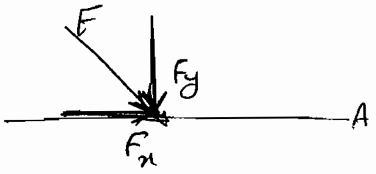
جلسه اول:

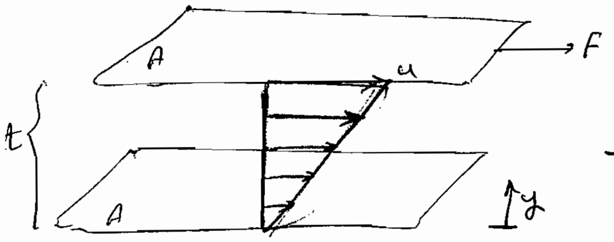
تنش برشی:

اگر نیروی F را بر مساحت A وارد کنیم و F را به دو مولفه F_x و F_y تجزیه کنیم حاصل تقسیم نیروی عمودی بر سطح، فشار و حاصل تقسیم نیروی افقی بر سطح، تنش برشی خواهد بود. (واحد تنش برشی مثل واحد فشار است)



$$P = \frac{F_y}{A}$$

$$\tau = \frac{F_x}{A}$$



دو صفحه موازی به فاصله t را در نظر می‌گیریم که فاصله دو صفحه از سیال پر شده است.

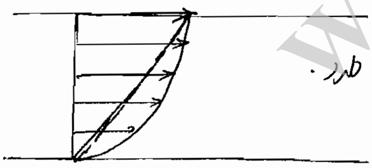
(سیال ماده‌ای است که در مقابل تنش برشی نمی‌تواند مقاومت نشان دهد و تغییر شکل پیدا می‌کند)

صفحه پایین ساکن بوده و صفحه بالایی را در اثر اعمال نیروی F با سرعت ثابت u می‌کشیم. با فرض عدم لغزش، پروفایل سرعت به شکل فوق است.

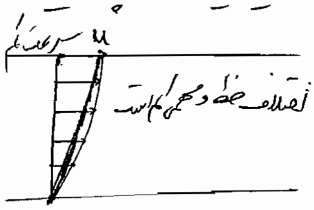
یعنی سرعت سیال در صفحه پایینی صفر است

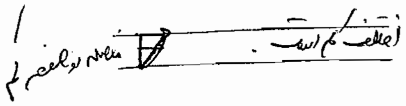
در دو حالت پروفایل سرعت را خطی در نظر می‌گیریم (فرض می‌کنیم)
① سرعت u خیلی کم باشد
② فاصله بین دو صفحه کم باشد

در غیر این صورت پروفایل سرعت منحنی است.



در این حالت بین خط و منحنی اختلاف زیادی دارد. پس پروفایل سرعت منحنی است.



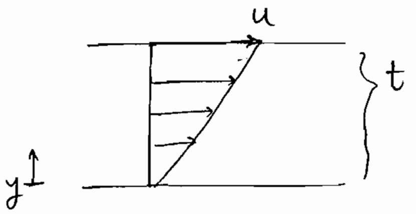


آزمایش نیوتن:

$$\left.\begin{array}{l} F \propto A \\ F \propto u \\ F \propto \frac{1}{t} \end{array}\right\} \longrightarrow F \propto \frac{uA}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{A} \propto \frac{u}{t} \longrightarrow \tau \propto \frac{u}{t} \quad ①$$

چون خطی است



$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u_2-u_1}{y_2-y_1} = \frac{u-0}{t-0} = \frac{u}{t} \quad ②$$

$$② \text{ و } ① \longrightarrow \tau \propto \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

ویسکوزیته دینامیک

لزجت

" "

ویسکوزیته خاصیتی از سیال است که سیال بر اثر این خاصیت می خواهد در برابر نیروهای برشی از خود مقاومت نشان دهد

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \dot{\gamma}$$

نرخ کرنش

شدت تغییر شکل

$$\rightarrow \tau = \mu \dot{\gamma}$$

قانون لزجت نیوتن

ویسکوزیته در سیالات ناشی از دو عامل می باشد
۱- نیروهای چسبندگی
۲- انتقال مومنتم بین مولکولی

در مایعات مولکولها به هم نزدیک هستند لذا نیروی چسبندگی بسیار زیاد است در نتیجه سرعت حرکت مولکولها کم می باشد پس انتقال مومنتم مولکولی ناچیز است بنابراین در مایعات ویسکوزیته ناشی از نیروهای چسبندگی است.

در گازها مولکولها از هم فاصله زیادتری دارند لذا آزادانه حرکت می کنند پس انتقال مومنتم مولکولی در مقایسه با نیروهای چسبندگی زیاد می باشد بنابراین در گازها ویسکوزیته ناشی از انتقال مومنتم بین مولکولی است.

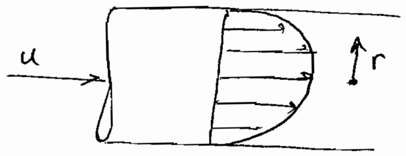
تغییرات ویسکوزیته با دما:

در گازها با افزایش دما جنبش مولکولی و در نتیجه انتقال مومنتم بین مولکولی افزایش می یابد پس در گازها با افزایش دما ویسکوزیته زیاد می شود

در مایعات با افزایش دما نیروهای چسبندگی کاهش پیدا کرده و در نتیجه ویسکوزیته کم می شود.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{گازها} : T\uparrow \rightarrow \mu\uparrow \\ \text{مایعات} : T\uparrow \rightarrow \mu\downarrow \end{array}}$$

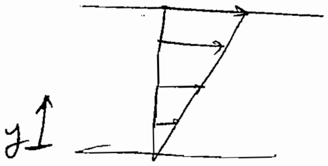
$$\tau = \pm \mu \dot{\gamma}$$



$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0$$

$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial r}$$

همیشه τ باید مثبت باشد پس با توجه به مختصات مسئله نوع علامت را تعیین می‌کنیم که در رابطه - یا + قرار دهیم.



$$\frac{\partial u}{\partial y} > 0 \longrightarrow \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

واحدهای ویسکوزیته :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \longrightarrow \mu = \frac{\tau}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} \begin{array}{l} \longrightarrow \frac{N}{m^2} \\ \longrightarrow \frac{m/sec}{m} \end{array}$$

$$\rightarrow \boxed{\mu \longrightarrow \frac{N.S}{m^2} = Pa.sec} = \frac{kg \cdot \frac{m}{sec^2} \cdot sec}{m^2}$$

$$\boxed{= \frac{kg}{m.sec}}$$

(SI) :
- $\frac{N.sec}{m^2}$
- $Pa\text{-}sec$
- $\frac{kg}{m.sec}$

امریکی :
- $\frac{lb_f.sec}{ft^2}$
- $\frac{lb_m}{ft.sec}$

cgs :
- $\frac{dyn.sec}{cm}$
- $\boxed{\frac{gr}{cm.sec}}$ معروف‌ترین

$$\boxed{1 \frac{gr}{cm.sec} = 1 \text{ poise}}$$

$$1\ \frac{gr}{cm.sec} = 0.1\ \frac{kg}{m.sec} \longrightarrow \boxed{1\ \frac{kg}{m.se} = 10\ \text{poise}}$$

ویسکوزیته سینماتیک :

حاصل تقسیم ویسکوزیته دینامیک به دانسیته را ویسکوزیته سینماتیک گوییم .

ویسکوزیته سینماتیک $\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}}$

واحد ویسکوزیته سینماتیک :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \begin{matrix} \longrightarrow ML^{-1}T^{-1} \\ \longrightarrow ML^{-3} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\nu \longrightarrow L^2T^{-1}}$$

$$\nu : \begin{cases} SI : & \frac{m^2}{sec} \\ \text{آمریکایی} : & \frac{ft^2}{sec} \\ cgs . & \frac{cm^2}{sec} \end{cases}$$

$$\boxed{1\ \frac{cm^2}{sec} = 1\ \text{stoks}}$$ استوکس

$$\nu(\text{استوکس}) \times \rho(\frac{gr}{cm^3}) = \mu(\text{poise})$$

تغییرات ویسکوزیته سینماتیک با دما :

گازها : $T\uparrow \Rightarrow \begin{cases} \mu\uparrow \\ \rho\downarrow \end{cases} \Rightarrow \nu\uparrow$

مایعات : $T\uparrow \Rightarrow \begin{matrix} \mu\downarrow \\ \rho\downarrow \end{matrix} \Rightarrow \nu\downarrow$

چون تغییرات ویسکوزیته در برابر تغییرات دانسیته با افزایش دما در مایعات بسیار بیشتر است پس ν بیشتر از کاهش μ تاثیر می‌گیرد و کم می‌شود .

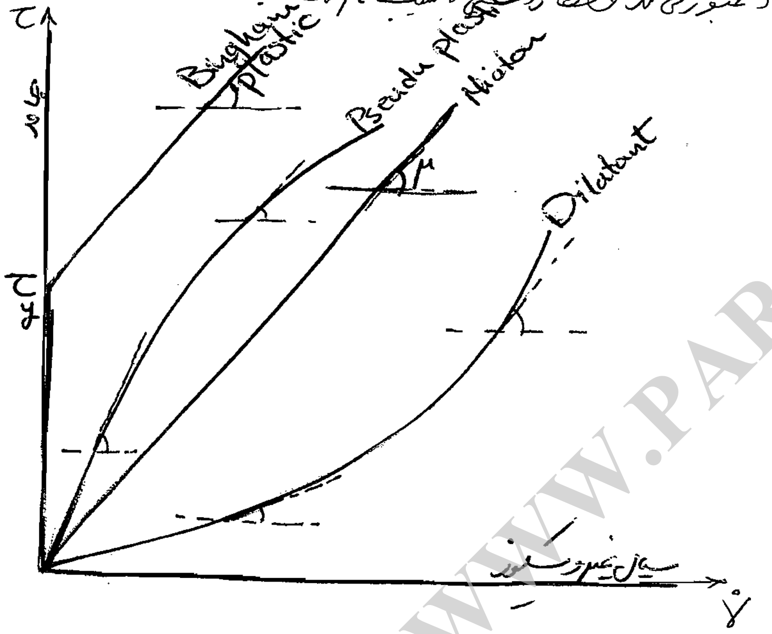
$$\boxed{\begin{matrix} \mu_{liq} > \mu_{gas} \\ \nu_{liq} > \nu_{gas} \end{matrix}}$$

تقسیم‌بندی سیالات : ۱- نیوتنی :

۲- غیرنیوتنی :
- مستقل از زمان
  - Dilatant دیلاتانت
  - Pseudu plastic شبه پلاستیک
  - Bingham plastic سیالات بینگهام
- وابسته به زمان
  - Thixotropic تیکسوتروپیک
  - Rheopectic رئوپکتیک

سیالات نیوتنی : سیالاتی هستند که از قانون لزجت نیوتن پیروی می‌کنند. $\tau = \mu \gamma'$

یعنی اگر منحنی τ برحسب γ' را رسم کنیم از مبدا عبور می‌کند و خط راست است و شیب μ است



سیالات غیرنیوتنی سیالاتی هستند که از قانون لزجت نیوتن پیروی نمی‌کنند یعنی منحنی τ برحسب γ' آنها خط راست نمی‌باشد و اگر خط راست است این خط از مبدا عبور نمی‌کند.

سیالات مستقل از زمان سیالاتی هستند که اگر دما و تنش برشی تغییر نکند ویسکوزیته با زمان تغییر نمی‌کند

- سیالات دیلاتانت سیالاتی هستند که با افزایش تنش برشی ویسکوزیته آنها افزایش می‌یابد به همین خاطر این سیالات را سیالات غلیظ شونده در اثر تنش برشی می‌نامیم. (سفیده تخم مرغ - سوسپانسیون نشاسته)
- سیالات شبه پلاستیک سیالاتی هستند که با افزایش تنش برشی ویسکوزیته آنها کاهش می‌یابد به همین خاطر این سیالات را رقیق شونده در اثر تنش برشی می‌نامیم (شیر)

• سیالات بینگهام سیالاتی هستند که برای حرکت و جاری شدن باید بر تنش تسلیم غلبه کنیم یعنی اگر تنش وارد شده از تنش تسلیم (yield stress با τ_y ، τ_p نشان می‌دهند) کمتر باشد هیچ تغییر شکلی در سیال ایجاد نمی‌شود. پس از غلبه بر تنش تسلیم رفتار سیال مثل سیال نیوتنی خطی خواهد بود.

$$\tau < \tau_y \longrightarrow \dot{\gamma} = 0$$

$$\tau \geq \tau_y \longrightarrow \dot{\gamma} \neq 0$$

$$\tau = \mu \dot{\gamma}^n \quad \begin{cases} n>1 & \text{دیلاتانت} \\ n=1 & \text{نیوتنی} \\ n<1 & \text{شبه پلاستیک} \end{cases}$$

$$\tau = \tau_y + \mu \dot{\gamma} \quad : \quad \text{بینگهام}$$

⊛ هوای جو مادی ویسکوز جزء خواص محسوب می‌شود؟ ایده‌آل نیوتنی

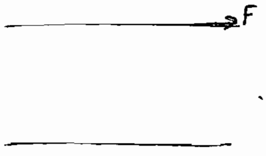
اما اگر در کنکور این سوال آمد جواب همه سیالات درست است.

* در یک سیال غیر ویسکوز تنش وجود ندارد پس پروفایل سرعت هم وجود ندارد.

$$\overset{\mu=0}{\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}} \longrightarrow \tau = 0$$

* اگر در یک سیال غیر ویسکوز دانسیته ثابت باشد سیال را ایده‌آل می‌نامیم.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\mu=0\\ \rho=cte\end{array}\right\} \longrightarrow \text{سیال ایده‌آل}} \longleftarrow \text{سیال ایده‌آل حتماً تراکم ناپذیر است.}$$



⊛ اگر آزمایش نیوتن را در حالتی که بین صفحات سیال ایده‌آل وجود داشته باشد انجام دهیم در اینصورت هیچ پروفایل سرعتی ایجاد نمی‌شود و صفحه بالایی با همان سرعت حرکت می‌کند.

* قانون پیوستگی
برای سیال تراکم ناپذیر:

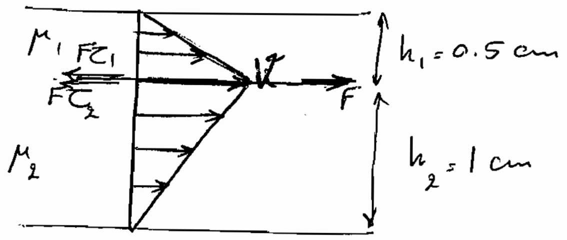
$$\overline{V} = ui + vj + wk$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

چون سیال ایده‌آل یک سیال تراکم ناپذیر است پس در قانون پیوستگی صدق می‌کند.

* اگر منحنی τ برحسب $\dot{\gamma}$ روی محور عمودی منطبق شود ویسکوزیته برابر ∞ خواهد بود پس جسم جامد است.

مثال مهم: دو صفحه به مساحت $4m^2$ به موازات هم قرار دارند. بین دو صفحه، صفحه سومی با مساحت $2m^2$ با سرعت ثابت $1 \frac{m}{sec}$ کشیده می‌شود اگر فاصله صفحات از هم به ترتیب 1cm و 0.5cm باشد و فاصله بین صفحات از سیالی با ویسکوزیته 5 poise پر شده باشد نیروی مورد نیاز برای کشیدن صفحه میانی را محاسبه کنید.



$$u = cte \longrightarrow a = 0 \longrightarrow \Sigma F = 0$$

$$\rightarrow \quad F = F_{\tau_1} + F_{\tau_2}$$

$$F_{\tau_1} = \tau_1 . A \longleftarrow$$

(*) مساحت صفحه‌ای که نیروی آن وارد می‌شود یعنی صفحه‌ای که وسط است $2m^2$ است

$$F_{\tau_1} = \tau_1 . A = \mu_1 \frac{V}{h_1} . A$$

$$F\tau_2 = \tau_2 . A = \mu_2 . \frac{V}{h_2} . A$$

$$\mu_1 = \mu_2$$

$$\rightarrow \boxed{F = VA\left(\frac{\mu_1}{h_1} + \frac{\mu_2}{h_2}\right)} = VA\mu\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)$$

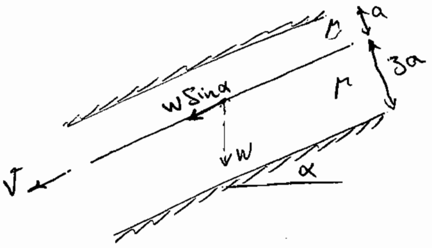
رابطه مهم کاربردی

$$F = 0.5 \frac{N.S}{m^2} \times 2m^2 \times 1 \frac{m}{sec} \left[\frac{1}{0.01} + \frac{1}{0.005}\right] = 300 N$$

سوال ۱۵ جزوه: $\boxed{F_\tau = \text{نیروی درگ} = \text{نیروی برشی}}$

$$F = Au\left(\frac{k\mu}{h-y} + \frac{\mu}{y}\right) \xrightarrow{\text{باید}} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \longrightarrow k\mu \frac{1}{(h-y)^2} + \mu\left(\frac{-1}{y^2}\right) = 0$$

$$\frac{k}{(h-y)^2} = \frac{1}{y^2} \Longrightarrow k = \left(\frac{h-y}{y}\right)^2 \rightarrow \sqrt{k} = \frac{h-y}{y} \Longrightarrow y = \frac{h}{\sqrt{k}+1}$$

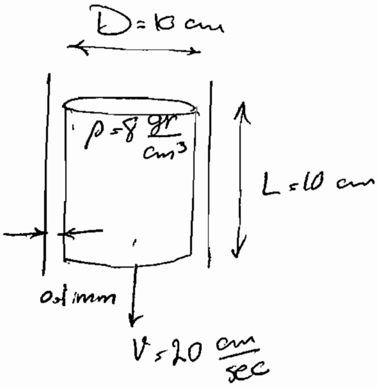


سوال ۱۹ جزوه :

$$W \sin\alpha = F_{\tau_1} + F_{\tau_2}$$

$$W \sin\alpha = \mu A V \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3a}\right)$$

$$W = \frac{\mu A V}{\sin\alpha} \cdot \frac{4}{3a} = \frac{4\mu V A}{3a \sin\alpha}$$



سوال ۱۲ جزوه :

$$\text{سرعت ثابت} \longrightarrow \Sigma F = 0$$

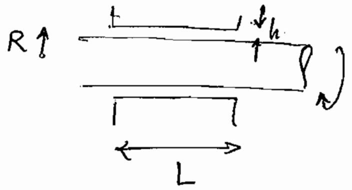
$$W = F_\tau = \tau . A = \mu . \frac{V}{h} . \pi D L$$

$$\Rightarrow m.g = \rho \frac{\pi D^2}{4} . L . g = \mu \frac{V}{h} . \pi D L$$

(SI) :

$$\Rightarrow \mu = \frac{\rho h D g}{4V} = \frac{8\times10^3 \times 10^{-4} \times 10^{-1} \times 9.8}{4 \times 2\times10^{-1}}$$

$$\mu = 0.98 \frac{kg}{m.sec}$$



سوال ۱۳ جزوه :

$$T = F . \overset{\text{بازوی گشتاور}}{R} = \tau . A . R = \left(\mu . \frac{V}{h}\right)(2\pi R L) . R$$

برای نوشتن میزان تنش برشی ما به سرعت خطی نیاز داریم نه سرعت دورانی

$$\boxed{V = r \times \omega \ \overset{\text{دورانی}}{\frac{rad}{sec}}}$$

$$N = 1000 \ rpm = \frac{1000}{60} =$$ تعداد دورها در ثانیه

$$\frac{1000}{60} \times 2\pi =$$

$$\frac{N\ (rpm)}{60} \times 2\pi = \boxed{\omega \left(\frac{rad}{sec}\right) = \frac{2\pi N}{60}}$$

$$T = \mu \times \frac{\frac{2\pi N}{60} \times R}{h} \times 2\pi R^2 L$$

$$T = \frac{2\pi\mu\omega R^3}{h}$$

نکته :

$$\xrightarrow{\text{نتیجه}} \boxed{T \propto R^3}$$

$$T = \frac{4\pi^2}{60} . \frac{\mu . N . R^3 L}{h} = \frac{0.2\pi^2}{3} \times \frac{1 \times 1000 \times 10^{-6} \times 10^{-1}}{10^{-4}} = \frac{0.2\pi^2}{3}$$

بالک یا الاستیسیته :

$$\boxed{k = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T}$$ ضریب تراکم پذیری همدما

عکس ضریب تراکم پذیری همدما را به نام مدول بالک تعریف می کنیم .

$$\boxed{K = -v\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T}$$

مدول بالک $\longrightarrow K = \frac{-dP}{\frac{dv}{V}}$

مدول بالک معیاری است که میزان تراکم پذیری یا تراکم ناپذیری سیال را نشان می دهد .

در مایعات برای افزایش فشار مشخص تغییر حجم ناچیز بوده و درنتیجه مدول بالک عدد بزرگتری خواهد بود در صورتیکه در گازها مدول بالک به مراتب کوچکتر می باشد .

هرچه K بزرگتر باشد سیال تراکم ناپذیرتر است .

برای گاز کامل :

$$P = \frac{RT}{v} \longrightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = \frac{-RT}{v^2}$$

$$\Rightarrow K = -v\left(-\frac{RT}{v^2}\right) = \frac{RT}{v} \Rightarrow \boxed{K = P}$$

واحد فشار دارد .

مدول بالک تمام سیالات تابع فشار می باشد و با افزایش فشار، افزایش می یابد .

مثال : $1\,m^3$ آب در دمای $25°C$ و فشار مطلق $1\,atm$ درداخل ظرفی موجود می باشد فشار روی این ظرف را به اندازه مطلق $1\,atm$ افزایش می دهیم تغییر حجم آب نسبت به حالت اولیه چند درصد است ؟

$$1atm \text{ و } 25°C \text{ در } \xrightarrow{\text{جدول}} K = 2.2\times10^9\ pa = \overset{m^3}{-1} \times \frac{\overset{1\,atm}{1.013\times10^5\ Pa}}{\Delta v}$$

$$\Delta v = -\frac{1.013\times10^5}{2.2\times10^9} = -0.45\times10^{-4}\ m^3 = -45\ cm^3$$

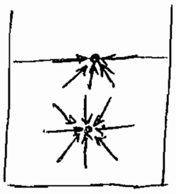
$$\underset{\text{آب}}{10^6\ cm^3} \xrightarrow{\text{برای افزایش مطلق فشار } 1atm} \Delta v = -45\ cm^3$$

$$\text{درصد تغییر حجم} = \frac{45}{10^6}\times100 = 0.0045\ \%$$

جلسه دوم

کشش سطحی

اگر مایعی را که در تماس با هوا می‌باشد در نظر بگیریم برای تمام مولکولهایی که داخل مایع قرار دارند برآیند نیروهای وارده صفر است. ولی برای مولکولهایی که در سطح آزاد مایع قرار دارند برآیند نیروهای وارده صفر نیست. این برآیند باعث می‌شود همواره یک کشش در سطح آزاد وجود داشته باشد.



واحد کشش سطحی $\frac{\text{نیرو}}{\text{طول}}$ مثل $\frac{N}{m}$ ، $\frac{dyne}{cm}$

یا $\frac{\text{انرژی}}{\text{سطح}}$

$$\frac{N}{m} = \frac{N.m}{m^2} = \frac{J}{m^2}$$

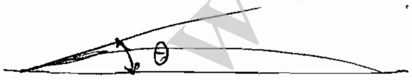
بنابراین کشش سطحی:

مقدار کاری است که باید صرف گردد تا به اندازه کافی مولکول از داخل مایع به سطح آزاد سیال منتقل کنیم تا به اندازه واحد سطح، سطح مشترک جدید ایجاد شود.

نیروی کشش سطحی $F_\sigma = \sigma \times$ طول

این طول، طولی است که سیال، هوا و جسم جامد با هم در تماس هستند.

سیالی مثل آب را در نظر می‌گیریم که روی زمین ریخته شود روی سطح زمین پخش می‌کند و سطح را خیس می‌کند.



$\theta < 90°$ سیال سطح را خیس می‌کند

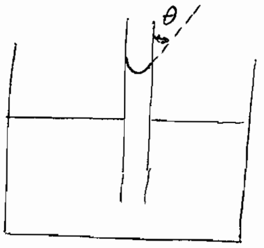
حال اگر آب روی شیشه ریخته شود و شیشه تمیز باشد آب بیشتر پخش می‌شود و θ باز هم کوچکتر می‌شود.

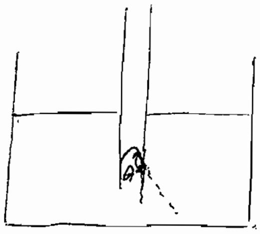
ولی اگر به جای آب، جیوه را در نظر بگیریم، جیوه روی سطح زمین پخش نمی‌شود و سطح را خیس نمی‌کند

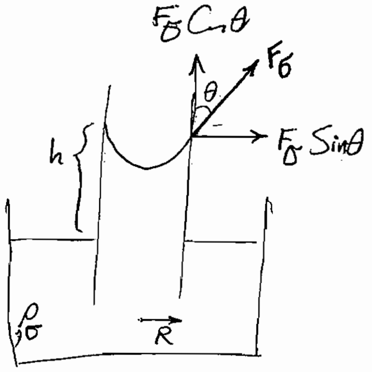
$\theta > 90°$ سیال سطح را خیس نمی‌کند

سیالاتی که سطح را خیس می‌کنند در لوله موئین بالا می‌روند چون نیروی چسبندگی بین مولکولها آب و شیشه بیشتر از نیروی همبستگی بین مولکولهای آب می‌باشد

برای سیالاتی که $\theta > 90^\circ$ است به جای صعود در لوله مویین نزول در لوله مویین دیده می‌شود







میزان صعود یک سیال در لوله مویین :

$$F_\sigma \mathrm{Cos}\theta = \overbrace{\rho(\pi R^2 h)\, g}^{\text{وزن ستون سیال}}$$

طولی که هوا، سیال و جسم جامد در تماس‌اند : محیط لوله مویین است

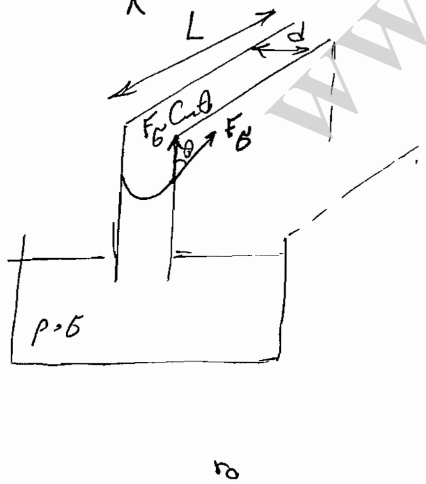
$$\sigma(2\pi R)\mathrm{Cos}\theta = \pi R^2 h \rho g$$

$$\rightarrow \boxed{h = \frac{2\sigma \mathrm{Cos}\theta}{\rho g R}}$$

شعاع لوله

$h \propto \sigma$ هرچه کشش سطحی سیال بیشتر باشد سیال در لوله مویین بیشتر صعود می‌کند.

$h \propto \frac{1}{R}$ ضمناً از این رابطه مشخص است که h با شعاع لوله مویین رابطه عکس دارد.

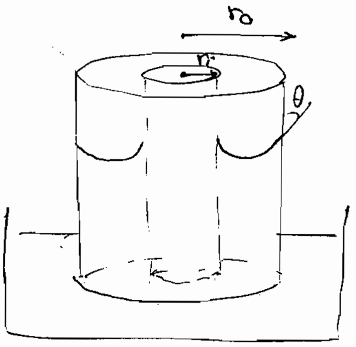


$$F_\sigma \mathrm{Cos}\theta = mg = \rho V g$$

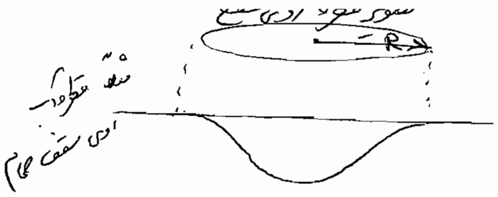
$$\sigma(2L)\mathrm{Cos}\theta = \rho h d L g$$

$$\rightarrow \boxed{h = \frac{2\sigma \mathrm{Cos}\theta}{\rho g d}}$$

فاصله دو صفحه موازی



$$\boxed{h = \frac{2\sigma \mathrm{Cos}\theta}{\rho g (r_o - r_i)}}$$



اختلاف فشار بین یک قطره کروی و فشار محیط :

طولی که هوا، سیال و جسم جامد با هم تماس دارند.

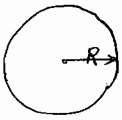
$$(-\Delta p) \times \pi R^2 = \sigma \times \overbrace{2\pi R}$$

فشار قطره منهای فشار محیط

(فشار قطره بیشتر است)

$$\Rightarrow \boxed{-\Delta p = \frac{2\sigma}{R}}$$

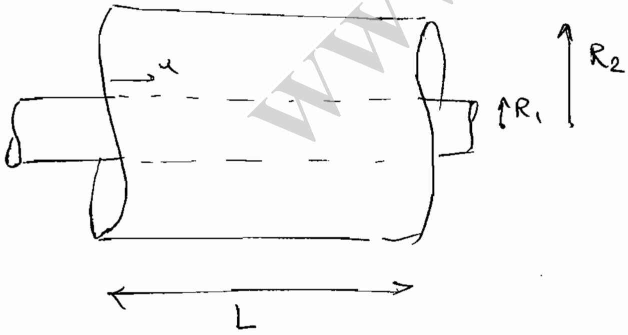
اختلاف فشار بین یک حباب و محیط :



$$\boxed{-\Delta p = \frac{4\sigma}{R}}$$

صفحه ۳۲۶ جزوه سال ۸۵ مخزن سوال ۲۶ :

میله‌ای به شعاع R_1 و طول L با سرعت ثابت u از درون لوله‌ای با شعاع R_2 که محتوی مواد پوشش دهنده است کشیده می‌شود. اگر توزیع سرعت سیال پوشش دهنده به صورت $U_x = \frac{U}{\ln\frac{R_1}{R_2}} \cdot \ln\frac{r}{R_2}$ باشد توان مورد نیاز برای کشیده شدن میله را محاسبه کنید.



$$\tau = \mu \frac{du}{dr}$$

$$\Rightarrow \tau = \mu \frac{U}{\ln\frac{R_1}{R_2}} \times \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{r}{R_2}}$$

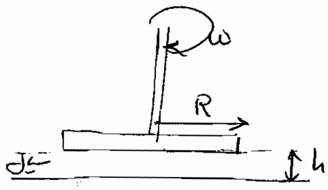
$$\tau\Big|_{r=R_1} = \frac{\mu u}{\ln\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{1}{R_1}$$

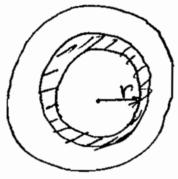
$$F_\tau = \left(\frac{\mu u}{\ln\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{1}{R_1}\right)(2\pi R_1 L) = \frac{2\pi \mu L U}{\ln\frac{R_1}{R_2}}$$

توان $= \underset{N.\frac{m}{s}}{\underset{\downarrow}{F.}} U_x\Big|_{x=R_1} = \frac{2\pi \mu u^2 L}{\ln\frac{R_1}{R_2}} \longleftarrow \boxed{U_x\Big|_{r=R_1} = u}$

صفحه ۲۲۵ سوال ۷۱ مهندسی شیمی ۸۹ :

دیسکی به شعاع R به فاصله کمی از سطح ثابت قرار دارد. این دیسک را با سرعت زاویه ω می چرخانیم اگر گشتاور مورد نیاز برای چرخش دیسک T باشد ویسکوزیته سیال چقدر است؟





دیسک را از بالا نگاه می کنیم :
یک المان در نظر می گیریم :

گشتاور این المان را حساب می کنیم (گشتاور = نیرو × بازوی گشتاور)

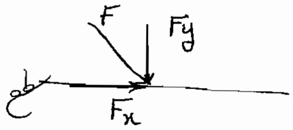
$$dT = (\tau \times 2\pi r dr) \times r$$

همیشه سرعت خطی را در نظر می گیریم نه سرعت زاویه ای

$$dT = \mu \cdot \frac{r\omega}{h} \times 2\pi r^2 dr \Rightarrow dT = \frac{2\pi r^3 \omega \mu}{h} dr$$

انتگرال می گیریم

$$T = \frac{2\pi \mu \omega}{h} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi \mu \omega R^4}{2h} \Rightarrow \mu = \frac{2Th}{\pi \omega R^4}$$



فشار :

$$P = \frac{F_y}{A}$$

واحدهای فشار

$1 \text{ pa} = 1 \frac{N}{m^2}$

$1 \text{ psi} = \frac{1 \text{ lbf}}{in^2}$

$1 \text{ psf} = 1 \frac{\text{lbf}}{ft^2}$

$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ pa} = 1.013 \text{ bar}$

$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ pa}$

$1 \text{ atm} = 14.7 \text{ psi}$

$1 \text{ bar} = 14.5 \text{ psi}$

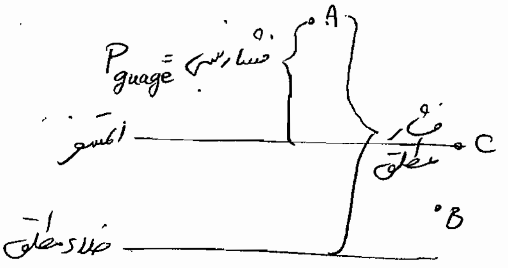
$1 \text{ atm} = 76 \text{ cm-Hg} = 760 \text{ mm-Hg}$

$1 \text{ atm} = 10.33 \text{ m-}H_2O$

$1 \text{ atm} = 29.92 \text{ in-Hg}$

فشار نسبی و فشار مطلق :

برای اندازه گیری فشار هر نقطه ای ، ۲ نقطه مرجع وجود دارد .



فشار اتمسفر + فشار نسبی = فشار مطلق

فشار مطلق نقطه B مثبت و فشار نسبی نقطه B منفی است .

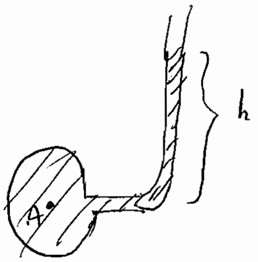
فشار مطلق نقطه C 〃 〃 〃 〃 〃 C صفر است

〃 〃 〃 A 〃 〃 〃 〃 〃 〃 A مثبت است

فشار مطلق همواره مثبت است .

