فصل دوم

نمودارهای کنترل برای متغیرهای پیوسته (متغیر)

به یک ویژگی قابل اندازه‌گیری مثل طول ـ وزن ـ قطر که پس از اندازه‌گیری با یک عدد نشان داده می‌شود متغیر کمی گفته می‌شود.
برای هر متغیر کمی که باید کیفیت آن کنترل شود دو پارامتر میانگین و تغییرات (پراکندگی) مورد بررسی قرار می‌گیرد.
نمودارهای کنترل آماری فرآیند SPC (Statistical Process Control)برای تشخیص این‌که انتقال در مکان (میانگین) و یا پراکندگی (واریانس) توزیع متغیر کمی، بیش از آن چیزی است که به تصادف نسبت داده می‌شود یا نه، عمل می‌کنند. در واقع این نمودارها در کشف انحرافات با دلیل به ما کمک می‌کنند.

حدود کنترل ـ حدود تلرانس طبیعی ـ حدود مشخصه فنی

دو خط بالا و پایین نمودار به ما کمک می‌کنند تشخیص دهیم تغییرپذیری انتقال پارامترها از کدام جهت صورت گرفته است.

LCL(Lower Control Limit)
UCL (Upper Control Limit)

خط وسط یا CL (Centrol Line) میانگین نقاط رسم شده در نمودار است که در صورت معلوم بودن توزیع جامعه مقدار واقعی پارامتر است.

دو حد دیگر برای مشخصه فنی یا پارامترهای توزیع وجود دارد که عبارتند از:

LSL (Lower Specification Limit)
USL (Upper Specification Limit)

این حدود که حدود رواداری نامیده می‌شوند توسط طراح از طریق پرداختن به نیازهای مشتری در رابطه با مشخصه کیفی ارائه می‌گردد و با حدود کنترل متفاوت هستند و LSL و USL حدود X هستند در حالی که LCL و UCL حدود $\bar{X}$ می‌باشند.
ضمناً حدود تلرانس طبیعی عبارتند از:

UNTL (Upper Natural Tolerance Limit)
LNTL (Lower Natural Tolerance Limit)

این حدود معمولاً به صورت $\mu \pm 3\sigma$ تعریف می‌شوند. و حدود هشدار عبارتند از:

UWL (Upper Warning Limit)
LWL (Lower Warning Limit)

این حدود معمولاً به صورت $\mu \pm 2\sigma$ تعریف می‌شوند.

نمودارهای مفید برای میانگین و پراکندگی عبارتند از $R,S,\bar{X}$ که $\bar{X}$ میانگین و S انحراف معیار و R دامنه تغییرات مشاهدات است، هر چند نمودار S انحراف معیار داده‌ها و تغییرات فرایند را کنترل می‌کند اما استفاده از نمودار R معمولاً بیشتر رخ می‌دهد. لازم به ذکر است در هر فرایند میانگین و تغییرات همزمان مورد کنترل واقع شوند.

نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های کیفی پیوسته دارای اهداف زیر است.

الف) کنترل پارامتر مرکزی (میانگین)　　　　ب) کنترل تغییرات از دیدگاه پراکندگی

انواع نمودارهای کنترل
- بخشI: زیرگروه‌های چندعضوی $n_i > 1$، $\left(\bar{X},R,S\right)$
- بخشII: زیرگروه‌های تک عضوی $n_i = 1$، $\left(\bar{X},R_M,EWMA,EWMD,CUSUM\right)$

بخش I:

۱ـ نمودار $\bar{X},R$

می‌دانیم اگر $X_1,\cdots,X_n \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ وقتی μ,σ^2 معلوم است با احتمال $100(1-\alpha)\%$ میانگین نمونه $\left(\bar{X}\right)$ از میانگین جامعه (μ) حداکثر باندازه $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ اختلاف دارد یعنی با احتمال $(1-\alpha)100\%$, $\bar{X} \in \left(\mu \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

حال با فرض معلوم بودن μ,σ^2 حدود کنترل پیدا می‌شود که اگر $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 3$ پس 99.73% از میانگین‌ها باید در $\bar{X} \in \left(\mu \pm \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ صدق کنند.

به عبارت دیگر $LCL = \mu - A\sigma, UCL = \mu + A\sigma, CL = \mu$ که $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$ و از جدول انتهای فصل به‌دست می‌آید.

لازم به ذکر است اگر جامعه اصلی که از آن نمونه گرفته‌ایم نرمال باشد بنا به قضیه حد مرکزی استفاده از روابط بالا برای جوامع دیگر اشکال ندارد به شرط آن‌که تعداد نمونه‌ها بزرگ باشد.

اگر μ,σ^2 معلوم نباشند بایستی آن‌ها را برآورد کرد. فرض بر این است m بار نمونه‌گیری کرده‌ایم و هر بار تعداد n نمونه انتخاب کرده‌ایم و $\bar{X}_1,\cdots,\bar{X}_m$ میانگین نمونه‌های n تایی هستند حال $\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{mn}$ میانگین کل نمونه‌ها برآورد مناسبی از μ است. $\bar{\bar{X}}$ به‌عنوان خط مرکزی (CL) در نمودار کنترل مورد استفاده واقع می‌شود. برای برآورد σ از روش زیر استفاده می‌شود.

اگر $R = X_{max} - X_{min}$ دامنه تغییرات نمونه n تایی باشد و $W = \frac{R}{\sigma}$ را **دامنه نسبی** بنامیم با توجه به آن‌که $E(W) = E\left(\frac{R}{\sigma}\right) = d_2$, $Var(W) = d_3^2$ مقادیری ثابت بر حسب n هستند، می‌توان از $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ به‌عنوان برآورد σ استفاده نمود.

که در آن وقتی m بار نمونه‌گیری می‌شود اگر R_i دامنه تغییرات نمونه n تایی i ام باشد آن‌گاه $\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{m}$ میانگین دامنه‌های تغییرات است. میزان دقت $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ برای برآورد σ با افزایش n کم می‌شود و معمولاً برای 6 یا 5 یا n=4 این روش قابل قبول است.

حال به‌جای $\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ بایستی برآورد زیر را به‌کار ببریم.

$$\bar{\bar{X}} \pm \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R}$$

معمولاً از ضریب‌های ثابت $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$ که فقط به n بستگی دارد استفاده می‌شود و حدود کنترل برآورد شده عبارت‌اند از

$$\bar{\bar{X}} \pm A_2\bar{R}$$

یعنی $CL = \bar{\bar{X}}$ و $UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$ و $LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$ نمودار کنترل فوق برای پارامتر مرکزی میانگین تهیه شده است.
ضرایب d_2, A_2 را می‌توانید از جدول انتهای فصل ملاحظه فرمایید.

تذکر: در مورد تعداد زیرگروه‌ها (m) و تعداد نمونه هر زیر گروه (n) بایستی توجه نمود تعداد نمونه هر زیر گروه با کارایی نسبی برآورد σ از طریق R یعنی $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ نسبت عکس دارد. یعنی هر چه تعداد نمونه بیشتر کارایی کمتر می‌گردد با این وجود نمی‌توان کمترین تعداد نمونه را پیشنهاد کرد و می‌گویند برای 6 یا 5 یا n=4 این کارایی مناسب است ضمناً تعداد زیر گروه‌ها را نمی‌توان کمتر از 20 در نظر گرفت پس:

$$m \geq 20 \quad , \quad 4 \leq n \leq 6$$

حال می‌توان نمودار R را برای پارامتر پراکندگی به شرح زیر به‌کار برد.
همان‌طور که دیدیم

$$E(W) = d_2$$

$$Var(W) = \frac{Var(R)}{\sigma^2} = d_3^2$$

حال $\hat{\sigma}_R = \sigma d_3 = \frac{\bar{R}}{d_2}d_3$ می‌تواند به‌عنوان برآورد انحراف معیار دامنه تغییرات به‌کار رود.

پس اگر $\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{m}$ خط مرکزی باشد حد بالای کنترل نمودار R به صورت

$$\bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} = \bar{R}\left(1 + 3\frac{d_3}{d_2}\right) = \bar{R}D_4$$

و حد پایین کنترل نمودار R به صورت

$$\bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} = \bar{R}\left(1 - 3\frac{d_3}{d_2}\right) = \bar{R}D_3$$

مثال ۱: اطلاعات زیر میانگین و دامنه تغییرات 20 نمونه 5 تایی از میزان شکر موجود در بسته‌های شکر در کارخانه بر حسب کیلوگرم می‌باشد الف با توجه به اطلاعات زیر حدود کنترلی $\bar{X}$ و R برای تولیدات آتی به‌دست آورید؟

ب) این نمونه هر 15 دقیقه به‌کار گرفته شده‌اند و تولید در ساعت کارخانه 350 بسته می‌باشد و حدود مطلوب نیز 0.820 تا 0.840 kg می‌باشد.

