جزوه ریاضیات
کنکور کارشناسی ارشد

استاد:دکترطاهری

(قسمت اول)

خانه مهندسی شیمی ایران
WWW.ICHEH.COM
info@icheh.com

ICHEH

www.icheh.com

Iranian Chemical Engineering Home

مدلسازی :

پیدا کردن معادله یا معادلاتی که تغییرات یک کمیت را نسبت به متغیرهای مستقل مثل x و y و z و r و t.

مدلسازی ← lumped : پیدا کردن تغییرات یک کمیت به زمان (مکان مطرح نیست) ←
← ODE

مدلسازی ← distributive (توزیعی) : علاوه بر تغییرات زمانی، تغییرات مکانی را نیز می‌خواهیم
← PDE ← حل عددی / حل تحلیلی

حل تحلیل PDE :

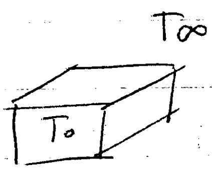
① Seperation of variables

② Combination of variables

③ Superposition

④ Laplace transform

مثال : جسمی در دمای T_0 را در محیطی با دمای T_∞ قرار می‌دهیم.



اگر ابعاد جسم کوچک و k بزرگ باشد می‌توان فرض کرد $(T_0 > T_\infty)$ که در داخل جسم توزیع دما وجود ندارد و فقط با گذشت زمان دما تغییر می‌کند.

← مدلسازی lumped

اما اگر ابعاد جسم بزرگ و k کوچک باشد باید توزیع دما را برحسب زمان و مکان بدست آوریم.

حالت اول : k↑ و جسم کوچک

$$\Delta E = \delta Q - \delta W$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\delta Q}{\Delta t} - \cancel{\frac{\delta W}{\Delta t}}^{\,0}$$

$$\frac{dE}{dt} = -hA(T - T_\infty)$$

$$mc\frac{dT}{dt} = -hA(T - T_\infty)$$

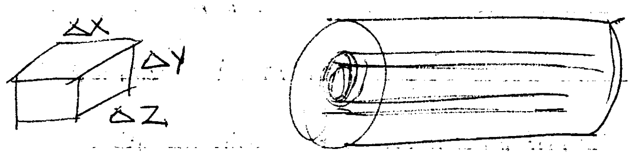
$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T-T_\infty} = -\int_0^t \frac{hA}{mc}\, dt$$

$$\ln \frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty} = -\frac{hA}{mc}\, t$$

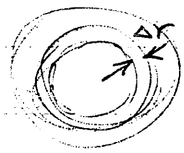
$$\boxed{\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty} = e^{-\frac{hA}{mc}t}}$$

حالت دوم : $k \downarrow$ و جسم بزرگ :

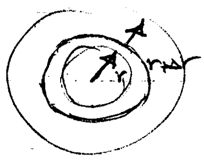
T (مکان , t)



جسم	المان
کره :	پوسته کروی .
استوانه :	پوسته استوانه ای ،



مثال :



$T_0 > T_\infty$

$$T(r, t) = ?$$

$$q_r (4\pi r^2) \Delta t \Big|_r - q_r (4\pi r^2) \Delta t \Big|_{r+\Delta r}$$

$\frac{\text{انرژی}}{\text{زمان} \times \text{سطح}}$.

$$+0-0 = C\rho(4\pi r^2)\Delta r\, T(r, t+\Delta t) - C\rho(4\pi r^2)\Delta r\, T(r, t)$$

توجه : r^2 را نمی توان ساده کرد چون یکی در $r+\Delta r$ هستند .

$$\frac{q_r \cdot r^2 \big|_r - q_r \cdot r^2 \big|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = \rho c r^2 \left(\frac{T(r, t+\Delta t) - T(r, t)}{\Delta t} \right)$$

$$\Delta r, \Delta t \longrightarrow 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}(q_r \cdot r^2) = \rho c r^2 \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad , \quad k = cte \longrightarrow$$

$$k\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \rho c r^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

در حالت کلی:

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

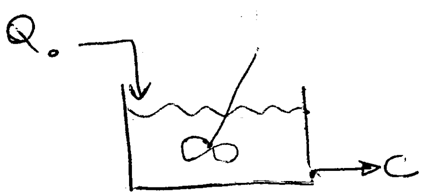
$n=0$ کارتزین

$n=1$ استوانه‌ای

$n=2$ کروی

مثال: محلول رقیقی از آب و نمک با غلظت اولیه C_0 $\left(\frac{gr}{lit}\right)$ و با شدت حجمی $Q_0\left(\frac{lit}{sec}\right)$ وارد مخزن به حجم V می‌شود. این مخزن در ابتدا پر از آب می‌باشد تغییرات غلظت نمک در جریان خروجی از مخزن را بدست آورید همین طور جواب پایدار مسئله را محاسبه کنید.

$$\text{Solute:} \quad Q_0 C_0 - Q \times C = \frac{d(C.V)}{dt} = V\frac{dc}{dt} + \cancel{c\frac{dV}{dt}}$$



$$Q_0(C_0 - C) = V\frac{dc}{dt}$$

$$\int_0^c \frac{dc}{C_0 - c} = \int_0^t \frac{Q_0}{V}\,dt$$

$$-\ln\frac{C_0 - c}{C_0} = \frac{Q_0}{V}t$$

$$1 - \frac{c}{C_0} = e^{-\frac{Q_0}{V}t}$$

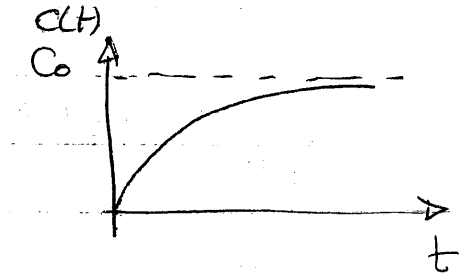
$$C(t) = C_0\left(1 - e^{-\frac{Q_0}{V}t}\right)$$

$$\frac{Q_0}{V} = \frac{lit/sec}{lit} = sec^{-1}$$

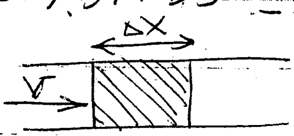
$$\frac{V}{Q_0} = \tau$$ ثابت زمانی پرشدن مخزن.

$$C(t) = C_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\lim_{t \to \infty} C(t) = C_0$$



مثال: جریانی از یک گاز با سرعت V و غلظت C داخل یک راکتور Plug جریان دارد
در این راکتور واکنشی مثل $A \longrightarrow Product$ با سرعت
$-r_A = kC_A^n$ صورت می‌گیرد. تغییرات غلظت ترکیب شونده A را برحسب
زمان و طول راکتور بدست آورید.



V ثابت

$$(VC)A - \left[(VC) + \frac{d(VC)}{dx} \cdot \Delta X\right]A = \text{تجمع}$$

حرارت تولید شده به ازای واحد حجم جسم

کارتزین : بقای انرژی :

$$\nabla^2 T + \frac{q''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{DT}{Dt}$$

در کارتزین $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\quad \cancel{\nabla^2 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\right.}$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

سرعت واکنش

بقای جرم :

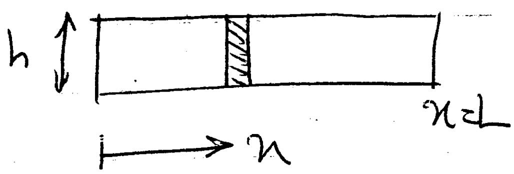
$$\nabla^2 C + \frac{R}{D} = \frac{1}{D}\frac{DC}{Dt}$$

~~در استوانه‌ای~~ $\cancel{\nabla^2 = \frac{1}{r}(}$

در استوانه‌ای $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

استوانه‌ای $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_r\frac{\partial}{\partial r} + V_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial}{\partial z}$

جسمی به سطح مقطع A ثابت با طول L و ضخامت h در دمای اولیه T_0 می‌باشد ناگهان دمای ابتدا و انتهای جسم را هم صفر درجه سانتی‌گراد می‌رسانیم. توزیع دما را در راستای x بر حسب زمان بدست آورید.



$L >> h$

$$q_x \cdot A|_x - q_x \cdot A|_{x+\Delta x} + 0 - 0 = \frac{dE}{dt} = \rho A \Delta x C \frac{dT}{dt}$$

$$q_x A|_x - q_x A|_{x+\Delta x} = \rho A \Delta x c \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \rho c \frac{dT}{dt}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q_x}{\partial x} = \rho c \dfrac{dT}{dt} \\ q_x = -k\dfrac{\partial T}{\partial x} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ T(x, t=0) = T_0 \\ T(x=0, t) = 0 \\ T(x=L, t) = 0 \end{cases}$$

حل از روش جداسازی متغیرها :

$$T(x,t) = F(x) \cdot \tau(t)$$

$$\frac{\partial^2 (F \cdot \tau)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial (F \cdot \tau)}{\partial t}$$

$$\tau \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{F}{\alpha} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

$$\tau F'' = \frac{F}{\alpha} \cdot \tau'$$

$$\xrightarrow{F \cdot \tau \text{ تقسیم}} \underbrace{\frac{F''}{F}}_{\text{فقط تابع } x \text{ است}} = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}}_{\text{فقط تابع } t} = k$$

k ← موهومی

k ← حقیقی $\begin{cases} 0 \\ \lambda^2 \\ -\lambda^2 \end{cases}$

موهومی : زمانی که شرایط مرزی با زمان تغییر کند .

موهومی $\longrightarrow T(x=0, t) = \sin(\omega t)$

حالت اول: $k=+\lambda^2$

$$\begin{cases} \dfrac{F''}{F}=\lambda^2 \\ \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\tau'}{\tau}=+\lambda^2 \longrightarrow \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{d\tau}{\tau dt}=\lambda^2 \end{cases}$$

$$\frac{d\tau}{\tau}=\alpha\lambda^2 dt$$

$$\tau(t)=e^{+\alpha\lambda^2 t}$$ عدد ثابت انتگرال را نمی‌نویسیم

$$t\longrightarrow\infty$$
$$\Rightarrow \tau\longrightarrow\infty \Rightarrow T\longrightarrow\infty$$

$k=+\lambda^2$ غیر قابل قبول است.

$$k=0$$
$$\frac{F''}{F}=0 \longrightarrow F''=0 \longrightarrow F(X)=ax+b$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=0 \longrightarrow \tau'=0 \longrightarrow \tau(t)=C$$

مورد $k=0$ Steady State یا حالت پایدار را نمایش می‌دهد.

نوشتن شرایط مرزی:

$$F(X=0)\,\tau(t)=0$$
$$F(X=L)\,\tau(t)=0$$

$$\Longrightarrow \quad F(X=0)=0$$
$$F(X=L)=0$$

$$F(X=0)=0 \longrightarrow b=0$$
$$F(X=L)=0 \longrightarrow a=0$$
$$\longrightarrow F=0$$

$$\boxed{T_S=0}$$
$$t\longrightarrow\infty$$

$: k = -\lambda^2$

$$\frac{F''}{F} = -\lambda^2 \qquad F'' + \lambda^2 F = 0$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau} = -\lambda^2 \longrightarrow \tau(t) = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

تعامد : ortogonality

$$\vec{A} : (A_x, A_y, A_z)$$
$$\vec{B} : (B_x, B_y, B_z)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B|\cos\theta$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum A_i B_i$$

اگر حاصلضرب داخلی دو بردار صفر باشد :

$$\cos\theta = 0 \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

بردار A بر B عمود است .