روشهای اندازه گیری فشار :

برای اندازه گیری فشار سه وسیله داریم : پیزومتر - مانومتر - بارومتر



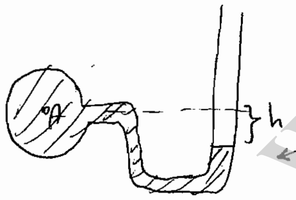
پیزومتر ساده ترین وسیله برای اندازه گیری فشار یک نقطه است .

$P_A = \rho g h$

از پیزومتر برای اندازه گیری فشار زیاد نمی توان استفاده کرد.

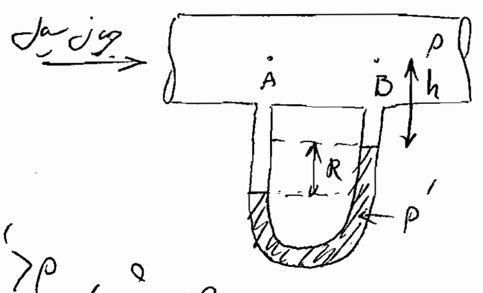
〃 〃 〃 〃 〃 منفی نمی توان 〃 〃

با تغییر شکل پیزومتر می توان فشارهای منفی را هم اندازه گرفت اما منفی کوچک



مانومتر : هم برای اندازه گیری اختلاف فشار بین دو نقطه و هم اندازه گیری فشار در یک نقطه استفاده می کنیم.

اگر دو سر مانومتر را به دو نقطه وصل کنیم مانومتر اختلاف فشار بین آن دو نقطه را نشان می دهد ولی اگر یک سر مانومتر را به یک نقطه وصل کنیم و سر دوم به هوا راه داشته باشد مانومتر برای اندازه گیری فشار در آن نقطه بکار می رود.



اگر درون لوله سیالی جریان نداشته باشد $P_A = P_B$ و ارتفاع سیال مانومتری در دو طرف برابر است

اگر درون لوله جریان برقرار باشد هر چه پیش می رود بر اثر اصطکاک فشار کاهش می یابد $P_B < P_A$. پس ارتفاع سیال مانومتری طرف A به سمت پایین حرکت کند و در طرف B به سمت بالا حرکت کند. (مهم ترین ویژگی سیال مانومتری : دانسیته اش از دانسیته سیال داخل لوله بیشتر باشد)

$\rho' > \rho$

برای نوشتن رابطه مانومتری از یک نقطه شروع می‌کنیم اگر به سمت پایین حرکت کردیم علامت + و اگر به سمت بالا حرکت کردیم علامت − در نظر می‌گیریم .   از نقطه A شروع می‌کنیم تا به نقطه B برسیم .

$$P_A + \rho g(h+R) - \rho' g R - \rho g h = P_B$$

$$P_A - P_B = \rho' g R - \rho g R = \gamma' R - \gamma R = R(\gamma' - \gamma)$$

وزن مخصوص سیال مانومتری

وزن مخصوص سیال درون لوله

برای مانومتر افقی $\boxed{P_A - P_B = R(\gamma' - \gamma)}$ $\Delta P = R \cdot \Delta\gamma$

$$\boxed{R = \frac{\Delta P}{\Delta \gamma}}$$

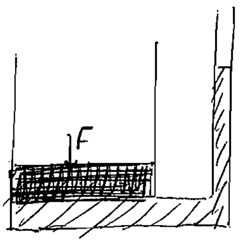
جهت افزایش دقت مانومتر دو راه داریم :

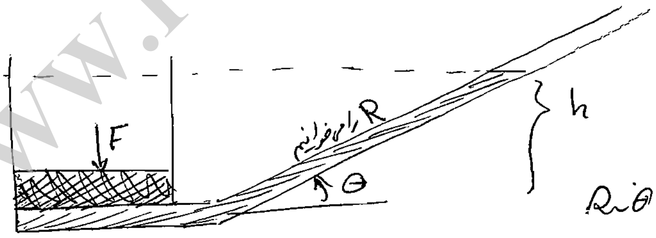
① هرچه R بیشتر باشد خطای خواندن R از روی مانومتر کمتر می‌شود .

زمانی از مانومتر جیوه‌ای استفاده می‌کنیم که ΔP خیلی زیاد باشد .

" " " آبی " " " ΔP " کم باشد .

② شیب‌دار ساختن مانومتر :





$$\sin\theta = \frac{h}{R}$$

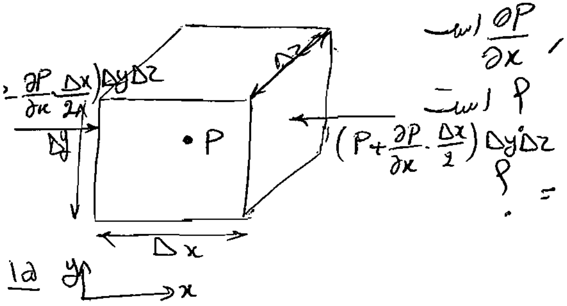
$$R = \frac{h}{\sin\theta}$$

با شیب‌دار ساختن مانومتر باید R را بخوانیم که چون عددی بزرگتر از h است دقت بالا می‌رود .

سیالی را در نظر می‌گیریم که با شتاب a_x در حال حرکت باشد . المانی از سیال را در نظر می‌گیریم .
فشار را در مرکز المان P در نظر می‌گیریم .

اگر بخواهیم به اندازه یک واحد جابجا شویم تغییرات فشار , $\frac{\partial P}{\partial x}$ است

اگر " " " " " " $\frac{\Delta x}{2}$ " " ? است



$$? = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

$$\sum F = m.a_x \rightarrow \left(P - \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y.\Delta z - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta z = \rho \Delta x \Delta y \Delta z . a_x$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial x} = \rho . a_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho . a_x}$$

اگر همین رابطه را در راستای y بنویسیم همین رابطه‌ها را داریم و ترم وزن هم اضافه می‌شود.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho (a_y + g)$$

در استاتیک سیال، سیال در حال سکون در نظر می‌گیریم.

$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ اگر در یک سیال ساکن در راستای افقی حرکت کنیم تغییر فشار برابر صفر است.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \begin{cases} \text{مایع} : P = \rho g h \\ \text{گاز} : dp = -\rho g\, dy \end{cases}$$

(چگالی گازها ثابت نیست و تابع فشار است)

با فرض گاز ایده‌آل $dp = \frac{-PM}{RT} . g\, dy \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dy$

انتگرال می‌گیریم. در سطح زمین که $y=0$ است فشار P_0 است

$$\Rightarrow \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = \int_0^y -\frac{Mg}{RT} dy \Rightarrow Ln \frac{P}{P_0} = \frac{-Mg}{R} \int_0^y \frac{dy}{T}$$

دما با ارتفاع تغییر می‌کند. اگر تغییرات ارتفاع کم باشد دما را تقریباً ثابت در نظر می‌گیریم لذا با فرض اتمسفر ایزوترمال خواهیم داشت:

$$Ln \frac{P}{P_0} = \frac{-Mg}{RT} . y$$

$$\Rightarrow P = P_0 . e^{-\frac{Mgy}{RT}}$$

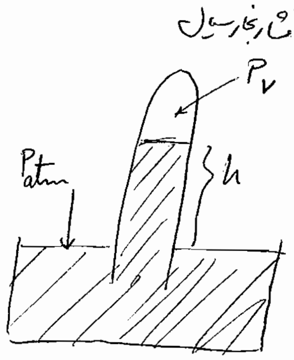
در گازها با فرض اتمسفر ایزوترمال هر چه به سمت بالا حرکت کنیم فشار به صورت exp کاهش می‌یابد.

بارومتر :

بارومتر برای اندازه گیری اتمسفر محلی به کار می رود :

اتمسفر استاندارد : فشار در سطح آبهای آزاد 760 mm Hg

اتمسفر محلی فشار در آن نقطه



$$P_v + \rho g h = P_{atm}$$

$$P_{atm} = P_v + \gamma h$$

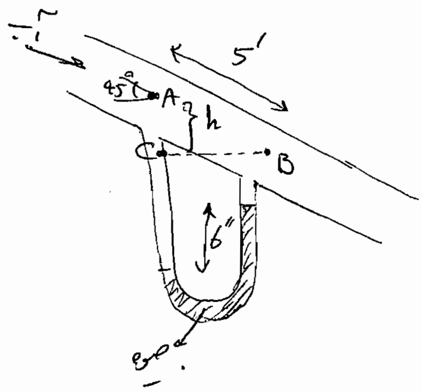
اصل پاسکال :

در یک سیال ساکن فشار در یک نقطه در تمامی جهات یکسان است .

$$P_x = P_y = P_z$$

ولی اگر سیال ساکن نباشد اصل پاسکال برقرار نیست و فشار هر نقطه برابر است با $P = \frac{1}{3}(P_x + P_y + P_z)$

سوال ۲۸ جزوه صبوری :



نکته : در سیستم آمریکایی $1 = \frac{g}{g_c}$ است .

$$\gamma = \rho \cdot g/g_c$$

پس در سیستم آمریکایی از $p = \gamma h$ استفاده می کنیم .

$$\rho_{water} = 62.4 \ \frac{lbm}{ft^3}$$

$$\gamma_{water} = 62.4 \ \frac{lbf}{ft^3}$$

حل تست :

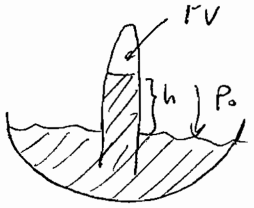
$$\left.\begin{aligned} P_C - P_B &= R(\gamma_{Hg} - \gamma_w) \\ P_C &= P_A + \gamma_w \cdot h \end{aligned}\right\} \rightarrow (P_A + \gamma_w \cdot h) - P_B = R(\gamma_{Hg} - \gamma_w)$$

$$\sin 45° = \frac{h}{5'} \rightarrow h = 3.53 ft$$

$$P_A - P_B = R(\gamma_{Hg} - \gamma_w) - \gamma_w h$$

$$= \frac{6}{12} ft \ \underbrace{(846 - 62.4)}_{\frac{lbf}{ft^3}} - 62.4 \times 3.53$$

$$P_A - P_B = \checkmark$$



سوال ۵۲ جزوه صفحه :

$$P_v + \gamma h = P_a$$

$$3 + \gamma h = 14.7 \longrightarrow \gamma h = 11.7 \text{ psi} = \frac{lbf}{in^2}$$

$$\gamma = 850 \ \frac{lbf}{ft^3} \times \left(\frac{1 \ ft}{12 in}\right)^3 \longrightarrow h = 23.8 \text{ in}$$

روش دوم : حل می‌کنیم تا به این رابطه برسیم .

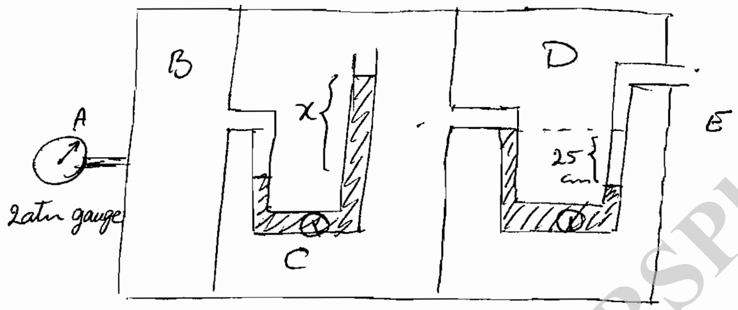
$\gamma h = 11.7$ psi

1 atm = 14.7 psi = 29.92 in-Hg

$$11.7 \quad " \quad x \longrightarrow x = h = \frac{11.7}{14.7} \times 29.92 = 23.8 \text{ in}$$

سوال

فرض: 1 atm = 100 kPa



فشار محفظه C به مقدار منفی است

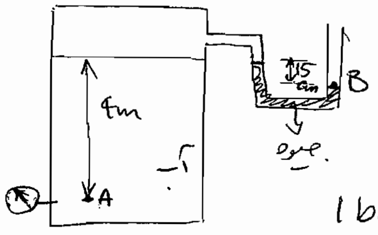
که در مانومتر ① صورت ارتفاع 25cm پایین آمده

$$2 \times 75 - x = -25 \longrightarrow x = 175 \text{ cm}$$

1 atm ≃ 75 cm-Hg

جلسه سوم

سوال ۴۲ جزوه صورتی - سال ۸۱ مهندسی شیمی



$$P_A - \underbrace{4\times1000\times10}_{Pa} + 0.15\times13600\times10 = P_B$$

$$1\,bar = 10^5\,Pa \Rightarrow 1\,Pa \times 10^{-5} = 1\,Bar$$

$$P_A = \frac{40000}{10^5} - \frac{136000\times1.5}{10^5} + P_B$$

$$P_A = P_B + 0.4 - 0.2 \rightarrow P_A = P_B + 0.2$$

و : می دانیم

$P_B = 0$ bargage

$P_B = 1$ bar abs

$\longrightarrow$

$P_A = 0.2$ bar gage نسبی

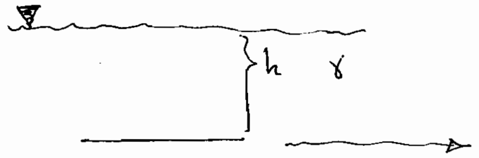
و

$P_A = 1.2$ bar abs مطلق

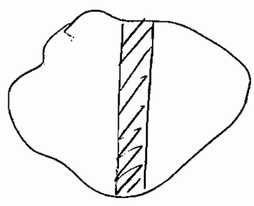
نیروهای وارد بر سطوح غوطه ور در یک سیال :

۴ حالت را بررسی می کنیم :

① نیروهای وارد بر سطوحی که با سطح آزاد سیال موازی اند :



مثلاً سطح مقطع صفحه به این شکل است



یک المان از سطح در نظر می گیریم :

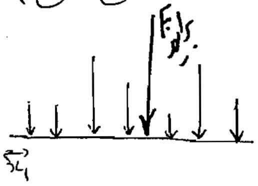
$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F = P.A \longrightarrow dF = P.dA \longrightarrow dF = \gamma h\, dA$$

$$\Rightarrow F = \int \gamma h\, dA = \gamma h A$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \gamma h A} \qquad \boxed{F = P_c . A}$$

توضیح در صفحه ۲۱

روی نقاط مختلف این صفحه ممکن است نیروهای متفاوتی وارد شود به علت عدم تقارن A (شکل سطح مقطع)



$$F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots = F.\bar{x} \qquad \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{F}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dF}{F} = \frac{\int x\,\gamma h\,dA}{\gamma h A} = \frac{1}{A}\int x\,dA$$

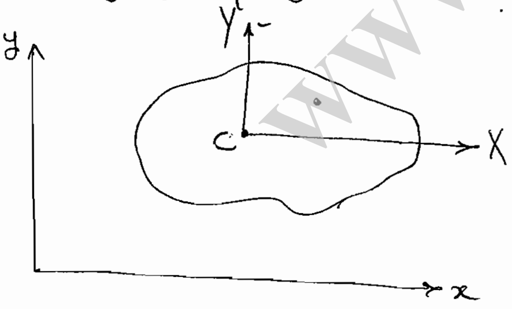
نکته: $I = \int x^m\,dM$

$\downarrow$ ممان مرتبه mام کمیت M نسبت به محور y ها

$I = \int x\,dF =$ ممان مرتبه اول نیرو نسبت به محور y = گشتاور

$I = \int x\,dA =$ ممان مرتبه اول سطح نسبت به محور y

مرکز سطح یک جسم نقطه‌ای است که اگر محورهای مختصات را به آن نقطه منتقل کنیم ممان اول مساحت برابر صفر باشد.



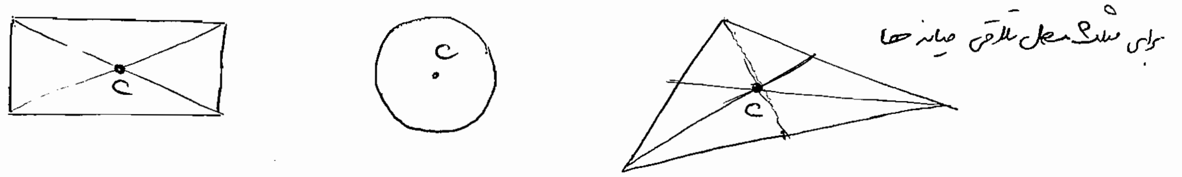
$$I = \int X_{\text{جدید}}\,dA$$

$$\underset{\swarrow 0}{I} = \int (x - x_c)\,dA$$

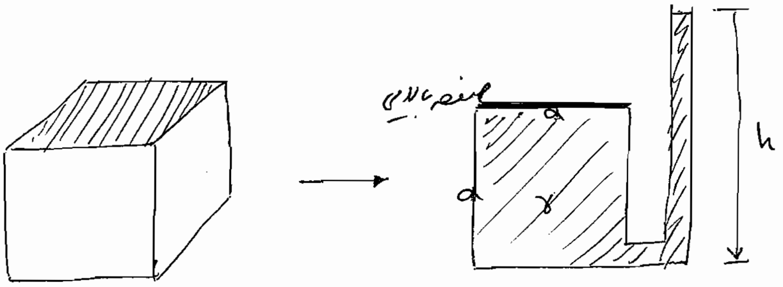
$$\int x\,dA - \int x_c\,dA = 0 \Rightarrow \int x\,dA = x_c A$$

$$\rightarrow \boxed{x_c = \frac{1}{A}\int x\,dA}$$

⊛ برای یک صفحه‌ی موازی با سطح آزاد سیال در داخل سیالی فرو رفته است نیروی وارده برابر است با فشار در مرکز سطح صفحه ضرب در مساحت صفحه که این نیرو بر مرکز سطح وارد می‌شود.



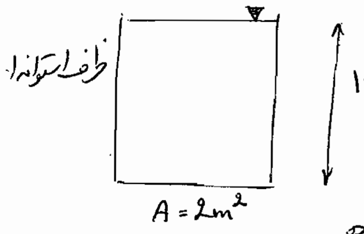
مثال: در شکل مقابل نیروی وارد بر سطح بالایی یک مکعب به ابعاد axaxa برابر است با:



$$F = P.A \quad , \quad P = \gamma h - \gamma a = \gamma(h-a)$$

$$F = \gamma(h-a)\,a^2 = \gamma(ha^2 - a^3)$$

سوال ۷۵ جزوه صورتی :



$$\underset{\frac{N}{m^3}}{\underset{\downarrow}{\gamma}} = a + by \qquad \underset{\text{ثابت}}{a , b} > 0$$

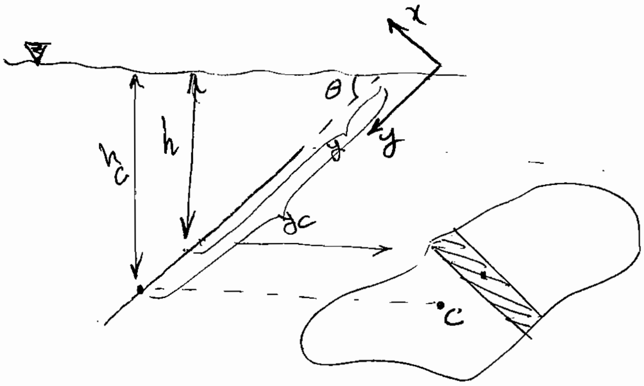
چون γ سیال در ستون مایع تغییر می‌کند مثل این است که چند سیال با γ مختلف روی هم ریختیم.

$$F = \int_0^1 A(a+by)\,dy = 2\left[ay + \frac{b}{2}y^2\right]_0^1 = 2\left(a + \frac{b}{2}\right)$$

$$F = 2a + b$$

صفحه ۳۵۹ سوال ۵۶ مخازن سال ۸۸

② نیروی وارد بر سطوح مورب :



$$dF = P.dA = \gamma h dA \qquad \sin\theta = \frac{h}{y} \rightarrow h = y\sin\theta$$

$$dF = \gamma y \sin\theta \, dA$$

$$F = \int \gamma y \sin\theta \, dA = \gamma \sin\theta \int y \, dA$$

طبق تعریف مرکز سطح : $y_c = \frac{1}{A}\int y \, dA$

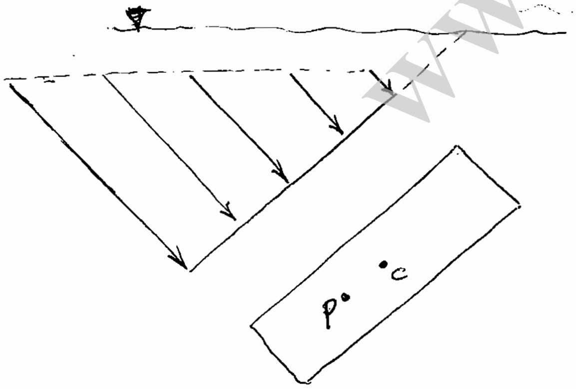
$$\rightarrow F = \gamma \sin\theta \cdot y_c \cdot A$$

برای نقطه C : $\sin\theta = \frac{h_c}{y_c} \rightarrow h_c = y_c \sin\theta \longrightarrow F = \gamma h_c \cdot A$

$$\boxed{F = P_c \cdot A}$$

⊛ فشار در مرکز سطح × مساحت صفحه = نیروی وارد بر مرکز سطح صفحه مورب

که این نیرو در مرکز فشار وارد می شود .

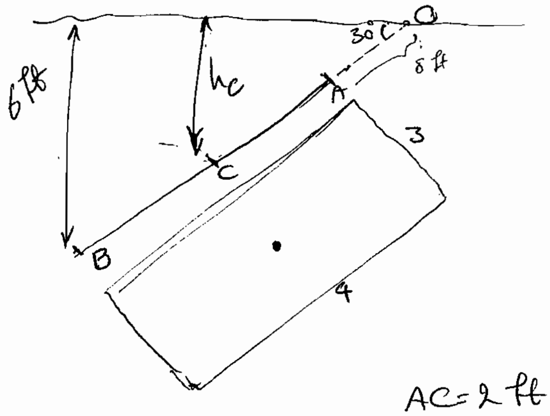


این شکل نشان می دهد .
نیروی وارد بر نیمه پایینی صفحه در مقایسه با نیروی وارد بر نیمه بالایی صفحه خیلی زیاد است
بنابراین نیروی برآیند به نقطه‌ای وارد می شود که از مرکز سطح صفحه پایین‌تر می باشد این نقطه را مرکز فشار می نامیم .

سال ۸۷ نظارت سوال ۵۳ : همین .

بوزن مخصوص γ

مثال : یک صفحه مستطیلی به ابعاد 3ft×4ft طوری داخل سیالی قرار گرفته است که ضلع 3ft آن با سطح آزاد موازی و بیشترین فاصله صفحه از سطح آزاد برابر 6ft می‌باشد اگر امتداد این صفحه با سطح سیال زاویه 30° بسازد مقدار نیروی وارد بر یک طرف صفحه برابر است با :



$$F = \gamma h_c . A$$

$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{6}{OB} \longrightarrow OB = 12\ ft$$

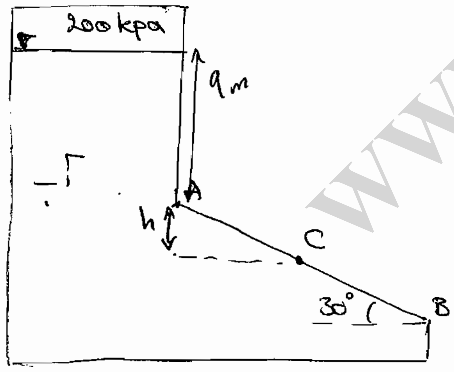
$$OA + AB = 12\ ft \longrightarrow OA = 8\ ft$$

$$AC = 2\ ft \rightarrow OC = 10\ ft$$

$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{h_c}{10} \longrightarrow h_c = 5\ ft$$

$$F = \gamma \times 5 \times 3 \times 4 = 60\gamma$$

مثال: در شکل مقابل نیروی وارد بر صفحه مربعی AB به ضلع 4m بر حسب kN برابر است با :



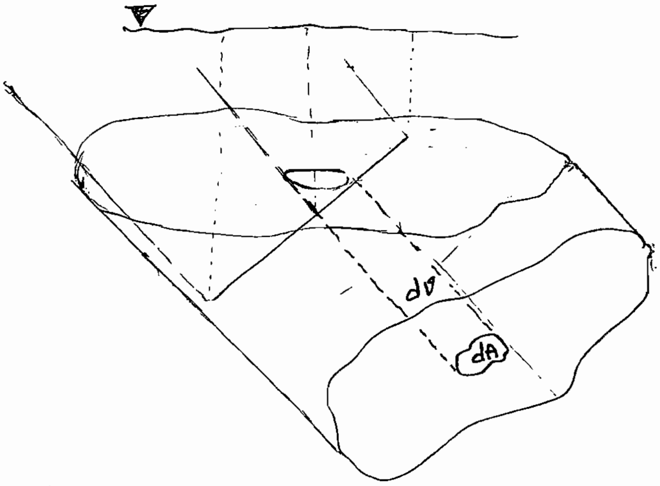
$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{h}{AC} = \frac{h}{2m} \longrightarrow h = 1m$$

$$P_C = 200\ kpa + \gamma(9+1)$$

آب $\gamma = \rho g = 10000\ \frac{N}{m^3} = 10\ \frac{kN}{m^3}$

$$P_C = 200\ kPa + 10\ \frac{kN}{m^3} \times 10\ m = 300\ \frac{kN}{m^2}$$

$$F = P_c . A = 300(4 \times 4) = 4800\ kN$$



منشور فشار :

اگر یک صفحه را در نظر بگیریم و در هر نقطه از صفحه عمودی بر آن رسم کنیم به نحوی که ارتفاع آن برابر فاصله آن نقطه از سطح آزاد سیال باشد در این صورت روی صفحه منشوری ایجاد می‌شود که به آن منشور فشار می‌گویند. برای این صفحه می‌توان نوشت .

$$dF = p\,dA$$

$$dF = \gamma h\,dA = \gamma Z\,dA$$

چون ارتفاع وارد بر صفحه در المان dA برابر Z است و ارتفاع هر نقطه برابر h است پس Z=h

$$dF = \gamma\,dV$$

$$\boxed{F = \underset{\text{سیال}}{\gamma} \cdot \underset{\text{منشور}}{V}}$$

پس نیروی وارد بر یک صفحه مورب برابر است با وزن سیال هم حجم منشور

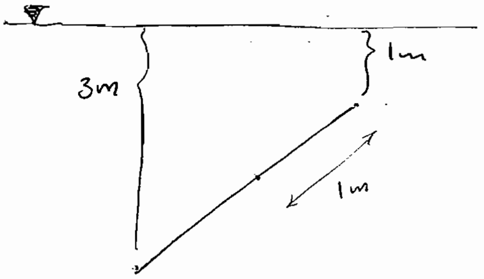
علاوه بر این می‌توان نوشت :

$$\bar{x}F = \int x\,dF$$

$$\bar{x}\cdot\gamma V = \int x\,\gamma\,dV \xrightarrow{\gamma = cte} \boxed{\bar{X} = \frac{1}{V}\int X\,dV}$$

یعنی امتداد نیروی برایند از مرکز حجم منشور فشار عبور می‌کند .

سوال ۷۱ جزوه صورتی - مهندسی شیمی سال ۸۵ سوال ۹۶ :

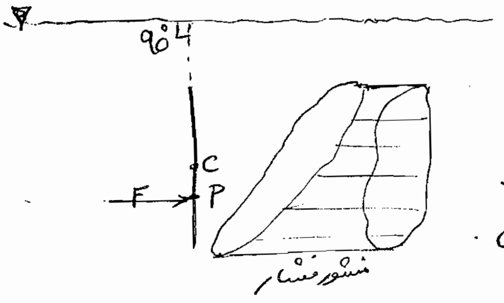


از منشور فشار برای حل استفاده می‌کنیم :

$$F = \gamma V = \gamma\left[\pi r^2\right]\bar{h} = \gamma.(\pi\times1)\left(\frac{1+3}{2}\right)$$

$$F = 2\pi\gamma$$

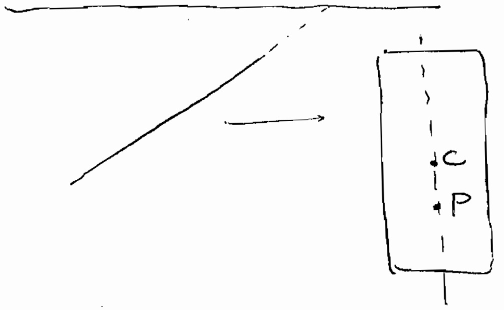
③ نیروی وارد بر صفحه عمود بر سطح آزاد سیال :



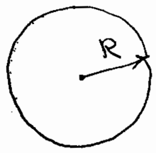
این حالت، حالت خاصی از صفحه مورب است که $\theta = 90^\circ$ است
پس تمام قوانینی که برای صفحه مورب گفته شد اینجا هم برقرار است.

$$\boxed{F = P_c \cdot A = \gamma h_c \cdot A}$$ ← این نیرو بر مرکز فشار وارد می‌شود.

محل اثر نیرو در یک صفحه مورب و صفحه عمودی :

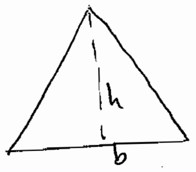


$$\boxed{|y_p - y_c| = \frac{I_{xx} \cdot \sin\theta}{h_c \cdot A}}$$



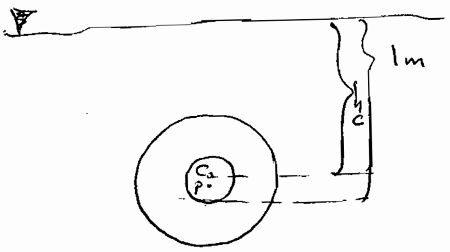
$$I_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12} b h^3$$



$$I_{xx} = \frac{1}{36} b h^3$$

سوال ۲۵ جزوه صنعتی :



$\gamma_{H_2O} = 10000$

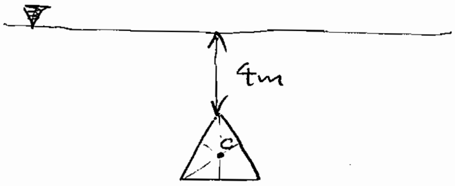
$r_i = 0.1 m$

$r_o = 0.2 m$

$$F = \gamma h_c \cdot A = \gamma (0.9) \pi (0.2^2 - 0.1^2) = 270 \pi$$

$$I_{xx} = \frac{\pi}{4} (r_o^4 - r_i^4) \longrightarrow |y_p - y_c| = \frac{\frac{\pi}{4}(0.2^4 - 0.1^4) \times 1}{0.9 \times \pi (0.2^2 - 0.1^2)}$$

$$\rightarrow |y_p - y_c| = 0.015 \text{ m}$$

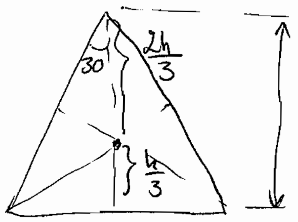


سوال ۶۲ جزوه صحتی

فرض ضلع 50cm .

$F = \gamma h_c . A$

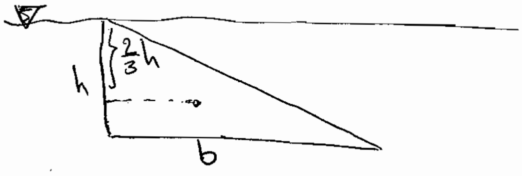
$F = \gamma \left[4 + \frac{2}{3} h \right] \frac{h \times 0.5}{2}$



$\cos 30 = \frac{h}{0.5} \longrightarrow h = 0.5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.42 \longrightarrow F = 10000 \left[4 + \frac{2}{3} \times 0.42 \right] \frac{0.42 \times 0.5}{2}$

$F = 4642 \ N$

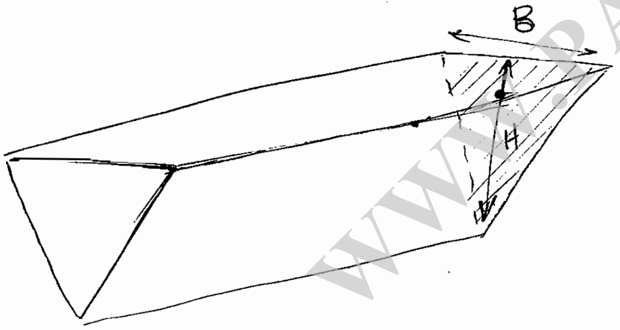
سوال ۹۱ جزوه صحتی :



$F = \gamma h_c . A$

$F = \gamma \left(\frac{2}{3} h\right)\left(\frac{1}{2} b h\right) = \frac{1}{3} \gamma b h^2$

سال ۸۶ مهندسی شیمی سوال ۷۹ :



$F = \gamma h_c . A = \gamma \ \frac{H}{3} \left(\frac{BH}{2} \right)$

$F = \frac{1}{6} \gamma B H^2$

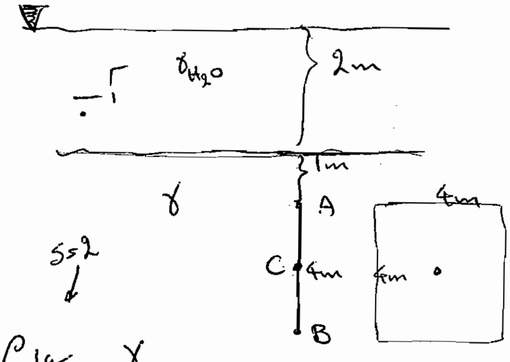
۱ ← $\gamma = 10000 \ \frac{N}{m^3} = 10 \ \frac{kN}{m^3} = 62.4 \ \frac{lbf}{ft^3}$

$\uparrow$ $g = 10 \ m/sec$

حال شرایطی را در نظر می‌گیریم که چند سیال داشته باشیم :

حالت اول : کل سطح درون سیال باشد .