با توجه به این‌که فرض شود وزن بسته‌ها دارای توزیع نرمال است. چند درصد از آن‌ها نامطلوب شناخته می‌شوند؟ آیا با تغییر میانگین فرآیند می‌توان درصد نامطلوب را صفر کرد؟

ج) برآورد قابلیت فرایند و نسبت‌های قابلیت فرایند یک طرفه را محاسبه کنید؟

حل مثال ۱

	$\bar{X}$	R
۱	0.8372	0.01
۲	0.8324	0.009
۳	0.8318	0.008
۴	0.8344	0.004
۵	0.8349	0.005
۶	0.8332	0.011
۷	0.8340	0.009
۸	0.8344	0.003
۹	0.8308	0.002
۱۰	0.8350	0.006
۱۱	0.8380	0.006
۱۲	0.8322	0.002
۱۳	0.8356	0.013
۱۴	0.8322	0.015
۱۵	0.8304	0.008
۱۶	0.8372	0.011
۱۷	0.8382	0.006
۱۸	0.8346	0.006
۱۹	0.8360	0.004
۲۰	0.8374	0.006

$$\sum \bar{X} = 16.6796$$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{16.6796}{20} = 0.83398$$

$$\sum R = 0.134 \qquad \bar{R} = \frac{0.134}{20} = 0.0067$$

$$UCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 0.83398 + (0.58 \times 0.006) = 0.8379$$

$$LCL\bar{X} = \bar{X} - A_2\bar{R} = 0.83398 - (0.58 \times ??) = 0.8301$$

$$UCL_R = D_4\bar{R} = 2.11 \times 0.0067 = 0.01414$$

$$LCL_R = D_3\bar{R} = 0 \times 0.0067 = 0$$

ب)

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = 0.00288$$

$$P(0.82 < X < 0.84) = 0.9812$$

1.8% نامطلوب

ج)

$$\hat{C}_p = \frac{0.84 - 0.82}{6(\hat{\sigma})} = 1.157$$

D_4, D_3 مقادیر ثابتی هستند که فقط به n بستگی دارند. و در جدول انتهای فصل آمده‌اند.

تذکر: با توجه به حدود کنترل نمودار R برای n<7، حد پایین کنترل R عددی منفی می‌شود در حالی که R باید مثبت باشد. برای حل این مساله ضریب D_3 برای $n \le 6$ را برابر صفر قرار می‌دهند. بنابراین فقط در این حالتها نمودار کنترل R به صورت متقارن نیست. لازم به ذکر است در هر حال وجود نقطه پایین‌تر از حد پایین کنترل نمودار R نشان از وضعیت عالی است.

حال که حدود کنترل پیدا شدند برای رسم نمودار این حدود کنترل را که حدود آزمایشی نیز گفته می‌شود رسم می‌کنند سپس m مقدار میانگین نمونه‌ها ($\bar{X}$ها) را و همچنین m مقدار دامنه تغییرات نمونه‌ها (R ها) را به‌عنوان نقطه روی نمودارهای $\bar{X}$ و R قرار می‌دهند و هر نقطه که خارج از حدود آزمایشی باشد مورد بررسی قرار می‌گیرد و در صورت پیدا شدن تغییر تصادفی این نقطه حذف و حدود کنترل مجددا حساب می‌شوند. اگر در حدود جدید نقطه‌ای خارج از کنترل باشد نشان آن است که این انحرافات موجود بوده اما با حدود قبلی مغفول مانده است این روند یافتن نقاط خارج از کنترل و عوامل تغییر با دلیل آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا همه نقاط در حدود کنترل باشند. در هر حال نباید بیشتر از 25% نقاط حذف شوند. در این صورت ضمن اقدام درخصوص عوامل تغییر با دلیل داده‌های جدید باید نمونه‌گیری شود.

تذکر:

۱ـ بهتر است اول نمودار R و سپس نمودار $\bar{X}$ رسم شود چون حدود کنترل نمودار $\bar{X}$ به پراکندگی و تغییرپذیری فرایند وابسته است.

۲ـ اگر نقطه یا نقاطی حذف شوند می‌توان برای ساده شدن محاسبات از فرمول‌های زیر استفاده نمود.

$$\bar{\bar{X}}_n \text{ جدید} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i - \sum \bar{X}_d}{m - m_d}$$

که در آن $\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i$ مجموع میانگین‌های قبلی و $\sum \bar{X}_d$ مجموع میانگین‌های زیرگروه‌های حذف شده و m تعداد زیرگروه‌ها و m_d تعداد زیرگروه‌های حذف شده است.

$$\bar{R}_n \text{ جدید} = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i - \sum R_d}{m - m_d}$$

که در آن $\sum_{i=1}^{m} R_i$ مجموع دامنه تغییرات زیرگروه‌ها و $\sum R_d$ مجموع دامنه تغییرات زیرگروه‌های حذف شده و m تعداد زیرگروه‌ها و m_d تعداد زیرگروه‌های حذف شده است. ضمناً اندیس n برای $\bar{R}_n, \bar{\bar{X}}_n$ نشان دهنده برابر n بودن تعداد نمونه زیرگروه‌ها می‌باشد.

حال اگر قرار دهید

$$\bar{\bar{X}} = \bar{X}_0 \quad , \quad \bar{R}_n = R_0 \quad , \quad \frac{R_0}{d_2} = \sigma_0$$

حدود کنترل اصلاح شده در دو حالت معلوم و مجهول بودن μ, σ^2 به ترتیب عبارتند از:

$$CL_{\bar{X}} = \bar{X}_0 \quad , \quad UCL_{\bar{X}} = \bar{X}_0 + A\sigma_0 \quad , \quad LCL_{\bar{X}} = \bar{X}_0 - A\sigma_0$$

و یا $\bar{x}_n \pm A\sigma_0$ و

$$CL_R = \bar{R}_n = R_0 \quad , \quad UCL_R = D_2\sigma_0 \quad , \quad LCL_R = D_1\sigma_0$$

که $\sigma_0 = \frac{\bar{R}_n}{d_2}$ و $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$

ضرایب A, D_2, D_1 را می‌توانید از جدول آخر فصل ملاحظه فرمایید.

مثال۲: اطلاعات زیر نتایج حاصل از نمونه‌های 5 تایی که از یک فرآیند ساخت مولدهای برق تهیه شده‌اند را نشان می‌دهند. مشخصه کیفی موردنظر ولتاژ خروجی است:

$\bar{X}_i$	103	102	104	105	104	106	102	105	106	104
R_i	4	5	2	11	4	3	7	2	4	3

خط مرکزی و حدود کنترلی مناسبی را برای کنترل تولیدات آتی محاسبه کنید؟

حل:

$$\sum \bar{X}_i = 1041$$

$$\sum R_i = 45$$

$$UCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 104.1 + 0.577 \times 4.5 = 106.69$$

$$CL\bar{X} = \bar{\bar{X}} = 104.1$$

$$LCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 104.1 - 0.577 \times 4.5 = 101.5$$
$$LCL_R = \bar{R}D_3 = 0$$
$$CL_R = \bar{R} = 4.5$$
$$UCL_R = \bar{R}D_4 = 4.5 \times 2.114 = 9.51$$

$\bar{X}_i$ها همگی داخل حدود کنترل و داده 4ام از حدود کنترل R خارج است.

$$\bar{R}_n = \frac{\sum R_i - R_d}{g - g_d} = \frac{45-11}{10-1} = 3.78$$

$$LCL_R = 0$$
$$CL_R = 3.78$$
$$UCL_R = 7.99$$

مثال۳: فرض کنید اعداد زیر مربوط به 25 نمونه 4 تایی از قطر قطعات تولیدی در یک فرآیند است که تفاضل اندازه‌ها از 6mm نوشته شده است (مثلاً به‌جای 6.35mm نوشته‌اند 35) نمودارهای $\bar{X}$ و R را رسم نمایید.

	اندازه‌ها				$\bar{X}$	R
شماره نمونه	A	B	C	D		
۱	35	40	32	33	6.35	0.08
۲	46	37	36	41	6.40	0.10
۳	34	40	34	36	6.36	0.06
۴	69	64	68	59	6.65	0.10
۵	38	34	44	40	6.39	0.10
۶	42	41	43	34	6.40	0.09
۷	44	41	41	46	6.43	0.05
۸	33	41	38	36	6.37	0.08
۹	48	52	49	51	6.50	0.04
۱۰	47	43	36	42	6.42	0.11
۱۱	38	41	39	38	6.39	0.03
۱۲	37	37	41	37	6.38	0.04
۱۳	40	38	47	35	6.40	0.12
۱۴	38	39	45	42	6.41	0.07
۱۵	50	42	43	45	6.45	0.08
۱۶	33	35	29	39	6.34	0.10
۱۷	41	40	29	34	6.36	0.12
۱۸	38	44	28	58	6.42	0.30
۱۹	33	32	37	38	6.35	0.06
۲۰	56	55	45	48	6.51	0.11
۲۱	38	40	45	37	6.40	0.08
۲۲	39	42	35	40	6.39	0.07
۲۳	42	39	39	36	6.39	0.06
۲۴	43	36	35	38	6.38	0.08
۲۵	39	38	43	44	6.41	0.06
جمع						

حل: با توجه به آن‌که $m = 25$ و $n = 4$ داریم:

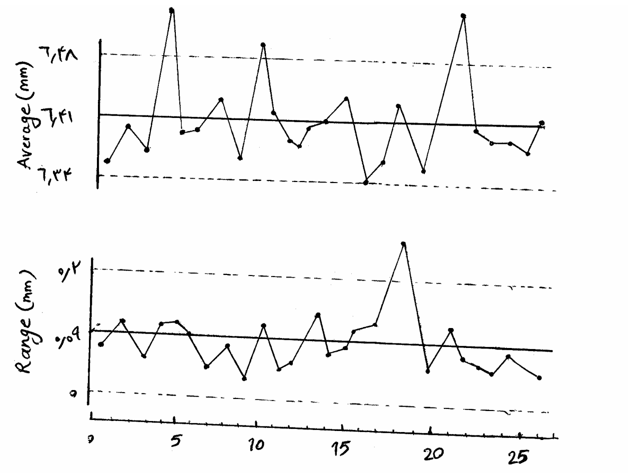
$$\bar{\bar{X}} = \frac{160.25}{25} = 6.41 \quad , \quad UCL_{\bar{X}} = 6.41 + 0.07 = 6.48$$

$$\bar{R} = \frac{2.19}{25} = 0.09mm \quad , \quad LCL_{\bar{X}} = 6.41 - 0.07 = 6.34$$

$$A_2\bar{R} = 0.729(0.09) = 0.07 \quad , \quad UCL_R = 0.20$$

$$D_4\bar{R} = 2.282(0.09) = 0.20 \quad , \quad LCL_R = 0$$

نمودارهای مربوط به $\bar{X}$ و R به صورت زیر رسم می‌شوند.



