جزوه ریاضیات
کنکور کارشناسی ارشد

استاد:دکترطاهری

(قسمت دوم)

خانه مهندسی شیمی ایران
WWW.ICHEH.COM
info@icheh.com
ICHEH

$2n+1=0$

$n=-\frac{1}{2}$

$$\boxed{2\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial q^2} + q \frac{\partial T}{\partial q} = 0}$$

(۱۴۷

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0$$

$$r\frac{\partial T}{\partial r}=C_1$$

$$dT = C_1 \frac{dr}{r}$$

$$T = C_1 \ln r + C_2$$ جواب باید ln باشد

$r=a \quad T=T_0$

$r=b \quad T=T_1$

۲ (۱۵۴ ص

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g$$

$b^2-4ac<0$ بیضوی

$b^2-4ac=0$ سهموی

$b^2-4ac>0$ هذلولی

مثال:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad a=1 \quad c=1$$

$b^2-4ac<0$

مثال:

$a=1 \quad b=0 \quad c=0 \quad d=0 \quad e=-1$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$ سهموی.

Combination.

$$b^2-4ae=0$$

۱ (۱۵۹

۲ (۱۶۰

۳ (۱۶۱ حساً از روی بی‌بعد بودن تشخیص میدهیم.

k ثابت سرعت واکنش درجه اول.

چون گفته KC_A

۱ (۱۶۲

۴ (۱۶۳

$$A+\frac{B-A}{L}x$$

$$u(0,t)=A$$

$$u(L,t)=B$$

۳ (۷۷

۳ (۷۸

۲ (۷۹

۱ (۸۰

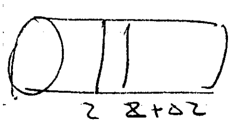
۴ (۸۱

۲ (۸۲

۱ (۸۵

۴ (۱۷۳

۳ (۱۷۴



(۱۷۵

$$\dot m C_p T\Big|_z - \dot m C_p T\Big|_{z+\Delta z} - h(2\pi R\Delta z)(T-T_w) = 0$$

چون steady تجمع نداریم.

$$\rho V_0 \pi R^2 C_p \left[T|_z - T|_{z+\Delta z}\right] - 2\pi R h (T-T_w)\Delta z = 0$$

$$\frac{\rho V_0 \pi R^2 C_p \left[T|_z - T|_{z+\Delta z} \right]}{\Delta z} - 2\pi R h (T - T_w) = 0$$

$$-\frac{dT}{dz} - \frac{2h}{\rho V_0 R C_p}(T - T_w) = 0$$

$$+\frac{dT}{dz} + \frac{2h}{\rho V_0 R C_p}(T - T_w) = 0$$

روش های عددی :

حل معادله : ① روش تکرار ② نصف کردن $F(X)=0$

③ نیوتن رافسون ④ روش میان یابی (نابجایی) ⑤ روش تقاطع یا وتری .

روش تکرار :

$F(X)=0 \quad [a,b]$

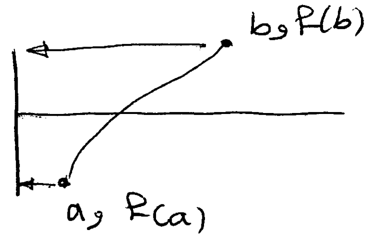
شرایط : (اگر برقرار باشند معادله در بازه $[a,b]$ فقط دارای ریشه است.)

① $F(X)$ تابع پیوسته و مشتق پذیر باشد .

② $F(a)F(b)<0$

③ $F'(X)\neq 0$

برای min, max .



مثال : $F(x)=(x-2)^2$

$F(1)=1 \quad F(3)=1 \qquad F(1)F(3)>0$

$F'(x)=2(x-2)$

$F'(x)=0 \qquad X=2$

روش تکرار :

$F(X)=0$

$x_{n+1}=g(x_n)$

$x=x_0$ حدس اولیه $\longrightarrow x_1$

$x=x_1\longrightarrow x_2$

$x=x_2\longrightarrow x_3$

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$

زمانی به جواب می رسیم که اختلاف اعداد متوالی با افزایش n کاهش پیدا کند . (سری حاصل همگرا باشد) . روش را ادامه می دهیم :

$\boxed{|x_n-x_{n-1}|<\underbrace{\varepsilon}_{\text{خطا}}}$

$$x^2-3x+1=0$$

$$x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\underline{x_1=0.382}, \quad \underline{\underline{x_2=2.618}}$$

حل به روش تکرار:

$$3x=x^2+1 \Rightarrow$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n^2+1)$$

حدس اولیه $\quad x_0=1 \longrightarrow x_1=\frac{2}{3}=0.666$

$$x_2=0.666 \longrightarrow x_2=0.481$$

$$x_2=0.481 \longrightarrow x_3=0.411$$

$$x_3=0.411 \longrightarrow x_4=0.39$$

اگر حدس اولیه $x_0=2$ بود: $\quad x_0=2 \longrightarrow x_1=\frac{5}{3}=1.666$

$$x_1=1.666 \longrightarrow x_2=1.26$$

$$x_2=1.26 \longrightarrow x_3=0.863$$

$$x_3=0.863 \longrightarrow x_4=0.572$$

اگر حدس اولیه $x_0=3$ بود: $\quad x_0=3 \longrightarrow x_1=3.33$

$$x_1=3.33 \longrightarrow x_2=4.03$$

$3, 3.33, 4.03, \ldots \longrightarrow$ اختلاف افزایش پیدا می‌کند و واگرا است.

یعنی رابطه بازگشتی انتخاب شده ما را به ریشه کوچک‌تر می‌رساند.

* هر رابطه بازگشتی ما را فقط به یک ریشه می‌رساند یعنی برای هر ریشه فقط یک رابطه بازگشتی داریم.
* اگر حدس نادرستی بزنیم سری واگرا می‌شود.
* با رسم رابطه بازگشتی می‌توان محدوده جواب را بدست آورد و حدس اولیه درستی زد.
* ممکن است رابطه بازگشتی پیدا کنیم که به هیچ جوابی نرسیم.

مثال :

$$x^2 = 3x - 1$$

$$x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$$

$$x_0 = 2 \longrightarrow x_1 = 2.5$$

$$x_1 = 2.5 \longrightarrow x_2 = 2.615$$

پس این رابطه بازگشتی ما را به ریشه بالاتر می رساند .

$$f(x) = 0 \qquad [a, b]$$

$$x = g(x)$$

اگر این دو شرط صدق کند رابطه بازگشتی حتماً ما را به جواب می رساند :

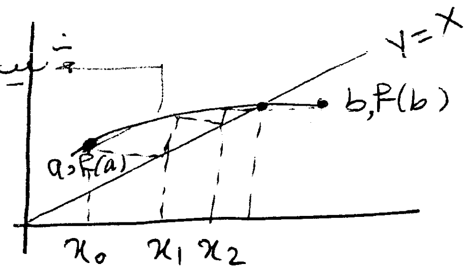
آزمون همگرایی : ① $\forall x \in [a, b] \longrightarrow g(x) \in [a, b]$

② $|g'(x)| < 1$

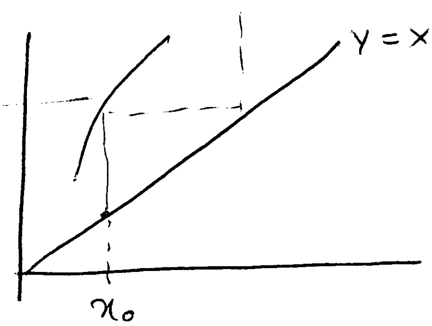
مثال : $y_1 = x$

$y_2 = g(x)$

شیب $g(x)$ کمتر از یک است .



شیب $g(x)$ بیشتر از یک است .



مثال :

$$x^3 + x - 1 = 0 \qquad [0, 1]$$

$$x = 1 - x^3$$

شرط اول $\begin{cases} f(0) = \pm 1 \\ f(1) = +1 \end{cases}$ شرط مهم $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

پیوستگی ✓ شرط دوم

پس یک ریشه هست .

$g(x)=1-x^3$

$x_{n+1}=1-x_n^3$

$g(x)=1-x^3$ در شرط اول همگرایی صدق می‌کند

$g'(x)=-3x^2$ در شرط دوم در صدق نمی‌کند

$x_0=0$

$x_1=1\ ,\ x_2=0\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=0\ , \dots$

$x(1+x^2)=1$

$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n^2}$

$g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

شرط اول همگرایی صدق می‌کند.

$g'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$g''(x)=\dfrac{-2(1+x^2)^2 - \dots}{\dots} < 0$ اکیداً نزولی. یعنی max و min در انتهای بازه است.

$g''(x)=6x^2-$

مثال: ریشه معادله $x^3+x^2-1=0$ $\varepsilon=10^{-4}$ $[0,1]$ با تقریب 10^{-4} محاسبه کنید.

① $f(x)=x^3+x^2-1$

② $f(0)=-1$ $\quad f(0)f(1)<0$

$f(1)=+1$

③ $f'(x)=3x^2+2x>0$

توجه: در ابتدا و انتهای بازه هم نباید مشتق برابر صفر گردد.

$$x^2(1+x)=1$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}=(1+x)^{-1/2}$$

$$\forall x\in[0,1]\longrightarrow g(x)\in[0,1] \quad \checkmark$$

$$g'(x)=-\tfrac{1}{2}(1+x)^{-3/2}$$

$$g'(x)=\frac{-1}{2\sqrt[2]{(1+x)^3}}$$

$$|g'(x)|<1 \quad \checkmark$$

$$x_0=0.75$$
$$x_1=0.75593$$
$$x_2=0.75465$$
$$x_3=0.75493$$
$$x_4=0.75487$$
$$x_5=0.75488$$

$$\left.\begin{matrix} x_4=0.75487 \\ x_5=0.75488 \end{matrix}\right\} \longrightarrow |x_5-x_4|=10^{-5}$$

*فاصله ها کاهش یافته بطور نزولی.

روش نصف کردن:

$$f(x)=0 \qquad [a,b]$$

$$c=\frac{a+b}{2}\longrightarrow \begin{cases} f(a) \\ f(b) \\ f(c) \end{cases}$$

$f(a)$ را با $f(c)$ مقایسه می‌کنیم اگر هم‌علامت بودند در فاصله a تا c ریشه نخواهد بود بنابراین در محاسبات خود a را با c جایگزین می‌کنیم ولی اگر a تا c مختلف العلامه بودند در این بازه

[a و c] دارای ریشه است و b را با c جایگزین می‌کنیم.

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\cos x \quad [0 , 1]$$

شرط ① $f(0) = -0.5$

$f(1) = 0.7298$

$f(0)\,f(1) < 0$

* در محاسبات عددی مطمئن باشید که Mode ماشین حساب Rad است.