نیروی وارد بر صفحه مستطیلی AB به عمق 4m

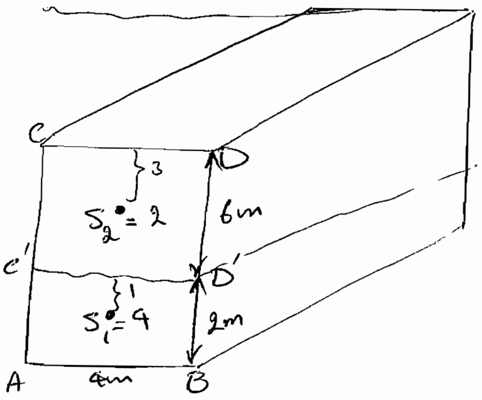


$F = P_C . A = (\underbrace{2 . \gamma_{H_2O}}_{h_1 \gamma_1} + \underbrace{3 . \gamma}_{h_2 \gamma_2}) . 4 \times 4$

$S = \frac{\rho_{liq}}{\rho_w} = \frac{\gamma}{\gamma_w} \longrightarrow \gamma = 2 \times \gamma_w = 20$

$F = (2 \times 10 + 3 \times 20) \ 16 = 1280 \ kN$

حالت دوم: سطح در چند سیال فرو رفته :



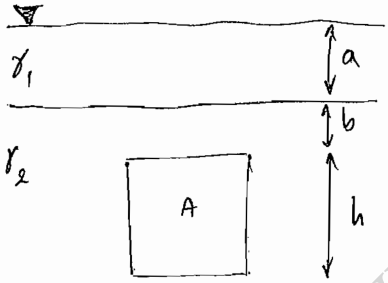
نیروی وارد بر سطح ABCD چند کیلو نیوتن است؟

$$F_{ABCD} = F_{ABC'D'} + F_{C'D'DC}$$

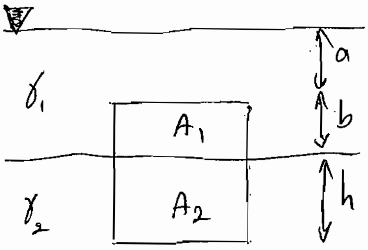
$$F_{CDC'D'} = \gamma_2 h_c \cdot A = 20 \times 3 \times 24 = 1440 \text{ kN}$$

$$F_{ABC'D'} = P_c \cdot A = [\gamma_2 \times 6 + \gamma_1 \times 1]\, 2 \times 4 = (20 \times 6 + 40 \times 1)\, 8 = 1280 \text{ kN}$$

$$\rightarrow F_{ABCD} = 1440 + 1280 = 2720 \text{ kN}$$



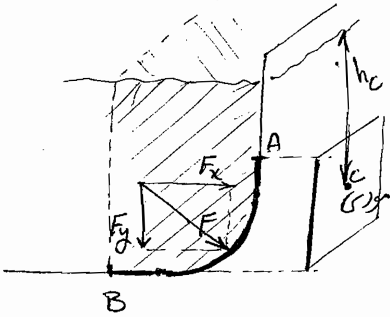
$$F = \left[\gamma_1 \cdot a + \gamma_2 \left(b + \frac{h}{2}\right)\right] A$$



$$F = \gamma_1 \left(a + \frac{b}{2}\right) A_1 + \left[\gamma_1 (a+b) + \gamma_2 \left(\frac{h}{2}\right)\right] A_2$$

جلسه چهارم

④ نیروهای وارد بر سطوح انحنادار :



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

برای محاسبه نیروی افقی F_x ابتدا تصویر سطح انحنادار را روی صفحه عمودی بدست می‌آوریم سپس نیروی وارد بر آن را محاسبه می‌کنیم.

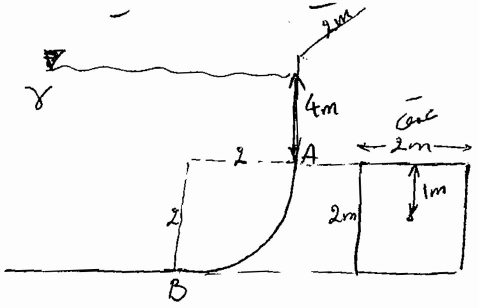
$$\boxed{F_x = P_c \cdot A = \gamma h_c \cdot A} \rightarrow$$ مساحت تصویر سطح انحنادار

برای بدست آوردن نیروی عمودی F_y وزن سیال بالای سطح را تا سطح آزاد سیال بدست آوریم.

نیروی وزن [illegible]

$$\boxed{F_y = \gamma V}$$

مثال: برای ربع استوانه AB به شعاع 2m و عمق 2m نیروی افقی، نیروی عمودی و نیروی کل وارده را بدست آورید.

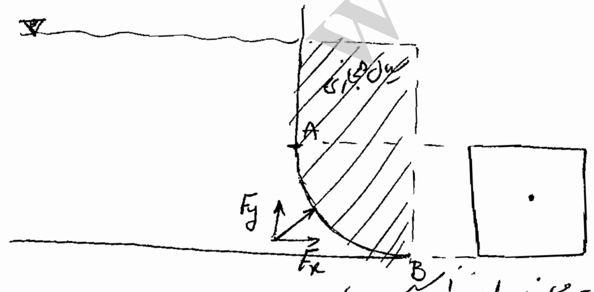


$$F_x = \gamma h_c \cdot A = \gamma(4+1)(2\times2) = 20\gamma$$

$$F_y = \gamma V = \gamma\left[4\times2 + \frac{\pi}{4}(2)^2\right]\times2$$

$$F_y = 22.28\ \gamma$$

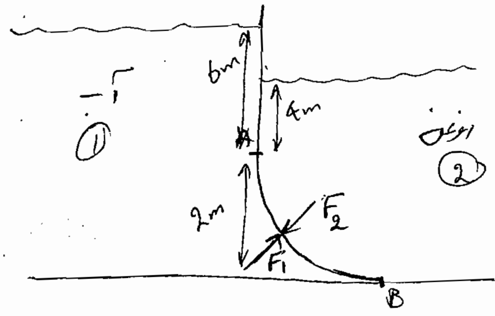
$$F = \sqrt{(20\gamma)^2 + (22.28\gamma)^2} = 29.94\gamma$$



$$F_x = \gamma h_c \cdot A = 20\gamma$$

برای محاسبه F_y باز هم مثل مثال قبل عمل می‌کنیم

پس نیرو به همان اندازه مثال قبل است (البته وزن سیال مجازی را در نظر می‌گیریم).



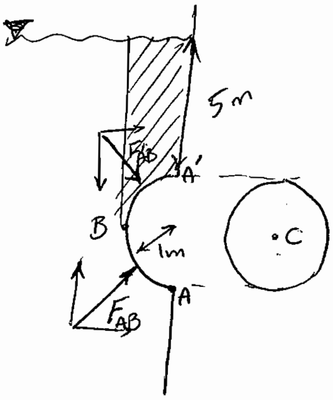
$$F_{x_1} = \gamma_{\text{آب}}(6+1)(2\times2) = 28\gamma_{\text{آب}}$$

$$F_{y_1} = \gamma_{\text{آب}}\left[6\times2 + \frac{\pi}{4}(2)^2\right]\times2 =$$

$$F_{x_2} = \gamma_{\text{روغن}}(4+1)(2\times2) =$$

$$F_{y_2} = \gamma_{\text{روغن}}\left[4\times2 + \frac{\pi}{4}(2^2)\right]\times2$$

$$F_x = F_{x_1} - F_{x_2} \qquad F_y = F_{y_1} - F_y$$



سوال ۷۹ جزوه صنعتی :

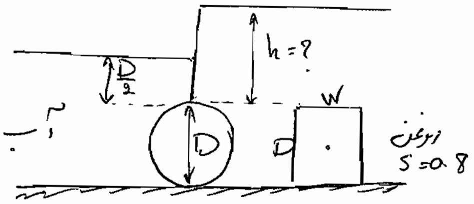
$$F_x = \gamma h_c \cdot A = \gamma(5+1)\ \pi(1)^2 = 6\pi\gamma$$

$$F_{y_{AB}} = \gamma\left[V_{\text{هاشورخورده}} + V_{\text{نیم‌کره}}\right]$$

$$F_{y_{A'B}} = \gamma\left[V_{\text{هاشورخورده}}\right]$$

$$F_{y_{AB}} > F_{y_{A'B}} \rightarrow F_y = F_{y_{AB}} - F_{y_{A'B}}$$

$$\Rightarrow F_y = \gamma \cdot V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{2}{3}\pi\gamma$$



سوال ۸۳ جزوه صنعتی : لوله استوانه‌ای شکل

$$F_{x_{\text{سمت آب}}} = \gamma_{\text{آب}} \cdot \left(\frac{D}{2}+\frac{D}{2}\right)\cdot D\times W$$

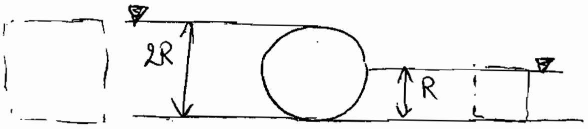
$$F_{x_{\text{روغن}}} = \gamma_{\text{روغن}}\left(\frac{D}{2}+h\right)\cdot D\times W$$

$$F_{x_{\text{آب}}} = F_{x_{\text{روغن}}} \Rightarrow \gamma_w \cdot D \cdot \cancel{D}\cdot\cancel{W} = \gamma_{\text{روغن}}\left(\frac{D}{2}+h\right)\cancel{D}\times\cancel{W}$$

$$\cancel{\gamma_w}\cdot D = 0.8\cancel{\gamma_w}\left(\frac{D}{2}+h\right)$$

$$\Rightarrow D = 0.4D + 0.8h \rightarrow h = \frac{3}{4}D$$

سوال ۸۴ جزوه صنعتی : نیروی وارد بر واحد طول استوانه



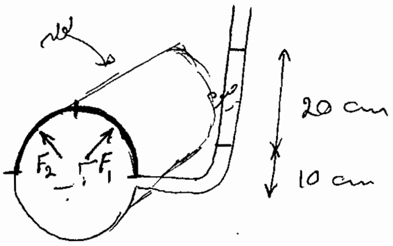
$$F_{x_1} = \gamma(2R\times1)\cdot R = 2\gamma R^2$$

$$F_{x_2} = \gamma(R\times1)\cdot\frac{R}{2} = \frac{1}{2}\gamma R^2$$

$$F = F_{x_1} - F_{x_2} = \frac{3}{2}\gamma R^2$$

سوال 72 ، 73 ، 80 ، 81 ، 82 حل شود .

سوال 68 جزوه صفحه :



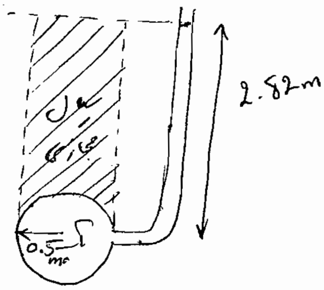
$$F_{x_1} = F_{x_2} \rightarrow F_x = 0$$

20cm جیوه را هم به آب تبدیل می‌کنیم تا با یک سیال سروکار داشته باشیم :

$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2$$

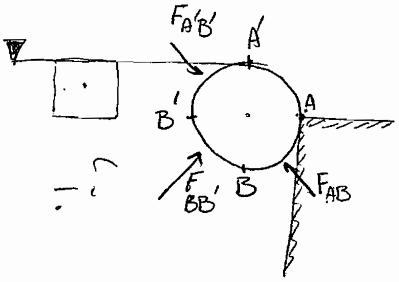
$$13.6\gamma_w \times 0.2 = \gamma_w . h \longrightarrow h = 2.72\ m$$

20cm جیوه معادل 2.72m آب است پس کل ارتفاع آب : $2.72 + 0.1 = 2.82\ m$



$$F_y = \gamma V = \gamma \left[\underset{\text{قطر لوله}}{1} \times 2.82 \times \underset{\text{عمق واحد}}{1} - \frac{\pi}{2}(0.5)^2 \times 1 \right]$$

$$F_y = 2.42\ \gamma$$



سوال 70 جزوه :

L = 3m

D = 0.5m

$F_{x_{AB}} = F_{x_{BB'}}$ مخالف جهت هم

پس برآیند این دو نیرو صفر است

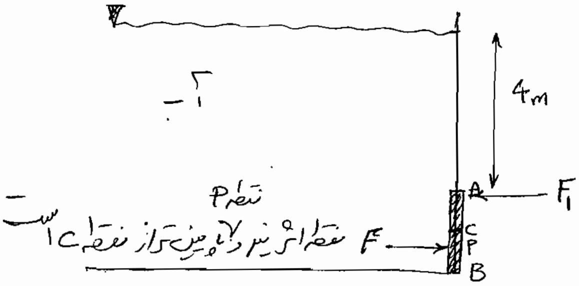
پس تنها مولفه نیروی افقی $F_{x_{A'B'}}$ است . $9800\ N/m^3$

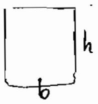
$$F_{x_{A'B'}} = \gamma . h_c . A = \underset{9800}{\gamma} \left(\frac{0.25}{2}\right)(3 \times 0.25) = 918.75\ N$$

به نقطه A نیروی عمودی وارد نمی‌شود چون سیال معادل ولی در راستای افقی است .

مثال : دریچه AB به ابعاد 2m×2m در نقطه B لولا شده است

مقدار نیروی F_1 چقدر باشد تا دریچه باز شود





$$F = \gamma h_c . A = 10\ \frac{kN}{m^3} \times (4+1)\,m \times 4m^2$$

$$F = 200\ kN$$

$$|y_p - y_c| = \frac{I_{xx} . \sin\theta}{h_c . A} = \frac{\frac{1}{12} b h^3 . \sin\theta}{h_c . A} = \frac{\frac{1}{12} \times 2 \times (2)^3 \times 1}{5 \times 2 \times 2} = \frac{1}{15} \simeq 0.07\ m$$

$$\overline{CP} = 0.07\ m$$

$$F \times \overline{PB} = F_1 \times \overline{AB} \Rightarrow F_1 = \frac{200\ (1-0.07)}{2} = 93\ kN$$

!

نیروهای شناوری (بویانسی)

γ سیال

γ_s جسم جامد

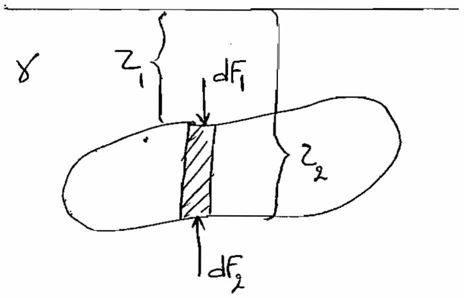
جسم جامد را درون سیالی قرار می‌دهیم ۳ حالت به وجود می‌آید:

$\gamma_s < \gamma \longrightarrow$ شناوری

$\gamma_s > \gamma \longrightarrow$ غوطه‌وری

$\gamma_s = \gamma \longrightarrow$ جسم را در هر نقطه‌ای از سیال قرار دهیم در همان نقطه باقی می‌ماند

غوطه‌وری:



$$dF_2 = \gamma z_2 dA \xrightarrow{z_2 > z_1} dF_2 > dF_1$$
$$dF_1 = \gamma z_1 . dA$$

$$\Rightarrow \quad dF_2 - dF_1 = dF_B = \gamma \underbrace{(z_2 - z_1)}_{z} dA$$

$$dF_B = \gamma z dA \Rightarrow dF_B = \gamma dV \longrightarrow \boxed{F_B = \gamma . V}$$

نیروی بویانسی

سیال

جسم

اگر یک جسم در سیالی فرو رود از طرف سیال بر جسم همواره یک نیروی رو به بالا وارد می‌شود که آن را نیروی غوطه‌وری می‌نامیم. مقدار نیروی بویانسی برابر است با وزن سیال هم حجم جسم.

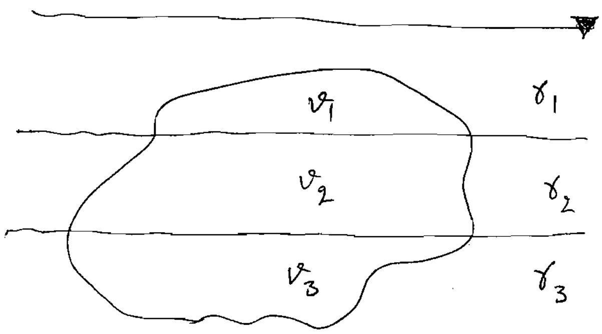
می‌خواهیم محل اثر نیروی غوطه‌وری را پیدا کنیم:

$$\bar{x} . F_B = \int x . dF_B$$

$$\bar{x} . \gamma . V = \int x . \gamma dV \Rightarrow \boxed{\bar{X} = \frac{1}{V} \int x dV}$$

امتداد نیروی بویانسی از مرکز حجم عبور می‌کند.

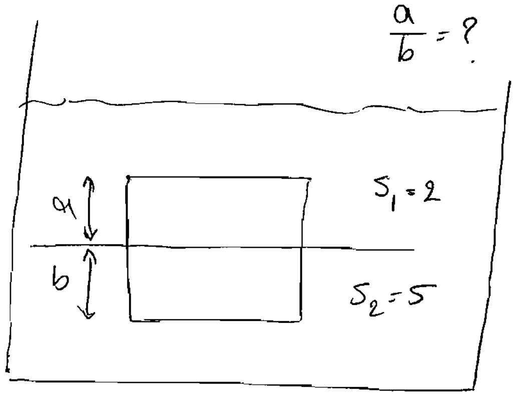
اگر جسم در چند سیال غوطه‌ور شود :



$$F_B = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 + \gamma_3 V_3$$

مثال : یک جسم مکعبی مطابق شکل در دو سیال فرو رفته است . $\frac{a}{b} = ?$

برای جسم جامد $S = 3$



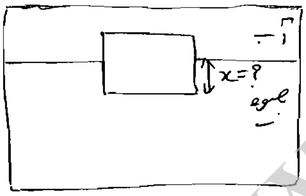
$$F_B = W$$

$$\gamma_2 V_2 + \gamma_1 V_1 = V \cdot \underset{\text{جسم جامد}}{\gamma}$$

$$5\gamma_w \, b \times \underset{\text{سطح مقطع}}{A} + 2\gamma_w \cdot a \times A = (a+b) A \times 3\gamma_w$$

$$\Rightarrow 5b + 2a = 3(a+b) \Rightarrow 2b = a \longrightarrow \frac{a}{b} = 2$$

سوال ۹۹ جزوه استاتیک :



$W = 445 \text{ N}$

هر ضلع مکعب 0.3 m

$$W = F_B$$

$$\Rightarrow \underbrace{445}_{\text{450 فرض می‌کنیم}} = \underbrace{133400}_{\text{133000 فرض می‌کنیم}} (x \times 0.3 \times 0.3) + \underbrace{9806}_{\text{10000 فرض می‌کنیم}} \times 0.3 \times 0.3 (0.3 - x)$$

$$450 = 12000x + 270 - 900x \longrightarrow x = 0.018$$

جواب صحیح $x = 0.0162$

وقتی جسمی درون سیالی فرو می‌رود علاوه بر نیروی وزن یک نیروی رو به بالا را نیز حس می‌کند یعنی جسم از وزن واقعی خود به اندازه نیروی غوطه‌وری سبک‌تر به نظر می‌رسد به عبارتی جسم وزن واقعی خود را حس نکرده و وزن ظاهری را حس می‌کند .

$$\boxed{\underset{\text{ظاهری}}{W} = \underset{\text{واقعی}}{W} - F_B}$$

سوال ۹۲ فرم صورتی :

$W_{\text{واقعی}} = 2N$

$W'_{\text{ظاهری}} = 1.5N$

$\rho = ?$

$$W' = W - F_B \longrightarrow F_B = 0.5\,N$$

$$F_B = \gamma\, V_{\text{جسم}}^{\text{سیال}} \simeq 10000 \cdot V_{\text{جسم}}$$

$$V = \frac{0.5}{10^4}\,m^3 = 50\ cm^3$$

$$W_{\text{واقعی}} = 2\,N = mg = m \times 10 \longrightarrow m = 0.2\ kg = 200\ gr$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{200\ gr}{50\ cm^3} = 4\ gr/cm^3$$

$$S = \frac{\rho}{\rho_W} = \frac{4\ gr/cm^3}{1\ gr/cm^3} = 4$$

سوال ۹۱ :

$$\Sigma F = ma$$

$$W - F_B = ma \Rightarrow mg - \gamma_{\text{سیال}} \cdot V = ma$$

$$\gamma_s \cdot V - \gamma_{\text{سیال}} \cdot V = \rho_s \cdot V \cdot a$$

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{g}$$

$$3\gamma_w - \gamma_w = \frac{3\gamma_w}{g} \cdot a \Rightarrow a = \frac{2}{3}g$$

این در حالت ایده‌آل است که هیچ اصطکاکی و درگ وجود نداشته باشد .

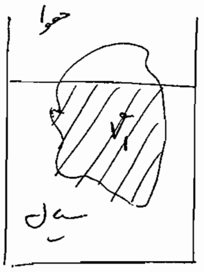
در نتیجه

$$a < \frac{2}{3}a$$

شناوری :

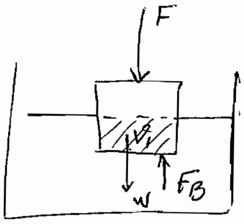
اگر γ جسم جامد کمتر از γ سیال باشد (وزن مخصوص) در این صورت فقط قسمتی کمی از جسم جامد در سیال فرو می‌رود که به این حالت شناوری می‌گوئیم . برای شناوری اصل ارشمیدس برقرار است .

اگر جسمی در سیالی شناور شود وزن سیال جابجا شده برابر است با وزن جسم .



$$W_{\text{جسم}} = \gamma_{\text{سیال}} \cdot V_1$$

مثال: یک قطعه چوبی به ابعاد $4\times4\times1\ ft^3$ و $S=0.5$ در اثر اعمال نیروی 400 lbf در آب به حالت شناور درمی آید محاسبه کنید چه حجمی از قطعه چوب در داخل آب فرو می رود.



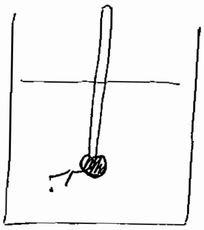
$$400 + 0.5\times \overset{\gamma_w}{\overset{\downarrow}{62.4}} \times4\times4\times1 = 62.4\times V_1$$

$$V_1 = 14.41\ ft^3$$

$$\boxed{\rho_s V g = \gamma_s\cdot V = S\cdot\gamma_w\cdot V}$$

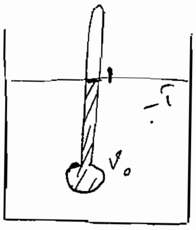
کاربرد هیدرومتر:

هیدرومتر وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری دانسیته مایعات و بر اساس نیروی شناوری کار می کند.

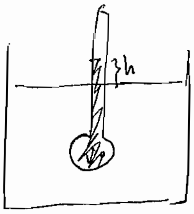


هیدرومتر را با چند سیال که دانسیته‌شان معلوم است مدرج می‌کنیم بعد برای مشخص کردن دانسیته سیال با دانسیته مجهول استفاده می‌کنیم.

در حالت دیگر می‌توانیم از هیدرومتر مدرج شده آزمایش را شروع کرد.



$$w = V_0\cdot\gamma_w$$



$$w = (V_0 - ah)\gamma$$

$$V_0\gamma_w = (V_0 - ah)\gamma = (V_0 - ah)\cdot S\gamma_w$$

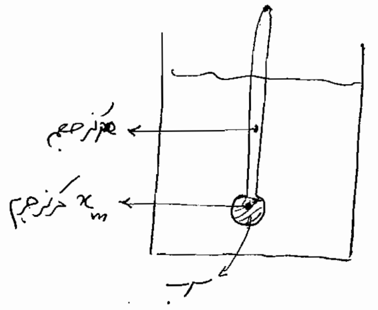
$$\Rightarrow V_0 = V_0 S - ahS \longrightarrow \boxed{h = \frac{V_0}{a}\left(\frac{S-1}{S}\right)}$$

هیدرومتر در سیالی که دانسیته کمتری دارد بیشتر فرو می رود.

تعادل :

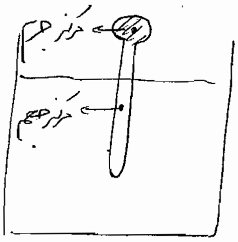
تعادل یک جسم یا پایدار است یا ناپایدار یا خنثی .

تعادل پایدار : یک جسم زمانی تعادل پایدار دارد که اگر آن را از حالت اولیه کمی منحرف کنیم جسم دوباره به حالت اول برمی گردد .



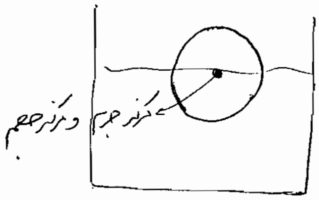
یک جسم زمانی تعادل پایدار دارد که مرکز جرم جسم از مرکز حجم جسم پایین تر باشد یا به عبارت دیگر یک جسم زمانی تعادل پایدار دارد که مرکز جرم جسم از مرکز اثر نیروی بویانسی پایین تر باشد .

تعادل ناپایدار : یک جسم زمانی تعادل ناپایدار دارد که اگر آن را از حالت اولیه کمی منحرف کنیم جسم حالت جدیدی به خود گرفته و به حالت اول برنمی گردد .



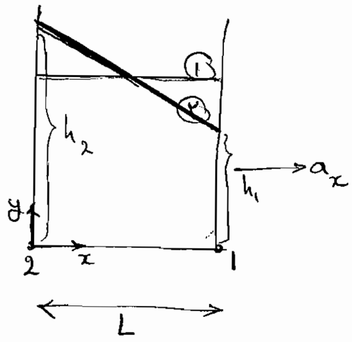
یک جسم زمانی تعادل ناپایدار دارد که مرکز جرم از مرکز حجم جسم (یا محل اثر نیروهای بویانسی) بالاتر باشد

تعادل خنثی : یک جسم زمانی تعادل خنثی دارد که مرکز جرم و مرکز حجم برهم منطبق باشند .



جلسه ششم

حرکت صلب گونه سیال :

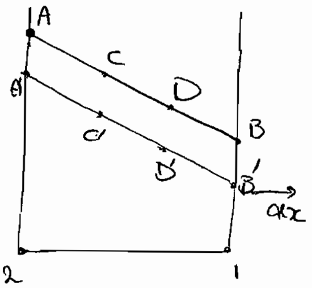


سیالی درون ظرفی ریخته شده است. حرکت نقطه ظرف با شتاب a_x شروع به حرکت می‌کند سطح مایع درون ظرف از حالت ① به حالت ② تغییر شکل می‌دهد.

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} < 0 \longrightarrow \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} < 0 \longrightarrow \frac{P_2 - P_1}{0 - L} < 0 \longrightarrow P_2 - P_1 > 0$$

$$\rightarrow P_2 > P_1$$



$\rightarrow h_2 > h_1$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho (a_y + g)}$$

$P_1 = P(x,y)$

$$dp = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy$$

$$\boxed{dp = -\rho a_x \cdot dx - \rho (a_y + g) dy}$$

تمام نقاطی که روی خط AB قرار دارند فشارشان با هم برابر است (فشار محیط). خط AB را خط هم فشار یا خط ایزوباری نامند.

تمام نقاط روی $A'B'$ هم با هم، هم فشار شد پس $A'B'$ هم خط هم فشار است (موازی $A'B'$ AB)

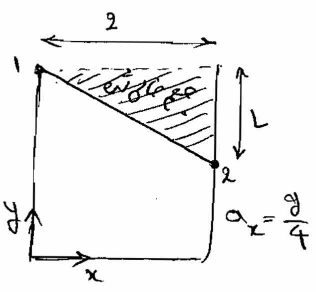
برای خط هم فشار : $dP = 0$

$$dP = 0 \longrightarrow -\rho a_x dx - \rho (a_y + g) dy = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{a_x}{a_y + g}}$$

شیب خطوط هم فشار

مثال: یک ظرف مکعبی به ابعاد $2m \times 2m \times 2m$ از آب پر شده است. این ظرف را با شتاب ثابت $\frac{g}{4}$ در راستای x به حرکت در می‌آوریم. حساب کنید چند درصد از آب داخل ظرف بیرون می‌ریزد؟



$$\text{حجم مثلث خالی شده} = \text{حجم آب تخلیه شده} = \frac{L \times 2}{2} \times \overset{\text{عمق}}{2} = 2L$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_x}{a_y + g} = \frac{-\frac{g}{4}}{0 + g} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{4} \rightarrow \frac{(2-L) - 2}{2 - 0} = -\frac{1}{4} \rightarrow L = \frac{1}{2} m$$

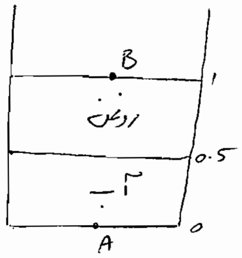
$\text{حجم آب تخلیه شده} = 2L = 1\ m^3$

حجم تخلیه شده

$\text{درصد آب تخلیه شده} = \frac{1}{8} \times 100 = 12.5\%$

حجم کل → 8

مثال: یک ظرف تا ارتفاع 0.5 m از آب و تا ارتفاع 1 متری از روغنی با دانسیته 750 $\frac{kg}{m^3}$ پر شده است. این ظرف را با شتاب ثابت $\frac{g}{2}$ به سمت بالا به حرکت درمی‌آوریم. ماکزیمم فشار داخل ظرف برحسب KPa چقدر است؟



$$dp = -\rho \underset{0}{\cancel{a_x}}\, dx - \rho(a_y + g)\, dy$$

$$\Rightarrow dp = -\rho(a_y+g)\, dy$$

ماکزیمم فشار در داخل ظرف در کف ظرف اتفاق می‌افتد.

نکته: g همواره مثبت قرار می‌دهیم. اگر حرکت به سمت بالا باشد a_y مثبت و اگر حرکت به سمت پایین باشد a_y را منفی در نظر می‌گیریم.

$$dp = -\rho\left(\frac{g}{2}+g\right) dy = -\rho\left(\frac{3}{2}g\right) dy$$

روش اول $\rightarrow$ $$\int_B^A dp = -\frac{3}{2}g\int_{y_B=1}^{y_A=0} \rho\, dy = \frac{3}{2}g\left[\int_0^{0.5} \rho_w\, dy + \int_{0.5}^{1} \rho_{oil}\, dy\right]$$

$$= \frac{3}{2}\times 9.8\left[(1000\times 0.5)+(750\times 0.5)\right] \rightarrow P_A - P_B = 12890\ pa$$

$$P_{B\,نسبی} = 0 \longrightarrow P_{A\,نسبی} = 12.890\ Pa = 12.89\ KPa$$

$$P_{A\,مطلق} = 101300 + 12890 =$$

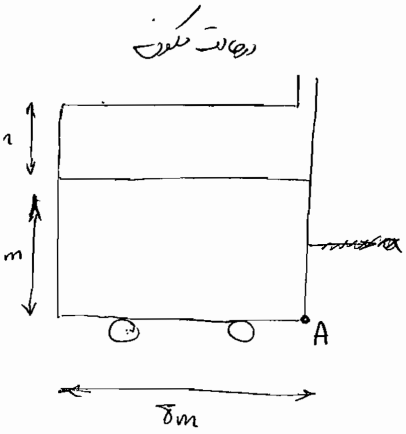
روش دوم $\Rightarrow$ $$dp = -\rho\left(\frac{3}{2}g\right) dy$$

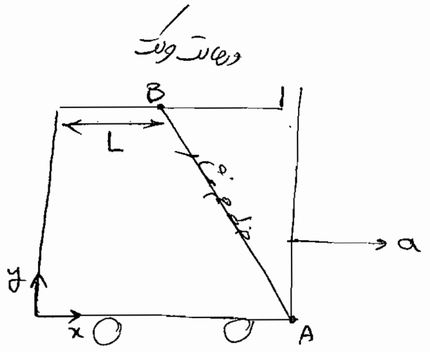
$$\rho_{oil}\times h_{oil} = \rho_w \cdot h_w \rightarrow 750\times 0.5 = 1000\times h_w \rightarrow h_w = 0.375\ m$$

کل ارتفاع معادل آب $= 0.5 + 0.378 = 0.875\ m$

$$\rightarrow \int_{P_B}^{P_A} dp = -\frac{3}{2}g\rho_w\int_{y_B=0.875}^{y_A=0} dy \rightarrow P_A - P_B = -\frac{3}{2}\rho_w \cdot g(0-0.875)$$

$$\rightarrow P_A - P_B = 12890\ Pa = 12.89\ kPa$$





سوال ۱۱۸ خروج صنعتی :

درست در واقع حداقل شتاب برای صفر شدن فشار نقطه A را خواسته .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_x}{a_y+g} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{a_x}{g}$$

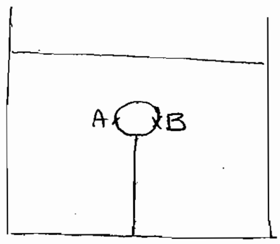
$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = -\frac{a}{g} \Rightarrow \frac{3-0}{L-8} = -\frac{a}{g} \Rightarrow a = \frac{3}{8-L}\cdot g$$

حجم آب اولیه درون مخزن $= 2\times8\times1 = 16\ m^3$

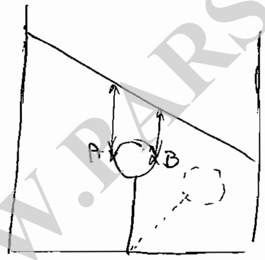
حجم آب ثانویه $= \left(\frac{8+L}{2}\right)\times3\times1 = 16 \Rightarrow L = \frac{8}{3}$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{8-L}\cdot g = \frac{3}{8-\frac{8}{3}}\cdot g \Rightarrow a = \frac{9}{16}\cdot g$$

سوال ۱۱۴ خروج صنعتی :

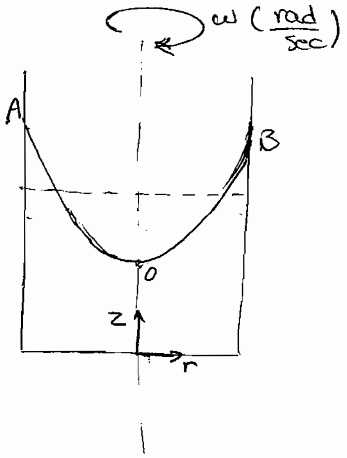


بعد از حرکت:



$$h_A > h_B \longrightarrow P_A > P_B$$

چون فشار در نقطه A بیشتر می‌شود پس بادکنک به سمت جایی که فشار کمتر دارد هل داده می‌شود پس بادکنک به سمت راست حرکت می‌کند و کشش نخ افزایش می‌یابد .



حرکت با شتاب دورانی

$$dp = -\rho a_x dx - \rho(a_y+g)\, dy$$

$a_x \longrightarrow a_r$
$a_y \longrightarrow a_z$
$x \longrightarrow r$
$y \longrightarrow z$
$a_r = r\omega^2$

$$\longrightarrow dp = -\rho(-r\omega^2)\,dr - \rho(0+g)\,dz$$

با حالتی که هم ظرف دوران کند هم به سمت بالا یا پایین حرکت کند کاری نداریم : $a_z = 0$

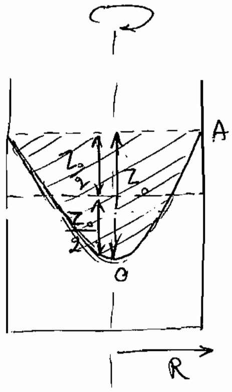
$$\Rightarrow \boxed{dp = \rho r\omega^2\, dr - \rho g\, dz}$$

سهمی AOB سهمی هم فشار است و هر سهمی موازی سهمی AOB رسم شود هم سهمی هم فشار خواهد بود.