اگر تعداد جملات به سمت ∞ میل کند ⟵ به انتگرال تبدیل می‌شود

اگر فرض کنیم توابع $f(x)$ و $g(x)$ هردوتا در فاصله $a < x < b$ پیوسته باشد

$$\langle f(x) \cdot g(x) \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0.0$$

اگر حاصل انتگرال صفر شد توابع f و g برهم عمودند، متعامدند، اورتوگونال هستند .

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n\}$$

اگر مجموعه توابع فوق در فاصله $a < x < b$ تعریف شده و پیوسته باشد
در این صورت مجموعه توابع φ را اورتوگونال می‌نامیم به شرطی که

$$\int_a^b \psi_i(x)\,\psi_j(x)\,dx \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

مجموعه توابع ψ یک مجموعه متعامد یا اورتوگونال است.

$$\|\psi_i\|^2 = \int_a^b \psi_i^2\,dx$$

$\|\psi_i\|^2$: مقدار ψ_i یا norm تابع ψ_i

اگر $\|\psi_i\|^2 = 1$ باشد مجموع توابع ψ_i را مجموع توابع اورتونرمال می‌نامند.

امّا اگر مجموعه توابع اورتوگونال نباشند ولی قابل تبدیل به اورتوگونال باشند:

$$\int_a^b \underbrace{W(x)}_{\text{Weight Function}}\,\psi_i(x)\,\psi_j(x)\,dx$$

Weight Function تابع وزنی

می‌توانیم بنویسیم:

$$\{\sqrt{W}\psi_1, \sqrt{W}\psi_2, \sqrt{W}\psi_3, \dots, \sqrt{W}\psi_n\}$$

مجموعه توابع اورتوگونال هستند.

مثال:

$$\{J_0, J_1, \dots, J_n\}$$

$$\{x^{1/2}J_0, x^{1/2}J_1, \dots, x^{1/2}J_n\}$$

تابع وزنی توابع بسل x یا r می‌باشد.

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \cdot \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

توابع Sin ، اورتوگونال هستند.

$$\int \cos\frac{m\pi x}{L} \cdot \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

توابع Cos ، اورتوگونال هستند.

تابع F را برحسب توابع اورتوگونال ویا قابل تبدیل به اورتوگونال فقط می‌توان بسط داد
کاربرد اصلی اورتوگونالیتی بسط توابع است.

کاربرد اورتوگونالیتی

فرض کنیم تا $F(x)$ را برحسب مجموعه توابع $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ بسط دهیم.

$$F(x) = \sum C_i \psi_i = C_0\psi_0 + C_1\psi_1 + \cdots + C_i\psi_i + \cdots + C_n\psi_n$$

ثوابت مجهول هستند. پس باید مقدار تابع را در $n+1$ نقطه داشته باشیم تا $n+1$ معادله و $n+1$ مجهول بدست آید.

$$F_1 = C_0\psi_0(x_1) + \cdots + C_n\psi_n(x_1)$$

$$\vdots$$

$$F_n = C_0\psi_0(x_n) + \cdots + C_n\psi_n(x_n)$$

با $n+1$ معادله و $n+1$ مجهول:

$$F(x)=\sum c_i \psi_i$$

طرفین را ψ_i ضرب کنیم و انتگرال بگیریم

$$\int_a^b F(x)\psi_i\,dx = \cancel{\int_a^b c_0\psi_0\psi_i\,dx} + \cancel{\int_a^b c_1\psi_1\psi_i\,dx} + \cancel{\cdots} + \int_a^b c_i\psi_i\psi_i\,dx + \cancel{\cdots + \int_a^b c_n\psi_n\psi_i\,dx}$$

$$\Longrightarrow \boxed{c_i=\frac{\int_a^b F(x)\psi_i(x)\,dx}{\int_a^b \psi_i^2(x)\,dx}}$$

سیستم های اشتروم لیوویل:

$$[S(x)\psi']' - q(x)\psi(x) + \lambda^2 p(x)\psi(x)=0$$

این معادله در سیستم S.L. صدق می‌کند به شرطی که:

① $S(x)$ ، $S'(x)$ ، $q(x)$ ، $P(x)$ توابع پیوسته باشند.

② $S(x), P(x) > 0$

فرض کنیم ψ_n یکی از جواب های این معادله باشد.

معادله ①

$$[S(x)\psi_m'(x)]' - q(x)\psi_m(x) + \lambda_m^2 \cdot P(x)\cdot\psi_m(x)=0$$

و ψ_n هم جواب معادله باشد :

$$[S(x)\psi'_m(x)]' - q(x)\psi_m(x) + \lambda_n^2 P(x)\psi_n(x) = 0$$

② معادله (II)

$$① \times \psi_n - ② \times \psi_m =$$

$$-(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) P(X)\psi_m(X)\psi_n(X) \quad = \text{واف رقم}$$

$$[S(x)\psi'_m(x)]\psi_n - [S(x)\psi'_n(x)]\psi_m =$$

$$-(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) P(x)\psi_m(X)\psi_n(X)$$

این انتگرال به روش جزء به جزء حل شده و مقدارش برابر صفر می‌گردد

$$\int_a^b \{[S(x)\psi'_m(x)]'\psi_n - [S(x)\psi'_n(x)]\psi_m\} dx =$$

$$\int_a^b (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) P(x)\psi_m(X)\psi_n(X) dx$$

بنابراین :

$$\boxed{(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)\int_a^b P(x)\psi_n(x)\psi_m(x)\,dx = 0}$$

$\lambda_m \neq \lambda_n$ بنابراین :

$$\boxed{\int_a^b P(x)\psi_n(x)\psi_m(X)\,dx = 0}$$

$$P(X) \longrightarrow \begin{cases} P(X)=cte \longrightarrow \int_a^b \psi_m \psi_n \, dx = 0 \\ \psi_m \text{ و } \psi_n \text{ اورتوگونال هستند.} \\ P(X) \neq cte \longrightarrow \int_a^b P(x)\psi_m \psi_n \, dx = 0 \end{cases}$$

ψ_m و ψ_n با تابع وزن $P(X)$ اورتوگونال هستند.

نتیجه: اگر یک معادله در سیستم S.L صدق کند اگر $P(X)$ ثابت باشد جواب ها اورتوگونال و اگر $P(X)$ ثابت نباشد جواب ها قابل تبدیل به اورتوگونال با توجه تابع وزن $P(X)$ می باشد.

انواع شرایط مرزی:

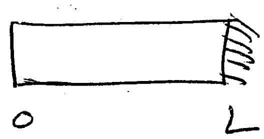
شرط مرزی نوع اول: Drichlit's B.C. دیریکله:

از مقدار تابع در مرزها اطلاع می دهد.

$$u(x=0,t)=u_1$$
$$T(x=L,t)=0$$

شرط مرزی نوع دوم: Newman's B.C

از مقدار مشتق تابع در مرزها اطلاع می دهد.

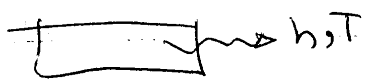


$$\frac{\partial T(x=L,t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = u_1$$

شرط مرزی نوع سوم: Rabin's B.C.

از رابطه بین مقدار تابع و مشتق تابع در مرزها اطلاع می دهد.



$$-k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h[T(L,t)-T_\infty]$$

$$\alpha_1 U + \alpha_2 U' = \alpha_3$$

$\alpha_1 = 0 \longrightarrow$ شرط مرزی نوع دوم

$\alpha_2 = 0 \longrightarrow$ " " " اول

$\alpha_1 , \alpha_2 \neq 0 \longrightarrow$ " " " سوم

$\alpha_3 = 0 \longrightarrow$ شرط مرزی همگن

همگن

در شرط مرزی همگن عدد ثابت وجود ندارد.

$\alpha_3 \neq 0 \longrightarrow$ غیر همگن.

مثال: شرط مرزی همگن،

$$-K\frac{\partial \theta(L,t)}{\partial x} = h\theta(L,t)$$

ادامه حل مسئله:

$$K = -\lambda^2$$

$$\frac{F''}{F} = -\lambda^2 \longrightarrow F'' + \lambda^2 F = 0$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{T'}{T} = -\lambda^2 \longrightarrow T(t) = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$[1 \times F']' - 0 \times F + \lambda^2 \times 1 \times F = 0$$

$$[S \times \psi']' - q \cdot F + \lambda^2 \cdot P \cdot \psi = 0$$

$S = 1 , S' = 0 , q = 0 , P = 1$ یعنی این معادله در سیستم ~~اورتوگنال~~

$S = 1 , P = 1 > 0$ صدق می‌کند پس جوابها اورتوگونال یا قابل تبدیل به اورتوگونال است. SL

زمانی از جداسازی متغیرها می‌توان استفاده کرد که بتوان از اوراتوگونالیتی استفاده کرد.

$$F'' + \lambda^2 F = 0 \longrightarrow D^2 + \lambda^2 = 0$$
$$D = \pm \lambda i$$

$$F(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

توضیح: اگر

$$F'' - \lambda^2 F = 0$$
$$D^2 - \lambda^2 = 0$$
$$D = \pm \lambda$$

اگر طول صفحه ∞ باشد از این شکل استفاده کنید. ← $F = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$

$$F = C_1 \sinh \lambda x + C_2 \cosh \lambda x$$

$$F(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$
$$F(x=0) = 0 \longrightarrow 0 = 0 + B \longrightarrow \boxed{B = 0}$$
$$F(x=L) = 0 \longrightarrow 0 = A \sin \lambda L < \begin{array}{l} A = 0 \\ \sin \lambda L = 0 \end{array}$$

A نمی‌تواند صفر باشد.

$$\sin \lambda L = 0 = \sin n\pi \longrightarrow \lambda L = n\pi$$

مقادیر ویژه. $\boxed{\lambda = \frac{n\pi}{L}}$

eigen value $n = 1, 2, 3, \ldots$

از اعمال یکی از شرایط یکی از ضرائب و از اعمال شرط دوم مقدار ویژه بدست می‌آید.

steady جواب حالت $\longleftarrow \lambda = 0 \longleftarrow n = 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \cdots$

اگر نیز $\sum_{n=0}^{\infty}$ بنویسید یعنی دو با جواب ...

$n\lambda x$

$e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$

$$T_s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \, e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

در این مسئله $T_s = 0$.

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x$$

اگر اورتوگونال نباشد A_n را نمی توان حساب نمود

$$= \frac{\int_0^L T_0 \sin \lambda_n x \, dx}{\int_0^L \sin^2 \lambda_n x dx} = \frac{2T_0}{L\lambda_n} \left[-\cos \frac{n\pi}{L} x \right]_0^L$$

$$\frac{2T_0}{L\frac{n\pi}{L}} \left[-\cos n\pi + 1 \right]$$

$$\frac{2T_0}{n\pi} \left[1 - 1 \right] \quad \text{زوج} = n \longrightarrow A_n = 0$$

$$= \frac{2T_0}{n\pi} \left[1 - (-1) \right] = \frac{4T_0}{n\pi} \quad \text{فرد} = n$$

جواب نهایی:

با توجه: دو تا ضریب برای F مجهول است (A و B) و یک ضریب برای ج مجهول است. (C)

ولی از یک شرط مرزی یک ضریب بدست می آید (مثلاً B) ، از یک شرط مرزی دیگر ...

