C_c}$

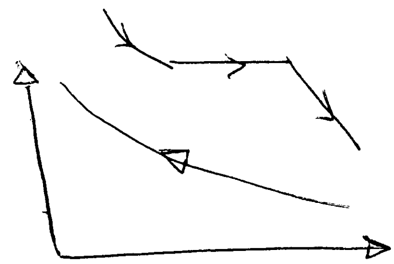
$\Rightarrow \boxed{C_h = C_c}$

جوشش : Boiler

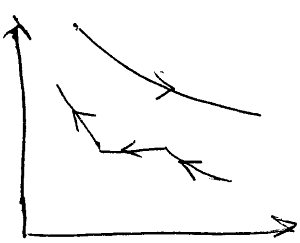




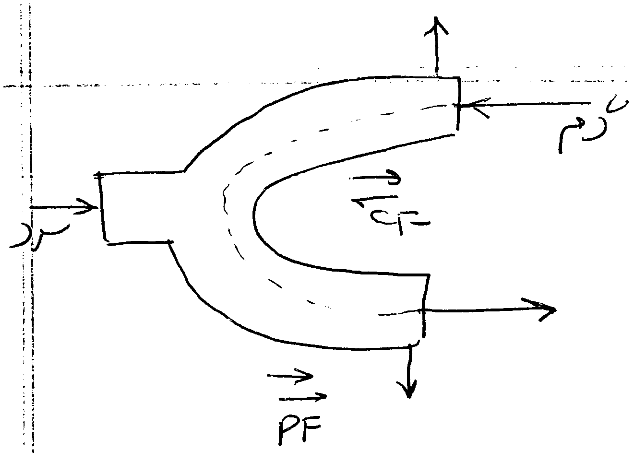




گاز superheat به مایع sub cooled تبدیل شده و بخشی از مبدل نقش کندانسور را دارا است . (محاسبات باید تکه تکه باشد) .

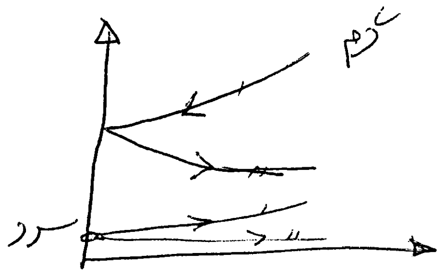


مایع سرد به گاز سوپرهیت تبدیل شده و قسمتی از مبدل نقش جوش آور دارد .



یک شاخه جریان parallel

یک شاخه counter Flow



سیال سرد دوشاخه شده .

روش ε-NTU

سیال min : سیالی که حاصلضرب دبی جرمی در ظرفیت گرمایی‌اش اقل باشد.

ΔT_{max} : max اختلاف دمای در مبدل : $T_{hi} - T_{ci}$

q_{max} : $C_{min}(T_{hi} - T_{ci})$ $\quad$ $\Delta T_{max} \times$ سیال min

ε : (ضریب تأثیر) : $\varepsilon = \dfrac{q}{q_{max}}$

ΔT سیال سرد به ΔT max

ε ← سرد min باشد

$$\frac{C_{\cancel{c}}\,\Delta T_c}{C_{min}\,\Delta T_{max}} = \frac{\Delta T_c}{\Delta T_{max}} = \frac{T_{co} - T_{ci}}{T_{hi} - T_{ci}}$$

ε ← گرم min باشد .

$$\frac{\Delta T_h}{\Delta T_{max}} = \frac{T_{hi} - T_{ho}}{T_{hi} - T_{ci}}$$

ΔT سیال گرم به max ΔT

$$\varepsilon = \frac{\Delta T_{\text{سیال } min}}{\Delta T_{max}}$$

ΔT_{max} ← اختلاف max دما در مبدل.