برای سهمی هم فشار : $dp = 0 \Rightarrow 0 = \rho r\omega^2 dr - \rho g dz \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}}$

معادله سهمی های هم فشار

سه ~~مفید~~ نکته در زمان دوران مورد توجه است :



۱ـ

$$dp = \rho r\omega^2 dr - \rho g\, dz$$

$$0 = \rho\omega^2\left(\frac{r_A^2 - r_0^2}{2}\right) - \rho g(z_A - z_0)$$

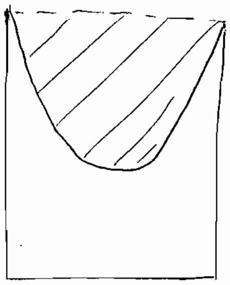
$$\Rightarrow \boxed{Z_0 = \frac{R^2\omega^2}{2g}}$$

۲ـ حجم حاصل از دوران : حجم قسمت هاشور خورده :

$V = \frac{1}{2}\pi R^2 Z_0$ = حجم سهمی

۳ـ در دوران همیشه سهمی به شکلی قرار می‌گیرد که به اندازه $\frac{Z_0}{2}$ از سطح سیال اولیه بالا می رود و به اندازه $\frac{Z_0}{2}$ از سطح سیال اولیه پایین می‌آید.

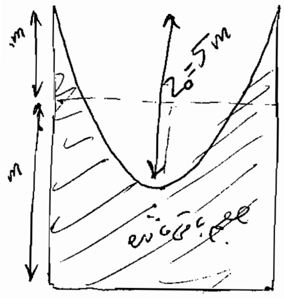
مثال : یک ظرف استوانه‌ای به شعاع 2 متر و ارتفاع 6m پر از آب می‌باشد این ظرف را با سرعت دورانی 5 $\frac{rad}{see}$ حول محور مرکزی به دوران در می‌آوریم. حجم آبی که بیرون می‌ریزد برحسب متر مکعب چقدر است؟



$$Z_0 = \frac{R^2\omega^2}{2g} = \frac{4 \times 25}{20} = 5m$$

$$V = \frac{1}{2}\pi R^2 Z_0 = \frac{1}{2}\pi (2)^2 \times 5 \Rightarrow V = 10\pi = 31.4 m^3$$

مثال : یک ظرف استوانه‌ای به ارتفاع 6m و شعاع 2m تا ارتفاع 4m از آب پر شده است اگر این ظرف را با سرعت دورانی 5 $\frac{rad}{s}$ به دوران درآوریم. حجم آبی که بیرون می‌ریزد چقدر است؟



$$z_0 = \frac{R^2\omega^2}{2g} = \frac{4\times 25}{20} = 5\ m$$

$$\frac{z_0}{2} = 2.5\ m$$

$\Downarrow$

سیال بیرون می‌ریزد.

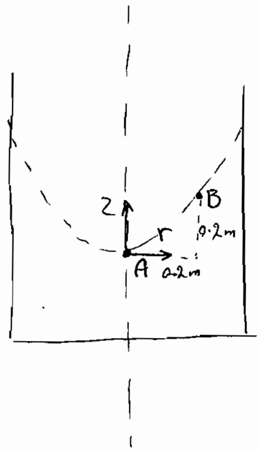
نکته: اگر $\frac{z_0}{2} > H$ سیال بیرون می‌ریزد
" $\frac{z_0}{2} < H$ " " نمی‌ریزد
" $\frac{z_0}{2} = H$ " " در آستانه بیرون ریختن

حجم آب تخلیه شده = حجم اولیه − حجم ثانویه (باقی مانده)

$$= \pi(2)^2\times 4 - \left[\pi(2)^2\times 6 - \frac{1}{2}\pi(2)^2\times 5\right] = 2\pi$$

راه حل ساده: اگر ظرف به اندازهٔ 0.5m بلندتر بود مایعی بیرون نمی‌ریخت پس حجم آب بیرون ریخته به اندازه استوانه‌ای به شعاع همین استوانه و ارتفاع 0.5m است.

$$V = \pi(2)^2\times 0.5 = 2\pi$$



عمق سهمی همیشه z_0 است چه مایع بیرون بریزد چه نریزد.

سوال 42 خوده صورتش :

پس A و B روی سهمی هم فشار قرار دارند:

$$dP = \rho r\omega^2 dr - \rho g dz$$

$$0 = \frac{\omega^2}{2}(r_A^2 - r_B^2) - g(z_A - z_B)$$

$$\rightarrow \frac{\omega^2}{2}(0 - r_B^2) = g(0 - z_B) \longrightarrow \omega^2 = \frac{2g\,z_B}{r_B^2}$$

$$\omega^2 = \frac{2\times 10\ \times 0.2}{0.2\times 0.2} = 100 \rightarrow \omega = 10\ \frac{rad}{sec}$$

جریان سیالات :

جریان آرام : در جریان آرام لایه‌های سیال به آرامی روی هم می‌لغزند و مسیر حرکت ذرات قابل تشخیص می‌باشد

در جریان آرام انتقال مومنتم مولکولی توسط مولکولها صورت می‌گیرد .

در جریان آرام قانون لزجت نیوتن برقرار است . $\tau = \pm \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

در جریان آرام افت فشار یا اتلاف انرژی به مراتب کمتر از جریان درهم می‌باشد به طوری که :

$h_f \propto Q$ $\qquad$ $h_f \propto u$

$-\Delta P \propto \underset{\text{دبی حجمی}}{Q}$ $\qquad$ $-\Delta P \propto \underset{\text{سرعت سیال}}{u}$

جریان درهم : در جریان درهم مسیر حرکت ذرات قابل تشخیص نمی‌باشد در این حالت ذرات سیال به هم می‌چسبند و تولید ادی یا گردابه می‌کنند که انتقال مومنتم توسط این گردابه‌ها صورت می‌گیرد .

در جریان درهم قانون لزجت نیوتن به کار نمی‌رود و $\tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial y}$ که η را لزجت گردابه‌ای می‌نامیم . لزجت گردابه‌ای تابعی از دانسیته سیال و نوع رژیم جریان سیال است .

(منظور از رژیم جریان چرخشی بودن و . . . . می‌باشد)

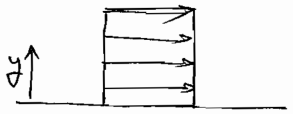
در جریان درهم افت انرژی و افت فشار در مقایسه با جریان آرام خیلی زیاد است به طوری که

$h_f \propto Q^n$ $\qquad$ $h_f \propto u^n$

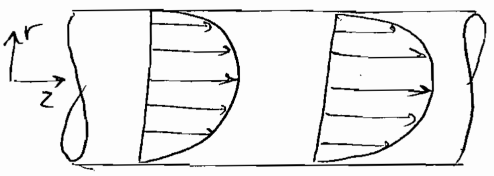
$-\Delta P \propto Q^n$ $\qquad$ $-\Delta P \propto u^n$

که $1.75 < n < 2$ است

جریان درهم ↙ 1.75 $\qquad$ 2 ↘ جریان خیلی درهم



جریان یکنواخت : جریان یکنواخت جریانی است که مقدار سرعت با مکان تغییری نمی‌کند یعنی هر چه y تغییر می‌کند سرعت تغییری نمی‌کند . $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$



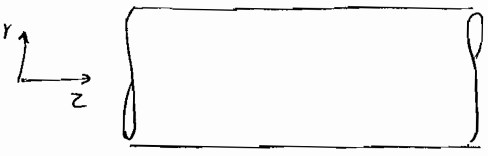
$\frac{\partial u}{\partial r} \neq 0$ و $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

در لوله‌ها که گفته می‌شود جریان توسعه یافته است یعنی همه‌ی پروفایل سرعت کاملاً یک شکل است .

پس جریان در راستای r یکنواخت نیست
ولی 〃 〃 〃 z 〃 است .

جریان پایدار (S.S : جریان پایدار جریانی است که بردار سرعت هم از نظر مقدار و هم از نظر راستا با زمان تغییر نمی‌کند
علاوه بر سرعت تغییر خواص هم صفر است .

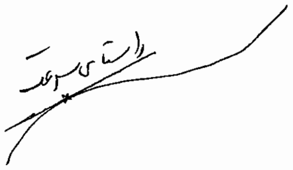
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}=0 \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial t}=0$$



جریان یک بعدی : جریان یک بعدی جریانی است که مولفه‌های بردار سرعت در راستای عمود بر مسیر اصلی جریان برابر صفر باشند

$u_z \gg u_r , u_\theta \longrightarrow$ جریان در راستای z یک بعدی است .

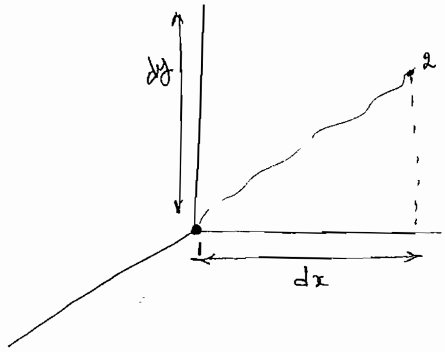
⊛ خط جریان (stream line) : خط جریان خطی است که مماس بر آن در هر نقطه بردار سرعت سیال را به ما می‌دهد.
(در اصل منحنی است)



در جریان پایدار چون بردار سرعت از نظر راستا و مقدار تغییری نمی‌کند
پس خط جریان نیز با زمان تغییری نمی‌کند.

خط مسیر (path line) : مکان هندسی نقاطی است که یک ذره واقعاً طی می‌کند .
اگر جریان پایدار (پایا - دائم - S.S) باشد خط جریان و خط مسیر هم منطبق‌اند .

به دست آوردن معادله خط جریان :



$$\vec{V}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$$

$$dx=u.dt \longrightarrow dt=\frac{dx}{u}$$

$$dy=v.dt \longrightarrow dt=\frac{dy}{v}$$

$$dz=w.dt \longrightarrow dt=\frac{dz}{w}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}}$$

از حل این معادله، معادله خط جریان بدست می‌آید .

سوال ۱۲۷ :

$$\vec{V} = axi + byj + ctk$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{ax} = \frac{dy}{by} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{b}{a} . \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{b}{a} \ln x + \ln C$$

$$\ln y = \ln x^{b/a} + \ln C$$

$$\ln y = \ln C x^{b/a} \Rightarrow y = C . x^{b/a}$$

سوال ۱۲۸ : معادله خط جریانی که از نقطه $A(1,1)$ عبور کند و بردار سرعت آن $V = 2xi + 3yj$ باشد

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{3y} \Rightarrow \ln y = \frac{3}{2} \ln x + \ln C \Rightarrow y = C x^{3/2}$$

$(1,1)$ از نقطه $\rightarrow 1 = C \times 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = x^{3/2}$

قوانین بقاء :

اگر N یک خاصیت از سیستم و η مقدار N به ازای واحد جرم باشد در این صورت رابطه زیر را می‌توان نوشت :

$$N \ , \quad \eta = \frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \eta \underset{\substack{\downarrow \\ \text{حجم}}}{dV} + \int \rho \eta . \underset{\substack{\downarrow \\ \text{بردار سرعت}}}{\vec{V}} . dA$$

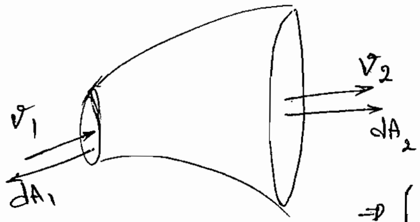
قانون بقاء جرم (قانون پیوستگی) :

$$N = m \ , \quad \eta = 1$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho . dV + \int \rho . \vec{V} . dA$$

فرضیات :

۱) جریان را S.S درنظر می‌گیریم و طبق تعریف می‌دانیم سیستم مشخصی از فضاست که جرم مشخصی دارد درنتیجه $\frac{dm}{dt}=0$ و $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = 0$



۲) جریان را یک بعدی درنظر می‌گیریم .

$$\Rightarrow \int \rho . \vec{V} . \vec{dA} = 0$$

بردار سطح برداری است عمود بر سطح و به سمت خارج سیستم

$$\Rightarrow \int \rho_1 V_1 \, dA_1 \cos 180 + \int \rho_2 V_2 \, dA_2 \cos 0 = 0$$

۳) جریان را یکنواخت درنظر می‌گیریم برای اینکه سرعت مستقل از مکان باشد (برای سادگی کار است)

$$\Rightarrow -\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 = 0$$

$$\Rightarrow \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \longrightarrow \overset{\text{شدت جریان جرمی}}{\boxed{\dot{m}_1 = \dot{m}_2}}$$

هم برای مایع هم برای گاز

$$\rho = cte \ \underline{\text{برای مایعات}} \longrightarrow \overset{\text{سرعت}}{V_1} A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow \overset{\text{دبی حجمی}}{\boxed{Q_1 = Q_2}}$$

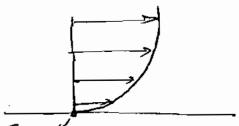
جلسه ششم

برای تمام سیالات واقعی $\mu \neq 0$ است و تنش موجود دارد

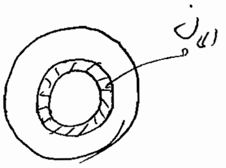
پس عملاً در کل برخورد سیال با جسم جامد سرعت صفر می‌شود (به خاطر نیروهای برشی)

$$\rho_1 \bar{V}_1 A_1 = \rho_2 \bar{V}_2 A_2$$

سرعت متوسط



سرعت در نقطه تماس با جسم جامد صفر است.



$$d\dot{m} = \rho v \, dA \qquad v = v_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$\dot{m} = \int \rho v \, dA \quad ①$$

$$\dot{m} = \rho \bar{v} . A \quad ②$$

$$\xrightarrow{① = ②} \rho \bar{V} A = \int \rho v \, dA \rightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{1}{A}\int v \, dA}$$

مثال: برای یک جریان آرام سیال نیوتنی در داخل لوله‌ای به شعاع R پروفایل سرعت با رابطه $\boxed{v = v_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$ داده می‌شود. $\frac{\bar{v}}{v_{max}} = ?$

برای جریان آرام درون لوله

$$\bar{v} = \frac{1}{A}\int v \, dA$$

A سطح مقطعی است که جریان از آن عبور می‌کند

$$dA = 2\pi r \, dr$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] 2\pi r \, dr$$

$$\bar{v} = \frac{2 V_{max}}{R^2}\int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = \frac{2 v_{max}}{R^2}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right)_0^R$$

$$\frac{\bar{v}}{v_{max}} = \frac{2}{R^2}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right) \rightarrow \boxed{\frac{\bar{v}}{v_{max}} = \frac{1}{2}}$$

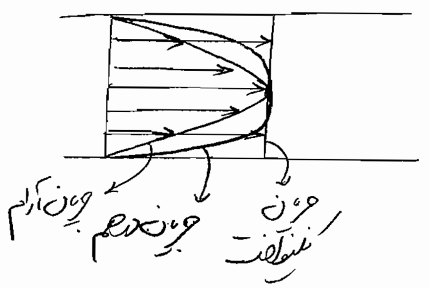
$$⊛ \quad \boxed{\bar{v} = \frac{1}{2} v_{max}}$$

برای جریان آرام درون لوله

برای جریان درهم سیال نیوتنی درداخل لوله $\boxed{v = v_{max}\left[1 - \frac{r}{R}\right]^{\frac{1}{7}}}$ با رابطه $\bar{v} = ?$

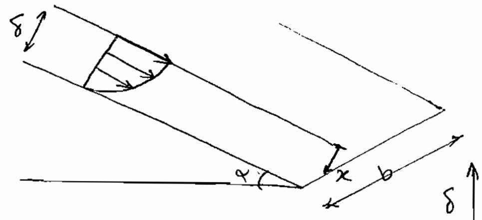
$$\boxed{\begin{aligned} \bar{v} &= 0.82 \, v_{max} \\ \bar{v} &= \frac{98}{120} \, v_{max} \end{aligned}} \quad ⊛$$

برای جریان درهم درون لوله



در جریان درهم پروفایل سرعت تخت تری باشد
چون جریان درهم به حالت یکنواخت نزدیک تر
است .

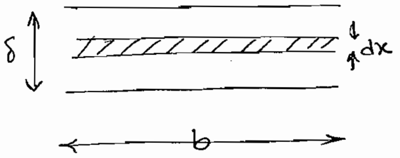
سوال ۱۳۵ جزوه صدری :



$$\boxed{v = v_{max}\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]}$$

جریان آرام روی صفحه

یک المان در نظر می گیریم :



$$\bar{v} = \frac{1}{A}\int_0^{\delta} v_{max}\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] dA$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\delta b}\int_0^{\delta} v_{max}\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] b\,dx = \frac{v_{max}}{\delta}\left[x-\frac{x^3}{3\delta^2}\right]_0^{\delta}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{v_{max}}{\delta}\left(\delta-\frac{\delta}{3}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{2}{3}v_{max}}$$

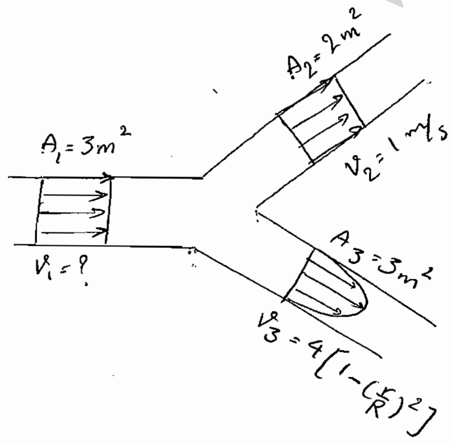
پس به زاویه بستگی ندارد .

برای جریان آرام روی صفحه

اگر پروفایل سرعت به شکل زیر باشد :

$$\boxed{v = v_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)\right]^m} \rightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{2}{(1+m)(2+m)}v_{max}}$$

سوال ۱۴۹ جزوه صدری : سیال غیرقابل تراکم $\rho = cte$



$$\bar{v}_1 A_1 = \bar{v}_2 A_2 + \bar{v}_3 A_3$$

$$3\bar{v}_1 = 1\times 2 + (0.5\times 4)3$$

$$v_1 = \frac{8}{3}$$

قانون پیوستگی در حالت کلی :

جریان در حالت کلی ممکن است دو یا سه بعدی باشد :

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

قانون پیوستگی در حالت کلی

دیورژانس

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

برای مایع $\rho = cte \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$ یا $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

قانون پیوستگی برای یک سیال تراکم ناپذیر که هم در جریان پایدار و هم در جریان ناپایدار درست می‌باشد.

قانون پیوستگی برای سیال تراکم پذیر در جریان پایدار

$$\nabla(\rho \vec{V}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

سوال ۱۴۱ جزوه صورتی : گزینه (۱)

سوال بعد از ۱۴۱ جزوه صورتی گزینه (۱)

سوال ۱۴۲ جزوه صورتی :

$$\vec{u} = 2x\vec{i} + ay\vec{j} + 3z\vec{k}$$

برای سیال تراکم ناپذیر $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \longrightarrow 2 + a + 3 = 0 \longrightarrow a = -5$

سوال جزوه صورتی :

گزینه (۴) هیچکدام

$u = 2x$

$v = 2y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2 + 2 = 4$$

سیال حتماً تراکم پذیر است

مثال : در یک جریان سه بعدی از سیال تراکم ناپذیر مولفه‌های سرعت به قرار زیر می‌باشند :

که a و b اعداد ثابتی می‌باشند.

مولفه سرعت راستای y را بدست آورید.

$u = a(x^2 - y^2)$

$v = ?$

$w = b$

سیال تراکم ناپذیر $\rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$

$$2ax + \frac{\partial v}{\partial y} + 0 = 0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -2ax$$

$$\rightarrow v = -2axy + f(x,z,t)$$

اگر گفته شود که جریان پایدار است دیگر تابعیت t را در نظر نمی‌گیریم اما چون در اینجا چیزی از پایداری جریان گفته ... تابعیت t را هم در نظر می‌گیریم.

سوال ۱۴۷ جزوه صدوقی : جریان سه بعدی :

میزان تغییر حجم جرم معین سیال به ازای واحد حجم در واحد زمان چقدر است؟

$u = 2x + y$

$v = 2x - y$

$w = -z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$2 - 1 - 1 = 0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow$$ سیال تراکم ناپذیر است

گزینه (۴)

تابع جریان

تابع جریان در جریان دو بعدی مطرح می‌شود و از این جهت دارای اهمیت است که با داشتن تابع جریان می‌توان مولفه‌های راستای x و y را به راحتی محاسبه کرد اگر:

$$\boxed{\psi = \psi(x,y)}$$

در این صورت : $v_x = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v_y = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$

$\psi = \psi(x,y)$

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_x dy \Rightarrow d\psi = -v_y\,dx + v_x\,dy \quad ①$$

خط جریان : $\dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dy}{v_y} \rightarrow v_x\,dy = v_y\,dx \quad ②$

$$\xrightarrow{①,②} d\psi = 0 \longrightarrow \boxed{\psi(x,y) = C} \quad ③$$

تابع جریان تابعی است که به ازای هر مقدار C در رابطه ③ معادله یک خط جریان را به ما می‌دهد.

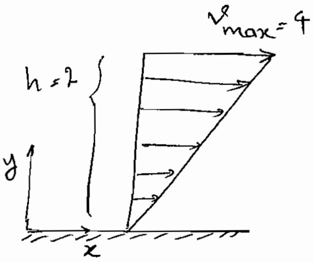
جزوه صدری سوال ۱۴۸ :

$$\psi = -\frac{A}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{A}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{-Ay}{x^2+y^2}$$

$$V_y = \frac{-\partial \psi}{\partial x} = \frac{A}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{Ax}{x^2+y^2}$$

سوال ۱۴۹ جزوه صدری :



چون پروفایل خطی است $\quad V_x = ay+b$

$$y=0 \longrightarrow V_x=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow V_x = ay$$

$$y=2 \longrightarrow V_x=4 \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow V_x = 2y$$

$$V_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2y \longrightarrow \psi = \int 2y\,dy \longrightarrow \psi = y^2 + C$$

گزینه (۲)

قانون بقای اندازه حرکت (قانون بقای مومنتم):

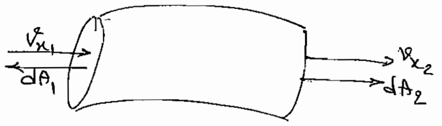
$$\boxed{\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho\eta\, d\forall + \int \rho\eta\vec{V}\cdot\vec{dA}}$$

: در حالت کلی برای متغیر N

$\underline{\vec{N} = m\vec{V}}$: مومنتم (اندازه حرکت) $\longrightarrow \underline{\vec{\eta}} = \frac{N}{m} = \frac{mV}{m} = V$

فرض اول: سیستم را S.S در نظر می‌گیریم: (روابط را در راستای x در نظر می‌گیریم)

$$\sum F_x = 0 + \int \rho\cdot V\cdot \vec{V_x}\cdot\vec{dA}$$



$$\sum F_x = \int \rho_1 V_1\, V_{x_1}\, dA\cdot \cos 180 + \int \rho_2 V_2\, V_{x_2}\, dA\cdot\cos 0$$

فرض دوم: جریان را یکنواخت در نظر می‌گیریم ← V_1 و V_{x_1} و V_2 و V_{x_2} را ثابت بداند

$$\sum F_x = \rho_2 V_2\cdot V_{x_2}\cdot A - \rho_1 V_1 V_{x_1} A_1 \Rightarrow \sum F_x = \dot{m}_2 V_{x_2} - \dot{m}_1 V_{x_1} \Rightarrow \sum F_x = \dot{m}(V_{x_2} - V_{x_1})$$ SI

$\rho V A = \dot{m}$

در سیستم انگلیسی امریکایی : $\sum F_x = \frac{\dot{m}}{g_c}(V_{x_2} - V_{x_1})$

$g_c = 32.2$ در سیستم انگلیسی

ΣF_x شامل نیروهای فشاری، وزن و نیروی بدنه می باشد .

ضریب تصحیح اندازه حرکت :

در بدست آوردن رابطه ($\Sigma F_x = \frac{\dot{m}}{g_c}(v_{x_2} - v_{x_1})$) فرض شده که جریان یکنواخت است اما به خاطر وجود نیروهای مقاوم و نیروهای برشی جریان همواره غیر یکنواخت است بنابراین رابطه فوق در حالت واقعی با استفاده از پارامتری به نام ضریب تصحیح اندازه حرکت نوشته شده و همچنین سرعت را باید سرعت متوسط در سطح مقطع درنظر بگیریم .

$$\Sigma F_x = \frac{\dot{m}}{g_c}\left(\beta_2 \bar{v}_{x_2} - \beta_1 \bar{v}_{x_1}\right)$$

که β از رابطه زیر بدست می آید :

$$\beta = \frac{1}{A}\int \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2 dA \qquad \beta \geqslant 1$$

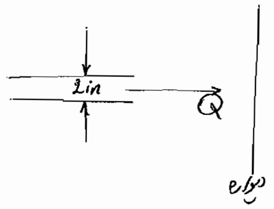
فقط در جریان یکنواخت $\beta = 1$ فرض می شود .

⊛ برای جریان آرام سیال نیوتنی در داخل یک لوله $v = v_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$ ، $\beta = \frac{4}{3}$

و برای جریان درهم سیال نیوتنی درون یک لوله $v = v_{max}\left[1-\frac{r}{R}\right]^{\frac{1}{7}}$ ، $\beta = 1.036$ تقریباً یک است .

برایند نیروهایی است که بر سیال وارد می شود .

سوال ۱۵۱ جزوه صدری :



$$\Sigma F_x = \frac{\dot{m}}{g_c}\left(v_{x_2} - v_{x_1}\right)$$

سیال نیروی 600 lbf بر دیواره وارد می کند پس دیواره -600 lbf نیرو به سیال وارد می کند

وقتی سیال به دیواره برخورد می کند سرعتش صفر می شود .

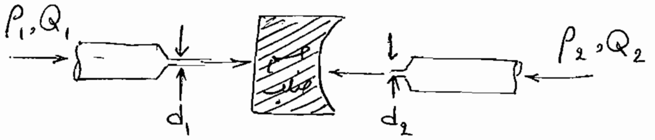
$$-600\ lb_f = \frac{\rho Q}{g_c}(0 - v)$$

$$Q = v \cdot A = v \cdot \left(\frac{\pi}{4}D^2\right) \longrightarrow v = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\Rightarrow -600 = \frac{\rho Q}{g_c}\left(-\frac{4Q}{\pi D^2}\right) \Rightarrow Q^2 = \frac{600\, g_c\, \pi D^2}{4\rho} = \frac{600 \times 32.2 \times \pi\left(\frac{2}{12}\right)^2}{4 \times 62.4}$$

$$Q = 2.6\ \frac{ft^3}{sec}$$

سوال ۱۵۵ جزوه صدری :



$$F_1 = F_2$$

$$\dot{m}(\cancelto{0}{v_2}-v_1)\Big|_1 = \dot{m}(\cancelto{0}{v_2}-v_1)\Big|_2 \qquad \dot{m} = \rho Q$$

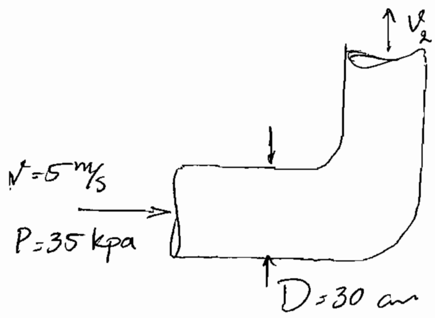
$$v = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\rho_1 Q_1 \cdot \frac{4Q_1}{\pi D_1^{\,2}} = \rho_2 Q_2 \cdot \frac{4Q_2}{\pi D_2^{\,2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Q_1}{D_1}\right)^2 = \left(\frac{Q_2}{D_2}\right)^2 \longrightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

گزینه (۱)

سوال ۱۵۴ جزوه صدری :



$$\Sigma F_x = \dot{m}(\overset{\text{خروجی}}{V_{2x}} - \overset{\text{ورودی}}{V_{1x}})$$

V_2 در راستای x مولفه ندارد پس $V_{2x}=0$ است

نیروهایی که بر سیال وارد می‌شوند $\Sigma F = P_1A_1 + F_g + B_x = \rho_1 V_1 A_1 (-V_1)$

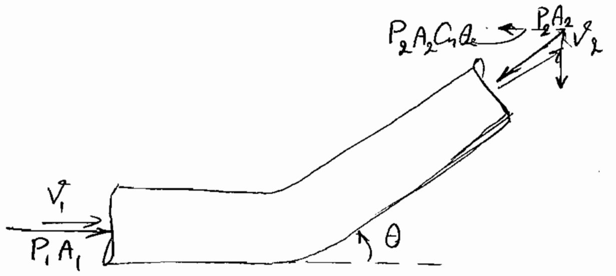
F_g: نیروی وزن

B_x: نیروی بدنه Body force که بدنه به سیال وارد می‌کند.

وزن در راستای x مولفه ندارد.

$$35000 \times \frac{\pi}{4}(0.3)^2 + 0 + B_x = 1000 \times 5 \times \frac{\pi}{4}(0.3)^2 \times (-5)$$

$B_x = -4239\ N \Rightarrow$ سیال نیروی $+4239\ N$ بر دیواره وارد می‌کند



مثال :

$$\Sigma F_x = P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta + B_x = \dot{m}(V_2\cos\theta - V_1)$$

سوال ۱۵۲ جزوه صدری

سوال ۱۵۷ خروه صدقی : گزینه ۲

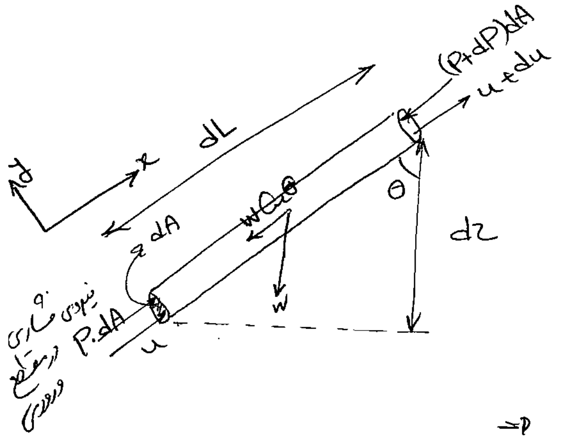
رابطه اولر :

برای بدست آوردن رابطه اولر فرضیات زیر را درنظر می‌گیریم :

۱) جریان .S.S (پایدار) فرض می‌شود . (چون می‌خواهیم از قانون بقاء مومنتم استفاده کنیم)

۲) سیال غیر ویسکوز ($\mu=0$) درنظر گرفته می‌شود . (جریان ایده‌ال) (توجه * سیال ایده‌ال با جریان ایده‌ال فرق دارد)

۳) معادله اویلر را برای یک خط جریان می‌نویسیم .



$$\Sigma F_x = \frac{\dot{m}}{g_c}(V_{2x} - V_{1x})$$

$$pdA - (p+dp)dA - \rho dA . dL . \frac{g}{g_c} \underbrace{\cos\theta}_{\frac{dz}{dL}} = \frac{\rho u dA}{g_c}(u + du - u)$$

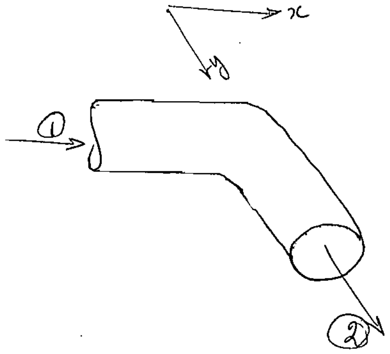
$$\Rightarrow -dp - \rho \frac{g}{g_c} dz = \frac{\rho u}{g_c} . du$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{\rho} + \frac{g}{g_c} . dz + \frac{u}{g_c} du = 0}$$ معادله اولر

واحد $\frac{P}{\rho} : \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{N.m}{kg} = \frac{ژ}{kg}$

رابطه اولر: مجموع تغییرات انرژی فشاری و انرژی پتانسیل و جنبشی در روی هر خط جریان برابر صفر می‌باشد .

سوال ۱۵۲ خروه صدقی :



$$\Sigma F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x})$$

$$\Sigma F_x = 10(0-1) \longrightarrow \Sigma F_x = -10$$

$$\Sigma F_y = \dot{m}(V_{2y} - V_{1y}) = 10(1-0) = 10$$

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{g}{g_c}dz + \frac{u\,du}{g_c} = 0$$

$$\int_A^B \frac{dP}{\rho} + \int_A^B \frac{g}{g_c}dz + \int_A^B \frac{u\,du}{g_c} = 0$$

برنولی با فرض سیال تراکم ناپذیر به رابطه زیر رسید :

$$\frac{P_B - P_A}{\rho} + \frac{g}{g_c}(z_B - z_A) + \frac{u_B^2 - u_A^2}{2g_c} = 0 \qquad : \text{معادله برنولی}$$

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{u_A^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c}z_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{u_B^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c}z_B$$

معادله اویلر برای یک سیال غیر ویسکوز بدست آمد حال با فرض سیال تراکم ناپذیر می‌توان نتیجه گرفت که معادله برنولی برای سیال ایده‌آل برقرار است در حالی که ⊛ معادله اویلر برای جریان غیر ویسکوز (جریانی که اصطکاک ندارد) برقرار است.