شرط ② $x - \frac{1}{2}\cos x$ پیوسته

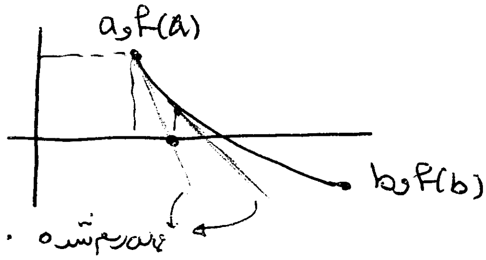
شرط ③ $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x > 0$

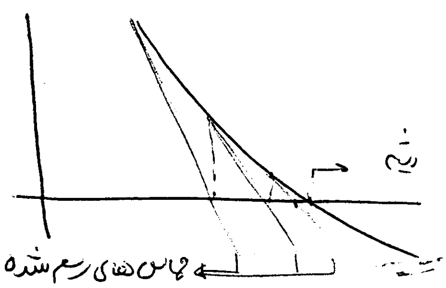
a	b	c	f(c)
0	1	0.5	0.0612
0	0.5	0.25	-0.2345
0.25	0.5	0.375	-0.09
		⋮	
		c	f(c)=0

* روش تکرار بسیار کند است.

** روش تکرار از روش نصف کردن سریع‌تر به جواب می‌رسد ولی روش نصف کردن هیچ روشی هیچ شرط همگرایی ندارد.

فصل دوم: روش نیوتن_رافسون (روش مماسی)





معادله خط راست (مماسی):

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$0 - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

محل تقاطع خط مماس با محور:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

رابطه بازگشتی در روش نیوتن رافسون.

ازمقایسه روش تکرار و نیوتن رافسون :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

بنابراین از شرط روش تکرار می توانیم استفاده کنیم :

$$g'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x) f''(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'^2(x)}$$

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'^2(x)} \right| < 1$$

شرط همگرایی نیوتن رافسون .

مثال: برای معادله $x^p - N = 0$ رابطه بازگشتی باید به چه شکل باشد :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - N}{p x_n^{p-1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{p x_n^p - x_n^p + N}{p x_n^{p-1}}$$

$$x_{n+1} = \left(\frac{p-1}{p}\right) x_n + \frac{N}{p} x_n^{1-p}$$

اگر بخواهیم وارون یک عدد را از رابطه $x - \frac{1}{A} = 0$ رابطه بازگشتی در روش نیوتن رافسون به چه شکل خواهد شد .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \frac{1}{A}}{1}$$

$x_{n+1} = \frac{1}{A} \longrightarrow$ به رابطه بازگشتی نمی رسد.

پس باید : $x - \frac{1}{A} = 0 \longrightarrow \frac{1}{x} - A = 0$ را حل کرد .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - A}{-\frac{1}{x_n^2}}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n - Ax_n^2}{1} = x_n(2 - Ax_n)$$

* درحقیقت یک ریشه به ریشه ها اضافه کرده ام.

مثال: جواب معادله $f(x) = 2^x - 2x$ در روش نیوتن را فرض با حدس اولیه $x_0 = 3$ پس از دو نقطه تکرار برابر خواهد بود با:

1) 2.44 2) 2.36 3) 2.56 4) 2.13

* در امتحان به هیچ وجه شرط را امتحان نکنید چون تمام ریشه دارند که برسیده اند.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$y = 2^x$$

$$\ln y = x \ln 2$$

$$\frac{y'}{y} = \ln 2 \longrightarrow \boxed{y' = 2^x \ln 2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2^{x_n} - 2x_n}{2^{x_n}\ln 2 - 2}$$

$$x_1 = 3 - \frac{8 - 6}{(8 \times 0.69) - 2}$$

$$x_1 = 2.435 \longrightarrow \boxed{x_2 = 2.131}$$

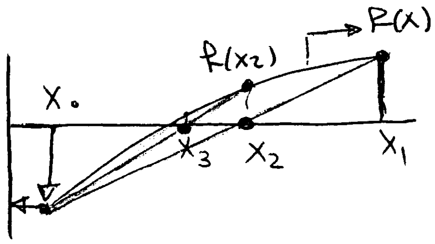
روش میانیابی نابجایی (False Position):

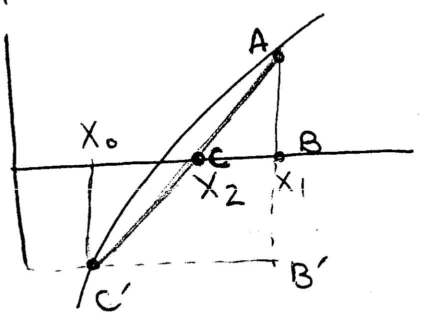
حالت بهبود یافته روش نصف کردن است.

* روش نابجایی ٪۱۰۰ همگراست.

نابجایی و نصف کردن ٪۱۰۰ همگرا ولی تکرار و نیوتن رافسون دارای شرط همگرایی هستند.

$[x_0, x_1] \qquad f(x_0)f(x_1) < 0$





تشابه: $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AB}{AB'}$

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}} \longrightarrow$$

تقریباً حالتی از نیوتن رافسون است. (تشبیه روش نیوتن).

روش وتری : (روش تقاطع) :

از روش نیوتن رافسون گرفته شده.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \longrightarrow g(x)$$

شرط همگرایی :

$$|g'(x)| < 1$$

در روش نصف کردن یا روش میان یابی شرط همگرایی وجود ندارد یعنی دو روش حتماً ما را به جواب می رساند. سرعت همگرایی در روش نصف کردن کمتر از روش میان یابی می باشد.
در بین تمام روش های گفته شده روش نیوتن رافسون از همه سریع تر است. عیب روش نیوتن رافسون این است که شرط همگرایی دارد و در مواردی که محاسبه مشتق تابع دشوار می باشد این روش توصیه نمی شود.

سرعت همگرایی نیوتن رافسون > وتری > میانیابی > تکرار > نصف کردن.

* در مواردی که ریشه مضاعف داریم :

$$(x-a)^b \cdot f(x) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b \cdot f(x)}{f'(x)}$$

* در روش Q.D یا خارج قسمت نیاز به حدس اولیه ندارد.

درون یابی :

- تفاضل پیشرو .
- تفاضل پسرو .
- تفاضل مرکزی .

رتبه اول : $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$: تفاضل پیشرو

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

		Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_{-2}	f_{-2}	Δf_{-2}	$\Delta^2 f_{-2}$	
x_{-1}	f_{-1}	Δf_{-1}	$\Delta^2 f_{-1}$	
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	
x_1	f_1	Δf_1		
x_2	f_2			

$$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$$

x_{-1} | f_{-1} Δf_{-1} $\Delta^2 f_1$

در تفاضل پیشرو چنان که اندیس یک دارند روی یک خط راست با شیب منفی قرار می گیرند.

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$$

Δ^2

تفاضل پسرو:

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$

$$\nabla^n f_i = \nabla^{n-1} f_i - \nabla^{n-1} f_{i-1}$$

		∇f_i	$\nabla^2 f_i$
x_{-2}	f_{-2}		
x_{-1}	f_{-1}		
x_0	f_0	∇f_{-1}	$\nabla^2 f_0$
x_1	f_1	∇f_0	$\nabla^2 f_1$
x_2	f_2	∇f_1	$\nabla^2 f_2$
		∇f_2	

			$\nabla^2 f_2$
		∇f_2	
x_2	f_2		

در تفاضل پسرو، تفاضل های با اندیس یکسان روی یک خط قرار می‌گیرند.

$$\delta f_{m+\frac{1}{2}} = f_{m+1} - f_m$$

x_{-2}	f_{-2}		
		$\delta f_{-3/2}$	
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$
		$\delta f_{-1/2}$	
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$
		$\delta f_{1/2}$	
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$
		$\delta f_{3/2}$	
x_2	f_2		

$$\delta f_{3/2} = f_2 - f_1$$

$$\delta^2 f_m = \delta f_{m+1/2} - \delta f_{m-1/2}$$

در تفاضل مرکزی، تفاضل های با اندیس یکسان روی یک خط راست قرار می‌گیرند.

x	f
x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$

حالت ۱ — حالت ① $x_1 - x = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$

یعنی کلیه نقاط متساوی الفاصله باشند.

حالت 2 — حالت ② متساوی الفاصله نباشند.

زمانی که نقاط داده شده متساوی الفاصله باشند از روش نیوتن گریگوری استفاده می‌شود.

" " " نباشند از روش لاگرانژ استفاده می‌شود.

بسط نیوتن گریگوری.

$$f(x_n) = ?$$

$$x_1 < x_n < x_2$$

x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$

x_n {

نگاه می‌کنیم به x_1 نزدیک‌تر است یا x_2، فرض کنیم به x_1 نزدیک‌تر است حول x_1 بسط می‌دهیم.

چون $x_n > x_1$ بسط را معادلات پیشرو می‌نویسیم.

اگر به x_2 نزدیک‌تر بود، $x_n < x_2$، بسط را حول نقطه x_2 با معادلات پسرو می‌نویسیم.

بسط نیوتن

x_n را حول x_j می‌خواهیم بسط دهیم: استفاده فقط متساوی نقاط.

معادلات پیشرو:

$$f(x_j + rh) = f_j + r\Delta f_j + \frac{r(r-1)\Delta^2 f_j}{2!} + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_j + \cdots$$

معادلات پسرو:

$$= f_j + r\nabla f_j + \frac{r(r-1)\nabla^2 f_j}{2!} + \cdots$$

مقدار تابع را در $x=0.55$ تخمین بزنید.

سطر را اول $x=0.5$ و پیشرو می‌نویسیم.