برای یافتن حدود اصلاح شده داریم:

$$\bar{R}_{new} = \frac{2.19 - 0.3}{25 - 1} = 0.079mm$$

$$\bar{X}_{new} = \frac{160.25 - (6.65 + 6.51 - 6.50)}{25 - 3} = 6.39$$

۲ـ نمودارهای کنترل $S, \bar{X}$

همان‌طور که دیدید یک روش برآورد σ استفاده از R می‌باشد روش دیگر برآورد σ استفاده مستقیم از S_i است که انحراف معیار نمونه‌هاست. می‌دانیم $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ برآورد ناااریب σ^2 است یعنی $E(S^2) = \sigma^2$ اما با فرض آن‌که توزیع جامعه نرمال است قرار دهید $S_i^2 = \frac{\sum (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}$ و $\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} S_i^2}{m}$ آن‌گاه می‌توان نشان داد

$$E(\bar{S}) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \sigma = C_4\sigma$$

$$\sigma_S = \sqrt{Var(S)} = \sigma\sqrt{1 - C_4^2}$$

و لذا حدود کنترل نمودار S عبارتند از:

$$UCL_S = \overline{S} + \frac{3\overline{S}}{C_4}\sqrt{1-C_4^2} = B_4\overline{S}$$

$$LCL_S = \overline{S} - \frac{3\overline{S}}{C_4}\sqrt{1-C_4^2} = B_3\overline{S}$$

و خط مرکزی $\overline{S}$ است.

و حدود کنترل $\overline{X}$ با استفاده از برآورد $\overline{S}$ عبارت است از:

$$UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_3\overline{S} \quad , \quad LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_3\overline{S}$$

و خط مرکزی $\overline{\overline{X}}$ است.

لازم به ذکر است در واقع $A_3 = \frac{3}{C_4\sqrt{n}}$

ضرایب A_3, B_3, B_4 از جدول انتهای فصل قابل به‌دست آوردن است.

برآورد قابلیت فرآیند Process Capability

نسبت قابلیت فرایند به صورت زیر تعریف می‌شود.

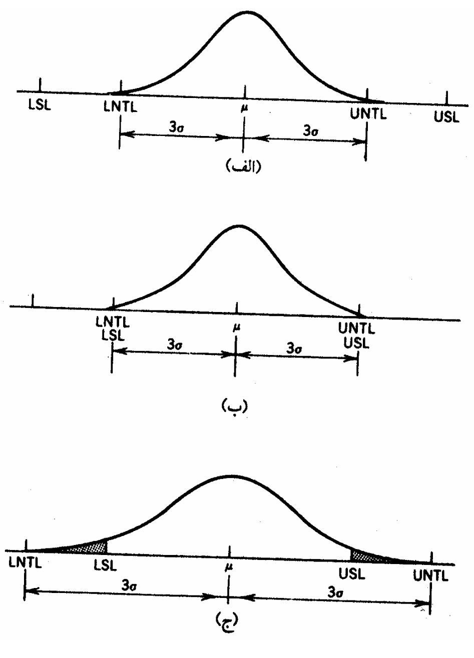
$$PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

که در آن USL و LSL حدود مشخصه فنی هستند و 6σ فاصله حدود تلرانس طبیعی یعنی UNTL - LNTL می‌باشد. PCR را با C_p نیز نشان می‌دهند. PCR مخفف Process Capability Ratio است.

σ که انحراف معیار جامعه و معمولاً مجهول است می‌تواند توسط $\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2}$ یا $\hat{\sigma} = \overline{S}$ برآورد شود لذا برآورد نسبت قابلیت فرایند که آن را با $\widehat{PCR}$ یا $\hat{C}_p$ نشان می‌دهند عبارت است از:

$$\hat{C}_p = \widehat{PCR} = \frac{USL - LSL}{\hat{\sigma}}$$

در شکل زیر سه حالت برای $\hat{C}_p$ در نظر گرفته شده است که فرض بر این است که میانگین وسط حدود مشخصات فنی قرار دارد.



شکل (الف) بیانگر آن است که $\hat{C}_p > 1$ یعنی حدود تلرانس طبیعی داخل حدود مشخصه فنی هستند. در این حالت فرآیند وضعیت مناسبی دارد و تقریباً معیوب تولید نمی‌شود زیرا فرآیند از فاصله کل مجاز استفاده ننموده و فقط بخشی از آن را به کار گرفته است.

شکل (ب) بیانگر آن است که $\hat{C}_p = 1$ یعنی فرآیند از تمام فاصله مجاز استفاده کرده و حدود تلرانس طبیعی، حدود مشخصه فنی را پوشش داده است با فرض برقراری توزیع نرمال و با توجه به آن‌که

$$P\left(|X-\mu|<3\sigma\right)=0.9973$$

می‌توان گفت در این حالت 0.27% از اقلام معیوب تولید می‌شوندبه عبارت دیگر در هر میلیون قطعه 2700 مورد معیوب می‌باشد که شرایط خوبی نیست و باید چاره‌اندیشی شود.

شکل (ج) بیانگر آن است که $\hat{C}_p < 1$ یعنی فرآیند بیش از فاصله مجاز استفاده نموده و نشانگر تولید معیوب خارج از قاعده است.

تذکر: اگر قرار دهید $P=\left(\frac{1}{\hat{C}_p}\right)100$ آن‌گاه P درصدی از فاصله بین حدود مشخصات فنی را نشان می‌دهد که به وسیله فرایند از آن استفاده گردیده است.

نسبت‌های قابلیت یک‌طرفه

وقتی از یکی از حدود مشخصه فنی استفاده شود PCR را می‌توان به صورت یک طرفه طبق تعاریف زیر پیدا کرد.

$$PCR_U=\frac{USL-\mu}{3\sigma} \quad , \quad PCR_L=\frac{\mu-LSL}{3\sigma}$$

که وقتی به‌جای σ,μ برآوردهای $\hat{\sigma},\hat{\mu}$ بگذاریم برآوردهای نسبت قابلیت یک طرفه به‌دست می‌آیند.

در صورت نامتقارن بودن فرایند و حدود مشخصه فنی نسبت به میانگین فرآیند بهتر است از $PCR_k=\min\{PCR_U,PCR_L\}$ استفاده شود.

نکته۱: از دیدگاه تجربی $\hat{C}_p=1.33$ که در آن $USL-LSL=1.33(6\sigma)=8\sigma$ نشان‌دهنده یک وضعیت مناسب و قابل قبول می‌باشد.

نکته ۲: روش دوم محاسبه قابلیت فرآیند، با فرض $X\sim N\left(\mu=\bar{\bar{X}},\sigma=\frac{R}{d_2}\right)$ احتمال $C_p=P(X<LSL)+P(X>USL)$ را حساب کرده می‌توان آن را میزان تولید محصول معیوب با فرض تحت کنترل بودن فرایند دانست. دقت شود این عدد برای حدود 3σ تقریباً 27% درصد و برای حدود 6σ تقریباً 0.0000002 درصد می‌باشد سپس با یافتن C_p می‌توان وضع فرآیند را با حالت‌های استاندارد مثل 6σ مقایسه نمود.

مثال۴: اطلاعات زیر نتایج حاصل از نمونه‌های 5 تایی در تولید شفت در یک کارخانه اتومبیل‌سازی می‌باشد، خط مرکزی و حدود کنترلی مناسب اصلاح شده را برای کنترل قطر شفت‌های تولیدات آتی به‌دست آورید.