$\mu = 0$ و $\rho = cte$

$\mu = 0$

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{u_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{u_B^2}{2} + gz_B \quad : \text{واحد } \frac{J}{kg} = \frac{\text{انرژی}}{\text{جرم}}$$

معادله برنولی در سیستم SI :

یا

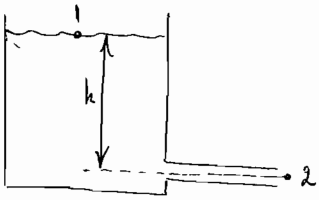
$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g} + z_B \quad : \text{واحد } m \quad \text{ارتفاع}$$

معادله برنولی در سیستم امریکایی :

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g} + z_B \longleftarrow$$

در این رابطه دیگر نیازی به g_c نیست

کاربرد معادله برنولی :



مثال : در شکل مقابل سرعت جریان خروجی از مخزن برابر است با :

نقطه ① یک نقطه روی سطح آزاد سیال است . یک خط جریان وجود دارد که نقاط ① و ② روی آن باشد :

$P_1 = 0$ و $P_2 = 0$ هر دو به اتمسفر راه دارند

$z_1 = h \qquad z_2 = 0$

$$\text{معادله پیوستگی} : \cancel{\rho_1} V_1 A_1 = \cancel{\rho_2} V_2 A_2 \Rightarrow V_1 = V_2\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = V_2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

اگر سطح مقطع تانک نسبت به سطح مقطع خروجی خیلی زیاد باشد سرعت پایین آمدن سیال تقریباً صفر است

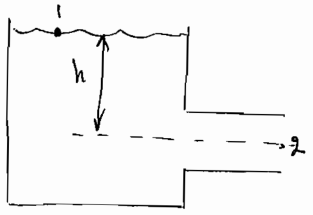
$$\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \simeq 0 \Rightarrow V_1 \simeq 0$$

معادله برنولی : $$\underset{0}{\cancel{\frac{P_1}{\rho}}} + \underset{0}{\cancel{\frac{v_1^2}{2}}} + g z_1 = \underset{0}{\cancel{\frac{P_2}{\rho}}} + \frac{v_2^2}{2} + \underset{0}{\cancel{g z_2}}$$

$$gh = \frac{v_2^2}{2} \longrightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{2gh}}$$

تخلیه تانک

مثال :



$P_1 = 0$
$P_2 = 0$
$z_1 = h$
$z_2 = 0$

$$\cancel{\rho_1} v_1 A_1 = \cancel{\rho_2} v_2 A_2$$

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} = v_2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

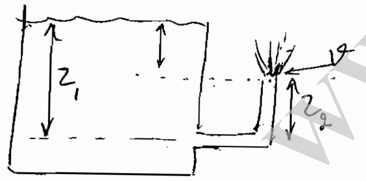
معادله برنولی $$\underset{0}{\cancel{\frac{P_1}{\rho}}} + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \underset{0}{\cancel{\frac{P_2}{\rho}}} + \frac{v_2^2}{2} + \underset{0}{\cancel{g z_2}}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2} \Rightarrow v_1^2 + 2gh = v_2^2 \Rightarrow v_2^2 \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + 2gh = v_2^2$$

$$\Rightarrow v_2^2 \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) = 2gh \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

نکته : اگر در این مسائل اعداد در سیستم امریکایی داده شده، نیازی به حضور g_c در رابطه نیست. باید به یاد داشت که $g = 32.2 \frac{ft}{sec^2}$ است.

مثال :

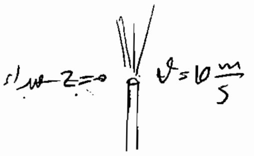


$$v = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

مثال : آب از شلنگی با سرعت $10 \frac{m}{sec}$ خارج می‌شود. آب حداکثر تا چه ارتفاعی در راستای عمودی بالا می‌رود.

$v_2 = 0$

آب تا جایی بالا می‌رود که سرعت به صفر برسد.



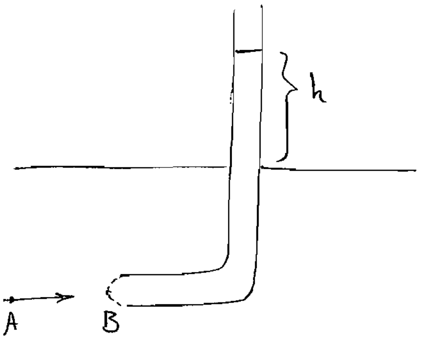
$$\underset{0}{\cancel{\frac{P_1}{\rho}}} + \frac{v_1^2}{2} + \underset{0}{\cancel{g z_1}} = \underset{0}{\cancel{\frac{P_2}{\rho}}} + \underset{0}{\cancel{\frac{v_2^2}{2}}} + g z_2$$

$$\frac{v_1^2}{2} = gh \longrightarrow v_1^2 = 2gh \longrightarrow 100 = 2 \times 9.81 \times h$$

$$h = 5.1 \text{ m}$$

پیتوت تیوب ساده :

پیتوت تیوب وسیله‌ای است که سرعت استاتیکی را اندازه می‌گیرد همچنین می‌توان از پیتوت تیوب برای بدست آوردن پروفایل سرعت درون یک لوله استفاده کرد .



$$\frac{P_A}{\rho}+\frac{V_A^2}{2}+g\cancel{z_A}=\frac{P_B}{\rho}+\cancel{\frac{V_B^2}{2}}+g\cancel{z_B}$$

$\cancel{z_A}\to 0$ ، $\cancel{\frac{V_B^2}{2}}\to 0$ ، $\cancel{z_B}\to 0$

به علت سیال بی حرکت

به صورت هم سطح

[illegible]

NIU .

$$\Rightarrow V_A^2=\frac{2(P_B-P_A)}{\rho}\Rightarrow V_A=\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}=\sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho}}$$

اختلاف فشار بین نقاط A و B به اندازه‌ای است که توانسته سیال را به اندازه ارتفاع h بالا ببرد .

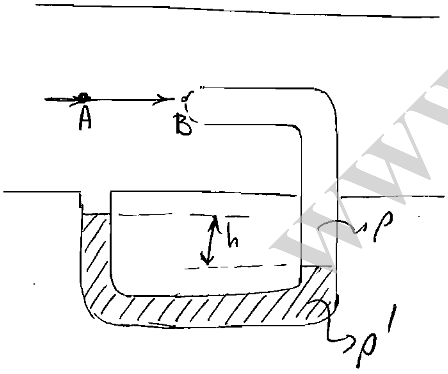
$$\Rightarrow \boxed{V_A=\sqrt{2gh}}$$

اگر V_A خیلی زیاد باشد h هم خیلی زیاد می‌شود پس

از پیتوت تیوب ساده برای اندازه‌گیری سرعت‌های پایین استفاده می‌شود .

برای سرعت‌های زیاد از پیتوت تیوب مرکب استفاده می‌کنیم .

پیتوت تیوب مرکب :



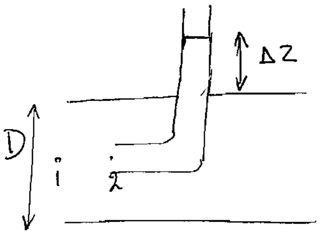
$$\frac{P_A}{\rho}+\frac{V_A^2}{2}+g\cancel{z_A}=\frac{P_B}{\rho}+\cancel{\frac{V_B^2}{2}}+g\cancel{z_B}$$

$\cancel{\frac{V_B^2}{2}}\to 0$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow V_A=\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}\\ P_B-P_A=\Delta P=hg(\rho'-\rho)\end{array}\right\}\longrightarrow \boxed{V_A=\sqrt{2hg\left(\frac{\rho'}{\rho}-1\right)}}$$

این رابطه هم در سیستم انگلیسی g_c نمی‌خواهد .

سوال ۱۲۷ جزوه صورتی :



$$Q=V\cdot A=V\frac{\pi D^2}{4}$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\Rightarrow\frac{V_2}{V_1}=4$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\sqrt{\frac{\Delta Z_2}{\Delta Z_1}}\Rightarrow\frac{\Delta Z_2}{\Delta Z_1}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2=4^2=16$$

سوال ۱۷۵ جزوه صورتی :

پیتوت مرکب است :

$$V = \sqrt{2hg\left(\frac{\rho'}{\rho} - 1\right)} = \sqrt{2 \times 0.1 \times 10\left(\frac{\rho_{water}}{\rho_{air}} - 1\right)}$$

$$V = \sqrt{2\left(\frac{1000}{1.2} - 1\right)} \Rightarrow V = 40 \ \frac{m}{sec}$$

سوال ۱۷۲ جزوه صورتی :

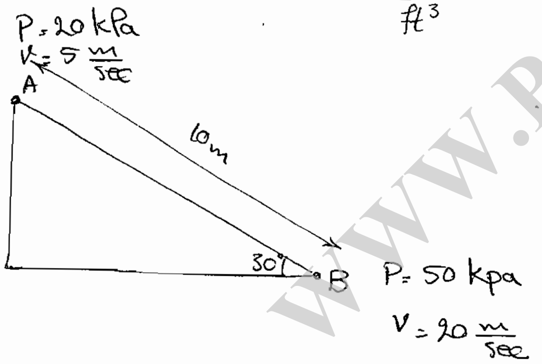
$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + \cancelto{0}{gz_1} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + \cancelto{0}{gz_2}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \Rightarrow \Delta P = 1000 \times \frac{25}{2} = 12500 = 12.5 \ kpa$$

سوال ۱۶۳ جزوه صورتی : وقتی از این رابطه استفاده می‌کنیم نیازی به g_c نیست .

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + \cancelto{0}{z_1} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \cancelto{0}{z_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{\Delta P}{\underset{\frac{lbf}{ft^3}}{\gamma}} = \frac{\overset{\frac{ft^2}{sec^2}}{25}}{2 \times \underset{\frac{ft}{sec^2}}{32.2}} \Rightarrow \Delta P = \frac{25}{2 \times 32.2} \times 62.4 = 24.24$$



مثال : کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد شکل داده شده صحیح می باشد

۱) جهت جریان آب از A به B است .

۲) " " " از B به A "

۳) " " " ابتدا از A به B و پس از آن از B به A است .

۴) آب درون لوله ساکن است .

Energy Grade Level : ⊛ برای تعیین جهت جریان باید سطح تراز انرژی (EGL) را مقایسه کنیم :

$$\boxed{EGL = \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + Z}$$

$$EGL_A = \frac{20000}{10000} + \frac{25}{20} + 10 \sin 30 = 7.25$$

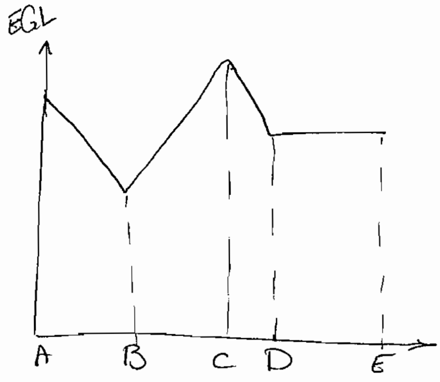
$$EGL_B = \frac{50000}{10000} + \frac{400}{20} + 0 = 25$$

$EGL_B > EGL_A \longrightarrow$ جهت جریان از نقطه B به نقطه A است .

$$HGL = \frac{P}{\gamma} + z$$

$\uparrow$

Hydrolic Grade level



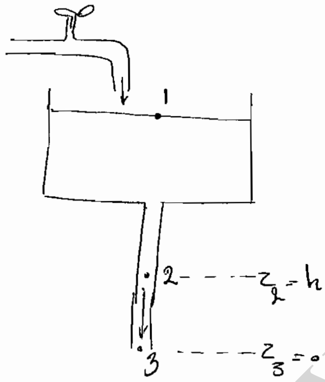
بین نقاط B و C
پمپ قرار دارد $\longrightarrow$ در این فاصله EGL افزایش یافته است.

صفحه ۵۰ مجموعه سوالات سوال ۷۳ :

EGL به واسطه وجود تجهیزاتی نظیر پمپ، فن، کمپرسور یا هر وسیله‌ای که به سیال انرژی دهد افزایش پیدا می‌کند

همین طور EGL به خاطر اتلاف انرژی، انواع اتصالات نظیر زانو، سه راهی، انقباض ناگهانی، انبساط ناگهانی و توربین کاهش می‌یابد.

مثال: در شکل مقابل ارتفاع آب توسط یک شیر ثابت نگه داشته می‌شود. کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد فشار نقاط 1 و 2 صحیح می‌باشد.



1) $P_1 > P_2$ و با افزایش سطح مقطع تانک اختلاف فشار افزایش می‌یابد.
2) $P_2 > P_1$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃
3) $P_1 > P_2$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 تغییر نمی‌کند.
4) $P_2 > P_1$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

نقطه 3 را در خروجی لوله در نظر می‌گیریم و معادله برنولی را بین 2 و 3 می‌نویسیم:

$$\frac{P_2}{\rho} + \cancel{\frac{V_2^2}{2}} + gz_2 = \frac{P_3}{\rho} + \cancel{\frac{V_3^2}{2}} + g\underset{0}{\cancel{z_3}}$$

چون بین دو نقطه 2 و 3 دبی و سطح مقطع ثابت است پس $V_2 = V_3$

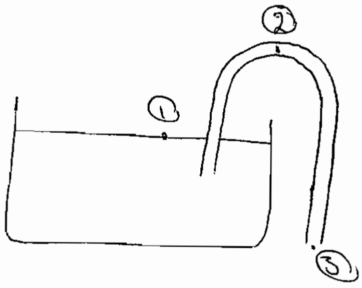
$$P_3 = P_2 + \rho g h$$

P_1 و P_3 با هم برابرند چون هر دو به محیط راه دارند.

$$P_1 = P_2 + \rho g h$$

$P_1 > P_2$ اختلاف P_1 و P_2 به اندازه $\rho g h$ است و ربطی به سطح مقطع تانک ندارد

وابسته به فاصله تا خروجی لوله است و فشار در نقطه P_2 خلاء نسبی است چون با یک عدد جمع شده و به فشار صفر نسبی رسیده.



سوال ۱۸۱ جزوه صورتی :

بین ۱ و ۳ برنولی می‌نویسیم :

$z_3=0$
$z_1=2$
$V_1=0$
$P_1=P_3=0$

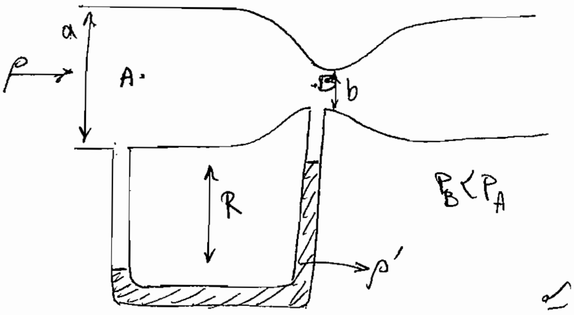
$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{g}{g_c}z_1+\frac{V_1^2}{2g_c}=\frac{P_3}{\rho}+\frac{g}{g_c}z_3+\frac{V_3^2}{2g_c}$$

$$\longrightarrow 0+\frac{g}{g_c}(2)+0=0+0+\frac{V_3^2}{2}$$

$$V_3=\sqrt{2\times2\times g}=\sqrt{40}=6.28$$

ونتوری venturi

ونتوری یک دبی سنج است



$P_B<P_A$

$$\frac{P_A}{\rho}+\frac{V_A^2}{2}+\cancel{gz_A}=\frac{P_B}{\rho}+\frac{V_B^2}{2}+\cancel{gz_B}$$

$$V_B^2-V_A^2=2\frac{\Delta P}{\rho}$$

قانون پیوستگی : $Q_A=Q_B$

$$V_A a^2=V_B b^2\longrightarrow V_A=\left(\frac{b}{a}\right)^2V_B$$

$$\longrightarrow V_B^2-\left(\frac{b}{a}\right)^4V_B^2=2\frac{\Delta P}{\rho}$$

$\beta=\frac{b}{a}<1$

ضریب انقباض در ونتوری

$$\Rightarrow V_B^2(1-\beta^4)=\frac{2\Delta P}{\rho}$$

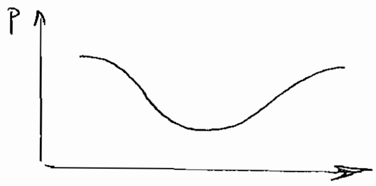
$$\Delta P=Rg(\rho'-\rho)$$

$$\Rightarrow V_B=\sqrt{\frac{2Rg(\rho'-\rho)}{(1-\beta^4)\rho}}\Rightarrow V_B=\sqrt{\frac{2Rg}{1-\beta^4}\left(\frac{\rho'}{\rho}-1\right)}$$

$Q=V_B\times\frac{\pi}{4}b^2$ دبی بدست می‌آید .

فشار در ونتوری قابل بازیابی است یعنی به شرط آنکه اصطکاک وجود نداشته باشد چون فشار به طور تدریجی کاهش می‌یابد (با افزایش سرعت) دوباره به صورت تدریجی افزایش می‌یابد تا تقریباً به مقدار اولیه‌اش برسد .

سوال ۳۵۴ جزوه صورتی :

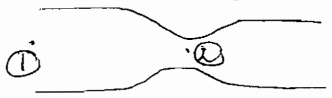


اورفیس :

اورفیس هم وسیله‌ای برای اندازه گیری دبی است اما در اورفیس افت فشار زیاد است .

سوال ۷۹ فرم صورتی :

چون گفته از افت انرژی صرفنظر می‌کنیم پس در خروجی فشار همان 3atm است و گفته دما ثابت است یعنی همان 100°C پس در فشار 3atm و دمای 100°C آب به صورت مایع است پس گزینه ۲ درست است و ۴ غلط است .



گزینه ۴ غلط است چون در بهترین حالت فشار خروجی به فشار ورودی می‌رسد .

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+g\cancel{z_1}=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+g\cancel{z_2}$$

$$P_2=P_1+\rho\,\frac{V_1^2}{2}-\frac{V_2^2}{2}$$

$$V_1=4\ \frac{m}{sec}$$

$$V_1\times10^2=V_2\times5^2\longrightarrow V_2=16\ m/sec$$

$$P_2=3\times10^5+\frac{1000}{2}(16-256)=180{,}000\ Pa=180\ kPa\simeq1.8\ atm$$

پس گزینه ۱ هم درست است .

جلسه هشتم

معادله برنولی در حالت کلی :

در جلسه قبل برای حالتی که $\mu = 0$ باشد معادله برنولی را از معادله اولر بدست آوردیم . اما در حالت کلی $\mu \neq 0$ است و تلفات اصطکاکی وجود دارد .

برای غلبه بر اصطکاک باید به سیال انرژی دهیم → اتلاف اصطکاکی h_f ⟵ $\mu \neq 0$

این انرژی توسط پمپ به سیال داده می شود .

پس در معادله برنولی باید انرژی که پمپ به سیال می دهد را در نظر بگیریم .

برای محاسبه انرژی جنبشی به جای سرعت از سرعت متوسط استفاده می کنیم و همین طور ضرایب تصحیح انرژی جنبشی را در ورودی و خروجی در نظر می گیریم .

α ضریب تصحیح انرژی جنبشی است .

$$\boxed{\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\overline{V}_1^{\,2}}{2} + z_1 g + \eta W_p = \frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{\overline{V}_2^{\,2}}{2} + g z_2 + h_f}$$

ηW_p مقدار انرژی است که پمپ به سیال می دهد .

W_p کل کار مصرفی پمپ است .

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{A} \int \left(\frac{V}{\overline{V}}\right)^3 dA}$$

⊛ برای جریان آرام سیال نیوتنی در داخل یک لوله مقدار α برابر 2 می باشد .

$$V = V_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \Rightarrow \alpha = 2$$

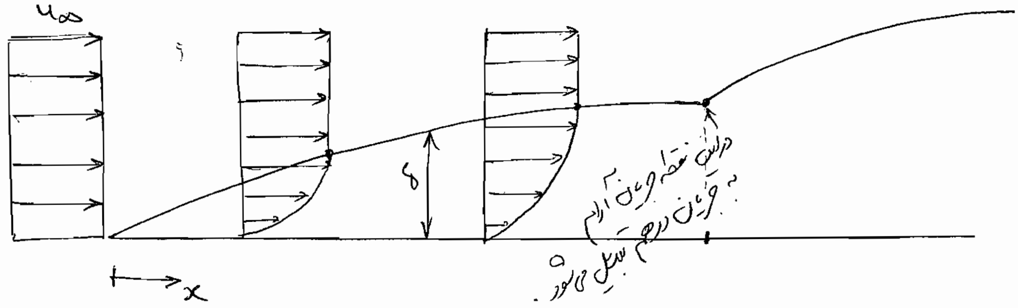
⊛ برای جریان درهم α تقریبا برابر 1 می باشد .

⊛ برای جریان یکنواخت α برابر 1 می باشد

$$\boxed{\text{همواره} : \alpha \geq 1}$$

لایه مرزی :

فرض می کنیم سیالی با سرعت یکنواخت u_∞ به یک صفحه نزدیک شود در محل برخورد سیال با صفحه سرعت به صفر می رسد در صورتیکه لایه های بالایی سیال دارای سرعت می باشند . بنابراین در یک فاصله خیلی کوچک تغییر سرعت خیلی زیادی اینجا داشته و براساس رابطه $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ ، مقدار تنش برشی خیلی زیاد است هرچه بر روی صفحه جلوتر رویم ضخامت بیشتری از سیال تحت تاثیر نیروهای برشی قرار می گیرند . به عبارت دیگر در ضخامت بیشتری از سیال سرعت از u_∞ کمتر است



لایه مرزی ضخامتی از سیال است که در آن سرعت از $0.99u_\infty$ کمتر می‌باشد.

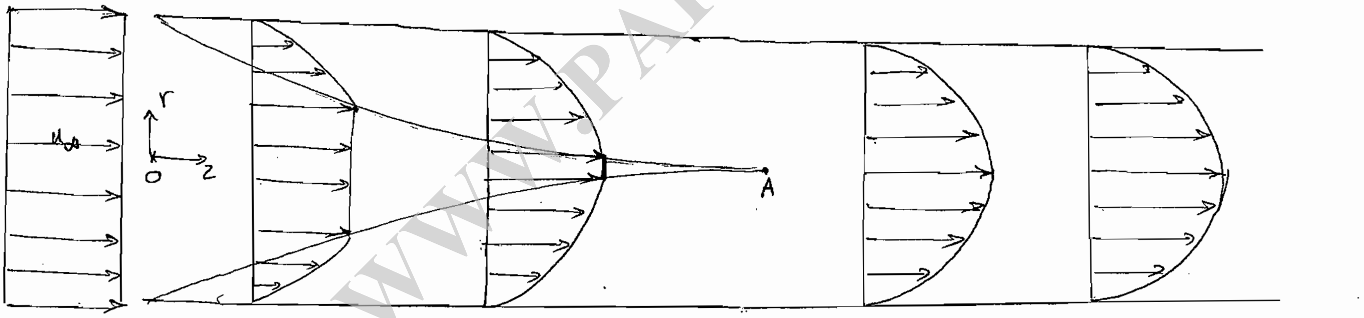
یا لایه مرزی ضخامتی از سیال است که در آن نیروهای برشی مقدارشان خیلی زیاد بوده و نیروهای اینرسی خیلی کم می‌باشد.

جریان آرام : $\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}} \Rightarrow \delta \propto x^{0.5} \rightarrow \frac{\delta_2}{\delta_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.5}$

جریان درهم : $\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{Re_x^{0.2}}} \Rightarrow \delta \propto x^{0.8} \Rightarrow \frac{\delta_2}{\delta_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.8}$

در جریان درهم رشد لایه مرزی سریع‌تر صورت می‌گیرد.

لایه مرزی در داخل یک لوله :

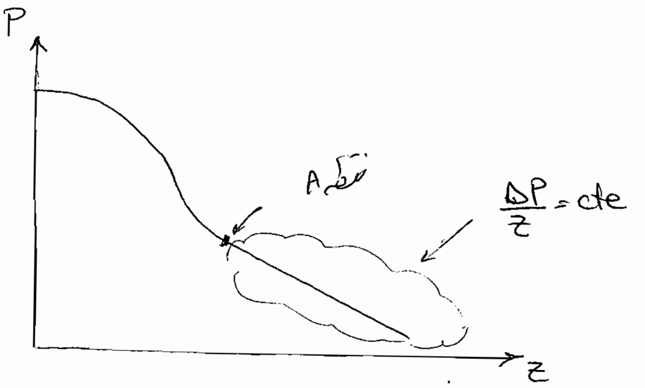


وقتی جریان یکنواختی با سرعت u_∞ وارد یک لوله شود لایه مرزی از هر دو طرف شروع به رشد می‌کند و در نقطه A به هم می‌رسند. از نقطه O تا نقطه A را که لایه‌های مرزی هنوز کاملاً توسعه نیافته‌اند ناحیه ورودی لوله یا Entrance Zone می‌نامیم.

با توجه به شکل فوق می‌بینیم r که تغییر می‌کند سرعت تغییر می‌کند و در راستای z $V_z = V_z(r, z)$
ناحیه ورودی یک لوله ناحیه‌ای است که سرعت هم تابع شعاع و هم تابع z است.

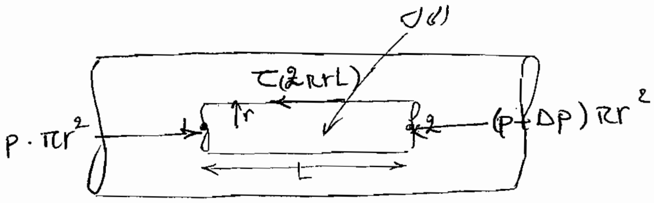
بعد از نقطه A که لایه‌های مرزی به هم می‌رسند جریان را توسعه یافته یا Fully developed می‌نامیم. در جریان توسعه یافته سرعت فقط تابع شعاع است و با z تغییر نمی‌کند. $V_z = V_z(r)$

طول ناحیه ورودی لوله نسبت به طول کل لوله کم است به همین علت پروفایل سرعت در کل لوله را توسعه یافته در نظر می‌گیریم



در ناحیه توسعه یافته افت فشار در واحد طول مقدارش ثابت می باشد.

محاسبه اتلاف اصطکاکی درداخل یک لوله :



$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2+h_f$$

فرض می کنیم جریان توسعه یافته است یعنی $V_1 = V_2$

تغییر ارتفاع وجود ندارد یعنی $z_1 = z_2$

$$\Rightarrow h_f = \frac{-\Delta P}{\rho}$$

$$\Delta p = f(L, D, Q, V, e)$$

ابتدا قانون تکانه مومنتم را برای این المان می نویسیم :

$$\Sigma f_x = \dot{m}(V_{2x}-V_{1x})$$

چون جریان را توسعه یافته فرض کردیم $V_{2x} = V_{1x}$

$$\Sigma f_x = 0$$

$$p\pi r^2 - (p+\Delta p)\pi r^2 - \tau(2\pi rL) = 0$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{\Delta P}{L}\cdot\frac{r}{2} \xrightarrow[\text{عدد ثابتی است.}\ \frac{\Delta P}{L}]{\text{چون جریان را توسعه یافته فرض کردیم}} \tau \propto r \Rightarrow \frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{r_2}{r_1}$$

هم برای جریان آرام

هم برای جریان درهم

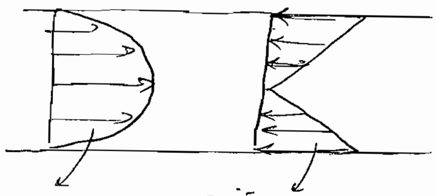
درمرکز لوله ($r = 0 \leftarrow \tau = 0$) تنش برابر صفر است درنتیجه $V = V_{max}$

درجداره لوله ($r = R \leftarrow \tau_{max} = \tau_w$) تنش ماکزیمم مقدار خود را دارد درنتیجه $V = 0$

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \xrightarrow{\text{برای لوله}} \tau = \mu\frac{du}{dr}$$

وقتی τ درجه یک است نسبت به r

آنگاه u نسبت به r درجه ۲ است و سهمی است.



پروفایل سرعت.

پروفایل تنش

$$\tau = -\frac{\Delta P}{L}\cdot\frac{r}{2} \Rightarrow \frac{2\tau}{r}+\frac{\Delta P}{L}=0 \Rightarrow \frac{2\tau}{r}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_r=0$$

رابطه تنش و ΔP درمختصات استوانه ای

$$\tau = -\frac{\mu}{g_c}\frac{du}{dr}$$

← قانون لزجت نیوتن فقط برای جریان آرام صادق است

g_c ← در سیستم انگلیسی

پس تمام روابطی که بدست می‌آوریم برای جریان آرام است :

$$\mu\frac{du}{dr} = \frac{\Delta P}{L}\cdot\frac{r}{2}$$

$$du = \frac{\Delta P}{2\mu L}\cdot r\,dr \Rightarrow \int_0^u du = \int_{r=R}^{r}\frac{\Delta P}{2\mu L}\,r\,dr$$

$$\Rightarrow u = \frac{\Delta P}{4\mu L}\left[r^2 - R^2\right]$$

$$u = \frac{-R^2\Delta P}{4\mu L}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$u(r=0) = u_{max} \rightarrow u_{max} = \frac{-R^2\Delta P}{4\mu L}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = u_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$$

پروفایل سرعت جریان آرام سیال نیوتنی داخل لوله

قبلاً ثابت کردیم در جریان آرام داخل لوله $\frac{1}{2}u_{max} = \overline{u}$ ← $u_{max} = 2\overline{u}$

$$\Rightarrow 2\overline{u} = \frac{-R^2\Delta P}{4\mu L} \Rightarrow 2\overline{u} = \frac{-\left(\frac{D}{2}\right)^2\times\Delta P}{4\mu L}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\Delta P = \frac{32\,\mu\overline{u}L}{g_c D^2}}$$

رابطه هاگن - پوازیه

g_c ← در سیستم انگلیسی

رابطه هاگن - پوازیه برای محاسبه افت فشار برای جریان آرام سیال نیوتنی در داخل لوله استفاده می‌شود .

$$Q = \overline{u}\cdot A = \frac{\pi D^2}{4}\cdot\overline{u} \rightarrow \overline{u} = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\rightarrow \boxed{-\Delta P = \frac{128\,\mu QL}{g_c\pi D^4}}$$

اگر سرعت را ثابت نگه داریم : $-\underset{h_f}{\Delta P} \propto \frac{1}{D^2}$

اگر قطر لوله ثابت باشد :

$$-\underset{h_f}{\Delta P} \propto (\overline{u})^1$$

$$-\underset{h_f}{\Delta P} \propto Q^1$$

اگر دبی ثابت نگه داشته شود : $-\underset{h_f}{\Delta P} \propto \frac{1}{D^4}$

یعنی اگر در جریان آرام سیال نیوتنی در داخل لوله در دبی ثابت قطر لوله را نصف کنیم افت فشار 16 برابر می‌شود .

سوال ۱۹۴ جزوه صورتی : گزینه ۱ درست است.

گزینه ۲ گفته پروفایل سرعت در جهت r تغییر نمی کند.

سوال ۱۹۸ جزوه صورتی :

$$\tau = \frac{\Delta P}{2L} r$$

$$\Delta P = 16\mu L$$

در داخل لوله هرچه شعاع زیاد می شود سرعت کم می شود $\frac{du}{dr} < 0$

$$\Rightarrow \tau = -\mu \frac{du}{dr} \Rightarrow \frac{\Delta P}{2L} r = -\mu \frac{du}{dr} \Rightarrow \frac{16\mu L}{2L} \cdot r = -\mu \frac{du}{dr} \Rightarrow du = -8r\,dr$$

$$\int_0^u du = -\int_{r=R}^{r} 8r\,dr \Rightarrow u = -\left[4r^2 - 4R^2\right] = 4\left(\frac{D}{2}\right)^2 - 4r^2$$

$$\Rightarrow u = D^2 - 4r^2$$

گزینه ۴ درست است.

با امتحان کردن جوابها با شرط مرزی $r=R \Rightarrow u=0$ فقط در گزینه ۴ صدق می کند.

سوال ۲۰۰ جزوه صورتی :

$$V = V_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$\tau_w = -\mu \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R} = -\mu V_{max}\left(\frac{-2R}{R^2}\right) = \frac{2\mu V_{max}}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_w = \frac{4\mu \bar{V}}{R}}$$

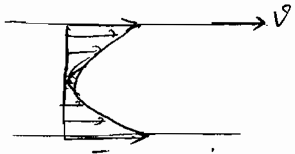
تنش در دیواره لوله در جریان آرام سیال نیوتنی
جواب سوال ۲۰۸ جزوه صورتی.

$$F_w = \tau_w \times (2\pi R L) \Rightarrow F_w = \frac{2\mu V_{max}}{R}(2\pi R L)$$

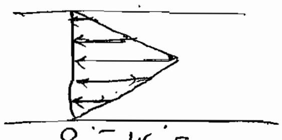
$$\Rightarrow \frac{F_w}{L} = 4\mu\pi V_{max}$$

گزینه ۳

سوال ۲۰۲ جزوه صورتی : چون گفته قطر لوله خیلی کم است می تواند پروفایل سرعت خطی باشد پس همراست
چون لوله را می کشیم سیال چسبیده به لوله با سرعت V حرکت می کند و در مرکز سرعت به صفر می رسد.



پروفایل سرعت



پروفایل تنش

سوال ۲۲۴ جزوه صورتی :

$$\Delta P \propto \bar{u}^{1}$$

گزینه ۲

سوال ۲۲۴ جزوه صورتی :

$$\tau = -\frac{\Delta P}{L}\cdot\frac{r}{2}$$

$$\Delta P \propto Q^{1} \longrightarrow \tau \propto Q^{1}$$

گزینه ۳

سوال ۲۲۶ جزوه صورتی :

$$\Delta P \propto \frac{1}{D^{4}}$$

گزینه ۴

سوال ۲۰۸ جزوه صورتی :

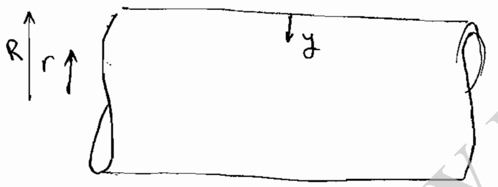
$$\tau = -\frac{\Delta P}{L}\cdot\frac{D}{4}$$

psi

$$\tau = -\frac{10\,\frac{lbf}{in^2}\times(12)^2\,\frac{in^2}{ft}}{100\,ft}\times\frac{\left(\frac{24}{12}\right)\,ft}{4} = 7.2\,\frac{lbf}{ft^2}$$

گزینه ۱

در جریان درهم سیال نیوتنی داخل لوله ، پروفایل سرعت به صورت تجربی بدست می‌آید :



$$u = u_{max}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/7}$$

$$u = u_{max}\left(\frac{R-r}{R}\right)^{1/7}$$

$$u = u_{max}\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \longrightarrow \frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}$$

سوال ۲۰۹ جزوه صورتی :

گزینه ۱

$$\tau_w = -\eta\,\frac{du}{dy}\bigg|_{y=0} = -\eta\,u_{max}\,\frac{\frac{1}{7}\,y^{-\frac{6}{7}}}{R^{1/7}}\Bigg|_{y=0}$$

$$\Rightarrow \tau_w = -\eta\,u_{max}\,\frac{1}{7R^{1/7}\,y^{\frac{6}{7}}}\Bigg|_{y=0} \Rightarrow \tau_w = \infty$$

اگر از این رابطه استفاده کنیم τ_w بینهایت می‌شود و این درست نیست .

ضریب اصطکاک

ضریب اصطکاک فانینگ fanning را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f_{fanning} = \frac{\tau_w}{\frac{\rho \bar{v}^2}{2g_c}}$$

$$f_{darcy} = \frac{\tau_w}{\frac{\rho \bar{v}^2}{8g_c}}$$

$$\longrightarrow f_{darcy} = 4 f_{fanning}$$

امروزه از ضریب اصطکاک faning بیشتر استفاده می‌شود.