همواره از صفر شروع کنید

	x	f
x_0	0.5	0.4794
x_1	0.7	0.6442
x_2	0.9	0.7833
x_3	1.1	0.8219
x_4	1.3	0.9635
x_5	1.5	0.9974

$$f(0.55)=f(0.5+r(0.2))=$$

$$0.55=0.5+rh \Rightarrow 0.2r=0.05 \rightarrow r=0.25$$

$$f(x_0+rh)=f_0+r\Delta f_0+\frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0+\cdots$$

$$f(0.55)=f(0.5)+0.25[0.6442-0.4794]+\frac{0.25(0.25-1)}{2}[(0.7833-0.6442)-(0.6442-0.4794)]$$

$$\Rightarrow f(0.55)=0.52291$$

$$f(1.47)=?$$

$$0.9946$$

درون یابی

x_0	F_0
x_1	F_1
x_2	F_2
x_3	F_3

درحالتی که فواصل یکسان نیست : $x_3-x_2 \neq x_2-x_1$

در این حالت برای درون یابی از رابطه لاگرانژ استفاده می‌کنیم

روش لاگرانژ: می‌خواهیم تابعی مثل $P(X)$ را بدست آوریم و مقدار $P(X)$ در یک نقطه خاص بدست آوریم

$$P(X)=L_0F_0+L_1F_1+L_2F_2+\dots+L_iF_i$$

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots}$$

مثال:

x	$\cos x$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	0.866
$\frac{\pi}{4}$	0.707

$$\cos(17^\circ, 5', 3'')=?$$

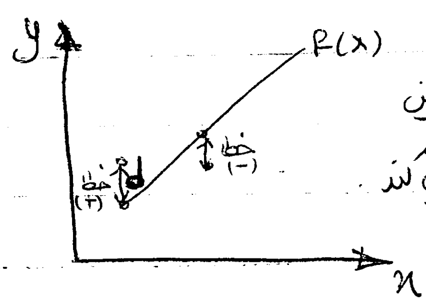
$$P(X)=\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{(0-\frac{\pi}{6})(0-\frac{\pi}{4})}\times 1+\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{6}-0)(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})}\times 0.866+\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})}{(\frac{\pi}{4}-0)(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}\times 0.707$$

تبدیل به Rad: $\left(17^\circ+\frac{5}{60}+\frac{3}{3600}\right)\times\frac{\pi}{180}=0.095\pi$

$$x=0.095\pi \longrightarrow P(0.095\pi)=\cos(17^\circ, 5', 3')=0.954$$

حداقل کردن مجموع مربعات خطا :

x	F
x_0	F_0
x_1	F_1
x_2	F_2
$\vdots$	$\vdots$



d : خطا

تابعی مانند $F(x)$ را طوری بدست می‌آوریم که این نقاط داده شده را با حداقل خطا پیش‌گویی کند. از آنجاکه خطاها + و - هستند مربعات خطا را درنظر می‌گیریم.

$\sum d_i^2 =$ (باید حداقل شود).

مثال: فرض کنیم $y=ax^2+bx+c$ نقاط را پیش‌گویی می‌کند:

$$\sum d_i^2=\sum(ax_i^2+bx_i+c-f_i)^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sum d_i^2}{\partial a}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sum d_i^2}{\partial b}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sum d_i^2}{\partial c}=0\end{cases}$$

سه معادله، سه مجهول بدست آمد،

a و b و c بدست می‌آید.

$$\rightarrow\quad 2\sum x_i^2(ax_i^2+bx_i+c-f_i)=0$$

$$2\sum x_i(ax_i^2+bx_i+c-f_i)=0$$

$$2\sum(ax_i^2+bx_i+c-f_i)=0$$

$$\rightarrow\quad a\sum x_i^4+b\sum x_i^3+c\sum x_i^2-\sum f_i(x_i)^2=0$$

$$a\sum x_i^3+b\sum x_i^2+c\sum x_i-\sum f_i x_i=0$$

$$a\sum x_i^2+b\sum x_i+\underbrace{\sum c}_{=nc}-\sum f_i=0$$

* در کنکور اگر عددی سؤال دادند دو معادله را در گزینه‌ها امتحان کنید.

مثال:

x	y
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

$y=AX+B$

توجه: روش مجموع مربعات برای فرمول‌های خطی و غیرخطی جواب می‌دهد.

$$\sum d_i^2=\sum(AX+B-y_i)^2$$

$$\frac{\partial\sum d_i^2}{\partial A}=0\rightarrow 2\sum x_i[AX_i+B-y_i]=0$$

$$\frac{\partial\sum d_i^2}{\partial B}=0\rightarrow 2\sum(AX_i+B-y_i)=0$$

$$A\sum x_i^2+B\sum x_i=\sum x_i y_i$$

$$A\sum x_i+5B=\sum y_i$$

$$55A+15B=95 \qquad A=2$$
$$15A+5B=25 \qquad B=-1$$
$$\rightarrow y=AX+B=2X-1$$

تعداد چندجمله ای های با درجه بیشتر از n که $n+1$ نقطه مجزا را درون یابی می کند برابر است با:

1) صفر ✓ 2) ۱ 3) ∞ 4) ۲

x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$

$$y=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+d$$

$n+1$ مجهول.

$n+1$ نقطه داریم بنابراین یک دستگاه $n+1$

معادله $n+1$ مجهول داریم.

*) یعنی با n نقطه حداکثر می توان یک درجه $(n-1)$ عبور داد.

ولی مثلاً اگر ۱۰ نقطه داشته باشیم می توان ~~چند~~ چندین چندجمله ای درجه ۳ عبور داد.

برای n نقطه با درجه n و بالاتر ← صفر

درجه $n-1$ ← یک

کمتر از $n-1$ ← چندین یا هیچ، چندجمله ای می توان عبور داد.

مشتق عددی:

از بسط تیلور استفاده می کنیم: فواصل مساوی:

$$i-2 \quad i-1 \quad i \quad i+1 \quad i+2$$

مشتق عددی: ① $f_{i+1}=f_i+hf_i'+\frac{h^2}{2!}f_i''+\frac{h^3}{3!}f_i'''+\frac{h^4}{4!}f_i^{(4)}+\frac{h^5}{5!}f_i^{(5)}+\cdots$

با $-h$ قرار دهیم به f_{i-1} بدست می آید

② $f_{i-1}=f_i-hf_i'+\frac{h^2}{2!}f_i''-\frac{h^3}{3!}f_i'''+\frac{h^4}{4!}f_i^{(4)}-\frac{h^5}{5!}f_i^{(5)}+\cdots$

برای محاسبه f_{i+2}، بجای h، $2h$ می گذاریم (برای بسط دادن حول f_i):

③ $f_{i+2}=f_i+2hf_i'+2h^2f_i''+\frac{4}{3}h^3f_i'''+\frac{2}{3}h^4f_i^{(4)}+\frac{32}{120}h^5f_i^{(5)}+\cdots$

④ $f_{i-2}=f_i-2hf_i'+2h^2f_i''-\frac{4}{3}h^3f_i'''+\frac{2}{3}h^4f_i^{(4)}-\frac{32}{120}h^5f_i^{(5)}+\cdots$

در نظر گرفتن فقط دو جمله اول :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$ مشتق بر اساس تفاضل پیشرو

چون فقط دو جمله اول را در نظر گرفتیم یعنی از h^2 به بعد صرف نظر کردیم

بنابراین $\boxed{O(h^2) : \text{خطای جامع ، خطای کل} \quad \text{Global}}$

حال اگر از بسط تیلور f_{i+1} را حساب کنیم داریم :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2!} f''_i - \frac{h^2}{3!} f'''_i - \dots$$

حال اگر از جمله دوم به بعد صرف نظر کنیم

از h^1 به بعد صرف نظر کردیم :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

بنابراین $\boxed{O(h) : \text{خطا محلی} \quad \text{Local}}$

* معمولاً خطای کل از محلی یکی بیشتر است ولی همیشه این طور نیست .

از بسط f_{i-1} که می توان همین کار را کرد :

مشتق اول بر اساس تفاضل پسرو

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

خطای کل . $O(h^2)$

خطای محلی . $O(h)$

اگر رابطه ① و ② (صفحه قبل) را از هم کم کنیم داریم :

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2h f'_i + \frac{1}{3} h^3 f'''_i + \frac{2h^5}{5!} f_i^{(5)}$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''_i + \dots$$

از این جمله به بعد را صرف نظر کنیم . یعنی از h^2 به بعد صرف نظر کردیم ← خطای محلی h^2

و در نتیجه خطای کل : $O(h^3)$

خطای محلی : $O(h^2)$

$$f_{i+1}+f_{i-1}=2f_i+h^2 f''_i+\frac{2h^4}{4!}f_i^{(4)}$$

از این رابطه f''_i را بدست می‌آوریم

$$f''_i=\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}\underbrace{-\frac{2}{4!}h^2 f_i^{(4)}}_{\text{صرف‌نظر}}-\cdots$$

خطای محلی $O(h^2)$

اگر رابطه ① و ② را جمع کنیم: با صرف‌نظر کردن داریم

خطای کل $O(h^4)$

(۵ نقطه)

اگر تعداد نقاط کم باشد از هر کدام از روابط تفاضل پیشرو و پسرو و مرکزی می‌توان به جواب رسید.
اما اگر تعداد نقاط زیاد باشد (مثلاً ۵ تا) نمی‌توانیم از روابط پیشرو، پسرو و مرکزی استفاده کنیم چون این روابط فقط سه نقطه را در نظر می‌گیرند.

x_{i-2}	f_{i-2}
x_{i-1}	f_{i-1}
x_i	f_i
x_{i+1}	f_{i+1}
x_{i+2}	f_{i+2}

در این حالت

رابطه ① را در 8 ضرب کرده، رابطه ② را در -8 و رابطه ③ را -1 و رابطه ④ را در $+1$ ضرب کرده با هم جمع می‌کنیم داریم:

$$8f_{i+1}-8f_{i-1}-f_{i+2}+f_{i-2}=$$

$$=12hf'_i-\frac{48h^5}{120}f_i^{(5)}$$

برای ۵ نقطه:

$$f'_i=\frac{8f_{i+1}-8f_{i-1}+f_{i-2}-f_{i+2}}{12h}$$

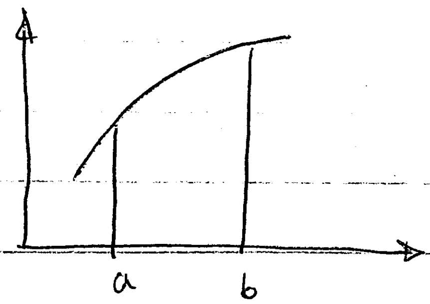
$O(h^4)$ خطای محلی است.

$O(h^5)$ خطای کل.

انتگرال عددی:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

روش‌ها: ذوزنقه، سیمپسون $1/3$، سیمپسون $1/8$، روش گوس.



روش ذوزنقه:

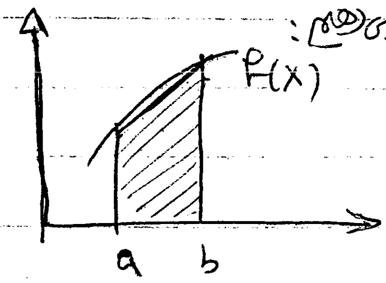
از هر دو نقطه

a	f(a)
b	f(b)

از روش لاگرانژ یک $P(x)$ از دو نقطه عبور می‌دهیم:

$$P(x)=\left(\frac{x-b}{a-b}\right)f(a)+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)f(b)$$

بنابراین در روش ذوزنقه یک خط راست بین a تا b عبور می‌دهیم:



$$I=\int_a^b\left[\frac{(x-b)}{(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)}{(b-a)}f(b)\right]dx$$

$$I=\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(a)+f(b)\right)$$

هرچقدر محدوده انتگرال کمتر باشد خطا نیز کاهش می‌یابد.