و از شرط ... (چون A_n ...) CA_n ...

T

هر مسئله‌ای به شکل $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ جواب به صورت:

$$\boxed{T(x,t) = T_s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \Phi_n \cdot e^{-\alpha \lambda_n^2 t}}$$

یعنی T_s ، A_n و λ_n را باید بدست آوریم.

برای معادله $y'' + \lambda^2 y = 0$ با شرایط $y'(0) = 0$ ، $y'(\pi) = 0$

مقدار مشخصه و توابع Φ برابراست با:

1) $\Phi = \cos n\cancel{x}$ ، $\lambda_n = n$ ✓

2) $\Phi = \sin n\cancel{x}$ ، $\lambda_n = n$

3) $\Phi = \cos n\cancel{x}$ ، $\lambda_n = n^2$

4) $\Phi = \sin n\cancel{x}$ ، $\lambda_n = n^2$

$$y = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$$

$$y' = +A\lambda\cos\lambda x - B\lambda\sin\lambda x$$

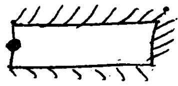
$$y'(0) = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$y'(\pi) = 0 \longrightarrow -B\lambda\sin\lambda\pi = 0 \begin{cases} \cancel{B=0} \\ \lambda = 0 \\ \sin\lambda\pi = 0 \end{cases}$$

$$\sin\lambda\pi = 0 \longrightarrow = \sin n\pi$$

$$\lambda\pi = n\pi \longrightarrow \boxed{\lambda = n}$$

مسئله سوم:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x, t=0) = T_0$$

$$T(x=0, t) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(L, T) = 0$$

حل به روش جداسازی:

$$T = F(x) \cdot \tau(t)$$

$$\tau F'' = \frac{1}{\alpha} F \cdot \tau'$$

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau} = k \begin{cases} \lambda^2 \\ 0 \\ -\lambda^2 \end{cases}$$

اگر یک طرف $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ داشته باشیم: $\tau(t) \neq e^{+\alpha\lambda^2 t}$ و $k = +\lambda^2$

$k = 0 \longrightarrow$ جواب حالت steady : $T_s = 0$

$k = -\lambda^2 \longrightarrow$ $\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau} = -\lambda^2 \rightarrow \tau = e^{-\alpha\lambda^2 t}$

$$\frac{F''}{F} = -\lambda^2 \longrightarrow F'' + \lambda^2 F = 0$$

$$D^2 + \lambda^2 = 0$$

$$D = \pm \lambda i$$

$$F(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$$

$$F(x=0) = 0 \longrightarrow 0 = 0 + B \longrightarrow \boxed{B=0}$$

$$\frac{\partial F(L)}{\partial x} = 0 \longrightarrow A\lambda\cos\lambda L = 0 \longrightarrow$$

$$\cos\lambda L = 0 \longrightarrow = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$\boxed{\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi \quad n = 1, 2, \ldots}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau} = -\lambda^2 \longrightarrow \tau(t) = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$T(x,t) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\lambda_n x \cdot e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

عین مسئله قبل فقط مقدار λ تفاوت دارد.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ T(x, t=0) = f(x) \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}(x=0, t) = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}(L, T) = 0 \end{cases}$$

حل از روش جداسازی :

$$T = F(x)\cdot\tau(t)$$

$$\tau \cdot F'' = \frac{1}{\alpha} F \cdot \tau'$$

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau} = k \,\Bigg|\, \begin{matrix} \lambda^2 \\ 0 \\ -\lambda^2 \end{matrix}$$

$k = +\lambda^2 \qquad \tau(t) = e^{+\alpha\lambda^2 t}$ غ ق ق

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau} = 0 \xrightarrow{\tau' = 0} \tau(t) = c_1$$

$$\frac{F''}{F} = 0 \longrightarrow F = ax + b \longrightarrow \boxed{F' = a}$$

$$F'(x=0) \longrightarrow \boxed{a = 0}$$

$$F'(x=L) = 0 \longrightarrow \boxed{a = 0}$$

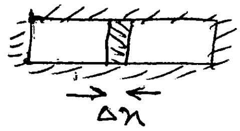
یعنی با اعمال شرایط مرزی فقط مقدار a بدست می‌آید

این جسم از ۲ طرف عایق بوده انرژی نمی‌گیرد و از دست نمی‌دهد

بنابراین انرژی جسم زمان اول در زمان ∞ هم همان مقدار است

$$E_{t=0} = E_{t=\infty}$$

$$E_{t=0} = \int \rho C A\,dx\,\left(T|_{t=0} - \cancel{T_{ref}}\right) \quad \cancel{T_{ref}} \to 0$$



$$E_{t=\infty} = \int \rho A C\left(T|_{t=\infty} - \cancel{T_{ref}}\right) dx \quad \cancel{T_{ref}} \to 0$$

$$E_{t=0} = E_{t=\infty}$$

$C_1 b$ = Steady یعنی دما در حالت $T|_{t=\infty}$

$$\rightarrow \int_0^L \underbrace{F(x)}_{\text{در } t=0}\,dx = \int_0^L \underbrace{C_1 b}_{\text{در } t=\infty}\,dx$$

در حالت Steady :

$$T = F(x)\,.\,\tau(t)$$

$$b \,,\, C_1$$

$$\boxed{b = \frac{1}{L C_1}\int_0^L F(x)\,dx}$$

یعنی دمای حالت متوسط
$F(x)$ بطول جسم

$$\boxed{T_S = \frac{1}{L}\int_0^L F(x)\,dx}$$

توجه : $T_S = C_1 b$

$$K = -\lambda^2 \qquad \tau(t) = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$F'' + \lambda^2 F = 0$$

$$F = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$$

$$F' = A\lambda\cos\lambda x - B\lambda\sin\lambda x$$

$$F'(x=0) = 0 \longrightarrow A\lambda \times 1 - B \times 0 = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$-B\lambda\sin\lambda L = 0 \longrightarrow \sin\lambda L = 0 = \sin n\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{n\pi}{L}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{L}\int_0^L F(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos\lambda_n x\,.\,e^{-\alpha\lambda_n^2 t}}$$

$$F(x) = \text{-----} + \sum B_n\cos\lambda_n x$$

یعنی بسط $F(x)$ برحسب
Cos ها.

$$B_n = \frac{\int_0^L F(x)\cos\lambda_n x\,dx}{\int_0^L \cos^2\lambda_n x\,dx} \qquad \int_0^L \cos^2\lambda_n x\,dx \to \frac{L}{2}$$

توجه: اگر در $x=0$ از شرط مرزی نوع اول باشد Φ_n ، sin می‌شود
" " " $x=0$ " " " دوم " " cos .

اگر هر دو تا شرط مرزی از یک نوع باشند ← $\lambda = \frac{n\pi}{L}$ و اگر هر دو یکی نوع اول و یکی نوع دوم باشند ← $\lambda = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$

I $x=0$ نوع اول ← sin ، نوع دوم ← cos

جواب معادله $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$

II اگر هر دو تا نوع اول و یا نوع دوم باشند ← $\lambda = \frac{n\pi}{L}$

I اگر یکی نوع اول یکی نوع دوم $\lambda = (\frac{2n+1}{2L})\pi$

جواب:
$$\boxed{T = T_s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t}}$$

در امتحان A_n را نمی‌خواهند.

	Φ	λ
$x=0$ نوع اول، $x=L$ نوع اول	$\sin \lambda_n x$	$\frac{n\pi}{L}$
$x=0$ نوع اول، $x=L$ نوع دوم	$\sin \lambda_n x$	$(\frac{2n+1}{2L})\pi$
$x=0$ نوع دوم، $x=L$ نوع اول	$\cos \lambda_n x$	$(\frac{2n+1}{2L})\pi$
$x=0$ نوع دوم، $x=L$ نوع دوم	$\cos \lambda_n x$	$\frac{n\pi}{L}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$T(x, t=0) = T_0$

$\frac{\partial T}{\partial x}(x=0, t) = 0$

$-k\frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h\left[T(L,t) - T_\infty\right]$

به روش جداسازی قابل حل است.

حل)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$\theta(x, t=0) = \theta_0$ ← این شرط ناهمگن شد

$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0$

$-k\frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = h\theta(L, t)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

برای بدست آوردن ضریب T ذوبی ← $T(x, t=0) = T_0$

$T(x=0, t) = T_1$

$-k\frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h\left[T(L,t) - T_\infty\right]$

به روش جداسازی قابل حل نیست

$\theta = T - T_\infty$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$\theta(x, t=0) = \theta_0$

$\theta(0, t) = \theta_1$

$-k\frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = h\theta(L, t)$

شرایط حل از روش جداسازی:

۱) خود معادله باید همگن باشد.

مثال:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{u''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

← قابل حل نیست از روش جداسازی

۲) زمانی در جهتی که می‌خواهیم مسئله را حل کنیم طول ثابت مشخص داشته باشیم.

مثال:

$T(x \to \infty, t) = 0$ قابل حل نیست.

چون مثلاً می‌گفتیم

$$F = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$$

$\sin\infty, \cos\infty = ?$

یعنی این شرط وزن کمکی به ما نمی‌کند.

۳) شرایط مرزی به گونه‌ای باشد که در نهایت به حالت همگن درآوریم.

اگر معادله‌ای غیرهمگن بودن در خود معادله بود روش حل superposition باشد.

توجه: برای بدست آوردن جواب حالت steady:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \theta(x,t=0) = \theta_0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = 0 \\ -k\frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) = h\theta(L,t) \end{cases}$$

~~در حالت steady~~

حل)

$$\theta(x,t) = u(x,t) + V(x) \longrightarrow$$ پاسخ steady

توجه: این شرایط برای زمان ها ی نزدیک $t \to \infty$ برای θ صادق است.

$$V(x) = \theta(x, t \to \infty)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \longrightarrow V = ax + b$$

$$\frac{\partial V(0)}{\partial x} = 0 \quad \left.\begin{matrix} V = ax + b \\ \frac{\partial V(0)}{\partial x} = 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow a = 0$$

$$-k\frac{\partial V(L)}{\partial x} = hV$$

$$-k \times 0 = hb \longrightarrow b = 0 \longrightarrow \boxed{V = 0}$$

*) یعنی برای بدست آوردن جواب حالت steady ، $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$ را با دو شرط مرزی داده شده باید حل کرد.

بدست آوردیم: صفر

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

چون تابعیت زمانی ندارد

$$\theta(x,t) = u(x,t) + V(x)$$

$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$ یعنی در معادله را قرار می‌دهیم.