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \bar{v}^2 / 2g_c} \quad ①$$

$$h_f = -\frac{\Delta P}{\rho} \quad ②$$

$$\tau_w = -\frac{\Delta P}{L} \cdot \frac{D}{4} \quad ③$$

از رابطه ③ ΔP را محاسبه می‌کنیم در رابطه ② قرار می‌دهیم.

$$h_f = \frac{4 \tau_w L}{D \rho} \quad ④$$

از رابطه ① τ_w را محاسبه می‌کنیم و در رابطه ④ قرار می‌دهیم.

$$\rightarrow h_f = \frac{4L}{\rho D}\left(f \frac{\rho \bar{V}^2}{2g_c}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{h_f = 4 f \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g_c}}$$

هم دهن زبان آرام هم دهن زبان دهم

اگر رابطه به شکل $\boxed{h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g_c}}$ بنویسیم f به کار رفته در رابطه f_{darcy} است ولی این رابطه به رابطه دارسی - وایسباخ معروف است.

سیستم SI

$$h_f = 4 f_f \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2g_c} \quad g_c \longrightarrow 1$$

واحد h_f : $\frac{\text{انرژی}}{\text{جرم}}$

$$h_f = 4 f_f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad g \longrightarrow 9.8 \frac{m}{sec^2}$$

واحد h_f : ارتفاع

سیستم انگلیسی EV

$$h_f = 4 f_f \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g_c} \quad g_c \longrightarrow 32.2$$

واحد h_f : $\frac{\text{انرژی}}{\text{جرم}}$

$$h_f = 4 f_f \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad g \longrightarrow 32.2 \ ft/sec^2$$

واحد h_f : ارتفاع

محاسبه ضریب اصطکاک :

جریان آرام درون لوله : $\tau_w = \frac{4\mu\bar{v}}{R} \longrightarrow f = \frac{\frac{4\mu\bar{v}}{R}}{\rho\frac{\bar{v}^2}{2}} = \frac{16\mu}{\rho\bar{v}D} = \frac{16}{\frac{\rho\bar{v}D}{\mu}} = \frac{16}{Re}$

در جریان آرام سیال نیوتنی داخل لوله ضریب اصطکاک فانینگ برابر $\frac{16}{Re}$ است و $f = \frac{16}{Re}$

" " دارسی برابر $\frac{64}{Re}$ است . $f_{darcy} = \frac{64}{Re}$

اگر در جریان آرام منحنی ضریب اصطکاک را برحسب عدد رینولدز روی محورهای log-log رسم کنیم خط راستی بدست می‌آید که شیب آن برابر 1- می‌باشد

$$\log f = \log 16 - \log Re$$

$$\log f_{darcy} = \log 64 - \log Re$$

جریان درهم درون لوله :

زبری و زبری نسبی :

متوسط برآمدگی‌ها در سطح لوله را زبری می‌نامیم (ε)

حاصل تقسیم ε بر قطر لوله را زبری نسبی می‌نامیم $(\frac{\varepsilon}{D})$

وقتی جریان آرام است سیال به آرامی از روی این فرورفتگی‌ها و برآمدگی‌ها حرکت می‌کند یعنی این فرورفتگی و برآمدگی‌ها را جزو جدار لوله بحساب می‌آوریم

⊛ بنابراین در جریان آرام ضریب اصطکاک و در نتیجه افت فشار به زبری و زبری نسبی بستگی ندارد .

در جریان درهم سیال با سرعت زیادی به این فرورفتگی‌ها و برآمدگی‌ها برخورد کرده و قسمت زیادی از انرژی خود را از دست می‌دهد بنابراین در جریان درهم ضریب اصطکاک و افت فشار تابعی از زبری نسبی می‌باشد .

در جریان خیلی درهم ضریب اصطکاک فقط و فقط تابعی از زبری نسبی بوده و به Re بستگی ندارد .

جریان آرام : $f = F(Re)$

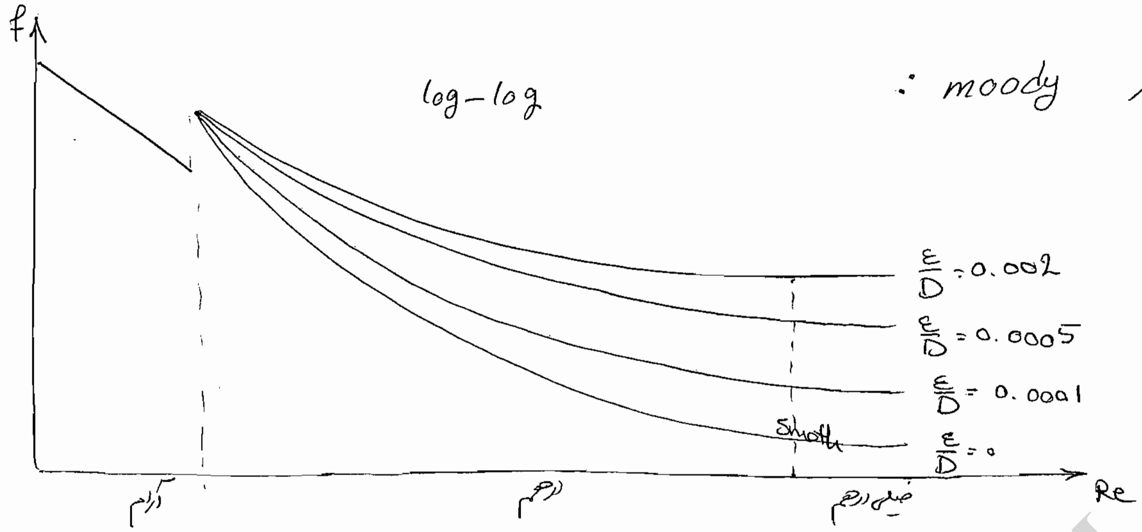
جریان درهم : $f = F(Re, \frac{\varepsilon}{D})$

جریان خیلی درهم : $f = F(\frac{\varepsilon}{D})$

روابط تری

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.06 \log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0.8$$: جریان درهم

نمودار moody :



نتیجه ① : در جریان آرام logf برحسب log Re خط راستی است با شیب ‎-1.

② : در زبری نسبی مشخص هرچه Re افزایش یابد ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد ولی h_f افزایش می‌یابد.

$$h_f = 4f\,\frac{L}{D}\cdot\frac{V^2}{2}$$

جریان آرام → $f = \frac{16}{\frac{\rho V D}{\mu}} \longrightarrow h_f \alpha V$

③ در یک عدد Re مشخص هرچه زبری نسبی افزایش یابد ضریب اصطکاک و در نتیجه h_f افزایش می‌یابد.

④ در محدوده Re خیلی بالا در شکل دیده می‌شود که ضریب اصطکاک به یک عدد ثابتی می‌رسد و بعد از آن با افزایش Re ضریب اصطکاک تغییری نمی‌کند و فقط تابع زبری نسبی است.

سوال ۲۱۶ جزوه صدقی : گزینه ۳ درست است.

جلسه نهم :

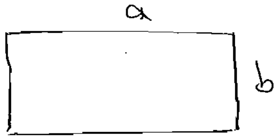
قطر هیدرولیک :

تمام روابطی که بدست آوردیم برای عبور سیال درون لوله بود یعنی سطح مقطع عبور سیال لوله باشد اگر سطح مقطع عبور سیال غیر از لوله باشد از قطر و شعاع هیدرولیکی استفاده می کنیم .

$$\text{شعاع هیدرولیکی}\quad r_H = \frac{\text{مساحت سطح مقطعی که جریان عبور می کند}}{\text{محیطی که خیس می شود}}$$

$$\text{قطر هیدرولیکی}\quad D_H = 4\, r_H$$

کانال مستطیلی :

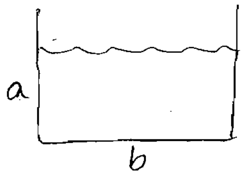


$$r_H = \frac{ab}{2a+2b}$$

$$D_H = 4\left(\frac{ab}{2a+2b}\right) = \frac{2ab}{a+b}$$

حال فرض می کنیم این کانال مستطیل شکل را معادل لوله ای به قطر $\frac{2ab}{a+b}$ در نظر می گیریم

کانال روباز :



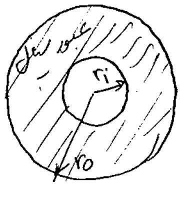
$$r_H = \frac{ab}{2a+b}$$

$$D_H = \frac{4ab}{2a+b}$$

اگر $b \gg a$ باشد :

$$D_H = 4a$$

در روابط نمی توان به جای شعاع از شعاع هیدرولیکی استفاده کنیم پس هر رابطه که برای لوله بدست آورده بودیم برحسب قطر می نویسیم آنگاه به جای قطر از قطر هیدرولیکی استفاده می کنیم .



$$D_H = 4\left[\frac{\frac{\pi}{4}(D_o^2 - D_i^2)}{\pi(D_o + D_i)}\right] \Rightarrow D_H = D_o - D_i \quad \text{در درس سیالات}$$

در درس حرارت : $D_H = 4\left[\frac{\frac{\pi}{4}(D_o^2 - D_i^2)}{\pi D_i}\right] \Rightarrow D_H = \frac{D_o^2 - D_i^2}{D_i}$

فقط معادل های حرارتی بین نقطه سطح لوله داخلی مهم است .

سوال ۲۴۸ جزوه صنعتی :

$\nu_{\text{هوا}} = 10^{-5} \ m^2/sec$

$V = 25 \ m/s$

ضلع کانال مربعی $= 50 \ cm$

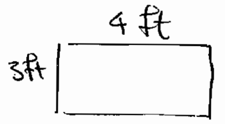
$Re = ?$

$$Re = \frac{\rho V D_H}{\mu}$$

$$Re = \frac{V D_H}{\nu} = \frac{25 \times 4\left[\frac{a^2}{4a}\right]}{10^{-5}} = \frac{25 \times 0.5}{10}$$

$Re = 1250000$

$$a \text{ مربع به ضلع } D_H = a = 4\left(\frac{a^2}{4a}\right)$$



تست ۲۴۶ جزوه صنعتی :

$L = 300 \ ft$ طول کانال

$\Delta P = 12 \ ft\text{-}H_2O$

$\tau_w = ? \ psi$

$$\tau_w = \frac{-\Delta P}{L} \cdot \frac{D_H}{4}$$

$$D_H = 4\left[\frac{3 \times 4}{7 \times 2}\right] = \frac{4 \times 12}{14} \ ft$$

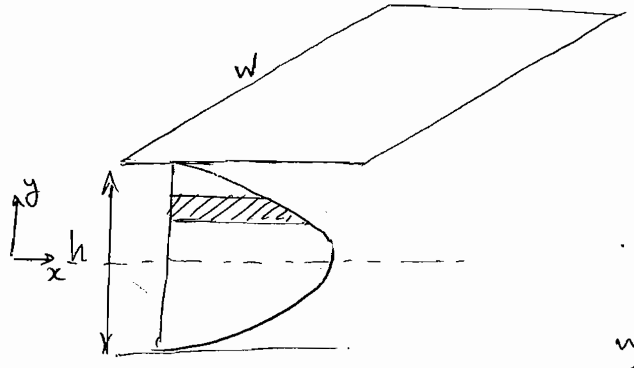
$$\tau_w = \frac{-\Delta P}{300 \ ft} \times \frac{12}{14} \ ft$$

$$\Delta P = \gamma \cdot h = 62.4 \frac{lbf}{ft^3} \times \frac{1 \ ft^3}{(12)^3 in^3} \times 12 ft \times \frac{12 in}{1 ft} = \frac{62.4}{12} \left(\frac{lbf}{in^2} = psi\right)$$

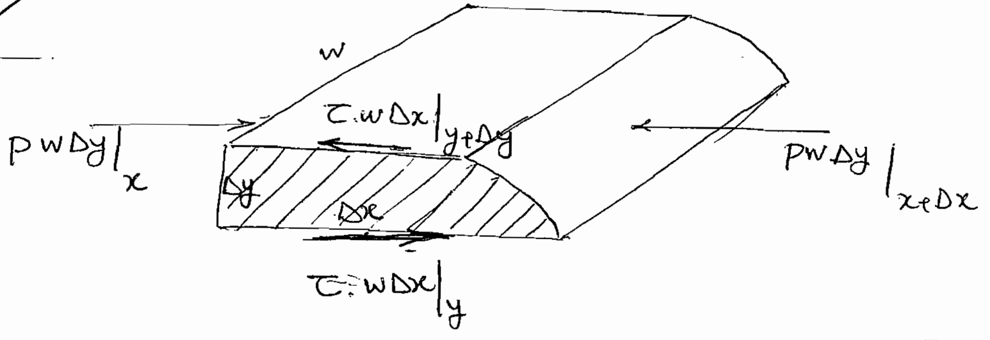
$$\tau_w = \frac{62.4}{12 \times 300} \times \frac{12}{14} = 0.0148 \ psi$$

بررسی جریان سیال نیوتنی در فاصله بین دو صفحه موازی

دو صفحه موازی به عرض w را که به فاصله h از هم قرار گرفته اند در نظر می گیریم فرض می کنیم سیال نیوتنی بین این دو صفحه در حرکت باشد.



چون شکل متقارن است برای نیمه بالایی پروفایل محاسبات را انجام می دهیم. یک المان در نظر می گیریم.



فرض می‌کنیم جریان سیال توسعه یافته باشد: $\swarrow$ $V_{1x}=V_{2x}$

$$\sum F_x = \frac{\dot{m}}{g_c}\left(\cancel{V_{2x}-V_{1x}}\right)^{0}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow P\cdot W\cdot \Delta y\Big|_x - PW\Delta y\Big|_{x+\Delta x} + \tau\cdot W\Delta x\Big|_y - \tau W\Delta x\Big|_{y+\Delta y} = 0$$

$$\xrightarrow[\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}]{\text{طرفین را بر } \Delta x\Delta y \text{ تقسیم}} \quad -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$ مختصات کارتزین

چون جریان را توسعه یافته فرض کرده‌ایم و در جریان توسعه یافته ΔP برحسب x عدد ثابتی می‌باشد.

$$\boxed{\frac{2\tau}{r} + \frac{\Delta P}{\Delta z} = 0}$$ مختصات استوانه‌ای

از پروفایل سرعت مشخص است که هرچه y زیاد می‌شود سرعت کم می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial y} < 0 \longrightarrow \tau = -\mu\frac{du}{dy}$$

چون از این رابطه استفاده کردیم پس تمام روابطی که به کمک این رابطه بدست می‌آوریم برای جریان آرام سیال نیوتنی بین دو صفحه برقرار است.

$$\Rightarrow \frac{\partial\left(-\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\Delta P}{L} = 0 \quad \Rightarrow -\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\Delta P}{L} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\Delta P}{\mu L}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta P}{\mu L}y + C_1$$

$$\Rightarrow u = \frac{\Delta P}{2\mu L}y^2 + C_1 y + C_2 \quad \xrightarrow[C_1=0]{(I)} \quad u = \frac{\Delta P}{2\mu L}y^2 + C_2 \xrightarrow{(II)} C_2 = \frac{-\Delta P}{2\mu L}\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0 \quad (I)$$

$$u\left(y=\frac{h}{2}\right) = 0 \quad (II)$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{-\Delta P\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2\mu L}\left[1-\left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right]}$$

$$u(y=0)=u_{max} \Rightarrow u_{max}=\frac{-\Delta P\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2\mu L}$$

$$\Rightarrow \quad u=u_{max}\left[1-\left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right]$$

$$\bar{u}=\frac{2}{3}u_{max} \Rightarrow u_{max}=\frac{3}{2}\bar{u} \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\bar{u}=\frac{-\Delta P\, h^2}{8\mu L}$$

$$\Rightarrow -\Delta P=\frac{12\mu\bar{u}L}{h^2}$$

محاسبه تنش برشی در روی صفحه :

$$\tau_w=-\mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\frac{h}{2}}$$

بدست آوردیم : $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\Delta P}{\mu L}\cdot y$

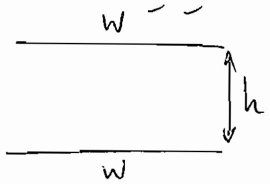
$$\Rightarrow \tau_w=-\mu\cdot\frac{\Delta P}{\mu L}\cdot\left.y\right|_{y=\frac{h}{2}} \Rightarrow \tau_w=\frac{-\Delta P}{L}\cdot\frac{h}{2}$$

محاسبه ضریب اصطکاک در فاصله بین دو صفحه :

$$f=\frac{\tau_w}{\rho\frac{\bar{u}^2}{2}}=\frac{\frac{\frac{12\mu\bar{u}L}{h^2}}{L}\cdot\frac{h}{2}}{\rho\frac{\bar{u}^2}{2}} \Rightarrow f=\frac{12\mu}{\rho h\bar{u}}$$

اگر $Re=\frac{\rho\bar{u}h}{\mu} \Rightarrow \quad f=\frac{12}{Re}$ و $f_{darcy}=\frac{48}{Re}$

اگر به فاصله بین صفحات موازی از جلو نگاه کنیم سطح مقطع عبور سیال را به این شکل می بینیم :



$$D_H=4\left(\frac{wh}{2w}\right)=2h$$

$$\Rightarrow f=\frac{24\mu}{\rho\bar{u}(2h)}=\frac{24\mu}{\rho\bar{u}D_H}=\frac{24}{Re_{D_H}}$$

$$f_{darcy}=\frac{96}{Re_{D_H}}$$

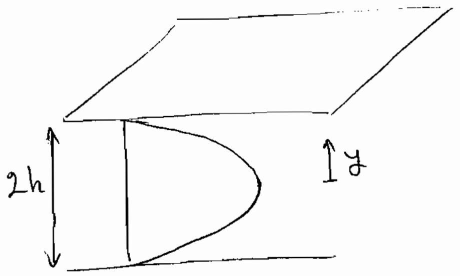
تست 252 جزوه صفحه : چون Re را به صورت $Re=\frac{\rho\bar{u}h}{\mu}$ تعریف کرده پس $f_{darcy}=\frac{48}{Re}$

تست 251 جزوه صورتی : گزینه 1

تست ۷۲ سال ۸۹ صفحه ۲۲۵ مجموعه سوالات :

تنش برشی روی صفحه چقدر است ؟

گزینه ۴



$$\mu = \frac{h^2 \cdot \Delta P}{2\mu L}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right) = u_{max}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)$$

$$\tau = -\mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} = -\mu\, u_{max} \left.\frac{-2y}{h^2}\right|_{y=h}$$

$$\tau_w = \frac{2\mu u_{max}}{h} = \frac{2\mu \frac{3}{2}\bar{u}}{h} = \frac{3\mu\bar{u}}{h}$$

اتلاف در اتصالات :

علاوه بر لوله اتصالات دیگری نظیر زانو، سه راهی، شیرآلات نیز باعث اتلاف و افت فشار می شوند. برای محاسبه اتلاف در اتصالات روش های زیر وجود دارد :

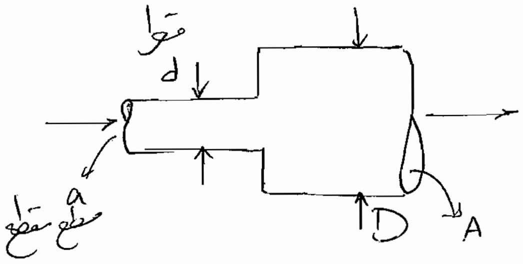
۱) استفاده از ضریب اتلاف :

در لوله می نویسیم : $h_f = \underbrace{4f\frac{L}{D}}_{k\ \text{ضریب اتلاف}}\frac{v^2}{2}$

$$\xrightarrow{}(SI)\begin{cases} h_f = k\dfrac{v^2}{2} & \dfrac{\text{انرژی}}{\text{جرم}} \\ h_f = k\dfrac{v^2}{2g} & \text{ارتفاع} \end{cases}$$

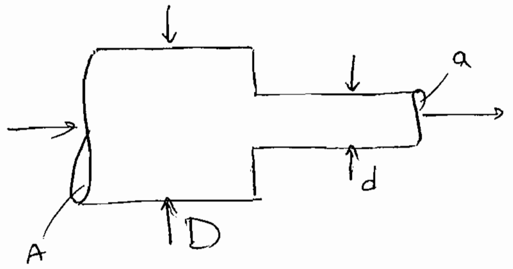
$$\text{آمریکایی}\begin{cases} h_f = k\dfrac{v^2}{2g_c} \rightsquigarrow 32.2 & \dfrac{\text{انرژی}}{\text{جرم}} \\ h_f = k\dfrac{v^2}{2g} \rightsquigarrow 32.2\,\dfrac{ft}{sec^2} & \text{ارتفاع} \end{cases}$$

انبساط ناگهانی :



در انبساط ناگهانی k بر مبنای سرعت در سطح مقطع کوچکتر است و در روابط از سرعت در سطح مقطع کوچکتر استفاده می کنیم.

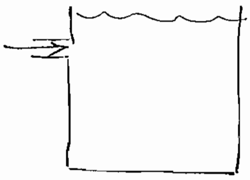
$$k = \left(1-\frac{a}{A}\right)^2 \quad \text{و} \quad k = \left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]^2$$



انقباض ناگهانی :

$$k = 0.5\left[1 - \frac{a}{A}\right]$$

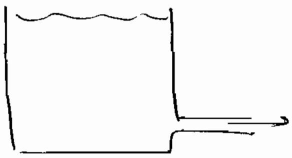
$$k = 0.5\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$$



ورودی به یک مخزن :

$$k = 1$$

ورودی به یک مخزن مثل انبساط ناگهانی است با توجه این نکته که $\frac{d}{D}$ تقریباً صفر است .



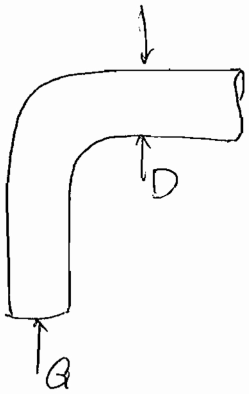
خروجی از یک مخزن : $k = 0.5$

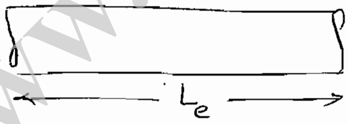
فقط برای انبساط ناگهانی : $h_f = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$

۲) طول معادل :

وقتی گفته می شود مثلاً در یک زانویی طول معادل برابر است با $L_e = 10\,m$

یعنی افت فشار در زانویی برابر است با افت فشار در لوله ای با قطر برابر قطر لوله به طول $L_e = 10m$.



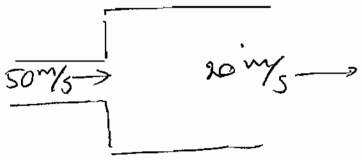


$$h_f = 4f\,\frac{L_e}{D}\,\frac{V^2}{2}$$

برای زانویی $\longrightarrow h_f = k\,\frac{V^2}{2}$ $\quad \rightarrow k = 4f\,\frac{L_e}{D}$

$$\rightarrow \boxed{L_e = \frac{kD}{4f} = \frac{kD}{f_{darcy}}}$$

سوال ۲۵۶ جزوه صورتی :



برای انبساط ناگهانی $h_f = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{(50-20)^2}{20} = 45\,m$

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+\cancel{z_1}=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+\cancel{z_2}+h_f$$

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{50^2}{20}=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{20^2}{20}+45 \Rightarrow \frac{P_2-P_1}{\gamma}=60 \Rightarrow \Delta P=60\,m\times 10\,\frac{kN}{m^3}$$

$$\Rightarrow \Delta P = 600\ kpa$$

تست ۲۵۹ جزوه صنعتی :

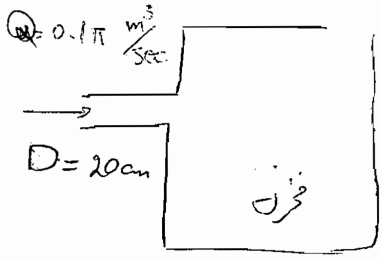
$$\Sigma K = 10+(2\times 0.9)+0.2 = 12$$

$$L_e=\frac{KD}{4f}=\frac{12\times 0.15}{4\times 0.06}=7.5\,m$$ در تمرین ها نیست

پس ضریب اصطکاکی که در سؤال داده $\underset{darcy}{f}$ بوده

$$L_e=\frac{KD}{f}=\frac{12\times 0.15}{0.06}=30\,m \checkmark$$

تست ۲۵۷ جزوه صنعتی :



$$h_f=k\frac{v^2}{2}\ \left(\frac{J}{kg}\right)$$

$$\underset{\frac{J}{sec}=W}{\text{اتلاف توان}} = \underset{\frac{kg}{sec}}{\dot{m}} \times \underset{J/kg}{h_f}$$

$$Q=u.\pi R^2$$

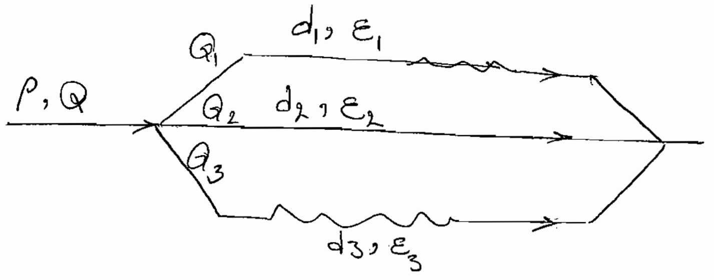
$$0.1\pi = u.\pi(0.1)^2 \longrightarrow u=10\ m/sec$$

$$\dot{m}=\rho Q = 1000\times 0.1\pi \longrightarrow \dot{m}=100\pi$$

$$h_f = 1\times\frac{10^2}{2}=50\ \frac{J}{kg} \Rightarrow \text{اتلاف توان} = 100\pi\times 50 = 5000\pi$$

k=1 ورودی به مخزن

اتلاف در لوله های موازی :



$$\varepsilon_3 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2$$

$$h_{f_1} = h_{f_2} = h_{f_3}$$

برای توضیح بین نقاط A و B برنولی را می‌نویسیم .

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + gz_B + \frac{V_B^2}{2} + h_{f_1}$$

〃 〃 〃 = 〃 〃 〃 $+h_{f_2}$ و $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

〃 〃 〃 = 〃 〃 〃 $+h_{f_3}$

با توجه به برنولی اتلاف در هر سه مسیر یکسان است .

تست 264 جزوه صورتی :

گزینه ۳ درست است .

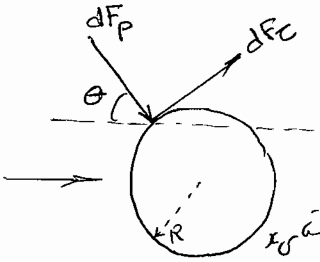
تست 262 جزوه صورتی : گزینه ۱

جلسه دهم

نیروی درگ (نیروی پسا) (نیروی کشش)

جریان سیال $\left\{ \begin{array}{l} \text{جریان داخلی : عبور جریان از درون لوله .} \\ \text{جریان خارجی : مثل عبور سیال از روی یک کره یا عبور سیال از روی یک لوله} \end{array} \right.$

فرض می‌کنیم سیالی با سرعت u_0 و ویسکوزیته μ به کره‌ای به شعاع R نزدیک شود نیروی وارد بر المان dA در هر نقطه مطابق شکل زیر است .



نیروی تنشی مماس بر سطح است .

نیروی فشاری عمود بر سطح است .

نیروی وارد بر المان در راستای x: $dF_x = dF_p \cos\theta + d\tau_F \sin\theta$

$$\Rightarrow dF_x = p\cos\theta\, dA + \tau \sin\theta\, dA$$

$$\Rightarrow F_x = \int p\cos\theta\, dA + \int \tau \sin\theta\, dA$$

اگر بخواهیم F_x را حساب کنیم باید توزیع فشار و توزیع تنش را داشته باشیم و محاسبه توزیع فشار و توزیع تنش مشکل است اما در حالت‌های خاص می‌توان توزیع فشار و تنش را محاسبه کرد.

✓ در حالتی که جریان سیال u.st.st باشد

✓ سیال تراکم ناپذیر باشد

✓ Re<1 باشد

✓ می‌توان توزیع فشار و توزیع تنش را محاسبه کرد.

$$F_x = \overbrace{2\pi\mu R u_0}^{F_P} + \overbrace{4\pi\mu R u_0}^{F_\tau}$$

$$F_x = 6\pi\mu R u_0 = 3\pi\mu D u_0$$

نیروی درگ وارد بر کره در جریان خزشی : $\boxed{F_D = 6\pi\mu R u_0 = 3\pi\mu D u_0}$ ⊗

یعنی سرعت خیلی کم

$\frac{1}{3}$ نیروهای وارد بر یک کره در جریان خزشی ناشی از نیروهای فشاری و $\frac{2}{3}$ نیروها ناشی از نیروهای برشی می‌باشند .

✓ $\frac{F_P}{F_D} = \frac{1}{3}$ و ✓ $\frac{F_\tau}{F_D} = \frac{2}{3}$

F_P نیروی درگ ناشی از شکل جسم

F_τ نیروی درگ ناشی از اصطکاک

جریان داخلی ← ضریب اصطکاک $f = \dfrac{\tau_w}{\rho \frac{\bar{v}^2}{2}}$

سرعت نزدیک شدن سیال به جسم

جریان خارجی ← ضریب درگ $C = \dfrac{F_D/A_p}{\rho \frac{u_0^2}{2}} \Rightarrow \boxed{F_D = C_D A_p \dfrac{\rho u_0^2}{2}}$

این رابطه همواره درست است

برای هر نوع سیالی چه تراکم پذیر باشد یا نباشد. در هر عدد Re ای. برای هر جسمی با هر شکلی.

$$F_D = C_D \cdot A_p \cdot \frac{\rho u_0^2}{2 g_c}$$ سیستم امریکایی

محاسبه ضریب درگ در جریان خزشی سیال از روی یک کره :

$$C_D = \frac{F_D/A_p}{\rho \frac{u_0^2}{2}}$$

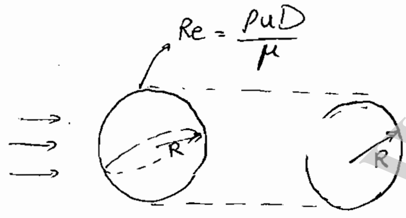
در جریان خزشی از روی یک کره مقدار درگ برابر است با : ←

$$C_D = \frac{\frac{3\pi\mu D u_0}{A_p}}{\rho \frac{u_0^2}{2}}$$

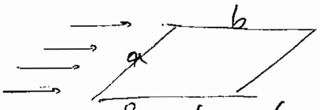
A_p بستگی به شکل جسم دارد.

A_p برای یک کره برابر است با مساحت تصویر کره بر روی صفحه عمودی.

$Re = \dfrac{\rho u D}{\mu}$

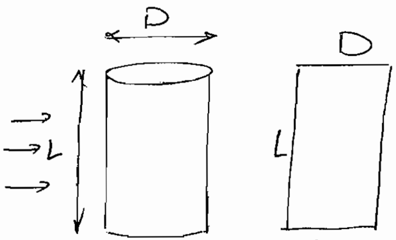


$A_p = \pi R^2$



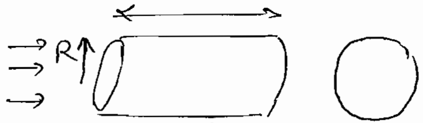
$A_p = a \times b$

⊛ تصویر یک صفحه در امتداد مسیر جریان یک خط می شود ولی A_p برابر با مساحت صفحه است.



$A_p = DL$

$Re = \dfrac{\rho u D}{\mu}$

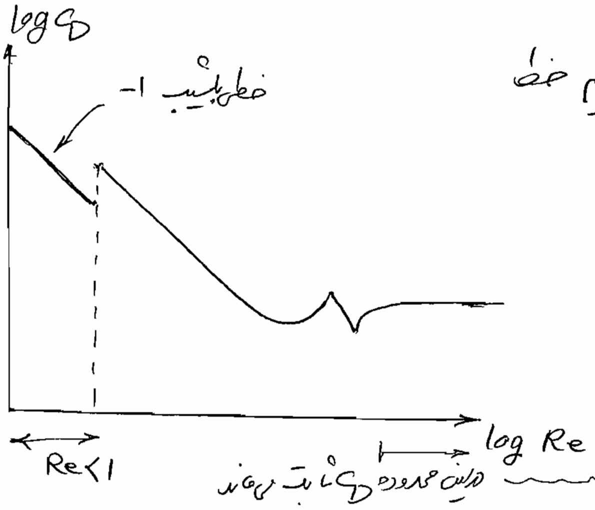


$A_p = \pi R^2$

$Re = \dfrac{\rho u L}{\mu}$

کره $C_D = \dfrac{\frac{3\pi\mu D u_0}{A_p}}{\rho \frac{u_0^2}{2}} = \dfrac{\frac{3\pi\mu D u_0}{\frac{\pi}{4}D^2}}{\rho \frac{u_0^2}{2}} = \dfrac{24\mu}{\rho u_0 D} = \boxed{\dfrac{24}{Re}}$

ضریب درگ در جریان خزشی از روی کره برابر است با : $\dfrac{24}{Re}$.

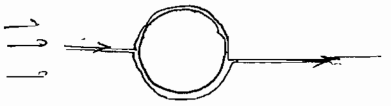


در این محدوده C_D ثابت می‌ماند $\longrightarrow F_D \propto V^2$

اگر در جریان خزشی $\log C_D$ را برحسب $\log Re$ رسم کنیم خط راستی بدست می‌آید با شیب (۱-) .

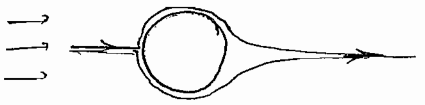
$$\log C_D = \log 24 - \log Re$$

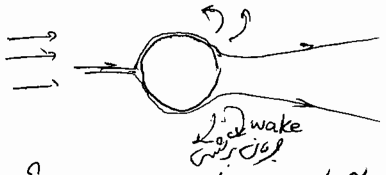
وقتی سیال به یک کره می‌رسد وقتی $Re<1$ است جریان به قدری آرام است که تمام کره را دور می‌زند و کل سطح کره را حس می‌کند .



وقتی سرعت را زیاد می‌کنیم سیال تمام سطح کره را حس نمی‌کند

وقتی سرعت را زیادتر می‌کنیم جریان‌های برگشتی هم بوجود می‌آید .





هرچه سرعت زیاد شود ، عدد رینولد زیاد می‌شود ، wake یا جریان برگشتی زیاد می‌شود آنگاه C_D کم می‌شود F_D زیاد می‌شود

$$u\uparrow \;\Rightarrow\; Re\uparrow \;\Rightarrow\; wake\uparrow \;\rightarrow\; C_D\downarrow \;\Rightarrow\; F_D\uparrow$$

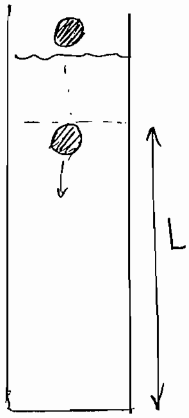
سرعت حد سقوط یک ذره در داخل یک سیال :

وقتی ذره‌ای درون سیال سقوط می‌کند سه نیرو بر آن وارد می‌شوند .