بنابراین محدوده انتگرال را به چند قسمت تقسیم و همین روش را استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_{x_0}^{x_n}f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x)dx$$

$$=\left[\frac{x_1-x_0}{2}\right](f_0+f_1)+\left[\frac{x_2-x_1}{2}\right](f_1+f_2)+\cdots+$$

$$+\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right)(f_{n-1}+f_n)$$

$$\Longrightarrow I=\int_{x_0}^{x_n}f(x)\,dx=\frac{h}{2}\left[f_0+f_n+2\sum_{n=1}^{n-1}f_n\right]$$

مطلوب است محاسبه انتگرال :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

x	$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$
0	1
0.25	0.9412
0.5	0.8
0.75	0.64
1	0.5

$$I=\frac{0.25}{2}\left[1+0.5+2(0.64+0.8+0.9412)\right]$$

$$I=0.786$$

از روش تحلیلی :

$$I=\operatorname{Arctg}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-0\simeq 0.785$$

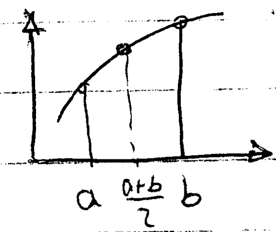
روش سیمپسون :

$$I=\int_a^b f(x)dx\simeq$$

از سه نقطه می‌توان یک منحنی درجه دوم عبور داد

(از همان روش لاگرانژ).

a	$f(a)$
$\frac{a+b}{2}$	$f(\frac{a+b}{2})$
b	$f(b)$



$$P(x)=\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}f(\tfrac{a+b}{2})$$
$$+\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-a)(b-\frac{a+b}{2})}f(b)$$

$$I=\frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

اگر محدوده انتگرال $\int f(x)dx$ زیاد باشد به محدوده‌های بیشتری تقسیم کرده و همین روش را ادامه می‌دهیم.

$$I=\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

$$=\frac{h}{3}[f_0+4f_1+f_2]+\frac{h}{3}[f_2+4f_3+f_4]+\cdots$$

$$+\frac{h}{3}[f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n}]$$

سیمپسون
معمول $\frac{1}{3}$

$$I=\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx=\frac{h}{3}\Big[f_0+f_{2n}+4\sum f_{\text{فرد}}+2\sum f_{\text{زوج}}\Big]$$

تعداد فواصل در روش سیمپسون باید زوج باشد.

یعنی در این روش تعداد نقاط فرد یا به عبارت دیگر تعداد فواصل زوج باشد.
(دو بازه را به دو قسمت تقسیم کرده‌ایم)

مثال:

	x	$\frac{1}{1+x^2}$
0	0	1
1	0.25	0.9412
2	0.5	0.8
3	0.75	0.64
4	1	0.5

$$I=\frac{0.25}{3}\Big[1+0.5+4(0.9412+0.64)+2\times 0.8\Big]$$

$$=0.7854$$

مطلوبست حاصل انتگرال: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \quad (h=0.25)$

* در توابع مثلثاتی ماشین حساب را در Mode رادیان قرار دهید

x	$\frac{\sin x}{x}$
0	1
0.25	0.9896
0.5	0.9589
0.75	0.9089
1	0.8415

$$I=\frac{h}{3}\Big[1+0.8415+2(\times 0.9589)+4(0.9896+0.9089)\Big]$$

$=$

اگر بخواهیم حاصل انتگرال : $I=\int_1^3 x^2\,dx$ با روش سیمپسون معمولی محاسبه کنیم در محاسبه انتگرال چند درصد خطا خواهیم داشت؟ $(h=1)$

1) ۰٪ ✓ 2) ۱٪ 3) ۳٪ 4) ۴٪

$$I=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\frac{26}{3}$$

x	I
1	1
2	4
3	9

$$I=\frac{1}{3}[1+9+4\times4]$$

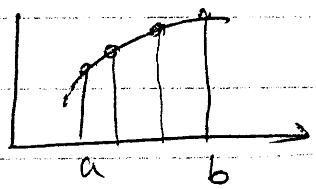
چون تابع درجه ۲ است خطای روش سیمپسون صفر است. (سیمپسون معمولی درجه ۲ بعدی دهد).

به همین شکل $I=\int_1^{100}(4x+2)\,dx$ به روش ذوزنقه صفر درصد خطا می‌دهد.

سیمپسون $\frac{3}{8}$:

$$I=\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx$$

هر فاصله را به سه قسمت تقسیم کرده و چهار نقطه داریم که یک تابع درجه ۳ (با استفاده از لاگرانژ) :



$$I=\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx=\frac{3h}{8}\left[f_0+4f_1+4f_2+f_3\right]$$

اگر $f(x)$ درجه ۳ باشد درصد خطا صفر است.

از سیمپسون $\frac{3}{8}$ زمانی استفاده می‌کنیم که ~~تعداد فواصل فرد و تعداد نقاط زوج باشد~~ مضرب ۳

$$I=\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx+\int_{x_3}^{x_6} f(x)\,dx+\cdots+\int_{x_{3n-3}}^{x_{3n}} f(x)\,dx$$

$$I=\frac{3h}{8}\left[f_0+3f_1+3f_2+f_3\right]+\frac{3h}{8}\left[f_3+3f_4+3f_5+f_6\right]+\cdots$$

$$I=\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x)\,dx=\frac{3h}{8}\left[f_0+f_{3n}+2\sum_{\text{مضارب }3} f+3\sum_{\text{سایرین}} f\right]$$

زمانی از سیمپسون $\frac{3}{8}$ استفاده می‌کنیم که تعداد فواصل مضرب 3 باشد.

* اگر مجبور شدیم باید یک سری نقاط را از روش دیگر و بقیه را از روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ حل می‌کنیم.

مثال:

$$\text{روش سیمپسون } \tfrac{3}{8} \leftarrow \boxed{\begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{matrix}}$$

$$\text{روش ذوزنقه} \leftarrow \left\{ \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right.$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\int_1^4 e^x dx$ به روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ ~~به روش~~ $(h=1)$

	x	e^x
اولی ← 0	1	~~7.718~~ 2.718
1	2	7.389
2	3	20.04
آخری ← 3	4	54.59

$$I=\frac{3\times 1}{8}\left[\underbrace{2.718}_{\text{اول}}+\underbrace{54.59}_{\text{آخری}}+4\,(20.4+7.389)\right]$$

$$I=e^x\Big|_1^4 \qquad I=51.87$$

روش گوس

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\left[\frac{b-a}{2}\right]\left[f(A)+f(B)\right]$$

$$A=\left(\frac{b+a}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$B=\left(\frac{b+a}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$A=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\cancel{A=0.211}}$$

$$B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{B=0.789}$$

$$I=\left(\frac{1-0}{2}\right)\left[\frac{1}{1+(0.211)^2}+\frac{1}{1+(0.789)^2}\right]=0.7868$$

مثال: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال: $I=\int_4^6\int_1^3 f(x,y)\,dx\,dy$

که تابع $f(x,y)$ با داده های زیر مشخص شده است.

$x \backslash y$	4	5	6
1	10	20	30
2	40	50	60
3	70	80	90

برای محاسبه انتگرال دوگانه:

$$y=4 \qquad \int_1^3 f(x,y=4)\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\left[10+80+70\right]=80$$

$$y=5 \qquad \int_1^3 f(x,y=5)\,dx=\frac{1}{2}\left[20+100+80\right]$$

$$=100$$

$$y=6 \qquad \int_1^3 f(x,y=6)\,dx=\frac{1}{2}\left[30+120+90\right]=120$$

$$\int_4^6 f(x,y)\,dy=\frac{1}{2}\left[80+200+120\right]=200$$

حل عددی معادلات دیفرانسیل :

به دو دسته تقسیم می‌شوند :

۱) معادلاتی که : Initial Value Problem : IVP

۲) معادلاتی که مقدارتابع جواب در مرزها : Boundary Value Problem : BVP
داده شده .

برای حل مسائل IVP روش‌های :

۱) روش تیلور ۲) روش اولر ۳) اولر بهبود یافته ۴) رانگ کوتا رتبه ۲
۵) " " " ۳
۶) " " " ۴

~~در حل~~ IVP

در IVP احتیاج به یک رابطه بازگشتی داریم تا با داشتن x_0 و y_0 بتوانیم y_1 را بدست آوریم سپس با x_1 و y_1 بتوانیم y_2 را بدست آوریم و ...

$$y_{i+1} = g(y_i)$$

روش تیلور : $$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \cdots + \frac{h^P}{P!} y_i^{(P)}$$

مقدار P (رتبه مشتق) باید داده شده باشد .

عیب روش تیلور این است که باید مقدار مشتقات تابع را در هر نقطه داشته باشیم .

مثال :

$y' = x + y \qquad y(0.2) = ?$

$y(0) = 1 \qquad h = 0.1$

$P = 4$

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{6} y'''_i + \frac{h^4}{24} y_i^{(4)}$$

$y' = x + y$

$y'' = 1 + y' = 1 + x + y$

$y''' = y'' = 1 + x + y$

$y^{(4)} = y''' = 1 + x + y$

این چهار رابطه را در رابطه بازگشتی قرار می‌دهیم

$h = 0.1$ را جایگذاری می‌کنیم :

$$y_{i+1} = 0.00517 + 0.10517 x_i + 1.10517 y_i$$

i	x	y
0	0	1
1	0.1	1.11034
2	0.2	1.2428
3		
4		

$$Y_{i+1}=0.00517+0.10517x_i+1.10517Y_i$$
$$Y_1=0.00517+0.10517(0)+1.10517(1)$$
$$Y_1=Y(0.1)=1.11034$$
$$Y_2=0.00517+(0.10517\times 0.1)+(1.10517)(1.11034)$$
$$Y=1.2428$$

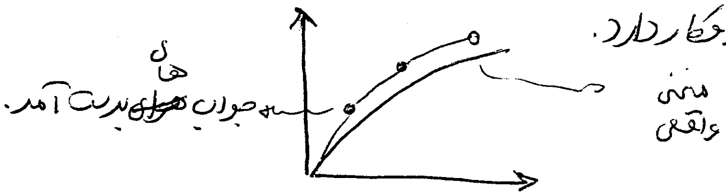
روش اولر :

بر اساس بسط تیلور. با این تفاوت که فقط تا مشتق اول در نظر می‌گیریم.

$$y_{i+1}=y_i+hy'_i+\cancel{\frac{h^2}{2!}y''_i}+\cdots$$

$$\boxed{y_{i+1}=y_i+hy'_i}$$

روش اولر هیچ گاه ما را به جواب دقیق نمی‌رساند در حقیقت بجای خود منحنی با خط مماس آن سروکار دارد.



* وقتی تقعر و تحدب کم باشد جواب خوبی می‌دهد. حسن روش: سادگی آن است.