شرایط مرزی و اولیه: معادله:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \cancel{\frac{\partial V(0)}{\partial x}} = 0 \quad (1)$$

$$-k\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} - k\frac{\partial V(L)}{\partial x} = h\,u(L,t) + h[V(L)]$$

بدست آوردیم با هم مساوی هستند.

$$-k\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = h\,u(L,t) \quad (2)$$

$$u(x,t=0) = \theta_0 \quad (3)$$

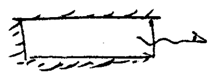
حل: جداسازی

$$u = F\cdot\tau$$

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau} = k \;\Big|\; \lambda^2,\ 0,\ -\lambda^2$$

$k = +\lambda^2$ غ ق ق

$k = 0 \longrightarrow u_s = 0$



دما صفر

با الف دو مرز دمای صفر دارد.

$k = -\lambda^2$

$$F = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$$

$$\frac{\partial F(0)}{\partial x} = 0$$

$$-k\frac{\partial F(L)}{\partial x} = hF(L)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = A\lambda\cos\lambda x - B\lambda\sin\lambda x$$

$$0 = A\lambda\times 1 - 0 \longrightarrow A = 0$$

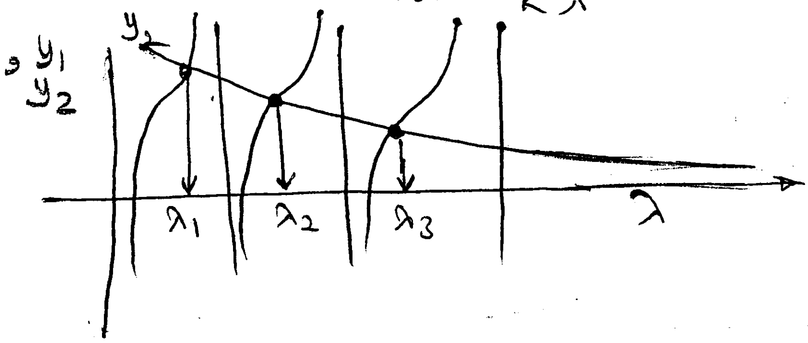
$$-Kx\,(-B\lambda\sin\lambda L) = hB\cos\lambda L$$

حفظ شود. λ از روش ترسیمی بدست می‌آید.

$$\boxed{\tan\lambda L = \frac{h}{k\lambda}}$$

از اعمال شرط مرزی سوم λ بدست آمد.
λ به شکل صریح بدست نمی‌آید.

$$y_1 = tg\,\lambda L$$
$$y_2 = \frac{h}{k\lambda}$$



$$u = 0 + \sum A_n \cdot \cos\lambda_n x \cdot e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

$$\theta_0 = \sum A_n \cdot \cos\lambda_n x$$

$$A_n = \frac{\int_0^L}{\int_0^L \cos^2\lambda_n x\,dx} \longrightarrow \frac{L}{2}$$

حاصل انتگرال $\frac{L}{2}$ نیست.

$$\theta = u + \underbrace{V}_{\text{صفر}}$$

$$\theta = 0 + \sum A_n \cdot \cos\lambda_n x \cdot e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

$$\longrightarrow T = T_\infty + \sum A_n \cdot \cos\lambda_n x \cdot e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

توجه: اگر در $x=0$ شرط مرزی نوع دوم بود تابع $\Phi=\cos\lambda_n x$

$x=L$ " " " سوم $\lambda_n : \tan\lambda L=\frac{h}{k\lambda}$

وجواب steady را هم بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}^{\,0}$$

$$T(x,t=0)=T_0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x=0,t)=0$$

جواب steady:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0 \longrightarrow T=ax+b$$

$$\frac{\partial T(0)}{\partial x}=0 \longrightarrow a=0$$

$$-k\times 0=h\left[b-T_\infty\right]$$

$$b=T_\infty$$

$$T=T_\infty+\sum A_n \cdot \cos\lambda_n x \cdot e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

* حل در کشور نیازی به استفاده از اصل Superposition نیست.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,t=0)=T_0$$

$$T(x=0,t)=T_1$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}(L,t)=h\left[T(L,t)-T_\infty\right]$$

جواب حالت :Steady

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \longrightarrow T_s = ax + b$$

$$T(x=0,t) = T_1 \longrightarrow T_1 = b$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = h\left[T(L,t) - T_\infty\right]$$

$$\longrightarrow -k \times a = h\left[aL + T_1 - T_\infty\right]$$

$$a = \frac{h(T_\infty - T_1)}{hL + k}$$

$$T_s = ax + b$$

$$\boxed{T_s = \frac{h(T_\infty - T_1)}{hL + k}x + T_1}$$

بدست آوردن λ :

$$-k\frac{\partial F(L)}{\partial x} = hF(L) \longrightarrow -KA\lambda\cos\lambda L = hA\sin\lambda L$$

$$\longrightarrow \boxed{\cot\lambda L = \frac{-h}{k\lambda}}$$

$$\cancel{\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} = A\lambda\cos\lambda x - B\sin\lambda x}$$

$$\cancel{0 = A\lambda \times 1 - 0 \rightarrow A = 0}$$

توجه : اگر نوع اول $x=0$ آنگاه : $\varphi = \sin\lambda_n x$

نوع سوم $x = L$ λ_n : $\cot\lambda L = \frac{-h}{k\lambda}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad T = u(x,t) + V(x)$$

$$T(x,t=0) = T_0 \qquad T(x=0,t) = T_1 \qquad T(x=L,t) = T_2$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$u(x,t=0) + V(x) = T_0$$

$$u(0,t) + V(0) = T_1$$

$$u(L,t) + V(L) = T_2$$

همواره شرایط غیرهمگن را به ODE می‌دهیم .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\cancel{\frac{\partial V}{\partial t}}^{\,0}$$

$$V(0) = T_1$$

$$V(L) = T_2 .$$

پس شرایط مرزی معادله PDE را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(L,t) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(x,t=0) = T_0 - V(x) \end{cases}$$

حل : قسمت ODE :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

$$\longrightarrow V(x) = ax + b$$

$$T_1 = b$$

$$T_2 = aL + T_1$$

$$a = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$V(x) = \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right)x + T_1$$

*) در کنکور می‌توان با اعمال کردن شرایط مرزی جواب حالت Steady را بدست آورد.

مهم .

$$u(x,t) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \cdot e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

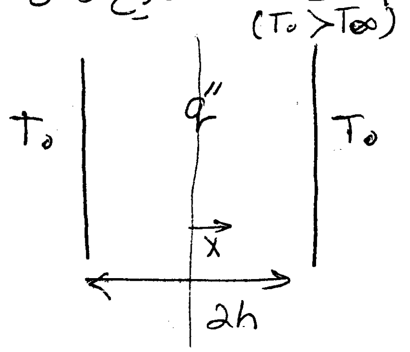
$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

بنابراین :

$$T = \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) x + T_1 + \sum A_n \sin \lambda_n x \cdot e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

یک صفحه به ضخامت $2h$ این جسم در دمای اولیه T_0 بوده $(T_0 > T_\infty)$ این جسم را در محیط قرار می‌دهیم. حرارت q'' در داخل جسم تولید می‌شود توزیع دمای ناپایدار را بدست آورید.



$$\frac{q''}{k} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x, t=0) = T_0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x=0, t) = 0$$

$$T(x=h, t) = T_0$$

معادله غیر همگن و حتماً باید از Super position استفاده کنیم.

$$T = u(x,t) + v(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{q''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{q''}{k} = \cancel{\frac{1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial t}} \to 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{q''}{k}=0 \longrightarrow \frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{q''}{k}x+C_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(0)=0 \rightarrow C_1=0 \qquad \rightarrow V=\frac{-q''}{2k}x^2+\cancel{C_1 x}+C_2$$

$$V(x=h)=T_0 \longrightarrow T_0=-\frac{q''}{2k}h^2+C_2$$

$$\boxed{C_2=T_0+\frac{q''}{2k}h^2}$$

$$\boxed{V(x)=T_0+\frac{q''h^2}{2k}\left[1-\left(\frac{x}{h}\right)^2\right]}$$

جواب Steady :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)+\cancel{\frac{\partial V}{\partial x}(0)}=0$$

$$u(L,t)+V(h)=T_0 \qquad V(h)\rightarrow T_0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0\\[2ex] u(h,t)=0\end{array}}$$

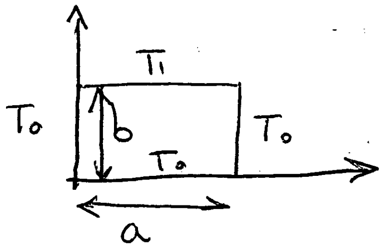
شرایط مرزی (همگن) :

$$u(x,t)=0+\sum A_n \cos\lambda_n x\, e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2h}\right)\pi$$

$$T=T_0+\frac{q''h^2}{2k}\left[1-\left(\frac{x}{h}\right)^2\right]+\sum A_n \cos\lambda_n x\, e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

مثال: یک صفحه به ابعاد $a\times b$ مطابق شکل داریم. توزیع دمای پایدار را در راستای x و y بدست آورید.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

$$T(x=a,y)=T_0$$

$$T(x=0,y)=T_0$$

$$T(x,y=0)=T_0$$

$$T(x,y=b)=T_1$$

$$\theta=T-T_b \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=0$$

$$\theta(x=a,y)=0$$

$$\theta(x=0,y)=0$$

$$\theta(x,y=0)=0$$

$$\theta(x,y=b)=\theta_1$$

$$\theta=X(x)\,.\,Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 (XY)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 (XY)}{\partial y^2}=0$$

$$YX''+XY''=0$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0$$

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=K\begin{cases}0\\-\lambda^2\\+\lambda^2\end{cases}$$

$k=0 \longrightarrow \begin{cases} X''=0 \\ Y''=0 \end{cases}$ $\quad X=a_1x+b_1 \longrightarrow \begin{cases} X(x=a)=0 \longrightarrow a_1= \\ X(x=0)=0 \longrightarrow b_1= \end{cases}$

$Y=a_1'y+b_1' \longrightarrow Y(y=0)=0$

$X(x=a).\ Y(y)=0 \qquad X(x)=0 \longleftarrow k=0$

$\downarrow$

$\Theta=0$

علامت $+\lambda^2$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در جهت شرط مرزی غیرهموژن، تابع اورتوگونال بدست آید.

در جهت x ← در این مثال غیرهمگن است.

$\Theta(x, y=b)=\Theta_1 \longrightarrow$

نامطلوب

$\frac{X''}{X}=+\lambda^2 \rightarrow \frac{Y''}{Y}=-\lambda^2 \rightarrow X''-\lambda^2X=0 \rightarrow X=C_1\sinh\lambda x+C_2\cosh\lambda x$

← جواب‌ها غیراورتوگونال.