۱- نیروی وزن

۲- نیروی بویانسی

۳- نیروی دراگ



$$u = \frac{L}{t}$$

وقتی ذره به سرعت حد می‌رسد مجموع نیروهای دراگ و بویانسی برابر است با وزن ذره

$$W = F_B + F_D$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi\mu R u_0$$

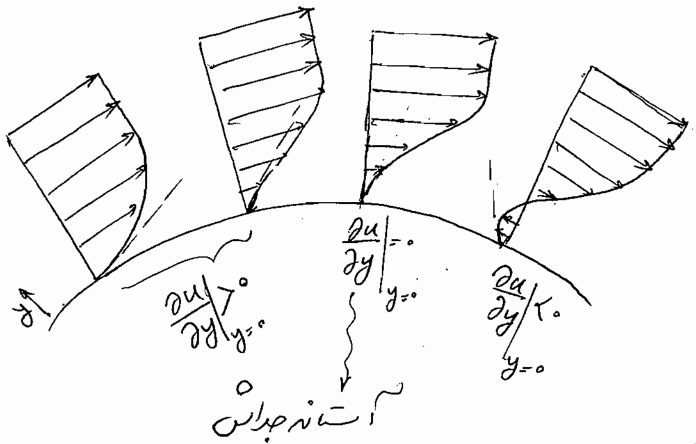
$$\text{سرعت حد ذره کروی درون سیال} \longrightarrow \left.\overbrace{u_0 = \frac{2R^2 g(\rho_s-\rho_s)}{9\mu} = \frac{D^2 g(\rho_s-\rho)}{18\mu} = \frac{D^2(\gamma_s-\gamma)}{18\mu}}\right\}$$

چون در رابطه فوق برای نیروی درگ از عبارت $6\pi\mu R u_0$ استفاده کردیم پس در سقوط ذره کروی درون سیال باید سرعت حد خیلی کم باشد.

سرعت حد یعنی سرعت ثابت (شتاب حرکت صفر)

$$u_0 \propto D_p^2$$

جدایش لایه مرزی



۱- سطوح انحنا دار به جدایش لایه مرزی کمک می‌کنند

۲- اگر جدایش اتفاق بیفتد نیروی درگ افزایش پیدا می‌کند.

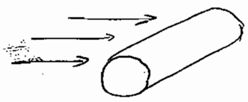
۳- $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ شرط لازم برای جدایش می‌باشد اما شرط لازم و کافی نیست چون به ازاء هر مقدار مثبت $\frac{\partial P}{\partial x}$ جدایش اتفاق نمی‌افتد.

۴- شرط لازم و کافی برای جدایش لایه مرزی این است که گرادیان سرعت در نقطه صفر برابر صفر باشد $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$

تست ۲۶۹ جزوه صورتی : گزینه ۴ .

تست ۲۸۲ جزوه صورتی : گزینه ۲ .

$$F_D = C_D \cdot A_p \cdot \rho \frac{v^2}{2}$$



درجریان سیال ایده‌ال ($\mu=0$) نیروی درگ صفر است .

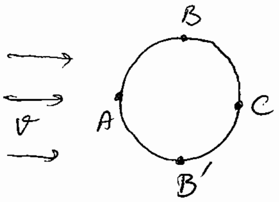
$$F_D = C_D \cdot LD \, \rho \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{F_D}{L} = C_D D \rho \frac{V^2}{2}$$ ⟶ اگر سیال ایده‌ال نباشد ⟶ گزینه ۴ درست می‌شد

درجریان خزشی برای همه اجسام $C_D = \frac{cte}{Re}$

تست ۲۸۶ جزوه صورتی : گزینه ۲

تست ۲۷۹ جزوه صفوری : گزینه ۱



درنقطه B بیشترین سرعت سیال وجود دارد (نسبت به تمام نقاط کره)

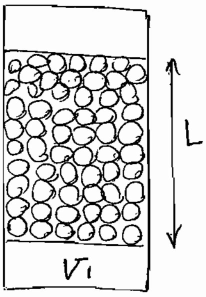
درنقطه B کمترین مقدار فشار وجود دارد.

هرچه درمورد B می‌گوییم درمورد B' هم صادق است.

سرعت درنقطه A به صفر می‌رسد و فشار درنقطه A ماکزیمم مقدار است و $P_B < P_C < P_A$

نقطه جدایش درمحدوده بین B تا C است.

بسترهای پرشده :



برای بررسی بسترهای پرشده تئوری‌های مختلفی وجود دارد.

یکی از تئوری‌ها می‌گوید مسیر حرکت سیال از بین پرکن‌ها را مثل جریان سیال از درون لوله‌ای پرپیچ وخم درنظر بگیریم.

درجریان آرام نیروی برشی مهم است. جریان آرام : $\tau_w = \frac{4\mu\bar{u}}{R}$

جریان مغشوش : $h_f = 4f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2} \longrightarrow -\frac{\Delta P}{\rho} = 4f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2} \rightarrow -\Delta P = 4f\frac{L}{D}\frac{\rho v^2}{2}$

درجریان درهم نیروی اینرسی مهم است.

① $F = F_i + F_V$ اما در اصل ما نمی‌دانیم درجریان سیال در بستر پرشده نیروی ویسکوز مهم است یا نیروی اینرسی پس هردو را درنظر می‌گیریم

A_s سطح جانبی کل ذرات (پرکن‌ها) می‌باشد.

$$\frac{F}{A_S} = \frac{F_i}{A_S} + \frac{F_V}{A_S}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{A_S} = k_2\frac{\rho v_0^2}{r_H} + k_2\frac{\mu v_0}{r_H}$$

② $$\text{تخلخل} = \frac{\text{حجم فضاهای خالی}}{\text{حجم کل بستر}}$$

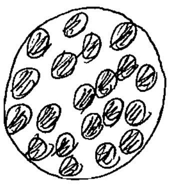
حجم کل بستر حجمی است که توسط پرکن‌ها اشغال شده است. ممکن است بخشی از بالا و پایین ستون خالی از پرکن‌ها باشد آن قسمت را در حجم کل بستر محاسبه نمی‌کنیم.

مثلاً اگر بستر را پر آب کنیم و بعد تخلیه کنیم :

$$\text{تخلخل} = \frac{\text{حجم آب خالی شده} - v_1}{SL}$$

سطح مقطع بستر

فرض می‌کنیم تخلخل در کل بستر یکنواخت باشد :
اگر مقطعی از بستر را برش دهیم واز بالا به آن نگاه کنیم چنین سطحی را می‌بینیم



③ $$Q = V_0 S = V_{eff} = (\varepsilon S) \rightarrow \boxed{V_{eff} = \frac{V_0}{\varepsilon}}$$

دبی سیال
سرعت سیال
سطح مقطع بستر

چون ε کوچکتر از یک است سرعت درون بستر بیشتر از سرعت سیال بیرون بستر است .

$$\varepsilon < 1 \longrightarrow V_{eff} > V_0$$

④ شعاع هیدرولیکی

$$r_H = \frac{\text{مساحتی که سیال عبور می‌کند}}{\text{محیطی که خیس می‌شود}} = \frac{S\varepsilon}{\text{محیطی که خیس می‌شود}} \times \frac{L}{L}$$

چون محیطی که خیس می‌شود را نمی‌شود محاسبه کرد صورت و مخرج را در L ضرب می‌کنیم تا مخرج جدید که برابر سطح جانبی کل پرکن ها است قابل محاسبه شود .

$$r_H = \frac{S\varepsilon L}{A_p} = \frac{S\varepsilon L}{N_p \cdot S_p}$$

⑤ حجمی از بستر که توسط ذرات اشغال می‌شود : $SL(1-\varepsilon) = N_p \cdot V_p \Rightarrow N_p = \frac{SL(1-\varepsilon)}{V_p}$

⑥ $$r_H = \frac{S\varepsilon L}{\frac{SL(1-\varepsilon)S_p}{V_p}} \Rightarrow r_H = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{V_p}{S_p}$$

برای ذرات کروی : $\frac{V_p}{S_p} = \frac{D_p}{6}$

⑦ اگر پرکن ها کروی نباشند از Φ_s (ضریب شکلی) استفاده می‌کنیم .

$$\Phi_s = \frac{\left(S_p/V_p\right)_{\text{ذرات کروی}}}{\left(S_p/V_p\right)_{\text{ذرات غیرکروی}}}$$

⑧ $F = (-\Delta P) \times$ سطح مقطعی که جریان عبور می‌کند $\rightarrow F = (-\Delta P) \times \varepsilon S$

روابط ② تا ⑧ را در رابطه ① جایگذاری می‌کنیم . رابطه صفحه بعد بدست می‌آید .

رابطه Ergun :

$$\underbrace{\frac{(-\Delta P)}{\rho V_0^2} \times \frac{D_P}{L} \times \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)} \times \Phi_s}_{\text{ضریب اصطکاک داخل یک بستر}} = \frac{36\, k_1 (1-\varepsilon)}{\Phi_s \cdot Re} + 6\, k_2$$

$36\, k_1 = 150$

$6\, k_2 = 1.75$

k_1 و k_2 اعداد ثابتی هستند که به صورت تجربی بدست می‌آیند.

جریان در بستر آرام باشد : Re کم $\longrightarrow \frac{36\, k_1 (1-\varepsilon)}{\Phi_s \cdot Re} \gg \overset{1.75}{6\, k_2}$

$$\Rightarrow ⊛ \left(\frac{-\Delta P}{L}\right) \propto V_0^1$$ معادله kozeny_karman

در جریان آرام درداخل بستر افت فشار در واحد طول متناسب است با سرعت سیال ورودی بستر.

وقتی گفته می‌شود معادله kozeny_karman برقرار است یعنی جریان درون بستر آرام است و $\left(\frac{-\Delta P}{L} \propto V_0\right)$

جریان در بستر درهم باشد : Re زیاد $\longrightarrow \frac{36\, k_1 (1-\varepsilon)}{\Phi_s \cdot Re} \ll \overset{1.75}{6\, k_2}$

$$\Rightarrow ⊛ \left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \propto V_0^2$$

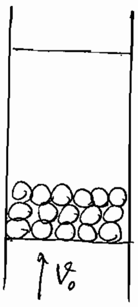
در جریان درهم درداخل بستر افت فشار در واحد طول بستر متناسب است با مجذور سرعت سیال ورودی بستر.

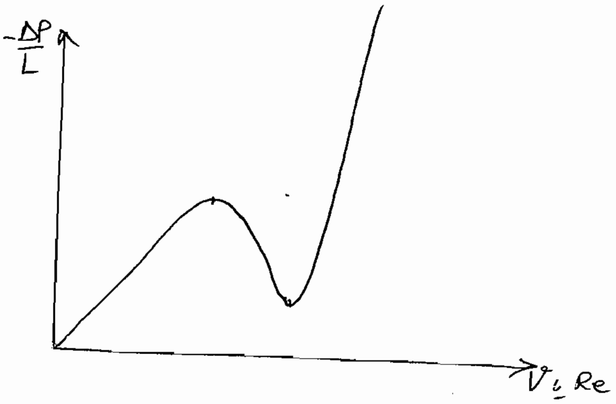
جریان آرام : $\log\left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \propto \log V_0$ ← سرعت ظاهری

یعنی سرعت بیرون بستر

جریان درهم : $\log\left(-\frac{\Delta P}{L}\right) \propto 2 \log V_0$

اگر $\log\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)$ را برحسب $\log V_0$ رسم کنیم هم جریان آرام و هم جریان درهم خط راست بدست می‌آید فقط جریان درهم شیب بیشتر است.

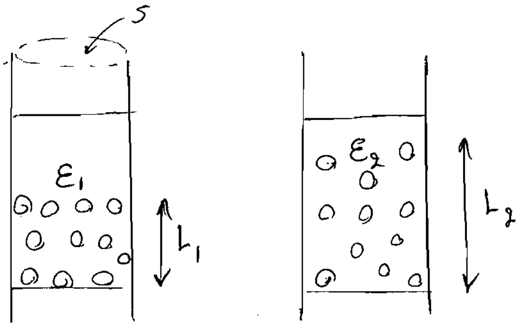




تغییرات افت فشار درداخل بستر

هر چه سرعت درون بستر زیاد شود افت فشار زیاد می‌شود. در پرکن‌ها نیروی وزن، بویانسی و درگ به ذرات وارد می‌شود که بویانسی و درگ به سمت بالا و وزن به سمت پایین می‌باشد. وقتی که سرعت سیال کم باشد نیروی درگ کم است و مجموع نیروی درگ و بویانسی نمی‌تواند بر نیروی وزن ذرات غلبه کند لذا پرکن‌ها در حالت سکون می‌باشند. با افزایش سرعت نیروی درگ زیاد شده و به جایی می‌رسیم که مجموع نیروی درگ و بویانسی با وزن ذرات برابری می‌کند. در این حالت بستر در آستانه سیالیت قرار می‌گیرد. در این حالت فاصله پرکن‌ها از هم بیشتر شده و سیال به راحتی از فاصله بین پرکن‌ها عبور می‌کند لذا افت فشار کاهش می‌یابد. اگر سرعت سیال را باز هم افزایش دهیم فاصله بین ذرات از هم بیشتر شده و افت فشار در واحد طول کاهش می‌یابد تا اینکه به نقطه‌ای می‌رسیم که افت فشار در واحد طول دوباره افزایش پیدا می‌کند زیرا سرعت سیال خیلی زیاد بوده و یک بستر پیوسته در بالای بستر تشکیل می‌شود.

⊛ در سوالات مربوط به بسترهای پرکن هر وقت افت فشار خواسته شد افت فشار را در آستانه سیالیت محاسبه می‌کنیم.



تغییرات طول بستر با تغییرات تخلخل

حجم اشغال شده توسط پرکن‌ها برای شکل ۱ : $SL_1(1-\varepsilon_1)$
〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 ۲) : $SL_2(1-\varepsilon_2)$

چون بستر تغییر نکرده و پرکنی از بستر خارج نشده پس این دو حجم باید با هم برابر باشند.

$$SL_1(1-\varepsilon_1) = SL_2(1-\varepsilon_2) \Rightarrow \boxed{\frac{L_2}{L_1} = \frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_2}}$$ ⊛

محاسبه افت فشار در آستانه سیالیت:

$$\boxed{\frac{-\Delta P}{L} = \frac{g}{g_c}(1-\varepsilon)(\rho_s-\rho)}$$

تست ۲۹۳ جزوه صدری: سرعت ظاهری، سرعت در بیرون بستر است و با تغییر تخلخل تغییر نمی‌کند که ارتباطی به تخلخل ندارد. سرعت واقعی سرعت درون بستر است.

تست ۲۹۴. گزینه ۲

تست ۲۹۶ :

$Q = V_0 . A$

$5 = V_0 \times \frac{\pi}{4} (1.5)^2 \Rightarrow V_0 = 2.83 \ m/sec$ سرعت ظاهری

تست ۲۹۹ مشابه ۲۹۶ و ۳۰۴

سرعت واقعی $= \frac{2.83}{0.4} = 7.1 \ m/sec$

تست ۲۹۷ :

$$\varepsilon = \frac{(40.82 \times 10^{-3}) - (\pi \times 0.1^2 \times 0.5)}{\pi (0.1)^2 \times 2} \Rightarrow \varepsilon = 0.4$$

تست ۳۱۰ : گزینه ۳

تست ۲۹۸ ، ۳۰۰ ، ۳۰۹ مشابه اند .

$L_1 = 2m \longrightarrow \varepsilon_1 = 0.25$

$L_2 = ? \longleftarrow \varepsilon_2 = 0.4$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_2} = \frac{0.75}{0.6} \longrightarrow L_2 = 2.5 \ m$$

تست ۳۰۱ ، ۳۰۶ ، ۳۰۷ ، ۳۰۸ ، ۳۱۱ ، ۳۱۲ و ۳۱۳ مشابه اند .

تست ۳۰۷ :

$L = 5 \ ft$

$S_s = 2.6$

$\varepsilon = 0.6$

$\Delta P = ? \ \frac{lbf}{ft^2}$

$$-\frac{\Delta P}{L} = \frac{g}{g_c} (1-\varepsilon)(\rho_s - \overset{\text{آب}}{\rho})$$

$$-\Delta P = L (1-\varepsilon)(\gamma_s - \gamma)$$

$$-\Delta P = 5(1-0.6)(2.6-1) \ 62.4 \frac{lbf}{ft^3} = 199.7 \ \frac{lbf}{ft^2}$$

ρ و γ در سیستم امریکایی از نظر عددی برابرند .

تست ۳۰۵ : چون گفته نحوه جریان تغییر نکند یعنی همچنان جریان آرام است پس $\frac{\Delta P}{L} \propto V_0$

گزینه ۴

تست ۳۰۲ :

درصد افزایش تخلخل : $\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \times 100$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 1600 = \frac{800}{V} \longrightarrow V = 0.5 \ m^3$$

V ذرات $= S.L(1-\varepsilon_1) \Rightarrow 0.5 = 0.5 \times 2 (1-\varepsilon_1) \Rightarrow \varepsilon_1 = 0.5$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_2} \longrightarrow \frac{1.5 L_1}{L_1} = \frac{1-0.5}{1-\varepsilon_2} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{2}{3}$$

درصد افزایش تخلخل $= \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \times 100 = \% 33.3$

آنالیز ابعادی (گروه های بی بعد) :

به عنوان مثال می خواهیم اثر تغییر قطر، ویسکوزیته، دانسیته یا سرعت را بر روی افت فشار بدست آوریم. مثلاً 10 آزمایش برای تغییرات قطر، 10 آزمایش برای تغییرات ویسکوزیته و ...... یعنی باید 10000 آزمایش انجام دهیم اما اگر این پارامترها را در قالب یک عدد بی بعد مثل Re تعریف کنیم با 10 آزمایش می توان تغییرات Re بر روی افت فشار را بدست آوریم.

برای بدست آوردن گروه های بی بعد دو روش وجود دارد :

۱) روش Rayleigh :

مثال : سرعت خروج سیال از مخازن زیرزمینی با صرفنظر کردن از نیروهای کشش سطحی و نیروهای ویسکوز با رابطه زیر داده می شود که در آن k یک مقدار ثابت و بی بعد می باشد.

$$v = k \cdot \Delta p^{a} \cdot \rho^{b}$$

کدامیک از گزینه های زیر در مورد سرعت این سیال صحیح می باشد ؟

1) $v = k\sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}}$

2) $v = k\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$

3) $v = k\sqrt{\Delta p \cdot \rho}$

4) $v = k\, \Delta p \cdot \rho$

در رابطه ای که داریم ابعاد را می نویسیم.

$$\underbrace{v = k \cdot \Delta p^{a} \cdot \rho^{b}}$$

$$LT^{-1} = (ML^{-1}T^{-2})^{a}\,(ML^{-3})^{b}$$

$$LT^{-1} = M^{a+b} \cdot L^{-a-3b} \cdot T^{-2a}$$

$$\Delta p : \frac{N}{m^2} = \frac{kg \cdot \frac{m}{sec^2}}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ -a-3b=1 \\ -2a=-1 \longrightarrow a=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v = k \cdot \Delta p^{1/2} \cdot \rho^{-1/2} \Rightarrow v = k\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

بدون حل : چون در رابطه برنولی $\frac{\Delta P}{\rho}$ با $\frac{v^2}{2}$ جمع می شود پس از نظر دیمانسیون باید با هم یکسان باشند پس

$$\frac{v^2}{2} \sim \frac{\Delta P}{\rho} \rightarrow v \sim \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

۲) روش Π - Buckingham :

قضیه اول : قضیه اول باکینگهام در مورد تعداد گروه های بدون بعدی است که از آنالیز ابعادی بدست می آید اگر یک پدیده فیزیکی را بتوان با m (کمیت ها) توضیح داد به شرطی که تعداد ابعاد اصلی سیستم برابر n باشد تعداد گروه های که از آنالیز ابعادی بدست می آید برابر خواهد بود با $\Pi = m - n$.

↳ تعداد کمیت ها

وسیله اندازه گیری دبی

مثال: مقدار دبی عبوری از یک سرریز تابعی از زاویه سرریز، ارتفاع سرریز، شتاب جاذبه و سرعت نزدیک شدن سیال به سرریز می باشد. چند گروه بی بعد از آنالیز ابعادی بدست می آید؟

$$\overset{L^3T^{-1}}{\overset{\uparrow}{Q}} = f(\overset{\text{بی بعد}}{\overset{\uparrow}{\theta}}, \overset{L}{\overset{\uparrow}{h}}, \overset{LT^{-2}}{\overset{\uparrow}{g}}, \overset{LT^{-1}}{\overset{\uparrow}{V}})$$

تعداد کمیت ها $m = 5$

توجه: کمیتی که تابع کمیت های دیگر است هم حتما باید در نظر گرفته شود.

$n = 2$ → چون در ابعاد کمیت ها فقط L و T داریم.

$$\Rightarrow \pi = 5 - 2 = 3$$

گاهی نیرو را هم جزء ابعاد اصلی سیستم در نظر می گیرند در چنین شرایطی حتما در مسأله گفته می شود که F نیز یکی از ابعاد اصلی سیستم است. (MLTF). به کمیت ها باید دقت شود گاهی دما هم در کمیت ها وارد می شود (θ) (MLT دما)

تست ۳۱۵ : ویسکوزیته هم L هم T هم M را دارد.

$$\overset{\text{قطر ذرات}}{} \quad \overset{\text{قطر نازل}}{} \quad \overset{\text{سرعت}}{}$$

μ ρ σ $\quad 6 - \overset{MLT}{3} = 3$

تست ۳۳۵ : توان ← وات ← ژول بر ثانیه ← در N هر سه بعد اصلی MLT وجود دارد.

$6 - 3 = 3$

تست ۲۷۵ :

$$W = F_D + F_B$$

$$m \cdot \frac{a_e}{g_c} = C_D A_p \frac{\rho u^2}{2g_c} + (\text{حجم جسم})\, \rho \frac{a_e}{g_c}$$

$$\rho_s = \frac{m}{\text{حجم جسم}} \qquad \Rightarrow m a_e - m \frac{\rho}{\rho_s} \cdot a_e = C_D A_p \frac{\rho u^2}{2}$$

$$\Rightarrow m a_e \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} \right) = C_D \cdot A_p \rho \frac{u^2}{2}$$

u سرعت حد در میدان با شتاب گرانش a_e $= \sqrt{\dfrac{2 m a_e (\rho_s - \rho)}{C_D A_p \rho \rho_s}}$

$$\xrightarrow[a_e = r\omega^2]{\text{در میدان سانتریفیوژ}} \quad u_t \propto \sqrt{r}$$

گزینه ۲

جلسه یازدهم

قضیه دوم باکینگهام :

مثال :

$$f(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7) = 0$$

$\pi = m - n$

$\pi = 7 - 3 = 4$ چهار گروه بی بعد داریم .

برای مشخص کردن گروه های بی بعد به ترتیب زیر عمل می کنیم .

سه پارامتر اولی که انتخاب می کنیم باید به گونه ای باشد که با هم تشکیل گروه بی بعد ندهند.

پس یکی را از طول انتخاب می کنیم دیگری را از خواص فیزیکی مثل μ و سومی را از خواص حرکتی مثل سرعت یا دبی انتخاب می کنیم .

$L^0M^0T^0 = \pi_1 = (v_1^{a} \cdot v_3^{b} \cdot v_5^{c})\, v_2$

$〃 = \pi_2 = (v_1^{a'} \cdot v_3^{b'} \cdot v_5^{c'})\, v_4$

$〃 = \pi_3 = (v_1^{a''} \cdot v_3^{b''} \cdot v_5^{c''})\, v_6$

$〃 = \pi_4 = (v_1^{a_1} \cdot v_3^{b_1} \cdot v_5^{c_1})\, v_7$

با محاسبه ضرایب a و b و c و a' و ..... گروههای بی بعد بدست می آیند .

در درس سیالات اثر قضیه دوم را نوشتیم

کشش سطحی سرعت صوت

$-\Delta P, v, \rho, \mu, L, c, \sigma, g$

$\pi = m - n$

$\pi = 8 - 3 = 5 \longrightarrow$ ۵ گروه بی بعد خواهیم داشت

$Re = \dfrac{\rho v L}{\mu} = \dfrac{\rho v^2}{\mu \frac{v}{L}} = \dfrac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی برشی}}$

فرود $Fr = \dfrac{v^2}{gL} = \dfrac{\rho v^2}{\rho g L} = \dfrac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ثقلی}}$

اولر $Eu = \dfrac{-\Delta P}{\rho v^2} = \dfrac{\text{نیروی فشاری}}{\text{نیروی اینرسی}}$

وبر $We = \dfrac{\rho v^2 L}{\sigma} = \dfrac{\rho v^2}{\frac{\sigma}{L}} = \dfrac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}}$

ماخ $Ma = \dfrac{v}{c} = \dfrac{\text{سرعت}}{\text{سرعت صوت}}$

$$Ma = \left(\frac{\rho v^2}{\rho C^2}\right)^{0.5} \Rightarrow Ma = \sqrt{\frac{\rho v^2}{\rho \times \frac{k}{\rho}}}$$

$$C = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \rightarrow C^2 = \frac{k}{\rho}$$

$$\Rightarrow Ma = \sqrt{\frac{\rho v^2 . L^2}{k . L^2}} = \left(\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی الاستیسیته}}\right)^{0.5}$$

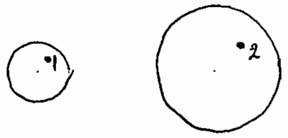
یکی از کاربردهای گروه های بی بعد این است که می توان به کمک ساخت وسیله‌ای در اشل آزمایشگاهی وسیله در اشل صنعتی بسازیم در عکس هم باید بین این دو وسیله تشابه برقرار باشد .

تشابه :

۱) تشابه هندسی : نسبت ابعاد جسم مدل آزمایشگاهی و صنعتی باید باهم برابر باشد .

۲) تشابه سینماتیکی : نسبت سرعت در هر نقطه از مدل اصلی به سرعت نقطه متناظر در مدل صنعتی عددی ثابت و مشخص می باشد .

۳) تشابه دینامیکی : نسبت دو نیروی متفاوت در اشل آزمایشگاهی در یک نقطه خاص با نسبت همان دو نیرو در نقطه متناظر در اشل صنعتی باهم برابر باشد .



مثلاً : $Re_1 = Re_2$

برای برقراری تشابه دینامیکی در حالت های مختلف قوانین زیر را رعایت می کنیم :

۱- برای جریان سیال تراکم ناپذیر در داخل لوله یا کانال ..... اولویت اصلی تساوی عدد رینولدز می باشد .

۲- اگر در مورد افت فشار در یک جریان از ما بپرسند تساوی عدد اولر را می نویسیم .

۳- برای شبیه سازی حرکت قایق ، زیردریایی یا کشتی تساوی عدد فرود را می نویسیم همچنین برای حالتهایی که نیروی ثقلی اهمیت دارد مثل جریان سیال از یک سرریز تساوی عدد فرود را می نویسیم .

۴- برای جریان سیال تراکم پذیر اولویت اصلی تساوی عدد ماخ می باشد .

اما اگر اطلاعات لازم برای نوشتن تساوی عدد ماخ در دست نبود تساوی عدد رینولدز را می نویسیم .

سرعت انتشار صوت در گازهای کامل $C = \sqrt{\gamma R T}$ ، جرمی $\longrightarrow \frac{J}{kg.k}$

۵- جایی که نیروهای ناشی از کشش سطحی اهمیت داشته باشند مثل صعود سیال داخل لوله موئین عدد وبر را می نویسیم

تست ۳۲۲ جزوه صفدری :

دبی جرمی هوا $\dot{m} = 0.142 \ \frac{lbm}{sec}$

قطر لوله $D_1 = 1''$

$D_2 = 4'' \longrightarrow v_2 = ? \ \frac{ft}{sec}$

$\nu_{water} = 1.21 \times 10^{-5} \ \frac{ft^2}{sec}$

$\nu_{Air} = 4.825 \times 10^{-5} \ \frac{ft^2}{sec}$

$\rho_{air} = 0.256 \ \frac{lbm}{ft^3}$

برای جریان درون لوله ها تساوی عدد Re را می نویسیم .

$Re_{Air} = Re_{water}$

$$\Rightarrow \frac{v_1 D_1}{\nu_{Air}} = \frac{v_2 D_2}{\nu_{water}} \Rightarrow \frac{v_1 \times 1}{4.825\times10^{-5}} = \frac{v_2 \times 4}{1.21\times10^{-5}}$$

$$\dot{m}_{Air} = \rho_{Air} \times v_1 \times A_1 \Rightarrow 0.256 \times v_1 \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^2 = 0.142 \Rightarrow v_1 = 101.1 \frac{ft}{sec}$$

$$\Rightarrow v_2 = 6.28\ ft/sec$$

تست ۳۲۱ جزوه صفحه :

چون نقطه قائم پس تساوی عدد فرود را می نویسیم :

اشل آزمایشی   مدل واقعی

$$Fr_1 = Fr_2$$

$$\frac{v_1^2}{gL_1} = \frac{v_2^2}{gL_2} \Rightarrow \frac{v_1^2}{L_1} = \frac{v_2^2}{L_2} \Rightarrow \frac{v_1^2}{L_1} = \frac{10^2}{25L_1} \Rightarrow v_1 = 2\frac{m}{sec}$$

$\frac{1}{25}$ نقشه اشل $\Rightarrow L_2 = 25L_1$

تست ۳۲۲ جزوه صفحه : فرود —

$$\frac{\text{نیروی جنبشی} = \text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ثقلی}}$$

تست ۳۲۳ جزوه صفحه :

$F , v , g , \rho \longrightarrow$ گروه بی بعد = ?

$F \to kg\frac{m}{sec^2}$

1) $\frac{F^2 g}{\rho v^5} \leadsto \frac{(MLT^{-2})^2(LT^{-2})}{ML^{-3}(LT^{-1})^5}$

2) $\frac{Fg^2}{\rho v^5} \leadsto LT^{-1} = \frac{(MLT^{-2})(LT^{-2})^2}{ML^{-3} \cdot L^5T^{-5}}$

3) $\frac{Fg^2}{\rho v^6} \leadsto M^0L^0T^0 = \frac{(MLT^{-2})(LT^{-2})^2}{ML^{-3}\ L^6T^{-6}}$ ✓

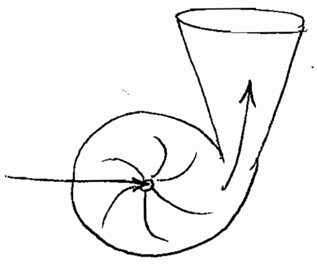
4) امکان تشکیل گروه بی بعد وجود ندارد .

در این حل سوال ها تنها راه چک کردن جواب ها است .

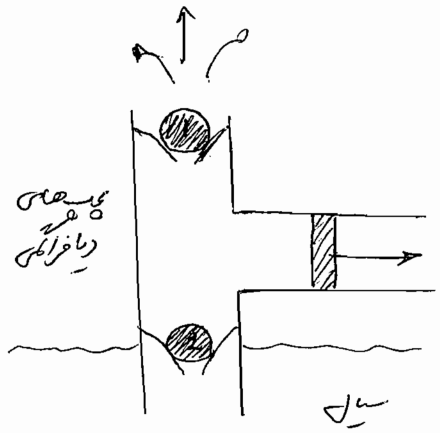
پمپ ها

پمپ ها تجهیزاتی هستند که برای انتقال مایعات به کار می روند و به دو دسته پمپ های سانتریفوژ و پمپ های جا بجایی مثبت دسته بندی می شوند .

پمپ های سانتریفوژ



سیال از طریق چشمه پروانه وارد پمپ شده و روی پره می ریزد پروانه با سرعت دورانی بسیار زیادی می چرخد بنابراین انرژی سیال افزایش پیدا می کند و از طریق یک مجرای گشاد شونده به بیرون پرتاب می شود در مجرای گشاد شونده طبق قانون پیوستگی سرعت و در نتیجه انرژی جنبشی کم شده و بر اساس برنولی فشار افزایش پیدا می کند و در نتیجه سیال منتقل می شود .

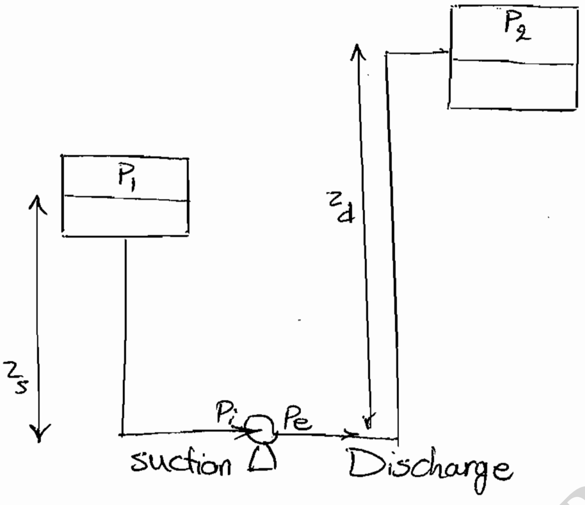


پمپ های جابجایی مثبت :

در پمپ های جابجایی مثبت سیالی درون یک، دو و یا چند قطعه متحرک گیر کرده افزایش فشار پیدا کرده و در نهایت منتقل می‌شود. با حرکت پیستون به سمت راست در پشت پیستون مکش ایجاد شده و گوی 2 به بالا کشیده می‌شود و آب بالا می‌رود. با برگشتن پیستون گوی 2 به جای خود برگشته و گوی 1 بالا می‌رود و آب از بالای پمپ خارج می‌شود.

دبی این پمپ ها ثابت است و هد خیلی زیادی دارند.

بدون در نظر گرفتن پمپ روابط زیر را می‌نویسیم :



$$P_i = P_1 + \rho g z_s - h_s$$

$$P_e = P_2 + \rho g z_d + h_d$$

فشار را بر ρg تقسیم می‌کنیم تا تبدیل به head شود.

$$\frac{P_i}{\rho g} = H_s = \frac{P_1}{\rho g} + z_s - H_{f_s}$$

$$\frac{P_e}{\rho g} = H_d = \frac{P_2}{\rho g} + z_d + H_{f_d}$$

اختلاف بین هد ورودی و هد خروجی را هد سیستم می‌نامیم :

$$H_{sys} = H_d - H_s$$

$$\Rightarrow H_{sys} = \underbrace{\frac{P_2 - P_1}{\rho g} + (z_d - z_s)}_{A = \text{عدد ثابت}} + (H_{f_d} + H_{f_s})$$

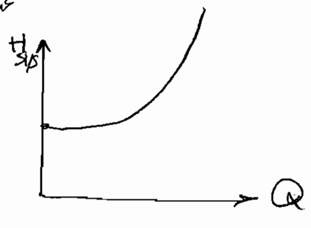
قطر ورودی پمپ بیشتر از قطر خروجی پمپ است.