خطای کل روش اولر:

$$\boxed{O(h^2)}$$

مثال : $[0,1]$

$$\begin{cases} y'=\sin x+\sin y \\ y(0)=1 \end{cases}$$

با روش اولر و $h=0.25$ حل کنید.

i	x	y
0	0	1
1	1/4	1.2104
2	1/2	1.5562
3	3/4	1.877
4	1	

$$Y_{i+1}=Y_i+h[\sin x_i+\sin Y_i]$$

$i=0$ $\quad Y_1=1+0.25[\sin 0+\sin 1]$

$$Y_1=1.2104$$

$i=1$ $\quad Y_2=1.2104+0.25[\sin 0.25+\sin 1.2104]$

$$Y_2=1.5560$$

روش

اویلر اصلاح شده:

از بسط تیلور است و تا مشتق دوم در نظر می‌گیریم:

$$y_{i+1} = y_i + h y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \frac{h^3}{3!} y_i''' + \cdots$$

بنابراین رتبه خطا: $\boxed{O(h^3)}$

$$y_i'' = \left[\frac{y'_{i+1} - y'_i}{h}\right]$$

$$\rightarrow y_{i+1} = y_i + h y_i' + \frac{h^2}{2}\left[\frac{y'_{i+1} - y'_i}{h}\right]$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[y_i' + y'_{i+1}\right]}$$

اشکال روش این است که y_{i+1} را نداریم. برای بدست آوردن y'_{i+1} از روش اویلر معمولی استفاده می‌کنیم.

مثال: را با روش اویلر اصلاح شده حل کنیم

$y' = x + y$

$h = 0.2$

رابطه بازگشتی مورد نظر به چه شکل است:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[(x_i + y_i) + x_{i+1} + y_{i+1}\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[(x_i + y_i) + (x_i + h) + y_i + h y'\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[2(x_i + y_i) + h + h(x_i + y_i)\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[(x_i + y_i)(2 + h) + h\right]$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + 0.22(x_i + y_i) + 0.02}$$

روش رانگ کاتا :

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$$

اگر در روش رانگ کاتا فقط ak_1 و bk_2 در نظر گرفته شود مرتبه 2 .

" " " " " و ck_3 " مرتبه 3 ،

اگر تمام جمله ها در نظر گرفته شود رانگ کاتا مرتبه 4 است .

همواره : $a+b+c+d=1$

روش رانگ کاتا مرتبه ۲ :

** جواب های روش رانگ کاتای مرتبه ۲ دقیقاً همان اولر اصلاح شده است .

در این روش مرتبه خطا $\boxed{o(h^3)}$

در کنکور از روش اولر اصلاحی استفاده کنید .

$$y_{i+1} = y_i \pm \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

شیب همان تانژانت است.

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1)$$

روش رانگ کاتای مرتبه ۳ :

$$Y_{i+1} = Y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3$$

$a+b+c=1$

$$a = \frac{1}{6} \quad c = \frac{1}{6} \quad b = \frac{2}{3}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3]$$

خطای کل $O(h^4)$.

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_0, y_0) \\ k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_0 + h, y_0 + 2k_2 - k_1) \end{cases}$$

روش رانگ کاتای مرتبه ۴

$$Y_{i+1} = Y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$$

$$a = d = \frac{1}{6} \quad b = c = \frac{1}{3} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, Y_0 + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, Y_0 + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, Y_0 + k_3)$$

مثال:

$$y' = x + y$$
$$y(0) = 1$$
$$y(0.1) = ?$$

* در امتحان h را نمی دهند اختلاف بین مقدار اولیه و مقدار خواسته شده را خودمان h می گیریم.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ f(x, y) = x + y \end{cases}$$

$$K_1 = 0.1(0+1)$$
$$K_2 = 0.1 f\left(0 + \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{0.1}{2}\right) = 0.11$$
$$K_3 = 0.1 f\left(0 + \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{0.11}{2}\right) = 0.1105$$
$$K_4 = 0.1 f(0 + 0.1, 1 + 0.1105) = 0.12105$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(0.1 + 2 \times 0.11 + 2 \times 0.1105 + 0.12105)$$
$$y_1 = 1.11034$$

برای نقطه بعدی k_1, k_2, k_3, k_4 را دوباره محاسبه می کنیم.

مرتبه خطای کل در رانگ کاتای مرتبه چهار $O(h^5)$ یعنی 10^{-5}.

حل معادلات

BVP: از ما عدد نمی خواهند. یعنی جواب را نمی خواهند.
فقط رابطه بازگشتی و یا روش حل را می پرسند.

روش تفاضل محدود Finite difference:

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} \\ y'' = \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \end{cases}$$

از شکل گسسته حدس بزنید که کدام یک از مشتق پیشرو، پسرو، مرکزی را باید قرار دهیم.

مثال:

$$y'' + xy = \sin x \qquad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\pi) = 0 \end{cases} \qquad h = \frac{\pi}{4}$$

i	x	y
0	0	1
1	$\pi/4$	y_1
2	$\pi/2$	y_2
3	$3\pi/4$	y_3
4	π	0

$$\boxed{\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i y_i = \sin x_i}$$

$$\frac{16}{\pi^2} y_{i+1} + \frac{16}{\pi^2} y_{i-1} + y_i\left(x_i - \frac{32}{\pi^2}\right) = \sin x_i$$

(i=0 را نمی توان قرار داد) $i = 1 \rightarrow \frac{16}{\pi^2} y_2 + \frac{16}{\pi^2} \times 1 + y_1\left(\frac{\pi}{4} - \frac{32}{\pi^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$i=1 \quad \frac{16}{\pi^2} y_2 + \frac{16}{\pi^2} \times 1 + y_1 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{32}{\pi^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$i=2 \quad \frac{16}{\pi^2} y_3 + \frac{16}{\pi^2} y_1 + y_2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{32}{\pi^2}\right) = 1$

$i=3 \quad \frac{16}{\pi^2} \times 0 + \frac{16}{\pi^2} y_2 + y_3 \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{32}{\pi^2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

سه معادله و سه مجهول : با حل داریم: $Y_1 = 0.843, Y_2 = 0.717, Y_3 = 0.514$

تست) برای حل معادله $y'' + xy = 4$ ، $y(0) = 0$ ، $y(1) = 2$ ، $h = 0.1$ از روش تفاضل محدود می باید یک دستگاه چند معادله چند مجهول را حل کنیم

۱) ۸   ۲) ۹ ✓   ۳) ۱۰   ۴) ۱۱.

Shooting Method:

روش Shooting : روش حدس و خطا (BVP با مرتبه بالاتر را هم حل می کند)

خیلی وقت گیر است.

به تعداد مرتبه مشتق به معادله IVP تبدیل می کنیم

$y''' \longrightarrow$ به ۳ I.V.P تبدیل

مثال:

با روش Shooting معادله دیفرانسیل مرتبه ۳ را به ۳ معادله I.V.P

$$\begin{cases} y''' = f(x, y) \\ y(a) = f(a) \\ y(b) = f(b) \\ y(c) = f(c) \end{cases}$$

$y^{(4)} \longrightarrow$ به ۴ I.V.P تبدیل

حل می کنیم و هر معادله را از روش های رنگ کاتا ، اولر و ... حل می کنیم.

حل معادلات PDE

* معمولاً حل نمی‌خواهند ، در مورد روش ها و پایداری می پرسند .

حل معادلات بیضوی :

PDE

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

بیضوی . $B^2 - 4AC < 0$

از روش تفاضل محدود استفاده می کنیم .

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

$\Delta x = \Delta y$:

$$U_{i,j+1} + U_{i,j-1} + U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 4U_{i,j} = 0$$

به اون مقدار می دهیم تا دستگاهی به تعداد گره ها معادله دارد تشکیل گردد .

۲) حل معادلات سهموی :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}\right] \quad (I)$$

برای محاسبه U_i^{n+1} ممکن است از اطلاعات نقاط اطراف در زمان ماقبل استفاده کنیم در این صورت معادله I بصورت :

$$U_i = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}\left[U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}^n\right] + U_i^n$$

$$U_i = F_0\left[U_{i-1} + U_{i+1}\right] + (1 - 2F_0)U_i^n$$

~~این معادله~~

برای پایداری : قانون مثبت : $U_i^{n+1} = AU_{i-1}^n + BU_{i+1}^n + CU_i^n + \dots$

$$A, B, C > 0$$

بنابراین باید : $1 - 2F_0 \geq 0$ حالت شرطی برای حالت Steady state است .

بنابراین شرط پایداری $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial t}$ عبارت است از :

$$\frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

برای محاسبه U_i^{n+1} اطلاعات نقطه اطراف در زمان n نیاز است که همگی در دسترس می باشد

بنابراین از حل یک معادله یک مجهول $U_i^{n+1}=F_o[U_{i-1}^n+U_{i+1}^n]+(1-2F_o)U_i^n$

را بدست آورد این روش را صریح یا Explicit می نامیم.

اگر مسئله دو بعدی باشد:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial t}$$

$$U_{i,j}^{n+1}=F_o[U_{i+1,j}+U_{i-1,j}+U_{i,j+1}+U_{i,j-1}]+(1-4F_o)U_{i,j}^n$$

$$U_{i,j}^{n+1}=F_o[\text{بالا}\ \text{چپ}\ \text{راست}\ \text{پایین}]+(1-4F_o)U_{i,j}^n$$

شرط پایداری $F_o\leqslant 1/4$

اگر مسئله سه بعدی باشد:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial t}$$

$$U_{i,j,k}^{n+1}=[\text{بالا}\ \text{چپ}\ \text{راست}\ \text{پایین}\ \text{این طرف}\ \text{آن طرف}]+(1-6F_o)U_{i,j,k}^n$$

$\boxed{\text{شرط پایداری}:\ F_o\leqslant \frac{1}{6}}$

اگر در رابطه I (صفحه قبل) برای بدست آوردن U_i^{n+1} از اطلاعات نقاط اطراف استفاده کنیم در این صورت خواهیم داشت:

$$\cancel{U_i^{n+1}=F_oU_i^{n+1}+F_oU_{i-1}^{n+1}+F_o}$$

$$U_i^{n+1}=\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}[U_{i+1}^{n+1}-2U_i^{n+1}+U_{i-1}^{n+1}]+U_i^n$$

برای پیدا کردن U_i^{n+1}، اطلاعات نقاط اطراف در دسترس نیست، برای محاسبه U_i ها در زمان $n+1$ باید دستگاه حاصل را که n معادله (n) مجهول است حل کرد و این ایراد این روش است.

روش Implicit :

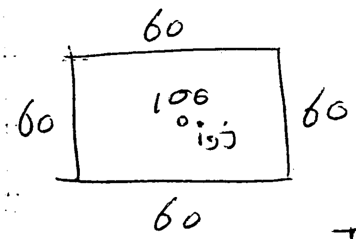
برای پایداری :

$$u_i^{n+1} = F_o u_{i+1}^{n+1} + F_o u_{i-1}^{n+1} - 2F_o u_i^{n+1} + u_i^n$$

شمارنده زمان n+1 را کنار گذاشته ضرایب جملات با شمارنده n باید مثبت باشد

بنابراین این روش همواره پایدار است چون ضریب u_i^n مثبت است.