$\frac{X''}{X}=-\lambda^2 \rightarrow \frac{Y''}{Y}=+\lambda^2 \rightarrow X''+\lambda^2X=0 \rightarrow D^2+\lambda^2=0$

$\leftarrow D=\pm\lambda i$

جواب اورتوگونال. $\boxed{X=C_1'\sin\lambda x+C_2'\cos\lambda x}$

$$\boxed{\frac{X''}{X}=-\lambda^2 \rightarrow \frac{Y''}{Y}=+\lambda^2}$$

$\rightarrow Y(y)=D_1'\sinh\lambda y+D_2'\cosh\lambda y$

$X(x=0)=0 \longrightarrow C_2'=0$ از اعمال شرط مرزی اول یک ثابت صفر بدست می‌آید

$X(x=a)=0 \longrightarrow 0=C_1'\sin\lambda a \rightarrow \sin\lambda a=0$

$\longrightarrow \sin\lambda a=n\pi$

(از اعمال شرط مرزی دوم λ بدست می‌آید). $\boxed{\lambda_n=\frac{n\pi}{a}}$ $\quad n=1,2,\ldots$

$Y(y=0)=0 \rightarrow D_1'\times 0+D_2'\times 1=0 \rightarrow D_2'=0$

$$\boxed{X(x) = c_1' \sin \lambda x}$$

$$\boxed{\Theta = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} A \sin \lambda_n x . \sinh \lambda_n y}$$

تو هیچ گاه در داخل Σ دو تابع اورتوگونال ضرب نمی‌شوند.

$$\Theta_1 = \sum A_n . \sin \lambda_n x . \sinh \lambda_n b \longrightarrow$$

A_n بدست می‌آید.

$\Theta(x, y = b) = \Theta_1$

ما ← در راستای x شرط مرزی غیرهمگن — در راستای x باید جواب اورتوگونال بدست بیاید.

در $x = 0$ شرط مرزی نوع اول است ← $\cos$ یا $\sin$ ←

پس $\sin \lambda_n x$ می‌خواهیم.

~~Sinh λy~~

*

در راستای y شرط مرزی همگن ← توابع غیر اورتوگونال می‌خواهیم ← $\sinh \lambda y$

$\cosh \lambda y$

← در $y = 0$ شرط مرزی نوع اول.

* در مورد λ_n هم در موارد قبلی گفته شده صادق است.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y} = 0$$

$$T(x=a, y) = T_1$$

$$T(x=0, y) = T_2$$

$$T(x, y=0) = T_3$$

$$T(x, y=b) = T_4 .$$

$$T = u + v + Z + M$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \cdots + \cdots = 0$$

$$u(x=a, y) + v(x=a, y) + Z(x=a, y) + M(x=a, y) = T_1$$

$$u(x=0, y) + v(x=0, y) + Z(x=0, y) + M(x=0, y) = T_2$$

توجه : جمع ۴ معادله و شرایط مرزی آنها باید برابر معادله اصلی گردد .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u(x=a, y) = T_1$$

سه شرط دیگر $\left\{\begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array}\right.$.

حل سؤال ۱)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a = 0 \qquad u(x=0) = T_0 \to C = T_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ax + b \longrightarrow -aL + b = 0 \to b = aL$$

$$u = -\frac{ax^2}{2} + bx + C$$

$$u_s = -\frac{a}{2}x^2 + aLx + T_0$$

$$u_s = \frac{ax}{2}[2L - x] + T_0$$

۴) گزینه ۳ صحیح است.

۵) مسئله SL است.

$$[y' x]' - 0xy + \alpha_m(\sin x)y = 0$$

$$\int P(x) Y_m Y_n \, dx = 0 \qquad P(x) = \sin x$$

گزینه ۳ صحیح است.

۱۴)

$$V_t = C^2 V_{xx} - \beta V$$

$$V(x,t) = u(x,t) \cdot w(t)$$

$$V_t = U_t \cdot W + W_t \cdot u$$

$$V_{xx} = W \cdot U_{xx}$$

$$u_t \cdot W + W_t \cdot u = C^2 W U_{xx} - \beta U W$$

$$W \underbrace{[u_t - c^2 u_{xx}]}_{= 0} = -uW_t - \beta u W$$

$$-u(w_t+\beta w)=0$$

$$\frac{dw}{dt}=-\beta w \rightarrow \frac{dw}{w}=-\beta t$$

$$\rightarrow \boxed{w=e^{-\beta t}}$$

۸)

$$T(x=0,y)=0$$
$$T(x,y=0)=T_0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

این گونه مسائل با حل کردن بدست نمی آید باید شرایط مرزی را امتحان کرد.

✓ گزینه 2 :

$$T_0-\frac{2T_0}{\pi}\times\frac{\pi}{2}$$
$$T_0-\frac{2T_0}{\pi}\times 0$$

مسئله ۹)

$$S(x)=x^2e^x$$
$$S'=2xe^x+x^2e^x$$
$$q(x)=x$$
$$P(x)=\cos x$$

توابع پیوسته

S و $P > 0$ در بازه داده شده.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,.\,\varphi_m\varphi_n\,dx=0$$

توجه :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx=2$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\left[\varphi_m\varphi_n-1\right]dx=-2$$

تابع گاما

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 0 - (-1) = +1$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty \underbrace{x^n}_{u}\, \underbrace{e^{-x} dx}_{dv \Rightarrow v = -e^{-x}} =$$

که از روش جزء به جزء انتگرال حل می‌گردد:

$$= -\frac{x^n}{e^x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}(n x^{n-1})\, dx$$

بعد از n بار هوپیتال گرفتن $=0$ می‌گردد.

$$= +n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)}$$

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\,\Gamma(n-1)$$
$$= n(n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2)$$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \longrightarrow$$ برای بدست آوردن گاما اعداد صحیح.

برای اعداد اعشاری:

$$0 < P < 1 \qquad \Gamma(P)\,\Gamma(1-P) = \frac{\pi}{\sin P\pi}$$

$$\Gamma(0.5)\,\Gamma(0.5) = \frac{\pi}{1}$$

$$\boxed{\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}}$$

مثال:

$$\Gamma(1.5) = \cancel{0.5\,\Gamma(0.5)}$$
$$= \Gamma(0.5+1) = 0.5\,\Gamma(0.5)$$

$$\Gamma(1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma(-1.5) = ?$$

$$\Gamma(-1.5+1) = -1.5\,\Gamma(-0.5)$$
$$\frac{\Gamma(-0.5)}{-1.5} = \Gamma(-1.5)$$

مثال: $\Gamma(-0.5) = ?$

$$\Gamma(-0.5+1) = -0.5\,\Gamma(-0.5)$$
$$\Gamma(-0.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{-0.5}$$

$$\Gamma(-1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{(-1.5)(-0.5)} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

اعداد منفی را چندین بار با یک جمع می‌کنیم تا به اعداد + برسیم.

Γ می‌تواند + یا − باشد.

$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(2) = 1$$
$$\Gamma(0) = +\infty \longleftarrow = \frac{\Gamma(1)}{0} = +\infty$$

error function تابع خطا

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du$$

$$\operatorname{erf}(0)=0$$

$$\operatorname{erf}(\infty)=1 \longrightarrow 1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$$

$$\boxed{\operatorname{erf}(-x)=-\operatorname{erf}(x)}$$

$$1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\,du$$

$$\boxed{\operatorname{erf}(x)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\,du}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\,du=\underbrace{1-\operatorname{erf}(x)}_{\operatorname{erfc}(x)}$$

$$\operatorname{erfc}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\,du$$

نکته:

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{erf}(0)=0 \longrightarrow \operatorname{erfc}(0)=1\\ \operatorname{erf}(\infty)=1 \longrightarrow \operatorname{erfc}(\infty)=0\end{array}}$$

تست:

$$I=\int_0^\infty x^3e^{-x}\,dx$$

1) 2   2) 6 ✓   3) 12   4) 24

$$\Gamma(n)=\int x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

$$\Longrightarrow I=\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3!=6$$

مثال:

$$I=\int_0^\infty x^2 e^{-2x}dx$$

$\frac{1}{12}$ (4 $\quad$ $\frac{1}{8}$ (3 $\quad$ $\frac{1}{4}$ (2 ✓ $\quad$ $\frac{1}{2}$ (1

تغییر متغیر $u=2x$

$2x=u$

$dx=\frac{1}{2}du$

$$I=\int_0^\infty \frac{u^2}{4}e^{-u}\left(\frac{du}{2}\right)=\frac{1}{8}\int_0^\infty u^2e^{-u}du=\frac{\Gamma(3)}{8}$$

$$=\frac{2!}{8}=\frac{1}{4}$$

مثال:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ (4 $\quad$ $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ (3 $\quad$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (2 $\quad$ $\sqrt{\pi}$ (1

$-\ln x=u$

$x=e^{-u}$ $\qquad$ $x=0 \longrightarrow u=\infty$

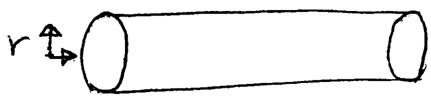
$dx=-e^{-u}du$ $\qquad$ $x=1 \longrightarrow u=0$

$$I=-\int_\infty^0 u^{-1/2}e^{-u}du=\int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}du$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

سیستم های استوانه ای

یک جسم استوانه ای بطول زیاد و شعاع R در دمای اولیه T_0 قرار دارد ناگهان دمای سطح استوانه را به T_1 می رسانیم توزیع دمای ناپایدار را در راستای r بدست آورید.



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(\cancel{r},t=0)=T_0$$

$$T(r=R,t)=T_1$$

$$T(r=R,t)=\text{مشخص} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial T}{\partial r}(r=0,t)=0$$

$$\theta=T-T_1$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\theta(r,t=0)=0$$

$$\theta(r=R,t)=0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r}(r=0,t)=0$$

شرایط مرزی همگن + معادله همگن و در راستای r دارای مقدار مشخص

از Seperation قابل حل است.

$$\theta=F(r)\cdot\tau(t)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot\frac{\partial}{\partial r}(F\cdot\tau)\right]=\frac{F}{\alpha}\tau'$$

$$\frac{\tau}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot F'\right]=\frac{F\tau'}{\alpha}$$

جواب steady در این مسئله صفر است.

$$\frac{1}{Fr}\left[F'+rF''\right]=\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=\begin{cases}k=0\longrightarrow \\ k=+\lambda^2\longrightarrow \text{غ‌ق‌ق} \\ k=-\lambda^2\end{cases}$$

$$k=0\longrightarrow \theta_s=0$$

$$k=-\lambda^2:\qquad \tau(t)=e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{Fr}\left[F'+rF''\right]=-\lambda^2$$

$$\longrightarrow \boxed{r^2F''+rF'+\lambda^2r^2F=0}$$

توجه:

$$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-P^2)\,y=0$$

معادله بسل (معمولی).

* P مرتبه معادله بسل است.