	$\bar{X}$	R
۱	6.35	0.08
۲	6.40	0.1
۳	6.39	0.6
۴	6.65	0.1
۵	6.39	0.1
۶	6.40	0.09
۷	6.43	0.05
۸	6.37	0.08
۹	6.50	0.04
۱۰	6.42	0.11
۱۱	6.39	0.03
۱۲	6.38	0.04
۱۳	6.40	0.12
۱۴	6.41	0.07
۱۵	6.35	0.08
۱۶	6.34	0.1
۱۷	6.39	0.12
۱۸	6.42	0.3
۱۹	6.35	0.06
۲۰	6.51	0.11
۲۱	6.40	0.08
۲۲	6.39	0.07
۲۳	6.39	0.06
۲۴	6.38	0.08
۲۵	6.41	0.06

حل :

$$\bar{\bar{X}} = \frac{160.25}{25} = 6.41\text{mm}$$

$$\bar{R} = \frac{2.19}{25} = 0.09\text{mm}$$

$$A_2\bar{R} = 0.729(0.09) = 0.07$$

$$UCL_{\bar{X}} = 6.41 + 0.07 = 6.48$$

$$LCL_{\bar{X}} = 6.41 - 0.07 = 6.34$$

$$D_4\bar{R} = 2.282(0.09) = 0.2$$

$$UCL_R = 0.2$$

$$LCL_R = 0$$

$$\bar{X}_0 = \bar{\bar{X}}_{new} = \frac{160.25 - (6.65 + 6.51)}{25 - 2}$$

$$R_0=\bar{R}_{new}=\frac{2.19-0.3}{25-1}=0.079mm$$

$$\sigma_0=\frac{R_0}{d_2}=0.038 \quad , \quad \bar{X}_0=6.40$$

$$UCL\bar{X}=\bar{X}_0+A\sigma_0=6.40+(1.5)(0.038)=6.46mm$$

$$LCL\bar{X}=\bar{X}_0-A\sigma_0=6.40-(1.5)(0.038)=6.34mm$$

$$UCL_R=D_2\sigma_0=(4.698)(0.038)=0.18mm$$

$$LCL_R=D_1\sigma_0=(0)(0.038)=0mm$$

$$\bar{\bar{X}}_0=\frac{16.6796-(0.8380+0.8282)}{20-2}=0.834077$$

$$UCL_{\bar{X}}=\bar{X}_0+A_2\bar{R}=0.834077+0.003886=0.8380$$

$$LCL_{\bar{X}}=\bar{X}_0-A_2\bar{R}0.834077-0.003886=0.8302$$

$$UCL_R=D_4R=0.1414$$

$$LCL_R=D_3R=0$$

$$U=0.840$$

$$L=0.820$$

$$\hat{\sigma}=\frac{\bar{R}}{d_2}=\frac{0.0067}{2.326}=0.0029$$

$$6\sigma'=6\times0.0029=0.0174$$

$$U-L=0.020$$

با توجه به این‌که $U-L>6\sigma'$ پس درصد معیوب‌ها می تواند به صفر برسد.

در صورتی که میانگین برابر $0.830=\frac{0.840+0.820}{2}$ گردد درصد معیوب صفر می‌شود.

۳)

$$\hat{\sigma}=\frac{\bar{R}}{d_2}=0.0029 \qquad \hat{C}_p=\frac{USL-LSL}{6\times\hat{\sigma}}=\frac{0.02}{6\times0.0067}$$

$$PCR_U=\frac{0.840-0.834077}{3\times0.0067}$$

$$PCR_L=\frac{0.834077-0.820}{3\times0.0067}$$

مثال۵: نمونه‌های 5 تایی از فرآیندی در فواصل معین انتخاب می‌شوند در هر بار نمونه‌گیری مشخصه‌ی کیفی موردنظر اندازه‌گیری و مقادیر $\bar{X}$ و R محاسبه می‌گردند. نتایج حاصل از 25 نمونه در زیر نشان داده شده است:

$$\sum_{i=1}^{25}\bar{X}_i=88.7738 \quad , \quad \sum R=0.222$$

۱) حدود کنترلی نمودار $\bar{X}$ و R را به‌دست آورید.

۲) حدود تلرانس طبیعی فرایند را محاسبه کنید.

۳) اگر حدود مشخصات فنی 3.5500 ± 0.0076 باشد و نمونه‌ها دارای توزیع نرمال باشند آن‌گاه در مورد توانایی فرایند در رابطه با تولید محصولاتی که در این فاصله قرار می‌گیرند چه می‌توان گفت؟

۴) برآورد نسبت‌های قابلیت فرآیند را به‌دست آورید؟

حل :

۱)

$$\bar{X} = \frac{88.7738}{25} = 3.5510$$

$$\bar{R} = \frac{0.222}{25} = 0.00888$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.00888}{2.326} = 0.00382$$

$$UCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 3.5510 + (0.58 \times 0.00888) = 3.5562$$

$$LCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 3.5510 - (0.58 \times 0.00888) = 3.5458$$

$$UCLR = D_4\bar{R} = 2.11 \times 0.00888 = 0.01888$$

$$LCL_R = D_3\bar{R} = 0 \times 0.00888 = 0$$

۲)

$$UNSL = \bar{\bar{X}} + 3\hat{\sigma} = 3.5510 + 0.01146 = 3.5625$$

$$LNSL = \bar{\bar{X}} - 3\hat{\sigma} = 3.5510 - 0.01146 = 3.5395$$

۳)

$$U = 3.5500 + 0.0076 = 3.5576$$

$$L = 3.5500 - 0.0076 = 3.5424$$

$$U - L = 3.5576 - 3.5424 = 0.0152$$

$$6\hat{\sigma} = 6 \times 0.00382 = 0.0382 = 0.02292$$

چون $U - L < 6\hat{\sigma}$ پس فرآیند توانایی تولید معیوب دارد.

۴)

$$L = \frac{3.5424 - 3.5510}{3 \times 0.00382} = -0.75$$

$$U = \frac{3.5576 - 3.5510}{3 \times 0.00382} = 0.579$$

بخش II: نمودارهای کنترل با تعداد نمونه زیر گروه n=1

در بعضی از موضوعات بایستی تعداد نمونه هر زیر گروه n=1 باشد در حقیقت زیر گروه‌ها تک عضوی می‌باشند. دلایل زیر می‌تواند چند مورد از این موضوعات را توضیح دهد.

۱ـ طولانی بودن زمان تولید باعث می‌شد فرصت کافی برای چند نمونه نباشد

۲ـ بازرس و تحلیل در هر محصول به طور خودکار انجام شود.

۳ـ آزمایش مجدد در صورت بروز اشتباه و خطا انجام می‌شود.

در این آزمایش‌ها که n=1 پس جمعاً m نمونه گرفته می‌شود. اگر $MR_i = |X_i - X_{i-1}|$ را دامنه متحرک بنامیم می‌توانیم از $\overline{MR} = \frac{\sum_{i=2}^{m} MR_i}{m-1}$ به جای $\bar{R}$ در تهیه نمودارها استفاده کنیم. پس خط مرکزی و حدود بالا و پایین کنترل نمودار R عبارت است از:

$$CL = \overline{MR}$$
$$LCL = D_3\overline{MR}$$
$$UCL = D_4\overline{MR}$$

که در آن D_3, D_4 بر اساس $n = 2$ از جدول آخر فصل پیدا می‌شود. ضمناً از آن‌جا که $\hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{d_2}$ پس خط مرکزی و حدود بالا و پایین کنترل نمودار $\bar{X}$ عبارت است از $LCL = \bar{X} - 3\frac{\overline{MR}}{d_2}$, $CL = \bar{X}$ که d_2 بر اساس $n = 2$ از جدول آخر فصل پیدا می‌شود

$$UCL = \bar{X} + 3\frac{\overline{MR}}{d_2}$$

D_3, D_4 بازای $n = 2$ حساب شده‌اند به وضوح همه نقطه‌ها درون حدود کنترل هستند.

مثال۶: فرض کنید در یک فرآیند تولید محلول شیمیایی غلظت را برای 15 نمونه به شرح زیر اندازه‌گیری کرده‌ایم. یک عضو دارد. با روش دامنه تغییرات متحرک وضعیت تولید را کنترل کنید.

غلظت	شماره نمونه
74.75	۱
74.05	۲
75.00	۳
74.81	۴
74.46	۵
75.02	۶
74.69	۷
74.27	۸
74.49	۹
74.2	۱۰
74.62	۱۱
74.00	۱۲
74.54	۱۳
74.12	۱۴
74.84	۱۵

حل : ابتدا جدولی را برای $MR_i = |X_i - X_{i-1}|$ رسم می‌کنیم.

شماره نمونه	MR_i
۱	
۲	0.7
۳	0.95
۴	0.19
۵	0.35
۶	0.56
۷	0.34
۸	0.41
۹	0.22
۱۰	0.29
۱۱	0.42
۱۲	0.62
۱۳	0.51
۱۴	0.42
۱۵	0.72
جمع	6.73

$$CL = \overline{MR} = \frac{6.73}{14} = 0.481$$

$$UCL_R = D_4 \overline{MR} = 1.57$$

$$LCL_R = D_3 \overline{MR} = 0$$

حال برای حدود کنترل X داریم

$$CL = \bar{X} = \frac{1117.845}{15} = 74.523$$

$$UCL = 74.523 + 3\left(\frac{0.481}{1.128}\right) = 75.8$$

$$LCL = 74.523 - 3\left(\frac{0.481}{1.128}\right) = 73.24$$

که به وضوح همه نقاط درون حدود کنترل هستند.

نمودار کنترل جمع تجمعی Cumulative – Sum – Control Chart (CUSUM)

نمودارهای کنترل شوهارت به دلیل آن‌که از اطلاعات مشترک نقاط بهره‌برداری نمی‌کنند نمی‌توانند تغییرات کوچک در فرآیند را مورد توجه قرار دهند یکی از نمودارهایی که از عهده این مشکل بر می‌آید نمودار (CUSUM) می‌باشد.

فرض کنید m بار نمونه‌گیری کرده‌ایم و هر بار به تعداد $n \geq 1$ عضو نمونه در زیرگروه‌ها وجود دارد. اگر $\bar{X}_j$ میانگین نمونه jام باشد و μ_0 مقدار ایده‌آل میانگین فرایند باشد قرار دهید.