مثال نقض برای روش Explicit :



$F_o \leqslant 1/4$ شرط پایداری

در این مسئله $F_o = 1$:

$$T_{i,j}^{n+1} = F_o\left[\text{چپ پایین بالا راست}\right] + (1-4F_o)\,T_{i,j}^{n}$$

$$T_{i,j}^{n+1} = 240 + (-3\times 100)$$

$$T_{i,j}^{n+1} = -60$$

روش کرانک نیکلسون :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{n+1} + (1-a)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{n}$$

$a=0$ صریح

$a=1$ ضمنی

$a=\frac{1}{2} \Longrightarrow$ روش کرانک نیکلسون.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1}^{n} - 2u_i^{n} + u_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right]$$

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \lambda$$

$$\longrightarrow (1+\lambda)\,u_i^{n+1} = (1-\lambda)\,u_i^n + \frac{\lambda}{2} u_{i+1}^{n+1} + \frac{\lambda}{2} u_{i-1}^{n+1} + \frac{\lambda}{2} u_{i+1}^{n} + \frac{\lambda}{2} u_{i-1}^{n}$$

درمورد پایداری روش کرانک نیکلسون از رابطه بدست آمده نمی‌توان اظهار نظر کرد.
ولی می‌توان اثبات کرد که همواره پایدار است.
برای هر نقطه از المان 5 نقطه استفاده می‌کند و از روش های قبلی دقیق‌تر است
این روش همواره پایدار است.

معادلات دیفرانسیل:

هر رابطه ای بین مشتقات تابع، خود تابع و متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل گویند.
اگر متغیر مستقل یکی باشد ODE و اگر متغیرهای مستقل بیش از یک باشد معادله PDE می‌شود.

مرتبه معادله دیفرانسیل: بالاترین مرتبه مشتق در معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل گویند

مثال: مرتبه ۲ $y'' + xy' = 0$

مرتبه ۳ $y''' + 4\cos x = 0$

درجه معادله دیفرانسیل: اگر مشتقات یک تابع را در معادله دیفرانسیل به فرم یک چند جمله ای بتوانیم بنویسیم در این صورت توان بالاترین مرتبه مشتق را درجه معادله دیفرانسیل می‌نامند.

درجه ۴. $(y''')^4 - 2y'' + y' + xy = 0$

درجه تعریف نمی‌شود. $y''' + x\cos y''' + y''\cos y'' = 0$

" " " . $y'' + e^{y'} = 0$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل: ممکن است بیش از یک جواب حتی صد جواب باشد که همه را تحت یک جواب که دارای متغیرهایی می‌باشد.

$y'' = 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b \longleftarrow$ به ازای مقادیر مختلف a و b صد جواب داریم.

اگر جواب عمومی را تحت شرایط اولیه قرار دهیم و مقادیر متغیر را محاسبه کنیم.
در این صورت جواب خصوصی بدست می‌آید.

بعضی از معادلات جواب عمومی ندارند . مثال :

$$|y| + |y'| = 0$$

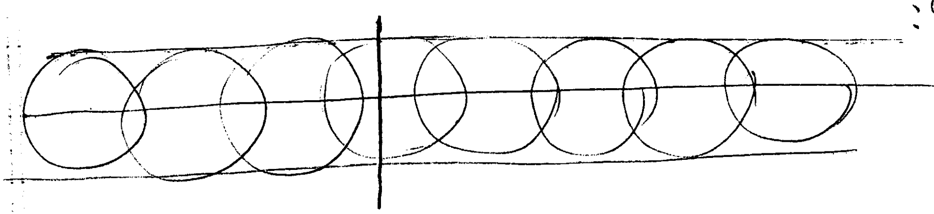
$$y = 0$$

جواب غیر عادی معادله دیفرانسیل :

$$1 + y'^2 = \frac{4}{y^2}$$

جواب عمومی : $(x-c)^2 + y^2 = 4$

یعنی جواب ها :



یعنی $y = 2$ و $y = -2$ هم جواب معادله هستند .

$$y = 2 \qquad 1 + 0 = \frac{4}{4}$$

$$y = -2 \qquad 1 = 1$$

$y = 2$ و $y = -2$ بر جواب ها مماس هستند .

$y = 2$ و $y = -2$ جواب های غیر عادی هستند .

جواب غیر عادی بر تمام منحنی های جواب عمومی در یک نقطه مماس است .

برای بدست آوردن جواب غیر عادی :

از حل دو معادله جواب غیر عادی بدست می آید :

$$\text{جواب عمومی} \begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

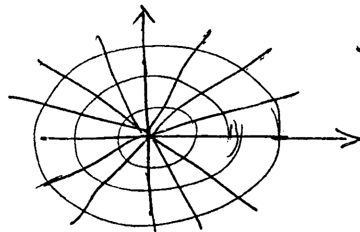
$$\begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = 4 \\ -2(x-c) = 0 \rightarrow x = c \end{cases} \rightarrow 0 + y^2 = 4 \rightarrow \boxed{y = \pm 2}$$

اگر دستگاه حل نشد { دستگاه را به همین شکل می نویسیم و می گوییم با حل بدست می آید .

** معادلات خطی هیچ وقت جواب غیر عادی نخواهند داشت .

مسیرهای قائم بر منحنی :

$$x^2+y^2=R^2$$
$$y=mx$$



خط $y=mx$ ~~منحنی~~ قائم بر دسته منحنی $x^2+y^2=R^2$ عمود است .
(به ازای تمام مقادیر m)

لذا $y=mx$ را مسیرهای قائم بر دسته دوایر $x^2+y^2=R^2$ می‌نامیم .

روش بدست آوردن :

۱) معادله دیفرانسیل معادله اصلی را بدست می‌آوریم :
(مسیر اصلی)

$$x^2+y^2=R^2 \rightarrow 2x+2yy'=0$$

۲) بجای y' ، $-\frac{1}{y'}$ می‌گذاریم .

$$y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$$

۳) معادله دیفرانسیل بدست آمده را حل می‌کنیم .

$$2x+2y\left(\frac{-1}{y'}\right)=0$$

$$y'=\frac{y}{x} \longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \longrightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \longrightarrow \ln x+\ln m=\ln y$$

$$\boxed{y=mx}$$

حل معادلات دیفرانسیل :

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول :

$$y'=f(x,y)$$

در کنکور نداریم
$$\left\{\begin{array}{l} y=f(x,y') \\ x=f(y,y') \end{array}\right.$$

$$y'=f(x,y)$$

حالت ۱) تفکیک پذیر :

$$y'=f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$$
$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y)$$
$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)\,dx$$

مثال :

$$y'=e^{x+y} \longrightarrow \frac{dy}{dx}=e^x.e^y \longrightarrow e^{-y}dy=e^x dx$$
$$\longrightarrow e^x=-e^{-y}+C$$

$y' = f(ax+by+c)$

چنین معادلاتی با تغییر متغیر $y = ax+by+c$ به معادله تفکیک پذیر تبدیل می گردد:

$y' = f(ax+by+c)$

مثال: $y' = tg(x+y) - 1$

$\cancel{v = x+y}$

$v = x+y$

$v' = 1+y' \longrightarrow v' - 1 = tg(v) - 1$

$\longrightarrow \frac{dv}{dx} = tg\,v \longrightarrow dx = \cot v\,dv$

$\xrightarrow{\int} \int dx = \int \cot v\,dv$

$x = \ln|\sin v| + \ln c$

$\longrightarrow c\sin v = e^x$

$\longrightarrow \sin v = Ae^x$

$\longrightarrow v = \operatorname{ArcSin}(Ae^x)$

$x + y = \operatorname{ArcSin}(Ae^x)$

تابع همگن :

تابع $f(x,y)$ را همگن از مرتبه n می‌نامیم به شرطی که $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$

مثال : $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 x^2\cos\frac{y}{x}=\lambda^2 f(x,y)$

اگر P و Q هر دو همگن از یک مرتبه باشند در این صورت معادله :

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

معادله دیفرانسیل همگن است و برای حل آن از تغییر متغیر $y=xv$ استفاده می‌کنیم

مثال : $x(y-x)y'=y^2$

$$\underbrace{x(y-x)}_{Q}dy-\underbrace{y^2}_{P}dx=0$$

$$Q(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 Q(x,y) \qquad P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 P(x,y)$$

$$y=xv$$

$$dy=xdv+vdx$$

$$\longrightarrow x(xv-x)[xdv+vdx]=x^2v^2dx$$

$$(v-1)xdv=[(v-1)v+v^2]dx$$

$$\frac{(v-1)}{v}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\ln c+\ln x=v-\ln v$$

$$v=\ln(v\,x\,c)$$

$$\frac{y}{x}\ln(y.c)\longrightarrow cy=e^{y/x}$$

$$\longrightarrow y=Ae^{y/x}$$

مثال :

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

$$(y+x)\,dy = (y-x)\,dx$$

$$y = xv \longrightarrow dy = x\,dv + v\,dx$$

$$x(v+1)\,x\,dv + x(v+1)\,v\,dx = x(v-1)\,dx$$

$$(v+1)\,x\,dv + (v+1)\,v\,dx = (v-1)\,dx$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{(v+1)\,dv}{v^2+1}$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{v\,dv}{v^2+1} + \frac{dv}{v^2+1}$$

$$2\left(-\ln x = \frac{1}{2}\ln(1+v^2) + \operatorname{Arctg} v + \ln c\right)$$

$$\ln\left[x^2 \cdot c\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\right] + 2\operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = 0$$

$$\ln\left[c(x^2+y^2)\right] + 2\operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = 0$$

$$y' = f\left(\frac{Ax+By+C}{Ex+Fy+G}\right)$$

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ Ex+Fy+G=0 \end{cases} \longrightarrow (x_0, y_0)$$

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow y' = f\left(\frac{AX+BY}{EX+FY}\right)$$

با این تغییر متغیر معادله همگن شد .

اگر دو خط موازی بودند آنگاه تغییر متغیر :

$$U = Ax+By+C \quad \text{یا} \quad V = Ex+Fy+G$$

$$y' = \frac{x+y}{1-x-y}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad u = 1-x-y \longrightarrow \cancel{du} \; u' = -y'-1$$

$$x+y = 1-u$$

$$\longrightarrow \; -u'-1 = \frac{1-u}{u}$$

$$u' = -\left(\frac{1-u}{u}\right) - 1 = \frac{-1+u-u}{u} = -\frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u}$$

$$-dx = u\,du$$

$$-x = \frac{u^2}{2} + c$$

$$(1-x-y)^2 + 2x = c$$

مثال:

$$y' = \frac{x-y}{x+y-2}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y+1 \end{cases} \longrightarrow y' = \frac{X+1-Y-1}{X+1+Y+1-2}$$

$$Y' = \frac{X-Y}{X+Y}$$

معادلات دیفرانسیل کامل :

$$u = u(x, y)$$

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$$

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

اگر P و Q توابع پیوسته و

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

دراین صورت معادله دیفرانسیل داده شده معادله دیفرانسیل کامل است و اگر تابعی مانند U پیدا بطوریکه :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases} \longrightarrow U(x, y) = c$$

دراین صورت $U(x, y) = c$ جواب معادله دیفرانسیل خواهد بود.