معادله بسل جزء معادلات دیفرانسیل با ضریب متغیر است. روش حل سری توانی است.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$$

$$y''+\frac{1}{x}y'+\underbrace{\left(\lambda^2-\frac{P^2}{x^2}\right)}_{x=0\ \to\ \infty}y=0$$

بنابراین با سری توانی بدست نمی‌آید و باید از بسط فروبنیوس حل شود.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+s}$$

$$Y(X)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{n+S}$$

$$Y'=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+S) X^{n+S-1}$$

$$Y''=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+S)(n+S-1) X^{n+S-2}$$

قرار دادن در معادله :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+S)(n+S-1) X^{n+S}+\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+S) X^{n+S}$$

$$+(\lambda^2 X^2-P^2)\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{n+S}=0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+S)^2 X^{n+S}+\lambda^2\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{\overbrace{n+S+2}^{=m}}-P^2\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{n+S}=0$$

دو جمله اول را بیاوریم ! تا Σ از $n=2$ شروع گردد

$$C_0 S^2 X^S+C_1 (S+1) X^{1+S}+\sum_{n=2}^{\infty} C_n (n+S)^2 X^{n+S}$$

$$n+2=m \qquad \sum_{m=0}^{\infty} C_{m-2} X^{m+S}=\sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} X^{n+S}$$
$$n=m-2$$

$$-P^2 C_0 X^S-P^2 C_1 X^{1+S}-P^2\sum_{n=2}^{\infty} C_n X^{n+S}$$

بنابراین :

$$C_0 S^2 X^S+C_1 (S+1)^2 X^{1+S}+\sum_{n=2}^{\infty} C_n (n+S)^2 X^{n+S}+\lambda^2\sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} X^{n+S}$$

$$-P^2 C_0 X^S-P^2 C_1 X^{1+S}-P^2\sum_{n=2}^{\infty} C_n X^{n+S}=0$$

$$\rightarrow C_0 X^S (S^2-P^2)+C_1 X^{1+S}\left[(S+1)^2-P^2\right]+\sum_{n=2}^{\infty} X^{n+S}\left\{C_n\left[(n+S)^2-P^2\right]+\lambda_n^2 C_{n-2}\right\}$$

باید ضرائب X^S ، X^{1+S} و X^{n+S} باید صفر باشد .

$$s^2 - p^2 = 0 \longrightarrow \boxed{s = + p} \; , \; \boxed{s = -p}$$

$$s = +p \longrightarrow$$

$$c_1 \left[(1+p)^2 - p^2 \right] = 0$$

$$c_1 \left[1 + 2p \right] = 0 \longrightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$1 + 2p \neq 0$$

چون order P مثبت است

$$C_n = \frac{-\lambda_n^2 \, C_{n-2}}{(n+s)^2 - p^2}$$

$$C_3 = \qquad \times C_1 \qquad c_1 = 0 \longrightarrow C_3 = 0$$

$$C_5 = \qquad \times C_3 \qquad C_3 = 0 \longrightarrow C_5 = 0$$

$$\vdots$$

$$C_7 = 0 , \ldots$$

$$\longrightarrow$$

$$C_2 = \qquad \times C_0$$

$$C_4 = \qquad \times C_2 = \qquad C_0$$

$$C_6 = \qquad C_0$$

جواب: $Y = \sum C_n X^{n+p}$

$$= C_0 \left[\sum \ldots \right]$$

~~جواب معادله~~ :

$$\cancel{Y = C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

جواب معادله:

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$\text{if } S=+P \longrightarrow \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+p}}{r!\,\Gamma(p+r+1)}$$

$$S=+p \qquad \boxed{J_p(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+p}}{r!\,\Gamma(p+r+1)}}$$

صحیح P :

$$J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$$

$$Y(x) = C_1 J_p + C_2 J_{-p}$$

بی‌معنی :

← یعنی اینکه یکی از ضرائب را صفر گذاشتیم.

$$Y(x) = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x)$$

صحیح P :

$$J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$$

$$J_{-p} = \pm J_p$$

$$C_1 J_p + C_2 J_{-p}$$

$$C_1 J_p \pm C_2 J_{+p}$$

$$J_p(C_1 \pm C_2) = C J_p$$

← یعنی یک ضریب دارد یعنی بدون اعمال شرط مرزی یک ضریب را هدر داده‌ام.

بنابراین :

غیرصحیح P $\quad y(x) = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 J_{-p}(\lambda x)$

صحیح P $\quad Y(x) = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x)$

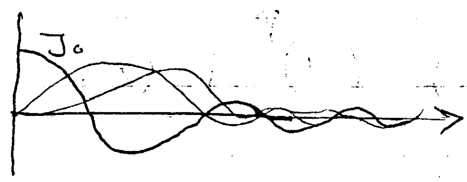
بسل مرتبه p :

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - p^2) y = 0$$

P : صحیح $\quad C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x)$

غیرصحیح $\quad C_1 J_p(\lambda x) + C_2 J_{-p}(\lambda x)$

1)



$$J_0(0) = 1$$

$$J_p(0) = 0 \quad P \neq 0$$

2) $\dfrac{d}{dx}\left[x^p J_p(x)\right] = + x^p J_{p-1}(x)$

3) $\dfrac{d}{dx}\left[x^{-p} J_p(x)\right] = - x^{-p} J_{p+1}(x)$

4) $P = 0 \longrightarrow \quad J_0'(x) = - J_1(x)$

$$J_0'(x) = J_{-1}(x) = (-1)^1 \cdot J_1 = -J_1(x)$$

5) $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$

صحیح

6) $\mathcal{L}\, J_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$

7) $\mathcal{L}\, J_1(x) = -\mathcal{L}\, J_0'(x) = -\left[\dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}} - 1\right]$

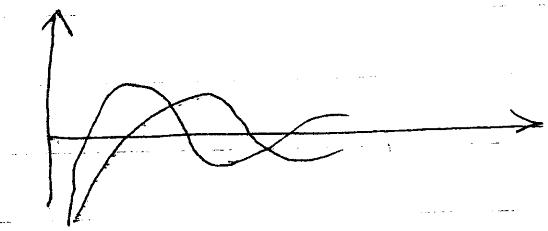
$$= 1 - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{\sqrt{1+s^2} - s}{\sqrt{1+s^2}}$$

تابع بسل نوع دوم :

$$Y_p(X) = \frac{(\cos P\pi) J_p(X) - J_{-p}(X)}{\sin P\pi}$$

1) $Y_{-p}(X) = (-1)^P Y_p(X)$

دوم 2)



تمام توابع بسل نوع دوم. $Y_p(0) = -\infty$

3) $\frac{d}{dx}\left[X^P Y_p(X)\right] = +X^P Y_{p-1}(X)$

4) $\frac{d}{dx}\left[X^{-P} Y_p(X)\right] = -X^{-P} Y_{p+1}(X)$

$\Longrightarrow \quad Y_0'(X) = Y_{-1}(X) = -Y_1(X)$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(r, t=0)=T_0$$
$$T(r=R, t)=T_1$$
$$\frac{\partial T}{\partial r}(r=0, t)=0$$

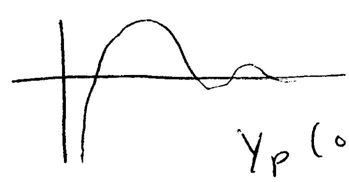
$$\theta=T-T_1$$

$$\rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$
$$\theta(r, t=0)=\theta_0$$
$$\theta(r=R, t)=0$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial r}(r=0, t)=0$$

$$\theta=T-T_1$$
$$\theta=R(r).\tau(t) \longrightarrow (\lambda^2 r^2-0)R=0 \qquad P=0 \text{ یعنی}$$
$$k=-\lambda^2 \longrightarrow r^2R''+rR'+\lambda^2r^2R=0 \xrightarrow[P=0]{} \boxed{R(r)=C_1J_0(\lambda r)+C_2Y_0(\lambda r)}$$
$$\tau(t)=e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$R(r=R)=0$$
$$\frac{\partial R}{\partial r}(r=0)=0 \text{ یا } R(r=0)=\text{مشخص}$$

یادآوری :



$$Y_p(0)=-\infty$$

$$R(r)=C_1J_0(\lambda r) \longleftarrow C_2=0$$

اگر مسئله استوانه توپر باشد همواره می‌توان این شرط را نوشت :

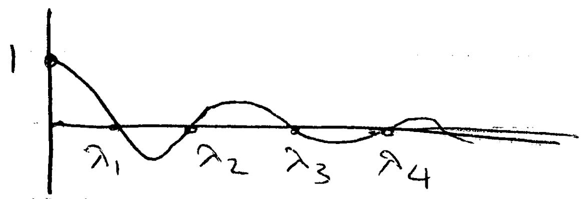
$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial r}(r=0)=0 \text{ یا } R(r=0)=\text{معین}}$$

یعنی در استوانه توپر نباید Y باشد .
جزء جواب

از اعمال شرط دوم : $R(r=R)=0$

$$\to C_1 J_0(\lambda R)=0 \to \boxed{J_0(\lambda R)=0}$$

با حل این معادله λ بدست می آید .



$$\Theta=\sum A_n \cdot J_0(\lambda_n r)e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

بسط توابع بر اساس توابع بسل :

$$F(r)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n J_n(r)$$

$$F(r)=C_0 J_0(r)+C_1 J_1(r)+\cdots+C_i J_i(r)+\cdots+C_n J_n(r)$$

تابع وزن

$$r F(r)\cdot J_p(r)=rC_0 J_0(r)J_p(r)+\cdots+rC_p J_p^2(r)+\cdots+rC_n J_n(r)J_p(r)$$

$$\int_0^R r F(r)\cdot J_p(r)=\int_0^R rC_0 J_0(r)J_p(r)dr+\cdots+\int_0^R rC_p J_p^2(r)dr+\cdots+\int_0^R rC_n J_n(r)J_p(r)dr$$

$$\boxed{C_p=\frac{\int_0^R r\cdot F(r)J_p(r)dr}{\int_0^R r\cdot J_p^2(r)dr}}$$

برای محاسبه انتگرال ~~مجذور~~ صورت :

$$\boxed{\int_0^R r^{n+1} J_n(\lambda r)\,dr = \frac{R^{n+1}}{\lambda} J_{n+1}(\lambda_n R)}$$ فقط

انتگرال ~~صورت~~ مخرج :

$$F(r)\int_0^R r \cdot J_n^2(\lambda r)\,dr \leftarrow$$ (با فرض اینکه $F(r)$ عددی ثابت باشد)

$$\int_0^R r \cdot J_n^2(\lambda r)\,dr =$$

بستگی به نوع شرط مرزی در $r=R$ دارد :

- شرط مرزی نوع اول باشد : $\boxed{J_n(\lambda r)=0}$ (λ از این معادله بدست می آید). فقط

$$\int_0^R r \cdot J_n^2(\lambda r)\,dr = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_n R)$$

- شرط مرزی نوع دوم : $J_n'(\lambda R)=0$
- « « نوع سوم : $J_n'(\lambda R) + B J_n(\lambda R) = 0$

$$J_n'(\lambda R) = 0 \longrightarrow \frac{\lambda_n^2 R^2 - n^2}{2\lambda_n^2} J_n^2(\lambda R)$$

به وسیله ... شماره ...

$$J_n(\lambda R) + B J_n'(\lambda R) = 0 \longrightarrow \frac{(\lambda_n^2 + B^2)R^2 - n^2}{2\lambda_n^2} J_n^2(\quad)$$

$$A_n = \frac{\theta_0 \int_0^R r J_0(\lambda_n r)\,dr}{\int_0^R r J_0^2(\lambda_n r)\,dr} = \frac{\theta_0 \cdot \frac{R}{\lambda_n} J_1(\lambda_n R)}{\frac{R^2}{2} J_1^2(\lambda_n R)} = \frac{2\theta_0}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n}$$

$$A_n = \frac{2\theta_0}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)}$$

$$\int_0^1 r^2 J_1(r)\,dr = ?$$

$$= \frac{r^2}{1} J_2(r) \Big|_{r=0}^{r=1} = 1\times J_2(1) - 0$$

$J_2(1)$ جواب

بسل اصلاح شده :

$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - p^2) y = 0$ معمولی

$x^2 y'' + x y' - (\lambda^2 x^2 + p^2) y = 0$ اصلاح شده

$\longrightarrow$ $I_p =$ بسل نوع اول اصلاح شده , $k_p =$ بسل نوع دوم اصلاح شده .