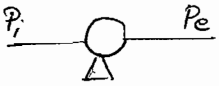
$$H_f = 4f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = 4f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

معمولاً هم f به عدد ثابتی می‌رسد.

$$\left.\begin{array}{l} H_{f_d} = 4f \frac{L}{D} \cdot \frac{Q_s^2}{2gA_s^2} \\ H_{f_s} = 4f \frac{L}{D} \cdot \frac{Q_d^2}{2gA_d^2} \\ Q_s = Q_d = Q \end{array}\right\} \Rightarrow H_{f_s} + H_{f_d} = C_1 Q^2 + C_2 Q^2 = \underset{\text{عدد ثابت}}{B} Q^2$$

$$\Rightarrow H_{sys} = A + BQ^2$$





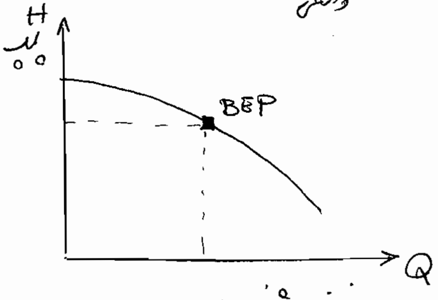
حال پمپ را در نظر بگیریم که فشار ورودی اش P_i و فشار خروجی اش P_e باشد :

$$\Delta P = P_e - P_i$$

$$\text{توان مصرفی پمپ } W = Q \cdot \Delta P \longrightarrow H_{\text{پمپ}} = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{P_e - P_i}{\rho g} \rightarrow \boxed{W = \rho g H_{\text{پمپ}} Q}$$

هر پمپ و هر سیستم دو پارامتر متفاوت هستند .

$$\eta = \frac{W_{\text{ایده‌آل}}}{W_{\text{واقعی}}} \rightarrow \text{توان واقعی پمپ } W = \boxed{\frac{\rho g H Q}{\eta}}$$

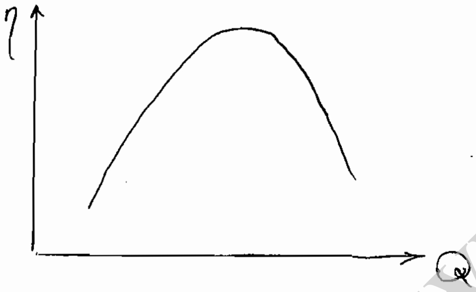


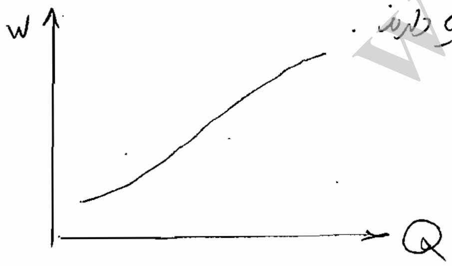
منحنی مشخصه پمپ

در پمپ‌های سانتریفوژ با افزایش دبی هد کاهش می‌یابد .

با کاهش دبی هد زیاد می‌شود یعنی ΔP افزایش می‌یابد .

BEP نقطه‌ای است که پمپ بیشترین راندمان را دارد اگر پمپ در این شرایط کار کند طول عمر بیشتری دارد .





عیب پمپ‌های سانتریفوژ این است که در محدوده کمی از Q راندمان بالایی دارند .

هرچه دبی پمپ افزایش یابد توان مصرفی پمپ افزایش می‌یابد .

کاویتاسیون

اگر به هر دلیلی فشار در ورودی یک پمپ سانتریفوژ از فشار بخار سیال کمتر شود در این صورت قسمتی از سیال بخار شده و به شکل حباب‌های بخار در می‌آید این پدیده را کاویتاسیون می‌نامیم حباب‌های بخار با سرعت زیادی به پره‌های پمپ و بدنه پمپ برخورد کرده و می‌ترکند و پدیده pitting یا حفره‌ای شدن اتفاق می‌افتد .

پدیده کاویتاسیون مختص پمپ‌های سانتریفوژ است .

$$P_1 + \rho g z_s - h_{fs} + \frac{\rho v^2}{2} < \overset{\text{فشار بخار}}{P_v} \Rightarrow$$ کاویتاسیون رخ می‌دهد

$$\Rightarrow (P_1 - P_v) + \rho g z_s - h_{fs} + \frac{\rho v^2}{2} \geq 0 \Rightarrow$$ کاویتاسیون رخ نمی‌دهد

$$\frac{P_1 - P_v}{\rho g} + z_s - H_{fs} + \frac{v^2}{2g} \geq 0$$

$$NPSH = \left(\frac{P_1 - P_v}{\rho g}\right) + z_s - H_{fs} + \frac{v^2}{2g}$$

Net

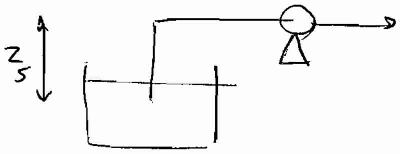
positive

suction

Head

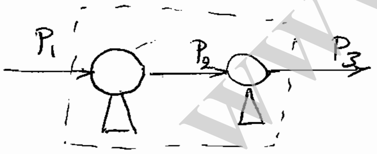
NPSHA یعنی NPSH در دسترس

اگر مخزن suction پایین‌تر از پمپ باشد در روابط برای ارتفاع کشش z_s را با علامت (−) نشان می‌دهیم.



$$NPSH = \left(\frac{P_1 - P_v}{\rho g}\right) - z_s - H_{fs} + \frac{v^2}{2g}$$

پمپ‌های سری و پمپ‌های موازی :



پمپ‌های سری :

از پمپ‌های سری زمانی استفاده می‌کنیم که هدف افزایش هد باشد

یعنی در به هم بستن سری پمپ‌ها دبی تغییری نمی‌کند فقط فشار یا هد تغییر می‌کند.

$$H_{\text{پمپ}} = \frac{P_3 - P_1}{\rho g} = \frac{(P_3 - P_2) + (P_2 - P_1)}{\rho g} = \frac{P_3 - P_2}{\rho g} + \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = H_2 + H_1$$

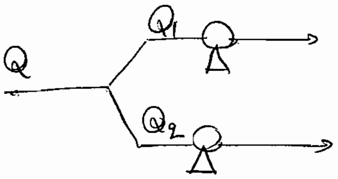
پمپ‌های سری :

$$H = H_1 + H_2$$
$$Q = Q_1 = Q_2$$

پمپ‌های موازی :

از پمپ‌های موازی زمانی استفاده می‌شود که بخواهیم دبی را افزایش دهیم.

در به هم بستن موازی پمپ‌ها هد تغییر نمی‌کند.



پمپ های موازی :

$$Q = Q_1 + Q_2$$
$$H = H_1 = H_2$$

صفحه ۲۲۴ مجموعه سوالات سال ۸۹ سوال ٦٦ :

$$\Delta h = a - bQ^2$$

دو پمپ همسان به صورت سری نصب شده اند $\Rightarrow \Delta h_{\text{کل}} = 2(a - bQ^2)$

۳ آنالیز ابعادی در پمپ های سانتر فیوژ

$$f(\rho, \mu, \overset{\text{سرعت دورانی پره متحرکه}}{D, N}, g, H, Q, \overset{\text{توان مصرفی}}{P}) = 0$$

$$\pi = 8 - 3 = 5$$

$$Re = \frac{\rho \overset{\text{سرعت خطی}}{(DN)} D}{\mu} = \frac{\rho N D^2}{\mu}$$

ضریب دبی $C_Q = \dfrac{Q}{ND^3}$

ضریب هد $C_H = \dfrac{gH}{N^2 D^2}$

ضریب توان مصرفی $C_P = \dfrac{P}{\rho N^3 D^5}$

ضریب راندمان $C_\eta = \dfrac{C_P}{C_H \cdot C_Q}$ هم ست

پمپ‌های هم خانواده (یعنی به نسبت مشابه بزرگ شده اند)

در یک سری از پمپ های همولوگ ضریب دبی ، ضریب هد و ضریب توان عدد ثابتی هستند . بنابراین با تغییر یکی از پارامترهای پمپ می توان تغییر دیگر پارامترها را مشخص کرد .

مثال : در یک پمپ سانتر فیوژ با ثابت نگه داشتن همه مشخصات تعداد دور این پمپ در دقیقه ۲ برابر شود دبی عبوری از پمپ ، فشار (هد) و توان پمپ چگونه تغییر می کند ؟ (سال ۸۵ صفحه ۳۲۶ سوال ۷۰)

$$C_{Q_1} = C_{Q_2} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{N_2}{N_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3$$

$$C_{H_1} = C_{H_2} \Rightarrow \frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

$$C_{P_1} = C_{P_2} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^3\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5$$

$$\xrightarrow[N_2 = 2N_1]{D_2 = D_1} \quad Q_2 = 2Q_1, \quad H_2 = 4H_1, \quad P_2 = 8P_1$$

گزینه ۳

خلاصه ای از پمپ های سانتریفوژ :

۱- پمپ های سانتریفوژ برای انتقال سیالات با ویسکوزیته کم به کار می روند .

۲- برای انتقال سیالات شبه پلاستیک از پمپ های سانتریفوژ با دور بالا استفاده می کنیم چون در دورهای بالا تنش برشی زیاد است . با افزایش تنش برشی در سیالات شبه پلاستیک ویسکوزیته کاهش می یابد .

۳- برای انتقال سیال با دبی زیاد و هد کم از پمپ سانتریفوژ استفاده می کنیم یعنی فشار در خروجی پمپ های سانتریفوژ خیلی زیاد نیست .

۴- برای انتقال سیالات دارای ذرات جامد معلق از پمپ های سانتریفوژ استفاده می کنیم .

۵- پمپ های سانتریفوژ دارای هزینه خرید ، نصب و نگهداری کمی هستند بنابراین اغلب از پمپ های سانتریفوژ استفاده می کنیم .

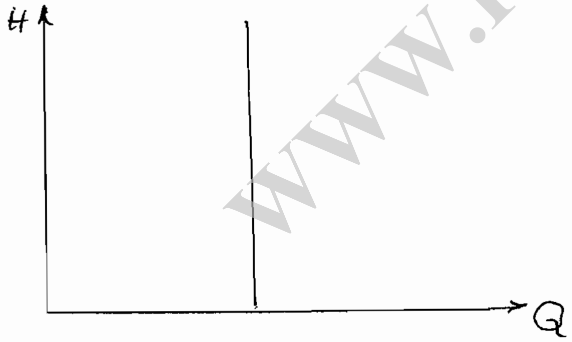
خلاصه ای از پمپ های جابجایی مثبت :

۱- از پمپ های جابجایی مثبت برای دبی های کم و هدهای زیاد استفاده می شود . یعنی فشار در خروجی پمپ های جابجایی مثبت خیلی زیاد است .

۲- از پمپ های جابجایی مثبت برای انتقال سیالات با ویسکوزیته زیاد استفاده می شود .

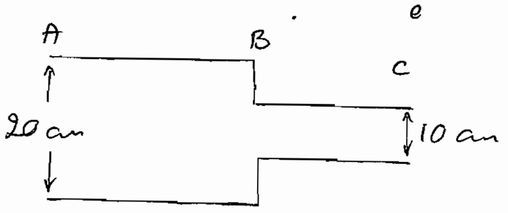
۳- برای انتقال سیالات dialatant از پمپ های جابجایی مثبت استفاده می شود چون با وارد شدن تنش ویسکوزیته سیالات افزایش می یابد و برای جابجایی سیالات ویسکوز از پمپ های جابجایی مثبت استفاده می شود.

۴- منحنی مشخصه این پمپ ها به شکل روبروست .
یعنی این پمپ ها دبی تقریبا ثابتی دارند .



جلسه دوازدهم

مثال: عدد رینولدز در قسمت AB از لوله برابر 1500 می‌باشد. عدد رینولدز در قسمت BC چقدر است؟



$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

$$\frac{Re_{AB}}{Re_{BC}} = \frac{V_{AB} \cdot D_{AB}}{V_{BC} \cdot D_{BC}}$$

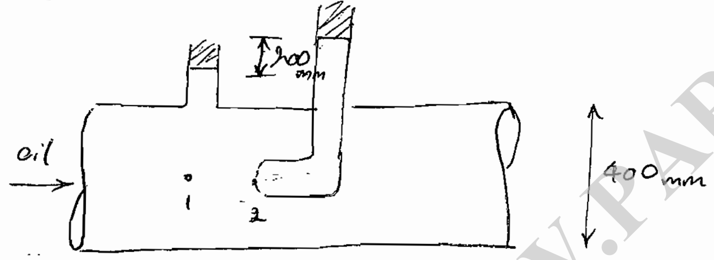
$$Q_{AB} = Q_{BC} \rightarrow V_{AB} \cdot D_{AB}^2 = V_{BC} \cdot D_{BC}^2$$

$$\rightarrow \frac{V_{AB}}{V_{BC}} = \left(\frac{D_{BC}}{D_{AB}}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{Re_{AB}}{Re_{BC}} = \left(\frac{D_{BC}}{D_{AB}}\right)^2 \cdot \frac{D_{AB}}{D_{BC}} = \frac{D_{BC}}{D_{AB}}$$

$$\rightarrow \frac{1500}{Re_{BC}} = \frac{10}{20} \longrightarrow Re_{BC} = 3000$$

مثال: اگر دبی عبوری از لوله نشان داده شده در شکل برابر 120 $\frac{lit}{sec}$ باشد تنش برشی در فاصله 75mm از محور لوله چقدر است؟ $(\pi = 3)$



بین نقاط ۱ و ۲ برنولی می‌نویسیم:

$$z_1 = z_2 \quad , \quad v_2 = 0$$

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + \cancel{g z_1} = \frac{P_2}{\rho} + \cancel{g z_2} + \underset{0}{\cancel{\frac{v_2^2}{2}}} + h_f$$

برحسب ارتفاع : $\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \Delta H \rightarrow \frac{\Delta P}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \Delta H$

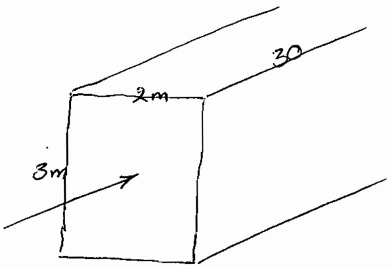
$$Q = 120 \times 10^{-3} = \frac{\pi}{4} (0.4)^2 \, v_1 \rightarrow 0.12 = \frac{\pi}{4} \times 16 \times 10^{-2} \, v_1 \rightarrow v_1 = 1 \ m/sec$$

$$\rightarrow \Delta H = 0.2 + 0.05 = 0.25 \ m$$

$$\tau = \frac{-\Delta P}{L} \times \frac{r}{2} \rightarrow \tau = \frac{\gamma \cdot \Delta H}{L} \times \frac{r}{2} = \frac{8 \times 10^3 \times 25 \times 10^{-2}}{10} \times \frac{75 \times 10^{-3}}{2}$$

$$\rightarrow \tau = 7.5$$

مثال: یک مجرای مستطیلی با سطح مقطع 2x3m و طول 30m که به صورت افقی قرار گرفته است آب را با سرعت $2 \frac{m}{sec}$ از خود عبور می‌دهد. اگر افت فشار در این کانال 2 kPa باشد تنش برشی ایجاد شده در جداره کانال چند پاسکال است؟



$$P \cdot A\Big|_{x} - (P+\Delta P)\cdot A\Big|_{x+\Delta x} = \tau S_{\text{سطح}}$$

$$\Rightarrow -\Delta P \cdot \overset{\text{سطح مقطع}}{A} = \tau \times S$$

$$\Rightarrow 2000\ (2\times 3) = \tau \left[2(2\times 30 + 3\times 30)\right]$$

$$\Rightarrow \tau = 40$$

مثال: آب با سرعت $3 \frac{m}{sec}$ در یک لوله افقی به قطر 4cm جریان دارد. مقدار افت فشار در واحد طول برابر است با:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{1000 \times 3\times 10^{-2} \times 4\times 10^{-2}}{10^{-3}\ \frac{kg}{m\,sec}} = 1200 < 2300 \quad \text{آرام}$$

$$-\frac{\Delta P}{L} = \frac{32 \mu V}{D^2} = \frac{32\times 10^{-3} \times 3\times 10^{-2}}{(4\times 10^{-2})^2} = 0.6 \quad Pa/m$$

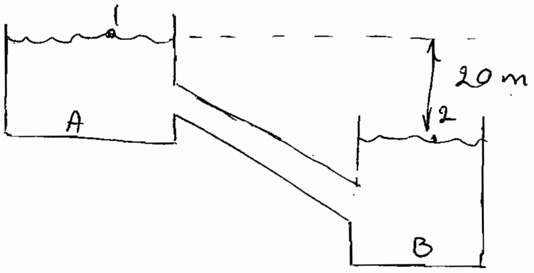
$$\text{آرام} \quad f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1200}$$

$$h_f = 4f\,\frac{L}{D}\cdot\frac{v^2}{2g} = \frac{64}{1200}\cdot\frac{1}{4\times 10^{-2}}\cdot\frac{(3\times 10^{-2})^2}{20} = 0.6 \quad m$$

این رابطه f در جریان درهم را به ما نمی‌دهد ⟶ اگر بخواهیم محاسبه جریان [illegible] درهم

مثلاً: $f = \frac{0.316}{Re^{0.25}}$

مثال: در شکل مقابل آب توسط یک لوله با قطر ثابت از مخزن A به مخزن B جریان پیدا می‌کند. اگر قطر لوله را 4 برابر کنیم در اینصورت سرعت جریان چند برابر می‌شود؟ ضریب اصطکاک ثابت بوده و مخازن بزرگ فرض می‌شوند.



$$\cancel{\frac{P_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} + Z_1 = \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \cancel{\frac{v_2^2}{2g}} + \cancel{Z_2} + h_f$$

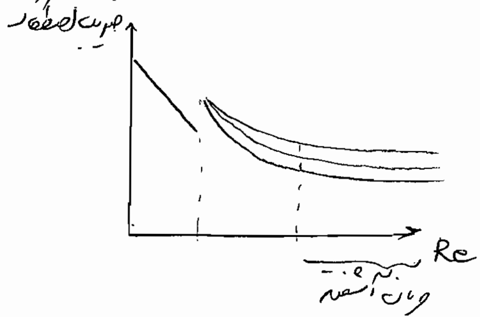
$$20 = h_f$$

$$\underset{\text{ثابت}}{4f}\,\frac{L}{D}\,\underset{\text{ثابت}}{\frac{v^2}{2g}} = 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{D} = cte$$

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{D_2}{D_1} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow v_2 = 2v_1$$

مثال: در یک لوله با نصب یک شیر فلکه و تنظیم آن دبی جریان را نصف می‌کنیم. اگر در این حالت ضریب اصطکاک تغییر نکند رژیم جریان:

۱) آرام است ۲) آشفته است اما در ناحیه انتقالی قرار دارد ۳) آشفته است و در ناحیه لوله صاف قرار دارد ۴) کاملا آشفته است



چون دبی را کم کرده‌ایم قطعاً سرعت کم می‌شود پس Re هم کم می‌شود
چون با کاهش Re ، ضریب اصطکاک تغییر نکرده پس در ناحیه
جریان آشفته بوده

مثال: در جریان آرام سیال در یک لوله افقی، افت فشار و قطر لوله به ترتیب دو برابر و نصف می‌شود. ضریب اصطکاک دارسی در این حالت چه تغییری می‌کند.

$$\text{جریان آرام} \longrightarrow \Delta P = \frac{32\mu v L}{D^2}$$

$$\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \frac{v_2}{v_1}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

$$2 = \frac{v_2}{v_1}(2)^2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}$$

$$Re = \frac{\rho \overset{\text{نصف می‌شود}}{v} \overset{\text{نصف می‌شود}}{D}}{\mu} \Rightarrow \frac{Re_2}{Re_1} = \frac{1}{4}$$

$$f_{darcy} = \frac{64}{Re} \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = 4$$

مثال: دو لوله صاف به قطرهای $D_1=D$ و $D_2=KD$ با طول‌های برابر موجود است. به هنگام عبور مایع یکسان و همدما از لوله‌ها اعداد Re در دو لوله با هم برابر است. نسبت افت انرژی در لوله ۱ به ۲ چقدر است؟

۱) 1 ۲) K ۳) K^2 ۴) k^3

دما ثابت ⟶ ویسکوزیته ثابت

$$Re_1 = Re_2 \longrightarrow f_1 = f_2$$

$$Re_1 = Re_2 \longrightarrow v_1 D_1 = v_2 D_2 \Rightarrow \frac{D_2}{D_1} = \frac{v_1}{v_2} = k$$

$$h_f = f\frac{L}{D}\cdot\frac{v^2}{2} \longrightarrow \frac{h_{f_1}}{h_{f_2}} = \frac{D_2}{D_1}\cdot\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = k\cdot k^2 \Rightarrow \frac{h_{f_1}}{h_{f_2}} = k^3$$

مثال: آب با سرعت $24\frac{m^3}{sec}$ در یک مجرای مستطیلی با مقطع 2x3m و با طول 24m جریان دارد. اگر ضریب اصطکاک 0.02 باشد افت انرژی در این مجرا چند متر است؟

1) 0.02 2) 0.04 3) 0.8 4) 0.16

$$D_H = 4\frac{A}{P} = 4\frac{3\times2}{2(2\times3)} = \frac{12}{5} = 2.4 \quad , \quad Q = v.A \rightarrow 24 = v(2\times3)$$

$$v = 4\ m/sec$$

$$h_f = 4f.\frac{L}{D_H}\cdot\frac{v^2}{2g} = 4\times0.02\times\frac{24}{2.4}\times\frac{4\times4}{2\times10} = 4\times0.16$$

چون 0.64 در گزینه‌ها نیست پس f که داده f_{darcy} است و جواب 0.16 است.

مثال: برای جریان آرام بین دو صفحه موازی مهم‌ترین نیروها کدامند؟

۱) اینرسی و لزجی ۲) لزجی و فشاری

۳) جاذبه و فشاری ۴) فشاری و اینرسی

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \longrightarrow$$ نیروهای لزجی و فشاری مهم هستند

مثال: عدد بدون بعد با ترکیب پارامترهای ΔP، قطر D، چگالی ρ، سرعت دورانی ω و دبی Q عبارت است از:

1) $\frac{\rho\,\Delta P}{D^2\omega^2}$

2) $\frac{\rho\,\omega^2}{\Delta P.D^2}$

3) $\frac{\Delta P\,\omega^2}{D^2\rho}$

4) $\frac{\Delta P}{D^2\rho\,\omega^2}$

$$\Delta P \rightarrow \frac{N}{m^2} = \frac{kg.m}{s^2.m^2} \longrightarrow ML^{-1}T^{-2}$$

$$D \longrightarrow L$$

$$\rho \rightarrow \frac{kg}{m^3} \longrightarrow ML^{-3}$$

$$\omega \longrightarrow T^{-1}$$

$$Q \rightarrow \frac{m^3}{sec} \longrightarrow L^3T^{-1}$$

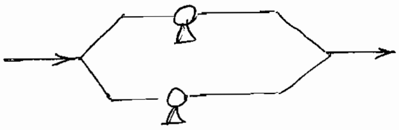
گزینه ۴: $\frac{ML^{-1}T^{-2}}{L^2.ML^{-3}.T^{-2}} = M^0L^0T^0$

صفحه ۳۷۷ مجموعه سوالات تست ۸۴ :

هد تک تک پمپ‌ها $\Delta h_p = 60 - \frac{1}{4} Q$ دبی یک پمپ

هد مجموعه $\Delta h_s = 20 + \frac{Q}{2}$

چه دبی و هدی برای پمپ‌های موازی بدست می‌آید ؟



در موازی بستن پمپ‌ها هد کل برابر است با هد تک تک پمپ‌ها (یعنی هد تغییری نمی‌کند)

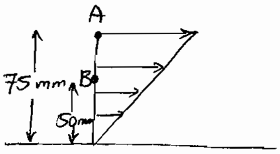
$$\Rightarrow 20 + \frac{Q}{2} = 60 - \frac{Q}{4} \xrightarrow{\text{دبی عبوری از تک پمپ}} Q = \frac{160}{3} \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{کل}} = 2 \times \frac{160}{3} = \frac{320}{3}$$

$$\Delta h_s = \Delta h_p = 60 - \frac{1}{4} \cdot \frac{160}{3} = \frac{140}{3}$$

گزینه ۳

صفحه ۳۷۹ مجموعه سوالات تست ۷۸ :

$\mu = 0.048 \quad pa.sec$



هرگاه پروفیل سرعت خطی باشد $v = ay + b$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a \longrightarrow \tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} = \mu a$$

آنگاه تنش برشی در تمام نقاط مقداری ثابت (μa) است.

$$y = 0 \text{ و } v = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow v = ay$$

$$y = 0.075, \quad v = 1.125 \Rightarrow a = \frac{1.125}{0.075}$$

$$\tau = \mu . a = 0.048 \times \frac{1.125}{0.075} = 0.72$$

گزینه ۲

صفحه ۳۷۹ مجموعه سوالات تست ۷۹ :

$D_2 = 2D_1$

$Q_2 = 2Q_1 \longrightarrow \quad Q = VA = V . \frac{\pi}{4} D^2$

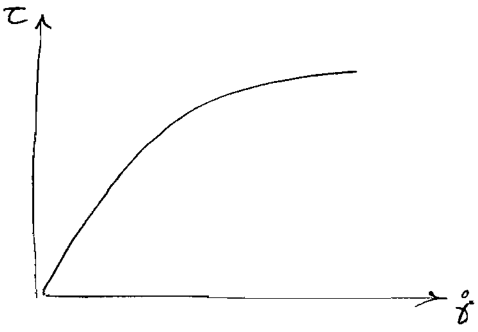
$\frac{f_2}{f_1} = ?$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{v_2}{v_1} . \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{v_2}{v_1} (2)^2 \Longrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}$$

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \qquad Re \propto VD$$

$$\frac{Re_2}{Re_1} = \frac{v_2}{v_1} . \frac{D_2}{D_1} \xrightarrow{f = \frac{64}{Re}} \frac{f_1}{f_2} = \frac{v_2}{v_1} . \frac{D_2}{D_1}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$



صفحه 224 مجموعه سوالات تست 67 :

لوله‌ای به قطر D و L

اگر دبی را 2 برابر کنیم. افت فشار چه تغییری می‌کند؟

$$h_f = 4f\frac{L}{D}\cdot\frac{v^2}{2}$$

$$h_f = 4\left(\frac{16}{Re}\right)\frac{L}{D}\cdot\frac{\left(\frac{Q}{A}\right)^2}{2}$$

$$Re \to \frac{\rho u D}{\mu} \to u = \frac{Q}{A}$$

$$\to h_f \propto \frac{\mu}{Q} \times Q^2 \to h_f \propto \mu Q$$

اگر سیال نیوتنی بود و μ ثابت بود با دو برابر شدن Q افت فشار هم 2 برابر می‌شد.

از منحنی سیال مشخص است که سیال شبه پلاستیک است. لذا با افزایش تنش ویسکوزیته کاهش می‌یابد.

لذا گزینه 4 صحیح است.

Q دو برابر ⟵ u دو برابر ⟵ τ زیاد ⟵ μ کم می‌شود

$$\left.\begin{array}{r}\mu \text{ کم می‌شود} \\ Q \text{ دو برابر شده}\end{array}\right\} \longrightarrow h_f \propto \mu Q$$

h_f کمتر از دو برابر می‌شود.

صفحه ۲۷۵ مجموعه سوالات تست ۷۱ :

جریان درهم : $h_f = 4\boxed{f}\frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2}$ ، $v \to \frac{Q}{D^2}$

$$f \to \frac{A}{\left(\frac{\rho u D}{\mu}\right)^{0.25}} = \frac{A}{Re^{0.25}}$$

→ جریان درهم ; $h_f \,,\, -\Delta P \propto \frac{Q^{1.75}}{D^{4.75}}$

جریان کاملاً درهم : $f =$ ثابت

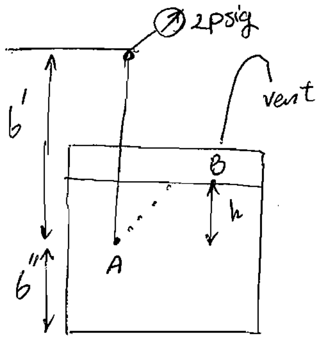
جریان کاملاً درهم : $h_f \,,\, -\Delta P \propto \frac{Q^2}{D^5}$

جریان آرام : $h_f \,,\, -\Delta P \propto \frac{Q}{D^4}$

در جریان آرام: 16 برابر

در جریان درهم : 27 برابر

مثال :



$$P_A - \gamma h = \cancel{P_B}$$

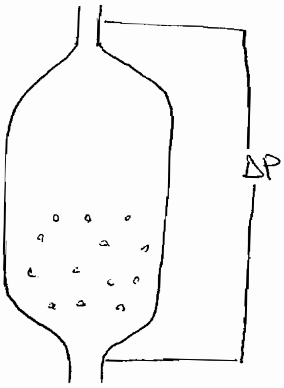
با اتمسفر راه دارد

$$P_A = \gamma h \Rightarrow 2\,\frac{lbf}{in^2} \times \frac{12^2\,in^2}{1\,ft^2} = 60\,\frac{lbf}{ft^3} \times h\,(ft)$$

$$h = 4.8\ ft$$

ارتفاع مایع $= 4.8\ ft + \frac{6}{12} = 5.3\ ft$

صفحه ۱۸۵ مجموعه سوالات تست ۶۸ :



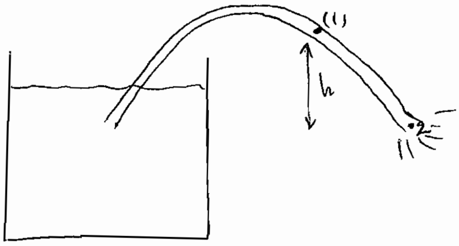
تخلخل زیاد می‌شود ← سرعت زیاد

$$\frac{-\Delta P}{L} = \frac{g}{g_c}(\rho_s-\rho)(1-\varepsilon)$$

$$\frac{\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)_2}{\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)_1} = \frac{1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1} \Rightarrow \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \frac{1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1} \times \frac{L_2}{L_1}$$

$\frac{\Delta P}{L}$ تغییر می‌کند و کم می‌شود اما افت فشار ΔP تغییر نمی‌کند. گزینه ۳

صفحه ۱۸۷ مجموعه سوالات تست ۷۵ :



$$\frac{P_1}{\gamma} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} + z_1 = \cancel{\frac{P_2}{\gamma}}^{0} + \cancel{\frac{v_2^2}{2g}} + \cancel{z_2}^{0}$$

$P_2 = 0$

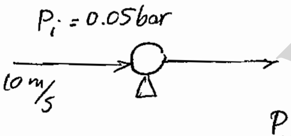
(مقطع شلنگ ثابت) قانون پیوستگی $\Rightarrow v_1 = v_2$

$z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = h$

$\Rightarrow \frac{P_1}{\gamma} + h = 0 \Rightarrow P_1 = -\gamma h \Rightarrow P_1 < 0$

← هوا به داخل لوله مکیده می‌شود.

صفحه ۱۸۷ مجموعه سوالات تست ۷۲ :



$P_v = 5000$ Pa

$$NPSH = \frac{P_1 - P_v}{\rho g} + z_s - h_{fs} + \frac{v_2}{2g}$$

$$NPSH = \underbrace{\frac{P_1}{\gamma} + z_s - h_f + \frac{v^2}{2g}}_{} - \frac{P_v}{\gamma}$$

فشار ورودی پمپ مجموع سه ترم اول NPSH است ← $0.05 \times 10^5 = 10^3 \times 10 \times h \Rightarrow h = 0.5\,m$

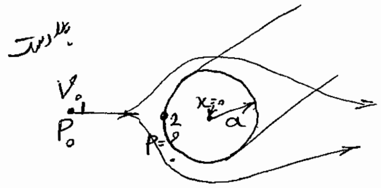
اما باید برحسب ارتفاع هد بیان کنیم.

$$NPSH = 0.5 + \frac{100}{20} - \frac{5000}{10000} = 0.5 > 0$$ ← کاویتاسیون رخ نمی‌دهد.

صفحه ۱۸۵ مجموعه سوالات تست ۶۶ :

$$V = V_0\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

فشار در پایین دست چقدر است



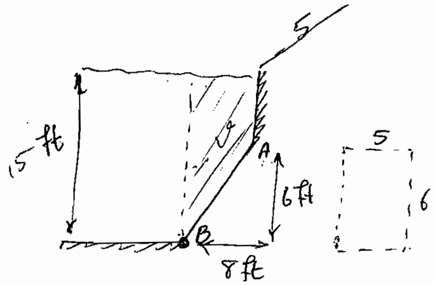
$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

روی سطح استوانه : $x = a \longrightarrow V = 0$

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + 0 \longrightarrow P_2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2$$

گزینه ۱

صفحه ۱۸۸ مجموعه سوالات تست ۸۰ :



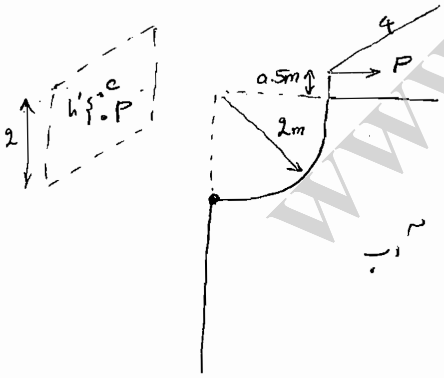
$$\gamma_{H_2O} = 64 \ \frac{lbf}{ft^3}$$

$$F_x = \gamma h_c A = \gamma(9+3)(5\times6) = 360\times64 = .$$

$$F_y = \gamma V = \gamma\left[\frac{8\times6}{2} + 9\times8\right]\times5 = \qquad lbf$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \cdots$$

صفحه ۱۸۸ مجموعه سوالات تست ۷۸ :



$$F_x = \gamma h_c\cdot A = \gamma(1)(2\times4) = 80000 \ N$$

$$y_p - y_c = \frac{I_{xx}\sin\theta}{h_c\cdot A}$$

گشتاور $F_x(1-h') = P\times(2+0.5) \longrightarrow P = \checkmark$

اما این جوابی که بدست می آید در گزینه ها نیست .

$$\underset{80000}{F_x}\ (\overset{\frac{2}{2}}{1}) = P\times2.5 \longrightarrow P = 32000 \ N$$

اگر فرض کنیم F_x در نقطه c وارد می شود
↓
مرکز سطح