مثال:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^3 - y}{x}$$

$$\longrightarrow (x^3 - y)\,dx - x\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

$$P = x^3 - y = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U = \int (x^3 - y)\,dx$$

$$U = \frac{x^4}{4} - xy + f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x$$

$$-x + \frac{df(y)}{dy} = -x$$

$$f(y) = c$$

$$u = \frac{x^4}{4} - xy + c \rightsquigarrow \frac{x^4}{4} - xy = A$$

71

$$\overbrace{(2xy+3)}^{P}dx+\overbrace{(x^2+8y)}^{Q}dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

$$2xy+3=P=\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U=\int(2xy+3)\,dx$$

$$U=x^2y+3x+f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2+f'(y)=x^2+8y$$

$$f'(y)=8y$$

$$f(y)=4y^2$$

$$U=C \longrightarrow x^2y+3x+4y^2=C$$

فاکتور انتگرال: اگر معادله دیفرانسیل:

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

می‌توانیم تابعی مثل F پیدا کنیم که وقتی طرفین معادله دیفرانسیل ضرب کنیم شرط کامل بودن برقرار شود. در این صورت F را فاکتور یا عامل انتگرال برای معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f_1(x) \qquad (1$$

(فاکتور انتگرال) $F(x)=e^{\int f_1(x)dx}$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f_1(y) \qquad (2$$

$$F(x)=e^{-\int f_1(y)dy}$$

3) $\frac{1}{Qy-Px}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F_1(xy)$

$xy=z$

$=e^{\int F_1(z)dz}$

* فاکتور انتگرال معادلات همگن:

$$\frac{1}{Qy+Px}$$

مثال:

برای معادله دیفرانسیل: $\underbrace{(2y-3xy^2)}_{P}dx-\underbrace{x}_{Q}dy=0$

اگر فاکتور انتگرال بصورت $x^\alpha y^\beta$ باشد در اینصورت فاکتور انتگرال برابر است با

1) $\frac{1}{x^2}$ 2) $\frac{1}{y^2}$ 3) $\frac{x}{y^2}$ 4) $-\frac{x}{y^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2-6xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$

$$\left(2x^\alpha y^{\beta+1}-3x^{\alpha+1}y^{\beta+2}\right)dx-x^{\alpha+1}y^\beta dy=0$$

$$\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial y}=2(\beta+1)x^\alpha y^\beta-3(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-(\alpha+1)x^\alpha y^\beta\end{cases}$$

$2\beta+2=-\alpha \qquad \alpha=1$

$2+\beta=0 \longrightarrow \beta=2$

مثال: $(x+y^2)dx-2xydy=0$ یک فاکتور انتگرال برای این معادله:

1) $\frac{1}{x^2}$ 2) $\frac{1}{y^2}$ 3) x^2 4) y^2

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=4y\times\frac{1}{-2xy}=\frac{-2}{x}$$

$$F=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}$$

مثال: مقادیر α و β چقدر باشد تا:

$$(y+1)^{\alpha}(x-1)^{\beta}$$

یک فاکتور انتگرال برای معادله دیفرانسیل:

$$3(y+1)dx-2(x-1)dy=0$$

1) $\alpha=1 \quad \beta=4$ 2) $\alpha=-1 \quad \beta=4$

3) $\alpha=1 \quad \beta=-4$ 4) $\alpha=-1 \quad \beta=-4$

معادلات مرتبه اول خطی:

معادله دیفرانسیل مرتبه اول را خطی می‌گوییم هرگاه: $y'+yP(x)=q(x)$

اگر $q(x)$ همگن و اگر $q(x)\neq 0$ غیرهمگن.

$$q(x)=0 \longrightarrow \frac{dy}{dx}=-yP(x)\longrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int -P(x)dx$$

$$q(x)\neq 0\longrightarrow$$

$$y'+yP(x)-q(x)=0$$

$$\longrightarrow \underbrace{[yP(x)-q(x)]}_{P}dx+\underbrace{dy}_{Q}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=P(x)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x) \longrightarrow e^{\int f(x)dx}$$

بنابراین طرفین را در $e^{\int f(x)dx}$ ضرب می‌کنیم . جواب :

$$\boxed{y=e^{-\int f(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int f(x)dx}\cdot dx+c\right]}$$

مثال :

$$y'+2y=e^{x}$$

$$y=e^{-\int 2dx}\left[\int e^{x}\cdot e^{\int 2dx}dx+c\right]$$

$$=e^{-2x}\left[\int e^{3x}dx+c\right]$$

$$y=e^{-2x}\left[\frac{1}{3}e^{3x}+c\right]$$

$$=ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^{x}$$

مثال :

$$y'-xy=x \qquad y(0)=0$$

$$y=e^{\int xdx}\left[\int x\cdot e^{\int -xdx}dx\right]$$

$$y=e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int xe^{-x^2/2}dx+c\right]$$

$$y=e^{x^2/2}\left[-e^{-x^2/2}+c\right]$$

$$y=ce^{x^2/2}-1$$

$$0=c-1 \qquad c=1 \longrightarrow \boxed{y=e^{x^2/2}-1}$$

معادله برنولی

$$y' + y f(x) = y^n q(x) \qquad n \neq 1 \text{ و } n \neq 0$$

$$\boxed{u = y^{1-n} \quad \text{تغییر متغیر}}$$

$$u' = (1-n) y' y^{-n}$$

طرفین را $(1-n)$ ضرب و y^n تقسیم می‌کنیم:

$$(1-n) y^{-n} y' + (1-n) y^{1-n} f(x) = (1-n) q(x)$$

$$\longrightarrow \quad u' + (1-n) u f(x) = (1-n) q(x)$$

مثال:

$$y' + 2y = xy^2$$

$$y^{1-2} = u \longrightarrow u = y^{-1}$$

$$u' = -y' y^{-2}$$

$$y' y^{-2} + \frac{2}{y} = x$$

$$-u' + 2u = x \longrightarrow u' - 2u = -x$$

$$u = e^{\int +2dx}\left[\int -x e^{-\int 2dx} dx + c\right]$$

$$u = e^{2x}\left[-\int x e^{-2x} dx + c\right]$$

$$\cancel{xe^{2x} = \left[e^{2x} + 2xe^{-2x} - e^{2x}\right]}$$

محاسبه انتگرال (جزء به جزء): $\cancel{x e^{-2x} = e^{-2x}}$

$$\longrightarrow u = e^{2x}\left[\frac{1}{4}\left(2xe^{-2x} + e^{-2x}\right)\right] = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + ce^{2x}$$

معادله کلرو : $y = xy' + f(y')$

یادآوری: معادلاتی مانند $\begin{cases} y = f(x, y') \\ x = f(y, y') \end{cases}$ از تغییر متغیر $y' = p$ استفاده میکنیم

$$y = xy' + f(y')$$

$$y = xp + f(p) \longrightarrow dy = x\,dp + p\,dx + f'(p)\,dp$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = x\frac{dp}{dx} + p + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cancel{p} = x\frac{dp}{dx} + \cancel{p} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\longrightarrow \frac{dp}{dx}\left[f'(p) + x\right] = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = 0 \quad p = c \\ \left| \begin{array}{l} x + f'(p) = 0 \\ y = px + f(p) \end{array} \right. \longrightarrow \text{منجر به جواب غیرعادی میشود} \end{cases}$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \longrightarrow p = c \longrightarrow y = cx + f(c)$$

که یعنی در معادله کلرو بجای y' ، c را قرار میدهیم.

مثال :

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

$$\longrightarrow y = cx + \frac{1}{c}$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی :

معادله دیفرانسیل به شکل $y''+y'p(x)+yq(x)=r(x)$

$r(x)=0$ همگن

$r(x)\neq 0$ غیرهمگن

واگر p و q اعداد ثابت باشند معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرائب ثابت می نامیم.

جواب معادله : $c_1y_1+c_2y_2$.

مثال : $y''+ay'+by=0$

برای حل این معادله از روش اپراتور استفاده می کنیم :

$D^2+aD+b=0$

اگر $\Delta>0$: $y=c_1e^{D_1x}+c_2e^{D_2x}$

$\Delta=0$ $y=(c_1+c_2x)e^{Dx}$

$\Delta<0$ $p\pm iq$ دراین صورت جواب : $y=e^{px}[c_1\cos(qx)+c_2\sin(qx)]$

درحالت $\Delta<0$ می گویند ریشه های معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی نوسانی است.

مثال :

$y''+\cancel{2}^{4}y'+4y=0$

$D^2+4D+4=0$

$(D+2)^2=0$

$D=-2$

$y=(c_1+c_2x)e^{-2x}$

مثال : $y''+9y'-10y=0$

$\longrightarrow y=c_1e^{x}+c_2e^{-10x}$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیرهمگن:

$$y''+ay'+by=f(x)$$

$$y=y_h+y_p$$

ابتدا با $f(x)=0$ حل می‌کنیم و y_h را بدست می‌آوریم.

برای بدست آوردن y_p به شکل $f(x)$ نگاه می‌کنیم:

۱) اگر y_p یک چند جمله‌ای از مرتبه n باشد:

$$y_p=x^m\ (\text{چندجمله‌ای کامل از درجه } n)$$

که m تعداد ریشه‌های مساوی صفر معادله مفسر می‌باشد.

مثال:

$$y''-y'=x$$

$$y''-y'=0 \to D^2-D=0 \qquad D=0,\ D=+1$$

$$y_h=c_1+c_2e^x$$

$$y_p=x^1(Ax+B)$$

$$\cancel{y_h=c_1+c_2x}$$

$$y'=2Ax+B$$

$$y''=2A$$

$$\to y''-y'=x$$

$$2A-2Ax-B=x$$

$$(2A-B)-2Ax=x$$

$$-2A=1 \quad \boxed{A=-1/2} \qquad 2A-B=0 \quad \boxed{B=-1}$$

$$y_p=\frac{-x^2}{2}-x$$

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

۲) اگر $f(x)$ بصورت e^{px} (چندجمله‌ای از مرتبه n)

$\cancel{f(x) = e^{px}}$ $\qquad f(x) = e^{px}$ (چندجمله‌ای کامل از مرتبه n)

$$y_p = x^m e^{px} \text{ (چندجمله‌ای کامل از مرتبه } n)$$

که در اینجا m تعداد ریشه‌های معادله P ، معادله مفسر می‌باشد.