$p =$ صحیح $\quad I_{-p}(x) = I_p(x) \longrightarrow y = C_1 I_p(\lambda x) + C_2 k_p(\lambda x)$

$p =$ غیرصحیح $\quad y = C_1 I_p(\lambda x) + C_2 I_{-p}(\lambda x)$

خواص تابع I :

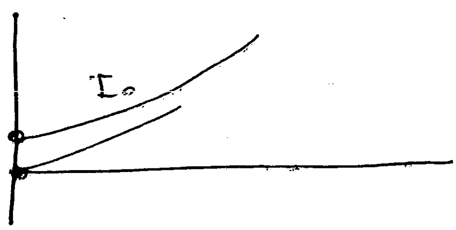
$$I_p(x) = i^{p} J_p(x)$$

$$J_p(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+p}}{r!\,\Gamma(r+p+1)}$$

P صحیح $\boxed{I_{-p}(x) = I_p(x)}$ فقط نوشتن.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{p} I_p(x)\right) = + x^{p} I_{p-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-p} I_p(x)\right) = + x^{-p} I_{p+1}(x)$$



$$I_0(0) = 1$$

$$I_p(0) = 0 \qquad P \neq 0$$

$$P = 0 \longrightarrow \boxed{I_0'(x) = I_1(x)}$$

خواص K

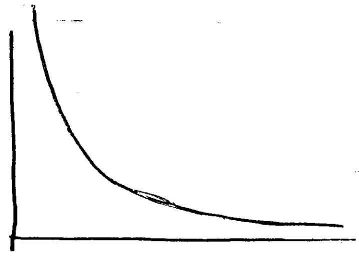
$$K_p(x) = \frac{\pi}{2}\left[\frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin p\pi}\right]$$

$$K_{-p}(x) = K_p(x) \qquad \text{P صحیح}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{p} K_p(x)\right) = -x^{p} K_{p-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-p} K_p(x)\right) = -x^{p} K_{p+1}(x)$$

$$\boxed{K_0'(x) = -K_1(x)}$$



$K_p(0) = +\infty$

تمام توابع K در صفر به سمت $+\infty$ میل می‌کنند.

مثال: $x^2 y'' + x y' - \lambda^2 x^2 y = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(0)}{\partial x} = 0 \rightsquigarrow y(0) = C_1 K_0(0) + C_2 I_0(0) \\ y(x = l) = y_0 \end{cases}$$

$$y = C_1 K_0(\lambda x) + C_2 I_0(\lambda x)$$

$K_0(0) = +\infty \longrightarrow C_1$ باید صفر باشد.

* اگر ادبیک بتوانه تو یه یک معادله بسل اصلاح شده برسیم جواب فقط براساس I خواهد بود.

شرط مرزی دوم:

$$\boxed{C_2 = \frac{y_0}{I_0(\lambda L)}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{y}{y_0} = \frac{I_0(\lambda x)}{I_0(\lambda l)}}$$

مثال: $x^2y''-xy'+\lambda^2x^2y=0$

بسل معمولی. $x^2y''+xy'+\lambda^2x^2y=0$

فرم کلی معادله بسل:

$$x^2y''+x(a+2bx^r)y'+[c+dx^{2s}-b(1-a-r)x^r+b^2x^{2r}]y=0$$

$$y(x)=x^{(\frac{1-a}{2})}e^{-\frac{bx^r}{r}}\left[C_1Z_p\left(\frac{\sqrt{|d|}}{s}x^s\right)+C_2Z_{-p}\left(\frac{\sqrt{|d|}}{s}x^s\right)\right]$$

$$p=\frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2-c}$$

		Z_p	Z_{-p}
$\sqrt{d}$ = حقیقی	p صحیح	Y_p	J_p
	p غیرصحیح	J_p	J_{-p}
$\sqrt{d}$ = موهومی	p صحیح	I_p	k_p
	p غیرصحیح	I_p	I_{-p}

معادلاتی که ما سروکار داریم: $x^2y''+xy'\pm(\lambda^2x^2\mp p^2)y=0$

پس $c=\pm p^2$ ، $d=\pm\lambda^2$ و $s=1$ ، $a=1$ ، $b=0$

$$x^2y''+x(a)y'+[c+dx^{2s}]y=0$$

در امتحان فقط s را تغییر می‌دهند و یا a را تغییر می‌دهند:

جواب $y(x)=x^{(\frac{1-a}{2})}\left[C_1Z_p\left(\frac{\sqrt{|d|}}{s}x^s\right)+C_2Z_{-p}\left(\frac{\sqrt{|d|}}{s}x^s\right)\right]$

در شکل جواب باید اضافه شود.

* a یعنی ضریب xy' و بخاطر ترم $x^{(\frac{1-a}{2})}$ را اضافه می‌کنیم

$$x^2 y'' - x y' + \lambda^2 x^2 y = 0$$

که تاثیری در J و Y ندارد.

جواب معادله :

1) $x^1 \left[C_1 J_0 (\lambda x) + C_2 Y_0 (\lambda x) \right]$

2) $x \left[C_1 J_1 (\lambda x) + C_2 J_{-1} (\lambda x) \right]$

3) $x \left[C_1 J_1 (\lambda x) + C_2 Y_1 (\lambda x) \right]$ ✓

4) $\left[C_1 J_1 (\lambda x) + C_2 Y_1 (\lambda x) \right]$

$$\boxed{P = \frac{1}{S} \sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - c}}$$

$$P = \frac{1}{1} \sqrt{\left(\frac{1+1}{2}\right)^2 - 0} \qquad P = 1$$

$\sqrt{d}$ حقیقی $\longrightarrow$ J و Y

$$x^2 y'' + x y' + \lambda^2 x^{1} y = 0 \longrightarrow 2S \Rightarrow S = \tfrac{1}{2}$$

$y(x=0) =$ مشخص

$y(l) = y_0$

$$\sqrt{d} = \sqrt{+\lambda^2} = \text{حقیقی}$$

$$P = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\left(\frac{1-1}{2}\right) - 0} = 0$$

$$y = C_1 J_0 \left(\frac{\lambda \cdot x^{1/2}}{1/2} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{\lambda x^{1/2}}{1/2} \right)$$

$$\boxed{y = C_1 J_0 (2\lambda\sqrt{x}) + C_2 Y_0 (2\lambda\sqrt{x})}$$

این مثال
صفحا تور.

اعمال شرایط :
$$Y = C_1 J_0(2\lambda\sqrt{x}) + C_2 \cancel{Y_0(2\lambda\sqrt{x})}$$

$$Y(\ell) = Y_0 = C_1 J_0(2\lambda\sqrt{\ell}) \longrightarrow C_1 = \frac{Y_0}{J(2\lambda\sqrt{L})}$$

$$\frac{y}{y_0} = \frac{J_0(2\lambda\sqrt{x})}{J_0(2\lambda\sqrt{L})}$$

$$4x^2y'' + 4xy' + (8x^2 - 1)y = 0$$

اگر بدانیم
$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\cos x \quad \text{و} \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\sin x$$

با شد جواب معادله بسل به کدامیک از اشکال زیر است.

1) $\frac{A\sin\sqrt{2}x}{x} + \frac{B\cos\sqrt{2}x}{x}$

2) $\frac{A\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{x}} + \frac{B\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}$

3) $\frac{A\sin\sqrt{2x}}{x} + \frac{B\cos\sqrt{2x}}{x}$

4) $\frac{A\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} + \frac{B\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$

$$x^2y'' + xy' + (2x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0$$

$$C_1 J_{1/2}(\sqrt{2}x) + C_2 J_{-1/2}(\sqrt{2}x)$$

$$C_1\left[\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}x}}\sin\sqrt{2}x\right] + C_2\left[\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}x}}\cos\sqrt{2}x\right]$$

$$A\frac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{x}} + B\frac{\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}$$

اگر بدانیم $\frac{d}{dx}\left[x^{-k}J_k(x)\right] = -x^{-k}J_{k+1}(x)$

در این صورت $= J'_k(x)$

1) $\frac{k}{x}J_k(x)+J_{k+1}(x)$ 2) $J_{k+1}(x)-\frac{k}{x}J_k(x)$

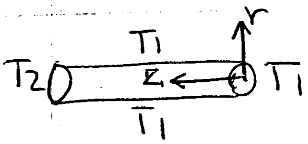
3) $\frac{k}{x}J_k(x)-J_{k+1}(x)$ 4) $\frac{J_{k+1}(x)-J_k(x)}{2}$

$$-k\,x^{-k-1}J_k(x)+J'_k(x)\,(x^{-k}) = -x^{-k}J_{k+1}(x)$$

$$J'_k(x) = \frac{k\,x^{-k-1}J_k(x)-x^{-k}J_{k+1}(x)}{x^{-k}}$$

$$\boxed{J'_k(x) = \frac{k}{x}J_k(x)-J_{k+1}(x)}$$

$$T = T_1 + \sum A_n J_0(\lambda_n r) . \sinh(\lambda_n Z) \quad (1 \checkmark$$



$$\cancel{T = T_1 + \sum A_n J_0(\lambda Z) \sinh(\lambda r)} \quad (2$$

$$\cancel{T = T_1 + \sum A_n J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_n Z)} \quad (3$$

$$T = T_1 + \sum A_n \sin(\lambda_n r) . \sinh(\lambda_n Z) \quad (4$$

در سیستم کارتزین ← 4

شرط غیرهمگن ← $T(r, Z = L) = T_2$

شرط مرزی در جهت r غیرهمگن است و در راستای r باید اورتوگونال باشد.

(قابل تبدیل) و در راستای Z غیراورتوگونال

(J_0 قابل تبدیل به اورتوگونال است).

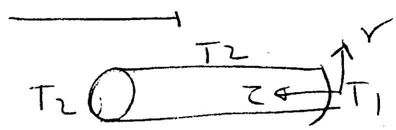
I و J ←

* در راستای r غیرهمگن ، r از نوع J_0 . (فقط تابع نوع اول تابع بسل قابل تبدیل به اورتوگونال است).

* فقط یک حالت استثناء توزیع دما در راستای r و θ بخواهند در راستای r به بسل نمی‌رسیم بلکه به معادله اویلر می‌رسیم :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{در راستای } r \rightarrow \text{ به اویلر می‌رسد}$$



$T(r = R, Z) = T_2$ — نوع اول

در راستای Z ← L ← sin یا cos

اورتوگونال

$T = F_1 Z_1$

$$\frac{Z}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF') + FZ'' = 0$$

$$\frac{1}{rF}(rF'' + F') + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\frac{1}{rF}\left(rF''+F'\right) = -\frac{Z''}{Z} = +\lambda^2$$

$$Z''+\lambda^2 Z = 0$$

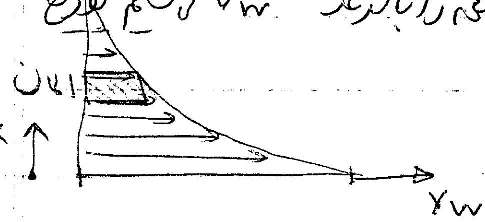
$$\frac{1}{rF}\left(rF''+F'\right) = +\lambda^2 rF$$

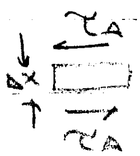
$$r^2F''+rF'-\lambda^2 r^2F = 0$$

بسل از نوع I و ~~K~~

پس در راستای Z غیرهمگن ← r از نوع I

یک صفحه‌ای داریم و سیال ساکن روی صفحه، در یک لحظه صفحه را با سرعت V_w می‌کشیم توزیع سرعت ناپایدار را برای سیال روی صفحه بدست آورید.