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} \left(\bar{X}_j - \mu_0\right)$$

C_i جمع تجمعی نمونه iام نامیده می‌شود. در واقع C_i مجموع انحرافات میانگین نمونه‌ها از μ_0 را از اولین زیر گروه تا زیرگروه iام حساب می‌کند به نموداری که C_iها در ازای هر زیر گروه رسم می‌شود CUSUM می‌گویند.

تذکر ۱: اگر $n = 1$ یعنی زیرگروه‌ها شامل فقط یک نمونه باشند $\bar{X}_i = X_i$ و سایر روابط تغییر نمی‌کند.

تذکر ۲: با توجه به تعریف C_i اگر $\mu = \mu_0$ یعنی میانگین فرآیند در سطح ایده‌ال باقی بماند بایستی C_iها در اطراف صفر تغییر کنند.

اگر $\mu > \mu_0$ یک روند تدریجی صعودی یا مثبت در C_iها مشاهده می‌شود و اگر $\mu < \mu_0$ یک روند نزولی منفی در C_iها مشاهده می‌شود.

نتیجه: اگر یک روند صعودی یا نزولی در نقاط C_i مشاهده شود می‌توان وجود انحرافات با دلیل را پی‌گیری نموده و فرایند را خارج از کنترل تلقی کرد.

یک روش دقیق تر استفاده از ماسک V (V-Mask) می‌باشد. روش به‌کار بردن ماسک این‌طور است که نقطه O را روی آخرین C_i یعنی C_m منطبق می‌کنند طوری که پاره‌خط OP با محور افقی موازی باشد. اگر C_iها درون زاویه ماسک قرار گیرند فرآیند تحت کنترل است و اگر یک یا چند نقطه خارج از زاویه ماسک باشند فرآیند از کنترل خارج است.

تخمین میانگین جدید

وقتی نمونه j+1ام از کنترل خارج می‌شود (در زاویه ماسک قرار ندارد) قرار دهید.

$$\hat{\mu} = \mu_0 + \frac{C_i - C_j}{i - j}$$

$\hat{\mu}$ میانگین جدید از نمونه jام تا iام می‌باشد.

نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی Exponentially Weighted Moving Average Control Chart (EWMA)

یکی از روش‌هایی که می‌تواند این نقطه ضعف نمودارهای کنترل شوهارت را که نمی‌توانند تغییرات کوچک را شناسایی کنند برطرف نماید نمودار کنترل (EWMA) می‌باشد. این نمودار را برای وقتی $n = 1$ یعنی زیرگروه‌ها انفرادی هستند شرح می‌دهیم.

قرار دهید

$$Z_t = \lambda x_t + (1-\lambda) Z_{t-1} \quad , \quad 1 \leq t \leq m$$

که λ مقدار ثابتی است و $0 < \lambda \leq 1$ و $Z_0 = \mu_0$ یا $Z_0 = \bar{X}$

ثابت می‌شود $\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]$ $\sigma_{z_t}^2=\sigma^2\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]$ که در آن σ^2 واریانس X_i هاست.

که بدیهی است وقتی $t\to\infty$ داریم $\sigma_{z_t}^2 \longrightarrow \sigma^2\frac{\lambda}{2-\lambda}$

پس وقتی t بزرگ است.

$$CL=\mu_0$$

$$UCL=\mu_0+3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

$$LCL=\mu_0-3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

و وقتی t کوچک است.

$$CL=\mu_0$$

$$UCL=\mu_0+3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}$$

$$LCL=\mu_0-3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-(1-\lambda)^{2t}\right)}$$

نکته: وقتی تعداد نمونه زیرگروه‌ها متفاوت باشد و n_i تعداد نمونه زیرگروه i ام باشد خط مرکزی عبارت است از:

$$\bar{\bar{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i\bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

انحراف معیار نمونه‌ها عبارت است از:

$$\bar{S}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)S_i^2}{\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)}}$$

که در آن S_i^2 واریانس نمونه n_i تایی است دقت شود که با توجه به آن‌که ضرایب موردنیاز بر حسب n تهیه شده‌اند می‌شود. شکل زیر یک نوع از این نمودارها را نشان می‌دهد. برای هر نمونه n_i تایی یک ضریب مخصوص و لذا حدود کنترل مربوطه تشکیل می‌شود.

نکته: با توجه به ان‌که استفاده از روابط بالا کار کردن با نمودارهای $\bar{X}$ و S را مشکل می‌کند می‌توان به‌جای به‌کار بردن همه n_iها میانگین آن‌ها یا مد آن‌ها را به‌کار برد و یک نمودار با این مقدار رسم کرد. مثلاً اگر $m=25$ و

$$n_1=n_2=n_3=n_8=n_{10}=n_{11}=n_{15}=n_{17}=n_{18}=n_{20}=n_{22}=4$$

$$n_4=n_5=n_6=n_{13}=n_{19}=n_{23}=n_{25}=65$$

$$n_7=n_9=n_{12}=n_{14}=n_{16}=n_{21}=n_{24}=6$$

می‌توانیم تمام محاسبات را با $n=4$ انجام دهیم یعنی ضرایب را با $n=4$ پیدا کنیم و $\bar{S}$ میانگین انحراف معیارهای نمونه‌هایی است که در آن‌ها $n_i=4$ بوده است و بر اساس $\bar{S}$ و محاسبه C_4 وقتی $n=4$ داریم $\hat{\sigma}=\frac{\bar{S}}{C_4}$

نمودار کنترل S^2

فرض کنید به‌جای استفاده از نمودار S بخواهیم از نمودار S^2 استفاده کنیم در این حال خط مرکزی $CL = \overline{S^2}$ میانگین واریانس‌های نمونه‌های زیر گروه‌ها می‌باشد و حد بالای کنترل به صورت

$$UCL = \frac{\overline{S^2}}{n-1}\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

و حد پایین کنترل به صورت

$$LCL = \frac{\overline{S^2}}{n-1}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$$

می‌باشد. البته در این نمودار هم فرض بر این است m زیرگروه nتایی نمونه‌گیری شده است.

تابع مشخصه عملکرد برای نمودارهای $\bar{X}$ و R

با استفاده از تابع مشخصه عملکرد می‌توان توانایی نمودارهای $\bar{X}$ و R را درخصوص پی بردن به وجود تغییرات در فرایند بررسی کرد. به عنوان یادآوری چند مفهوم را مطرح می‌کنیم.

روش‌های تصمیم‌گیری آماری برای رد یا قبول یک فرض (H_0) در برابر فرض دیگر (H_1) را آزمون فرض نامند.

احتمال خطای نوع اول و دوم

α =P (خطای نوع اول)= P (H_0 رد | H_0 درستی)

β =P (خطای نوع دوم) = P (H_0 قبول | H_0 نادرستی)

در رسم نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و R می‌خواهیم وجود یا عدم وجود تغییرات با دلیل در فرایند را آزمون کنیم. فرض‌های صفر و اولیه را می‌توان از دو طریق مورد بررسی قرار داد. در واقع می‌توانیم برابر بودن میانگین و واریانس با مقادیر هدف‌گذاری شده را مورد آزمون قرار دهیم. یک نوع تلفیق این دو آزمون می‌تواند به صورت زیر صورت‌بندی شود.

H_0 : فقط تغییرات تصادفی در فرایند وجود دارد

H_1 : تغییرات با دلیل در فرآیند وجود دارد

پس

α = P(H_0 رد | H_0 درستی) = P (مشاهده نقاط خارج از کنترل | فرایند دارای تغییرات و خطای با دلیل نیست)

β = (H_0 قبول | H_0 نادرستی) = P (مشاهده نقاط داخل حدود کنترل | فرآیند دارای خطای با دلیل است.)

ضمناً می‌دانیم به

$\Pi(\theta) = P$ (H_0 رد) = $\begin{cases} 1-\alpha & H_0 \text{ درستی} \\ 1-\beta & H_0 \text{ نادرستی} \end{cases}$ تابع توان و به

$OC(\theta) = P$ (H_0 قبول) = $\begin{cases} 1-\alpha & H_0 \text{ درستی} \\ \beta & H_0 \text{ نادرستی} \end{cases}$ تابع مشخصه عملکرد می‌گویند.

فرض کنید انحراف معیار جامعه و ثابت معلوم و برابر σ باشد و میانگین جامعه از مقدار تحت کنترل خود مثلاً μ_0 به $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$ انتقال یابد. احتمال خطای نوع دوم عبارت است از:

$$\beta = P(\mu = \mu_0\ (H_0\ \text{قبول}) | \mu = \mu_1\ \ (H_1\ \text{درستی}))$$
$$= P\left(LCL \le \bar{X} \le UCL | \mu = \mu_1 = \mu_0 + K\sigma\right)$$

حال با توجه به آن‌که $X_i \overset{i.i.d}{\sim} N\left(\mu, \sigma^2\right)$ داریم

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

و

$$LCL = \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad UCL = \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

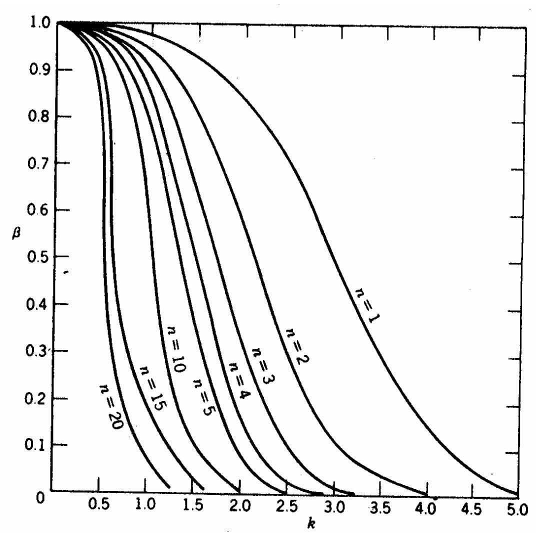
در نتیجه

$$\beta = P\left(\mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} \le \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} | \mu = \mu_0 + K\sigma\right)$$
$$= P\left(-3 - K\sqrt{n} \le \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 3 - K\sqrt{n}\right)$$

که

$$= \Phi\left(3 - K\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-3 - K\sqrt{n}\right)$$

اگر K روی محور افقی و β روی محور عمودی رسم شود نمودارهای OC با توجه به مقدار n رسم می‌شود.