مثال:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$$

$$D^2 - 4D + 4 = 0$$

$$(D-2)^2 = 0$$

$$D_2 = D_1 = 2$$

$$y_p = x^2 e^{2x}(Ax + B)$$

۳) اگر $f(x) = M(x)\sin qx + N(x)\cos qx$.

$$y_p = x^m \left[R(x)\sin qx + S(x)\cos qx \right]$$

که $R(x)$ و $S(x)$ چندجمله‌ای کامل از مرتبه n و n ($\max$ درجه $M(x)$ و $N(x)$ است).
و m تعداد ریشه‌های $+iq$ معادله مفسر است.

$$y'' + 4y = 4\cos 2x$$

$$D^2 + 4 = 0 \qquad D = \pm 2i$$

$$y_p\,\cancel{f(x)} = (A\cos 2x + B\sin 2x)\, x^1$$

معادلات مرتبه دوم با ضرایب متغیر :

معادله اولر :

$$x^2y''+axy'+by=f(x)$$

برای حل معادله اولر از تغییر متغیر $x=e^z$ یا $z=\ln x$ استفاده کرده که

در این صورت به معادله به یک معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت تبدیل می گردد :

$$y''+(a-1)y'+by=f(e^z)$$

برای این حل ابتدا حالت همگن را حل نموده سپس برای غیر همگن هم بدست می آوریم.

برای قسمت همگن :

$$D^2+(a-1)D+b=0$$

جواب حقیقی D_1 و D_2 :

$$y=c_1e^{D_1z}+c_2e^{D_2z}$$

$$y=c_1e^{D_1\ln x}+c_2e^{D_2\ln x}$$

$$y=c_1e^{\ln x^{D_1}}+c_2e^{\ln x^{D_2}}$$

$$\boxed{y=c_1x^{D_1}+c_2x^{D_2}}$$

ریشه مضاعف $D_1=D_2$:

$$y=(c_1+c_2z)e^{Dz}$$

$$\boxed{y=(c_1+c_2\ln x)x^D}$$

$D_1, D_2=p\pm iq$:

$$y=e^{pz}[c_1\cos(qz)+c_2\sin(qz)]$$

$$y=x^p[c_1\cos(q\ln x)+c_2\sin(q\ln x)]$$

در حالت $\Delta<0$ جواب ها

نوسانی هستند.

سیستم کروی:

یک کره فلزی در دمای اولیه T_0 در اختیار داریم دمای سطح کره را به T_1 می رسانیم توزیع دما را در راستای شعاعی در این کره بدست آورید.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\frac{DT}{Dt}$$

در مسئله فوق:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(r,t=0)=T_0$$

$$T(R,t)=T_1$$

$T(0,t)=$ مشخص یا $\frac{\partial T}{\partial r}(r=0,t)=0$

$$\theta=T-T_1$$

$$\rightarrow\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

$$\theta(r,t=0)=\theta_0$$

$$\theta(R,t)=0$$

$\theta(0,t)=$ مشخص یا $\frac{\partial\theta}{\partial r}(r=0,t)=0$

حل به روش جداسازی: $\theta=R(r)\cdot\tau(t)$

$$\frac{\tau}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2R'\right)=\frac{R}{\alpha}\tau'$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین}}\quad \frac{1}{r^2R}\left[2rR'+r^2R''\right]=\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=\begin{matrix}+\lambda^2\\0\\-\lambda^2\,\checkmark\end{matrix}$$

$$\to \tau = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{r^2 R}\left(2rR' + r^2 R''\right) = -\lambda^2$$

$$r^2 R'' + 2rR' + \lambda^2 r^2 R = 0 \to R'' + \frac{2}{r}R' + \lambda^2 R = 0$$

تغییر متغیر $\Psi = rR \to R = \frac{\Psi}{r}$

$$R' = \frac{\Psi'}{r} - \frac{\Psi}{r^2}$$

$$R'' = -\frac{\Psi'}{r^2} + \frac{\Psi''}{r} + \frac{2}{r^3}\Psi - \frac{\Psi'}{r^2}$$

$$\to -\cancel{\frac{\Psi'}{r^2}} + \frac{\Psi''}{r} + \cancel{\frac{2\Psi}{r^3}} - \cancel{\frac{\Psi'}{r^2}} + \cancel{\frac{2\Psi'}{r^2}} - \cancel{\frac{2}{r^3}\Psi}$$

$$+\lambda^2\frac{\Psi}{r} = 0$$

$$\to \boxed{\Psi'' + \lambda^2\Psi = 0}$$

$$D^2 + \lambda^2 = 0$$
$$D = \pm\lambda i$$

$$\Psi = rR = C_1\cos\lambda r + C_2\sin\lambda r$$

$$R = \frac{C_1}{r}\sin\lambda r + \frac{C_2}{r}\cos\lambda r$$

$$R(R) = 0 \to \sin\lambda R = 0 \to \sin n\pi = 0 \to \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{R}} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$R(r=0) =$ محدود $\to \boxed{C_2 = 0} \to R(r) = C_1\frac{\sin\lambda r}{r}$

در $n=0 \leftarrow \lambda = 0$ جواب حالت steady.

$$\Theta = 0 + \sum A_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{R} r\right)}{r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

جواب Steady

* در سیستم کروی اگر در جهت r غیرهمگن باشد به sin می‌رسیم ولی اگر در جهت θ غیرهمگن باشد به توابع لژاندر می‌رسیم.

سال ۸۳

(۱۵۴

$$T_n - T_{n-1} = -\frac{h\Delta x}{k}\left(T_n - T_\infty\right)$$

$$K\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L} = -h\left[T(L) - T_\infty\right]$$

$$K\left[\frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta x}\right] = -h\left[T_n - T_\infty\right]$$

$$T_{n-1} - T_n\left(1 + \frac{h\Delta x}{K}\right) + \frac{h\Delta x}{K}T_\infty = 0$$

۳ (۱۵۷

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) - m^2 r\theta = 0$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} + r\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} - m^2 r\theta = 0$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} - m^2\theta = 0$$

$$\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{(\Delta r)^2} + \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\underbrace{(i\Delta r)}_{\text{به جای } r}(\Delta r)} \cancel{*} - m^2\theta_i = 0$$

$i(\Delta r)^2 = r^2$ به جای

(۱۶۱

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

خطای روش ذوزنقه ای :

$$\frac{(b-a)}{12}h^2 f^{(2)}(\xi)$$

سیمپسون $\frac{1}{3}$

$$\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\xi)$$

سیمپسون $\frac{3}{8}$

$$\frac{(b-a)}{80}h^4 f^{(4)}(\xi)$$

ξ عددی مابین a تا b

$f = e^x \sin x$

$f' = e^x(\sin x + \cos x)$

$f'' = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(\sin x + \cos x) = 2e^x \cos x$

$f''' = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x = 2e^x(\cos x - \sin x)$

$f^{(4)} = 2e^x \sin x$

$$0.00005 = \pi/2 \times \frac{1}{180} h^4 \times (4e^x \sin x)$$

$$= \pi/2 \times \frac{1}{180} h^4 (4 e^{\pi/2} \sin \pi/2)$$

$\pi/2$ می‌گذاریم تا حداکثر خطا بدست آید

$$h = 0.1563$$

$$h = 0.1563 = \frac{(\pi/2) - 0}{n}$$

$$\underline{n = 10.004}$$

(ب) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\beta^2 r$ (۱۷۲

$\cancel{\frac{\partial}{\partial r}}($

$$r\frac{\partial T}{\partial r} = -\beta^2 \frac{r^2}{2}$$

$$dT = -\frac{\beta^2 r}{2} dr$$

$$T = -\frac{\beta^2 r^2}{4} + c$$

$$T_\infty = -\beta^2/4\, r_0^2 + c)$$

$$c = T_\infty + \frac{\beta^2 r_0^2}{4}$$

$$T - T_\infty = \beta^2/4\,(r_0^2 - r_i^2)$$

$$y'' = f(x,y)$$ (۱۲۵

$$y'_{i+1} = y'_i + h y''_i$$

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

$$h = 0.1$$

$$y'(0.1) = y'(0) + h y''(0)$$

$$1 + 0.1\left[0 \times y(0) + \cancel{\frac{y(0)}{0+1}}^{\,0}\right]$$

$$y'(0.1) = 2$$

$$y'(0.2) = y'(0.1) + h y''(0.1)$$

$$y'(0.2) = 1 + 0.1\left[0.1 \times y(0.1) + \frac{y(0.1)}{1.1}\right]$$

$$y(0.1) = y(0) + 0.1\, y'(0) + \frac{h^2}{2}[0]$$

$$y(0.1) = 0.1$$

$$y'(0.2) = 1 + 0.1\left[10^{-2} + \frac{0.1}{1.1}\right]$$

$$= 1 + 0.0\phi 1$$

$$x^2 y'' + x y' - y = 0$$ (۱۷۲

$$D^2 + (1-1)D - 1 = 0$$

$$D = \pm 1$$

$$y(x) = C_1 x_1 + \frac{C_2}{x} \longrightarrow y = C_1 x$$

$$(2xy^2+2)\,dx + (2x^2y+4y)\,dy = 0$$ (۱۷۱

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2+2 \qquad u = x^2y^2+2x+f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = 2x^2y + f'(y)$$

$$f'(y) = 4y \qquad f(y) = 2y^2$$

$$u = x^2y^2+2x+2y^2 = k$$

$$y^2(x^2+2) = k-2x$$

$$y^2 = \frac{k-2x}{x^2+2} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{k-2x}{x^2+2}}$$

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} + 3\left(\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right) - 5y_i$$ (۱۵۸

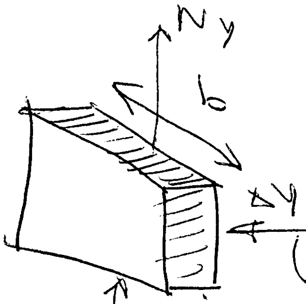
$$= 4x_i$$

طرفین در h^2 ضرب

مشتق دوم از مرکزی استفاده کنید. مشتق اول به گزینه ها نگاه کنید.

۱(۱۶۰

(۱۷۰



$$(N_x\,\Delta y * b)\big|_x - (N_x\,\Delta y\, b)\big|_{x+\Delta x}$$

$$(b\,\Delta x\, N_y)_{y+\Delta y} + (N_y\,\Delta x\, b)\big|_{y+\Delta y}$$

$$(N_y\,\Delta x\, b)\big|_y =$$

$$-\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

$$N = J + CV$$

سوالات عددی:

۳) ۶۲

$$y = \frac{1}{(ax+b)^2} \qquad (ax+b)^2 = \frac{1}{y}$$

$$ax+b = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

y جدید

$$ax+b = Y$$

x	y	X	$Y = \frac{1}{\sqrt{y}}$
0			1
0.5			2
1			2.5

۶۳) هیچ کدام جایگذاری نکنید.

۶۴) در دو تکه باید انتگرال‌گیری کرد.

۶۵)

1	7.1
1.1	8.46
1.2	9.85

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{-x}}\,dx \qquad \sqrt{-x} = u$$

$$-x = u^2$$

$$-\int_{1}^{0} \frac{e^{-u^2}}{u}(2u\,du) \qquad -dx = 2u\,du$$