نیروی برشی در بالا مخالف جهت حرکت.

$$\Sigma F = ma$$

$$\tau A\big|_x - \tau A\big|_{x+\Delta x} = \rho A \Delta x \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\tau A\big|_x - \tau A\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \rho A \cancel{\Delta x} \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \rho \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial V}{\partial T}$$

$$V(x, t=0) = 0$$
$$V(x=0, t) = V_w$$
$$V(x \to \infty, t) = 0$$

اگر شرایط مرزی ، شرط مرزی ∞ نباشد برای حل مسئله فقط دو راه وجود دارد یکی استفاده از روش لاپلاس ، روش تش به (ترکیب متغیرها)

ترکیب متغیرها : Combination :

تغییر متغیر $\frac{V}{V_w} = u$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\begin{cases} u(x, t=0) = 0 \\ u(x=0, t) = 1 \\ u(\infty, t) = 0 \end{cases}$$

$$\eta = a x^m t^n$$

در روش Combination به دنبال پارامتر کلی η هستیم که وقتی η را در معادله PDE قرار دهیم آنرا تبدیل به ODE فقط برحسب η تبدیل کند.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial t} = n a x^m t^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = m a x^{m-1} \cdot t^n \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(m a x^{m-1} t^n \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m(m-1) a x^{m-2} t^n \frac{\partial u}{\partial \eta} + m a x^{m-1} t^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$? \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial x}$$ می‌توان نوشت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m(m-1) a x^{m-2} t^n \frac{\partial u}{\partial \eta} + m^2 a^2 x^{2m-2} t^{2n} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

با جایگذاری در معادله :

$$m(m-1) a x^{m-2} t^n \frac{\partial u}{\partial \eta} + m^2 a^2 x^{2m-2} t^{2n} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{n a x^m t^{n-1}}{\nu} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\longrightarrow m^2 a^2 x^{2m-2} t^{2n} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \left[\frac{n a x^m t^{n-1}}{\nu} - m(m-1) a x^{m-2} t^n\right] \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \left[\frac{n a x^m t^{n-1}}{\nu m^2 a^2 x^{2m-2} t^{2n}} - \frac{m(m-1) a x^{m-2} t^n}{m^2 a^2 x^{2m-2} t^{2n}}\right] \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

باید متغیرها را از بین برد تا فقط η باقی بماند.

$m=1$ سه جمله هم برابر صفر می‌گردد.

جمله اول :

$$\cancel{a x t^{n-1}}$$

$$\frac{n x}{\nu a t^{n+1}}$$

$$\eta = a x^m t^n \longrightarrow x = \frac{\eta}{a t^n}$$

با جایگذاری:

جمله اول:

$$\frac{n}{\nu} \quad \frac{\eta}{a^2 + 2n+}$$

$$\rightsquigarrow 2n+1=0 \longrightarrow \boxed{n=-1/2}$$

$$\eta = a x^m t^n \longrightarrow \eta = \frac{ax}{\sqrt{t}}$$

$$\Longrightarrow u'' = \left[\frac{-\eta}{2\nu a^2}\right] u'$$

شرایط مرزی:؟

$$\begin{cases} u(\eta \to \infty) = 0 \\ u(\eta = 0) = 1 \\ \cancel{u(\quad)} = \\ u(\eta \to \infty) = 0 \end{cases}$$

یعنی سه شرط تبدیل به دو شرط شد. اگر این حالت اتفاق نمی افتاد

نمی توانیم دو تا ثابت را بدست آوریم (چون فقط دو تا ضریب داریم).

$$\frac{u''}{u'} = \frac{-\eta}{2\nu a^2}$$

انتگرال گیری $\longrightarrow$

$$\ln u' = \frac{-\eta^2}{4\nu a^2} + \ln c_1$$

$$u' = c_1 e^{-\eta^2/4\nu a^2}$$

$$\int u' d\eta = \int_0^\eta c_1 e^{-\eta^2/4\nu a^2} d\eta$$

$$u = 1 + c_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2/4\nu a^2} d\eta$$

با اعمال $u(\eta \to \infty) = 0$ ، C_1 بدست می‌آید .

$$0 = 1 + C_1 \int_0^\infty e^{-\eta^2/4\nu a^2}\, d\eta$$

$$C_1 = \frac{-1}{\int_0^\infty e^{-\eta^2/4\nu a^2}\, d\eta}$$

$$u = 1 - \frac{\int_0^\eta e^{-\eta^2/4\nu a^2}\, d\eta}{\int_0^\infty e^{-\frac{\eta^2}{4\nu a^2}}\, d\eta}$$

یادآوری :

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-u^2}\, du$$

قرار می‌دهیم : $\frac{1}{4\nu a^2} = 1$ (توجه : a اختیاری است آن را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که به $\mathrm{erf}(x)$ برسیم) . $\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{4\nu}}$

~~erf~~(

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta^2}\, d\eta = \mathrm{erf}(\infty) = 1$$

انتگرال معروف :

$$\rightarrow \int_0^\infty e^{-\eta^2}\, d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow u = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2}\, d\eta$$

$$\boxed{u = 1 - \mathrm{erf}(\eta)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$V(x, t=0) = 0$$
$$V(x=0, t) = V_w$$
$$V(x\to\infty, t) = 0$$

$$\boxed{\frac{u''}{u'} = \frac{-\eta}{2\nu a^2}}$$

$$\eta = a x^m t^n$$

$$m=1 \qquad n = -\tfrac{1}{2} \qquad a = \frac{1}{\sqrt{4\nu}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = \frac{x}{\sqrt{4\nu t}}}$$

$$\frac{1}{4\nu a^2} = 1 \rightarrow \frac{1}{2\nu a^2} = 2$$

$$\frac{u''}{u'} = -2\eta$$

$$\boxed{u'' + 2\eta u' = 0}$$

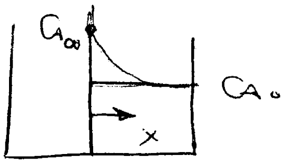
$$u = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$$
$$u = \operatorname{erfc}(\eta)$$

$$\boxed{\frac{V}{V_w} = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta)}$$

مقدار v را در فاصله 10cm پس از 5s پیدا کنید.

* η بی‌بعد است. جمله‌ها باید بی‌بعد باشند.

در داخل یک مخزن محلول از یک ماده با غلظت C_{A0} موجود است این مخزن توسط غشایی به دو قسمت مساوی تقسیم شده است غلظت این ماده را در سمت چپ غشا ناگهان به $C_{A\infty}$ می رسانیم توزیع غلظت را در سمت راست غشا در راستای x بدست آورید.



$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t}$$

$$C(x, t=0) = C_{A0}$$
$$C(x=0, t) = C_{A\infty}$$
$$C(x\to\infty, t) = C_{A0}$$

$\cancel{\theta = C_A - C_{A0}}$ $\quad \theta = \dfrac{C_A - C_{A0}}{C_{A\infty} - C_{A0}}$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\theta(x, t=0) = 0$$
$$\theta(x=0, t) = 1$$
$$\theta(x\to\infty, t) = 0$$

دقیقاً مثل معادله قبلی $\longrightarrow$

$$\theta = 1 - \mathrm{erf}(\eta)$$

$$\boxed{\frac{C_A - C_{A0}}{C_{A\infty} - C_{A0}} = 1 - \mathrm{erf}(\eta)}$$

زمانی که شرط مرزی ... می‌باشد:

جواب:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} \longrightarrow \eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \quad \text{و} \quad u'' + 2\eta u' = 0 \quad , \quad 1-\text{erf}(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} \longrightarrow \eta = \frac{x}{\sqrt[3]{9\alpha t}} \quad \text{و} \quad u'' + 3\eta^2 u' = 0 \quad , \quad \frac{\int e^{-\eta^3} d\eta}{\Gamma(4/3)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} \longrightarrow \quad '' \quad , \quad \eta u'' + (3\eta^2 - 1) u' = 0$$

*) اگر غیر همگن باشد (خود معادله) از Combination نمی‌توان استفاده کرد.

1(۱۵۶

۴(۱۵۷

۴(۱۶۱ اگر گزینه ۳ (ثابت) تابع فقط یک است باز هم درست بود.

(۱۶۲

$$T(r=R, \theta) = f(\theta)$$

در راستای θ غیرهمگن است در راستای θ باید اورتوگونال.

~~گزینه ۱~~ چون r^{-n} در $r=0$ تعریف نشده است.

$$\frac{\partial^2 (R\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(R.\theta) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(R.\theta)\right)$$

$$T = R.\theta$$

$$\theta R'' + \frac{\theta}{r}R' + \frac{R}{r^2}\theta'' = 0$$

$$\xrightarrow{\times r^2} r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\theta''}{\theta} = 0$$

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\theta''}{\theta} \quad \Big| \begin{array}{l} \lambda^2 \\ -\lambda^2 \end{array}$$

$$T(r=R, \theta) = f(\theta)$$

$$-\frac{\theta''}{\theta} = \lambda^2 \rightarrow \theta'' + \lambda^2\theta = 0 \rightarrow \theta = a\sin\lambda\theta + B\cos\lambda\theta$$

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{rR'}{R} = \lambda^2$$

$$r^2R'' + rR' - \lambda^2 R = 0 \qquad : \text{معادله اویلر}$$

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x)$$

$$x = e^z$$

$$z'' + (b-1)z' + cz = 0 \Rightarrow C_1e^{zD_1} + C_2e^{zD_2}$$

$$C_1e^{\ln x D_1} + C_2e^{\ln x D_2}$$

$$= C_1x^{D_1} + C_2x^{D_2}$$

۳(۱۴۳

۱(۱۴۴

(۱۴۵ یخ طوسق از نوع I و K.

$$x^2y'' + xy' - \lambda^2 x^2 y = 0$$

۱(۱۴۶

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$q = x t^n$$

$$2\alpha \frac{d^2 f}{d q^2} + q \frac{d f}{d q} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial q} \times \frac{\partial q}{\partial t} = n x t^{n-1} \frac{\partial T}{\partial q}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = t^n \frac{\partial T}{\partial q}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x}\left[t^n \frac{\partial T}{\partial q}\right]$$

$$= t^{2n} \frac{\partial^2 T}{\partial q^2}$$

$$\alpha t^{2n} \frac{\partial^2 T}{\partial q^2} = n x t^{n-1} \frac{\partial T}{\partial q}$$

$$q = x t^n \qquad x = \frac{q}{t^n}$$

$$\alpha t^{2n} \frac{\partial^2 T}{\partial q^2} = n x t^{n-1} \frac{\partial T}{\partial q}$$

$$\alpha t^{2n+1} \frac{\partial^2 T}{\partial q^2} = n q \frac{\partial T}{\partial q}$$