مثال۷: قطر یک شفت پیستون ماشین دارای توزیع نرمال با میانگین 3 و انحراف معیار 2 می‌باشد. اندازه‌ی نمونه‌ها برابر 9 است.

۱) حدود نمودار کنترل $\bar{X}$ با 3 انحراف معیار برای کنترل این مشخصه کیفی به‌دست آورید.

۲) اگر $\alpha = 0.05$ در نظر گرفته شود حدود کنترل را برای کنترل این مشخصه‌ی کیفی به‌دست اورید.

۳) اگر میانگین فرایند به 4 تغییر کند، احتمال پی بردن به حالت خارج از کنترل بودن حداقل تولید به‌وسیله دومین نمونه بعد از ایجاد تغییر در فرآیند چیست؟

۴) اگر میانگین فرآیند به 4 تغییر کند، احتمال این‌که از 4 نقطه متوالی حداقل 3 نقطه خارج از کنترل بیافتد را محاسبه کنید.

۱)

$$UCL = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 + 3\times\frac{2}{3} = 5$$

$$CL = \mu = 3$$

$$LCL = \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} = 3 - \frac{3\times 2}{3} = 1$$

۲)

$$UCL = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 + 1.96\times\frac{2}{3} =$$

$$CL = \mu$$

$$LCL = \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 - 1.96\times\frac{2}{3} =$$

$$UCL\overline{X} = 3 + 3\times\frac{2}{3} = 5$$

$$CL_X = 3$$

$$LCL_{\overline{X}} = 3 - \frac{3\times 2}{3} = 1$$

۳)

$$\beta = P\left(1 < \bar{x} < 5 \middle| \mu = 4\right) = P\left(\frac{1-4}{\frac{2}{3}} < Z < \frac{5-4}{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$P\left(-4.5 < Z < 1.5\right) = 0.93319$$

$$P = \beta(1-\beta) + \beta^2(1-\beta) + \cdots = \beta\times(1-\beta)\frac{1}{(1-\beta)} = 0.93319$$

۴)

$$\binom{4}{3}\times\beta\times(1-\beta)^3 + \binom{4}{4}(1-\beta)^4 =$$

تعریف ARL

$$ARL = \frac{1}{P\ (\text{مشاهده یک نقطه خارج از حدود کنترل})} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{فرایند واقعاً در کنترل است} \\ \frac{1}{1-\beta} & \text{فرایند واقعاً خارج از کنترل است} \end{cases}$$

زیرا

$$P\ (\text{مشاهده یک نقطه خارج از حدود کنترل}) = P(\text{رد } H_0) = \begin{cases} \alpha & \text{درستی } H_0 \\ 1-\beta & \text{نادرستی } H_0 \end{cases}$$

همان تابع توان است که در دو حالت درستی و نادرستی H_0 مقادیر α و $1-\beta$ را می‌گیرد.

به عنوان مثال وقتی $K=1.5, n=2$ داریم $\beta=0.8$ یعنی احتمال آن‌که با نمونه 2 تایی به وجود تغییر 1.5σ پی ببریم 0.8 است حال احتمال کشف این تغییر توسط نمونه اول بعد از ایجاد آن $1-\beta=0.2$ است و احتمال کشف توسط نمونه دوم $\beta(1-\beta)=0.16$ و به همین صورت

P (امین نمونهKدر میانگین به‌وسیله 1.5σ پی بردن به وجود تغییر) $=\beta^{K-1}(1-\beta)$

دقت شود تابع فوق بر حسب K تابع احتمال هندسی با پارامتر $P=1-\beta$ است.

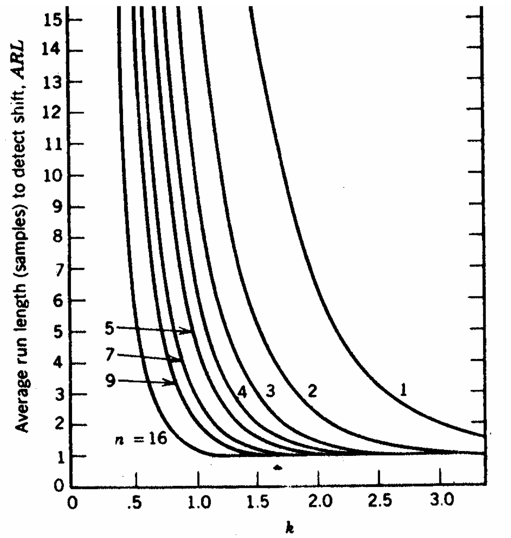
حال اگر ARL (Average Run Lentgh) متوسط تعداد نمونه‌ها قبل از پی بردن به وجود تغییر باشد مقدار آن برابر است با متوسط طول دنباله و یا:

$$ARL=\sum_{k=1}^{\infty} K\beta^{k-1}(1-\beta)=\frac{1}{1-\beta}$$

بنابراین با $\beta=0.3$ داریم $ARL=\frac{1}{0.2}=5$ یعنی متوسط تعداد نمونه لازم برای تشخیص تغییر در حالت 1.5σ با n=2 برابر m=5 است یعنی باید به‌طور میانگین 5 بار نمونه‌های 2 تایی بگیریم تا به وجود تغییر 1.5σ پی ببریم.

با تو جه به رابطه‌ای که برای ARL پیدا شد با داشتن β می‌توان ARL را رسم کرد و β در رابطه * تابعی از k و n می‌باشد پس ARL تابعی از n و k می‌باشد.

در شکل زیر نمودارهای ARL را برای نمونه‌های n تایی مختلف و مقادیر متفاوت k رسم کرده‌ایم.



این نمودار میانگین تعداد نمونه‌های n تایی برای نمودار $\bar{X}$ با حدود سه انحراف معیار را وقتی μ تغییری به اندازه $k\sigma$ دارد نشان می‌دهد.

تذکر: اگر تعداد کل نمونه‌ها را به صورت انفرادی بخواهیم بایستی ARL را در n ضرب کنیم.

$$I=n\,ARL$$

که I تعداد اقلام انفرادی (Individual Units) را نشان می‌دهد.

تذکر: اگر نمونه‌ها در فاصله‌های زمانی برابر h برداشته شوند میانگین زمان لازم تا مشاهده یک تغییر عبارت است از:

$$ATS=h.ARL$$

که ATS مخفف Average Time to Signal می‌باشد و متوسط زمان تا هشدار یا متوسط زمان تا علامت نامیده می‌شود.

مثال۸: در صورتی که در یک نمودار شوهارت مقدار $ARL=10$ باشد احتمال پی بردن به وجود تغییر بوسیله‌ی اولین نمونه بعد از ایجاد تغییر را محاسبه کنید؟

$$ARL=\frac{1}{1-\beta}=10 \quad , \quad 1-\beta=\frac{1}{10} \quad , \quad \beta=\frac{9}{10}$$

$$P\ (\text{احتمال پی بردن به تغییر توسط اولین نمونه}) = 1-\beta=\frac{1}{10}$$

مثال۹: در صورتی که $ARL=4$ باشد در یک نمودار شوهارت احتمال پی بردن به تغییر در حداقل 2 نمونه‌ی اول چقدر است؟

$$ARL=4 \qquad \frac{1}{1-\beta}=4 \qquad 1-\beta=\frac{1}{4} \qquad \beta=\frac{3}{4}$$

$$P\ (\text{احتمال پی بردن به تغییر})=\beta(1-\beta)+\beta^2(1-\beta)+\cdots=\beta\left(1-\frac{1}{(1-\beta)}\right)=0.75$$

بررسی روندها

به‌طور کلی وقتی فرایند خارج از کنترل تشخیص داده می‌شود که یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

۱ـ حداقل یک نقطه از حدود کنترل خارج گردد.

۲ـ یک روند غیرتصادفی در نقاط داخل حدود کنترل مشاهده گردد.

در مورد حالت ۲ لازم است توضیحات بیشتری ارائه گردد. و حالت ۱ نیاز به توصیح ندارد.

با توجه به آن‌که حدود کنترل غالباً به صورت متقارن نوشته می‌شوند می‌توان توزیع تعداد نقاط داخل حدود کنترل و بالای خط مرکزی را توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای m و $p=\frac{1}{2}$ فرض کرد.

البته فرض بر این است که حالت ۱ رخ نداده یعنی تمام نقاط داخل حدود کنترل هستند. حال با توجه به روابط احتمال در توزیع دوجمله‌ای احتمال آن‌که چندین نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی قرار گیرند خیلی ضعیف است و لذا می‌توان گفت در صورت رخ دادن چنین پدیده‌ای فرایند از کنترل خارج است و تغییرات با دلیل وجود دارد.