از معادله *

برای Parallel :

$$\ln \frac{T_{ho}-T_{co}}{T_{hi}-T_{ci}} = -UA\left[\frac{1}{C_h}+\frac{1}{C_c}\right]$$

$$'' = -\frac{UA}{C_{min}}\left[1+\frac{C_{min}}{C_{max}}\right]$$

$$\frac{UA}{C_{min}} = NTU$$ تعداد واحدهای انتقال .

$$UA = \frac{q}{LMTD} \quad , \quad C_{min} = \frac{q}{\Delta T(\min \text{ سیال})}$$

$$\longrightarrow \frac{UA}{C_{min}} = \frac{\Delta T_{min}}{\underset{\text{لگاریتمی}}{LMTD}}$$

NTU عبارت است از نسبت اختلاف دمای سیال min به متوسط اختلاف دمای در مبدل = تغییرات دمای سیال سرد به متوسط لگاریتمی اختلاف دما اگر سیال سرد سیال min باشد .

$$\frac{C_{min}}{C_{max}} = C_r$$

سمت راست معادله : f

$$\frac{T_{ho}-T_{co}}{T_{hi}-T_{ci}} = \exp\left[-NTU(1+C_r)\right]$$

سمت چپ معادله :

$$\frac{T_{ho}-T_{co}}{T_{hi}-T_{ci}} = \frac{T_{ho}-T_{hi}+T_{hi}-T_{co}}{T_{hi}-T_{ci}} = \frac{T_{ho}-T_{hi}+T_{hi}-T_{ci}-C_r(T_{hi}-T_{ho})}{T_{hi}-T_{ci}}$$

فرض : سیال گرم سیال min .

$$C_h(T_{hi}-T_{ho}) = C_c(T_{co}-T_{ci})$$

$$T_{co} = C_r(T_{hi}-T_{ho})+T_{ci}$$

$$= -\varepsilon+1-\varepsilon C_r$$

$$\longrightarrow \frac{T_{ho}-T_{co}}{T_{hi}-T_{ci}} = -(1+C_r)\varepsilon+1$$

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{1-\exp[(-NTU)(1+C_r)]}{1+C_r}$$

برای مبدل Co-current

می‌برد min باشد گرم.

$$\varepsilon = \frac{T_{hi}-T_{ho}}{T_{hi}-T_{ci}} \qquad \varepsilon = \frac{T_{co}-T_{ci}}{T_{hi}-T_{ci}}$$

در ε سه دما نقش دارد ولی LMTD چهار دما دارد.

بنابراین تعداد دماهای معلوم کمتر از ۴تا باشد از روش ε-NTU استفاده می‌کنیم.

برای هر مبدل ε-NTU داریم.

بیشتر در rating بکار می‌رود.

اگر دو تا دما را داشته باشیم دمای سوم را از ε بدست آمده و از موازنه انرژی دمای چهارم بدست می‌آید.

در حالت چگالش و جوشش: $q =$

برای سیال تغییر فاز ظرفیت گرمایی را ∞ منظور می‌کنیم. $C_p = \infty$

یعنی همواره سیال دیگر سیال min است.

(سیالی که تغییر فاز نمی‌دهد سیال C_w min).

$$\xrightarrow[\text{تغییر فاز}]{\text{در سیال با}} \quad C_r = \frac{C_{min}}{C_{max}} = 0$$

برای مبدل با تغییر فاز $\longrightarrow \boxed{\varepsilon = 1 - e^{-NTU}}$

معادله ε-NTU صرف نظر از نوع مبدل برای (مستقل) ~~—~~ مبدل با تغییر فاز.

کدام سیال لوله کدام پوسته؟

۱ـ سیال ویسکوز داخل پوسته.

۲ـ سیال خورنده داخل لوله.

۳ـ سیال رسوب زا داخل لوله.

۴ـ سیال سمی، آتش گیر داخل لوله.

۵ـ سیال گرم
- هدف: گرم کردن سیال سرد ← گرم وارد لوله.
- هدف: سرد کردن سیال گرم ← گرم وارد پوسته.

۶ـ سیال با فشار بالا: ~~تحمل فشار~~ داخل لوله چون تحمل فشار لوله بیشتر است.