دو دستورالعمل زیر به طور تجربی راه‌کارهایی اجرایی برای قضاوت پیشنهاد داده‌اند و به ترتیب از کتاب‌های گرانت و مونتگیری اقتباس گردیده‌اند.

در حقیقت به کار بستن این دستورالعمل‌ها، باعث حساسیت بیشتر در کنترل فرایند آماری می‌گردند.

الف) در صورت مشاهده یکی از حالات زیر فرایند از کنترل خارج می‌شود، حدود کنترل در این دستورالعمل ثابت هستند.

۱ـ وجود هفت نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی

۲ـ وجود حداقل ده نقطه از 11 نقطه متو الی در یک طرف خط مرکزی

۳ـ وجود حداقل 12 نقطه از 14 نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی

۴ـ وجود حداقل 14 نقطه از 17 نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی

۵ـ وجود حداقل 16 نقطه از 20 نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی

(ب) در این دستورالعمل بر اساس حالت‌های زیر در حدود کنترل $k\sigma$ فرایند از کنترل خارج می‌شود:

۱) وجود یک نقطه خارج از حدود 3 انحراف معیار

۲) وجود چهار نقطه از 5 نقطه متوالی خارج از حدود یک انحراف معیار

۳) وجود هشت نقطه متوالی در یک طرف خط مرکزی

۴) وجود دو نقطه از 3 نقطه متوالی خارج از حدود دو انحراف معیار

این دستورالعمل از کتاب راهنمای وسترن الکتریک در سال ۱۹۵۶ اقتباس شده است.

نکته: استفاده از هر قاعده برای آن‌که فرایند را خارج از کنترل اعلام کنیم باعث ایجاد خطای نوع اول مخصوص به خود می‌گردد حال اگر از K قاعده استفاده شود و قاعده i ام مستقل از سایرین دارای احتمال خطای نوع اول α_i باشد آن‌گاه احتمال خطای نوع اول تصمیم‌گیری در کل عبارت است از:

$\alpha = P$ (اعلام فرایند خارج از کنترل | واقعاً فرایند تحت کنترل باشد)

$= 1 - P$ (اعلام فرایند تحت کنترل | واقعا فرایند تحت کنترل باشد)

$= 1 - \prod_{i=1}^{k} P$ (اعلام تحت کنترل بودن فرایند با قاعده i ام | واقعاً فرآیند تحت کنترل باشد)

$= 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - P$ (اعلام خارج از کنترل بودن فرآیند با قاعده i ام | واقعاً فرایند تحت کنترل باشد))

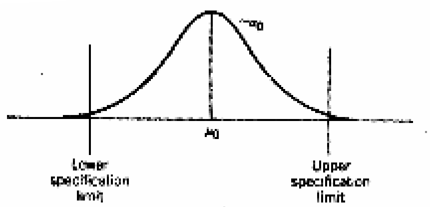
$= 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - \alpha_i)$

همان‌طور که مشهود است زیاد شدن تعداد قواعد (K) باعث افزایش α می‌شود طوری که مثلاً وقتی $k = 3$ و $\alpha_i = 0.05$ داریم:

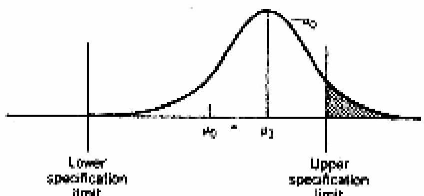
$\alpha = 0.1426$

نکته: لزوم بررسی هر دو پارامتر میانگین و تغییرپذیری در کنترل فرایند

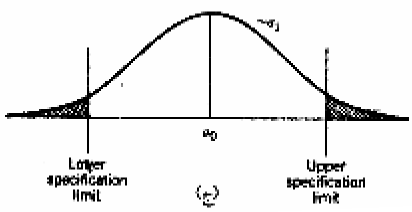
به شکل زیر توجه کنید.



(الف)



(ب)



(ج)

در (الف) فرایند کنترل است. در (ب) به دلیل انتقال میانگین از μ_0 به μ_1 فرایند از کنترل خارج شده و در (ج) به دلیل زیاد شدن σ ارتفاع نمودار کاهش یافته فرایند در دو طرف از کنترل خارج شده است.

نکته: هر چند n بزرگتر شود کارایی نسبی روش $\bar{R}$ نسبت به روش S^2 کمتر می‌شود. این مطلب به دلیل آن است که دامنه تغییرات R فقط به دو داده بزرگترین و کوچکترین توجه دارد و به بقیه توجه نمی‌کند جدول زیر کارایی نسبی را بر حسب n نشان می‌دهد.

n	کارایی نسبی e
2	1
3	0.992
4	0.975
5	0.975
6	0.93
10	0.85

نکته: حدود احتمال برای نمودارهای $\bar{X}$ و R

می‌دانیم معمولاً در نمودارهای کنترل از ضریب 3 انحراف معیار استفاده می‌شود با این ضریب معمولاً احتمال وقوع خطای نوع اول حدود $\alpha = 0.027$ است یک روش آن است که حدود K انحراف معیار را بر حسب احتمال خطای نوع اول پیدا کنیم. با توجه به $P\left(\left|X-\mu\right|<K\sigma\right)=1-\alpha$ و $P\left(\left|Z\right|<K\right)=1-\alpha$ می‌توان نوشت

$$K = Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

در مورد توزیع $W=\frac{R}{\sigma}$ با توجه به آن‌که تقارن وجود ندارد می‌توانیم بنویسیم $\hat{\sigma}=\frac{\bar{R}}{d_2}$ و لذا $LCL = D_{\frac{\alpha}{2}}\bar{R}$ و $UCL = D_{1-\frac{\alpha}{2}}\bar{R}$ که

$$D_{1-\frac{\alpha}{2}} = W_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{(n)}{d_2}$$

مقادیر $D_{\frac{\alpha}{2}}$, $D_{1-\frac{\alpha}{2}}$ را به ازای مقدار $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.002$, $\alpha = 0.05$ می‌توان در جدول زیر پیدا کرد. این جدول از کتاب گرانت اقتباس شده است.

حدود بالا			حدود پایین			اندازه
$B_{0.999}$	$B_{0.995}$	$B_{0.975}$	$B_{0.025}$	$B_{0.005}$	$B_{0\cdot001}$	n
3.30	2.81	2.25	0.03	0.00	0.00	2
2.63	2.30	1.92	0.16	0.07	0.04	3
2.33	2.07	1.77	0.27	0.15	0.09	4
2.15	1.92	1.67	0.35	0.22	0.15	5
2.03	1.83	1.60	0.41	0.28	0.21	6
1.93	1.76	1.56	0.45	0.33	0.25	7
1.86	1.70	1.52	0.49	0.37	0.29	8
1.80	1.65	1.48	0.52	0.41	0.33	9
1.76	1.62	1.45	0.55	0.44	0.36	10

حدود بالا			حدود پایین			اندازه
$D_{0.999}$	$D_{0.995}$	$D_{0.975}$	$B_{0.025}$	$D_{0.005}$	$D_{0\cdot001}$	n
4.65	3.97	3.17	0.04	0.01	0.00	2
5.06	4.42	3.68	0.30	0.13	0.06	3
5.31	4.69	3.98	0.59	0.34	0.20	4
5.48	4.89	4.20	0.85	0.55	0.37	5
5.62	5.03	4.36	1.07	0.75	0.53	6
5.73	5.15	4.49	1.25	0.92	0.69	7
5.82	5.25	4.60	1.41	1.08	0.83	8
5.90	5.34	4.70	1.55	1.21	0.97	9
5.97	5.42	4.78	1.67	1.33	1.08	10

جدول خلاصه نمودارهای کنترل متغیرها

ردیف	نوع نمودار و شرایط	خط مرکزی CL	حد بالای کنترل	حد پایین کنترل
۱	$\bar{X}$ (σ, μ معلوم)	μ	$\mu + A\sigma$	$\mu - A\sigma$
۲	R (σ معلوم)	$d_2\sigma$	$D_2\sigma$	$D_1\sigma$
۳	S (σ معلوم)	$C_4\sigma$	$B_6\sigma$	$B_5\sigma$
۴	$\bar{X}$ (σ مجهول و برآورد به کمک $\bar{R}$)	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$	$\bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$
۵	$\bar{X}$ (σ مجهول و برآورد به کمک $\bar{S}$)	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$	$\bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}$
۶	R (σ مجهول)	$\bar{R}$	$D_4\bar{R}$	$D_3\bar{R}$
۷	S (σ مجهول)	$\bar{S}$	$B_4\bar{S}$	$B_3\bar{S}$
۸	MR,R	$\overline{MR} = \frac{\sum \lvert X_i - X_{i-1} \rvert}{m-1}$	$D_3\overline{MR}$	$D_4\overline{MR}$
۹	MR , X	$\bar{X}$	$\bar{X} + \frac{3\overline{MR}}{d_2}$	$\bar{X} - 3\frac{\overline{MR}}{d_2}$
۱۰	EWMA	$\bar{X}$	$\bar{X} + AS$	$\bar{X} - A^*S$
۱۱	EWMD	Sd_c^*	D_2^*S	D_1^*S

تست‌ها

۱ ـ رینگ‌های پیستون موتور اتومبیلی طی یک فرایند خاص تولید می‌شوند، 25 نمونه 5 تایی در شرایط کنترل انتخاب شده و نتایج عبارت است از:

$\sum \bar{X}_i = 1850$

$\sum R_i = 0.581$

نمودار کنترل $\bar{X}$ کدام است؟

۱) $(74.014, 74.45)$ ۲) $(73.98, 74.014)$ ۳) $(74, 75)$ ۴) $(74.18, 74.92)$

۲ ـ با مراجعه به سوال قبل نمودار R کدام است؟

۱) $(0, 0.023)$ ۲) $(0, 0.075)$ ۳) $(0, 0.049)$ ۴) $(0, 0.061)$

۳ ـ یک کارخانه سازنده پودر ضدعفونی کننده برای کنترل مقدار درصد وزنی ماده‌ی موثر پودر ضدعفونی کننده‌ی محصول خود از نمودار کنترل $S, \bar{X}$ استفاده می‌کند، جهت این‌کار 20 نمونه هر کدام باندازه 6 برداشته شده و نتایج زیر به‌دست آمده است:

$\sum \bar{X}_i = 160 \quad , \quad \sum S_i = 0.4$

حدود کنترل نمودار $\bar{X}$ کدام است؟

۱) $(7.42, 8.1)$ ۲) $(7.65, 8.22)$ ۳) $(7.98, 8.026)$ ۴) $(6.87, 8.12)$

۴ ـ با مراجعه به تست قبل حدود کنترل S برای مشخصه‌ی موردنظر کدام است؟

۱) $(0, 0, 04)$ ۲) $(0.0006, 0.039)$ ۳) $(0, 0.025)$ ۴) $(0, 0.039)$

۵ ـ اگر $USL - LSL > 6\sigma$ باشد داریم که ....

۱) وضعیت نامطلوب است.

۲) وضعیت بحرانی ولی قابل کنترل است.

۳) وضعیت مطلوب است.

۴) فرایند توانایی ساخت محصول را در حدود مشخصات فنی ندارند.

۶ ـ اگر شاخص قابلیت فرایند برابر با 1.11 و حدود مشخصه‌ی فرایند $(6.3, 6.5)$ باشد انحراف معیار چقدر است؟

۱) 0.05 ۲) 1 ۳) 0.03 ۴) 0.06

۷ ـ با مراجعه به مساله‌ی قبل نسبت قابلیت کدام است؟

۱) 0.9 ۲) 1 ۳) 0.03 ۴) 1.33

۸ ـ یک فرآیند جدید که مجموع انحراف‌های 25 زیرگروه به اندازه 4 در آن برابر 600 می‌باشد شروع به کار نموده است اگر مشخصات فنی برابر با 700 ± 45 باشد شاخص قابلیت فرایند برابر است با:

۱) 1.28 ۲) 0.78 ۳) 1 ۴) 0.25

۹ـ در سوال قبل نسبت قابلیت برابر است با:

۱) 0.78 ۲) 1 ۳) 1.28 ۴) 0.25

۱۰ـ کدام‌یک از نمودارهای زیر برای کنترل متغیرهای پیوسته با اندازه زیر گروه‌های برابر با یک کاربرد دارد؟

۱) EWMA ۲) EMWA ۳) EMWD ۴) $\bar{X}$ و R

۱۱ـ برای کنترل وزن قوطی‌های پر شده نوعی کنسرو و نمونه‌های 5 تایی هر سی دقیقه یک‌بار برداشته شده و در طول یک روز کاری 20 نمونه گرفته شده است.

$\sum R_i = 41 \quad , \quad \sum \bar{X}_i = 243.8$

حدود کنترل نمودار R کدام است؟

۱) $(0,4.55)$ ۲) $(0,4.75)$ ۳) $(0,4.33)$ ۴) $(0,5.71)$

۱۲ـ با توجه به مساله‌ی قبل حدود کنترل $\bar{X}$ کدام است؟

۱) $(11.01,13.37)$ ۲) $(10.12,12.45)$ ۳) $(11.27,13.22)$ ۴) $(11.5,13.45)$

۱۳ـ در سوال قبلی اگر میانگین نوزدهم برابر 13.5 بوده و از حد بالای کنترل خارج باشد حدود کنترل $\bar{X}$ اصلاح شده کدام است؟

۱) $(10.93,13.3)$ ۲) 10.45,13.70 ۳) 11.24,13.25 ۴) 12.5,13.45

۱۴ـ در سوال ۲ فرض کنید $\sum_i S_i = 0.24$ باشد حدود نمودار $\bar{X}$ را به‌دست آورید؟

۱) $(11.01,13.37)$ ۲) $(10.12,12.45)$ ۳) $(12.173,12.207)$ ۴) $(12.5,13.45)$

۱۵ـ با مراجعه به سوال قبل حدود نمودار S کدام است؟

۱) $(0,0.021)$ ۲) $(0,0.025)$ ۳) $(0,0.02)$ ۴) $(0,0.012)$

۱۶ـ در یک نمودار کنترل با حدود آزمایشی ......

۱) در ابتدای تولید محصول استفاده می‌شود.

۲) با شناسایی علل غیرتصادفی در داخل حدود کنترل، ریشه‌یابی و حذف آن‌ها نمودار کنترل اصلاح شده به‌دست می‌آید.

۳) با شناسایی نقاط خارج از کنترل دارای علل غیرتصادفی، ریشه‌یابی و حذف آن‌ها، حدود کنترل نماینده‌های واقعی‌تری از فرایند خواهد بود.

۴) همه موارد

۱۷ـ قطعاتی بر اساس قطر خارجی 12.5mm و مشخصات 12.5 ± 0.05 تراشکاری می‌شوند. اگر فرآیند مربوط که دارای توزیع نرمال است در 12.5 متمرکز باشند انحراف معیار آن برابر 0.3 باشد چند درصد از قطعات تولیدی مردود خواهند بود؟

۱) حدود 5 درصد ۲) حدود 10 درصد ۳) حدود 15 درصد ۴) حدود 20 درصد

۱۸ـ چنانچه در سوال قبلی میانگین فرایند به مقدار 12.53mm افزایش یابد از قطعات تولیدی مردود خواهند بود؟

۱) حدود 8 درصد ۲) حدود 15 درصد ۳) حدود 20 درصد ۴) حدود 25 درصد

۱۹ ـ اگر قطر یک شفت دارای توزیع $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ باشد و میانگین فرایند به علت مشکلات تولیدی به اندازه‌ی 2σ افزایش پیدا کند احتمال خطای نوع دوم را به‌دست آورید؟

۱) 0 ۲) 0.977 ۳) 0.8413 ۴) 1

۲۰ ـ اگر در یک نمودار کنترل بر اساس چهار تصمیم مستقل مشاهده نقطه خارج از حدود ۱ و ۲ و ۳ و ۴ انحراف معیار موجب اعلام خروج فرآیند از کنترل باشد احتمال خطای نوع اول در این تصمیم کدام است؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) 0.65 ۴) 0.35

۲۱ ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟

۱) واقع شدن چهار نقطه به‌صورت روند در حدود هشدار نشان دهنده‌ی فرایند خارج از کنترل می‌باشد.
۲) واقع شدن 2 نقطه در حدود هشدار نشان دهنده‌ی فرایند خارج از کنترل می‌باشد.
۳) در صورتی که منابع تغییر غیرتصادفی بررسی و رفع شوند و نقاط بین حدودکنترل باشند فرایندی تحت کنترل و پایدار است.
۴) قوانین وستون اکتریک را در هر لحظه فقط در یک سمت خط مرکزی می‌توان استفاده کرد.

۲۲ ـ چنانچه ARL برای یک نمودار در یک شیفت مشخص برابر با 10 باشد تغییری در میانگین سیستم تولیدی رخ داده است. متوسط تعداد نقاطی که روی نمودار کنترل رسم می‌شود تا یک نقطه خارج از حدودکنترل مشاهده شود کدام گزینه است؟

۱) 10 ۲) 0.1 ۳) 9 ۴) 0.9

۲۳ ـ در تست قبل واریانس تعداد نقاط کدام گزینه است؟

۱) 0.99 ۲) 0.09 ۳) 0.01 ۴) 1

۲۴ ـ طراحی یک نمودار $\bar{X}$ بر اساس مقادیر استاندارد $n=4, \sigma=12\ ,\ \mu=600$ موردنظر است در صورتی که $M=500$ تغییر کند احتمال پی بردن به خارج از کنترل بودن حداقل به‌وسیله‌ی دومین نمونه بعد از ایجاد تغییر در فرآیند چیست؟

$Z=2 \quad , \quad \alpha=0.05$

۱) 1 ۲) 0 ۳) 0.5 ۴) 0.01

۲۵ ـ طراحی یک نمودار $\bar{X}$ بر اساس مقادیر استاندارد $n=4, \sigma=4\ ,\ \mu=100$ موردنظر است در صورتی که متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل بودن100 شود. حد پایین بالای نمودار کنترل $\bar{X}$ چقدر است؟

۱) 105.1 ۲) 94.86 ۳) 104.7 ۴) 95.3

۲۶ ـ در صورتی که ARL برای یک نمودار کنترل به ازای یک دوره‌ی خاص برابر 5 باشد، احتمال پی بردن به وجود تغییر حداکثر به‌وسیله‌ی سومین نمونه بعد از ایجاد تغییر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{20}{75}$ ۲) $\frac{9}{25}$ ۳) $\frac{7}{25}$ ۴) $\frac{7}{75}$

۲۷ ـ در تست قبلی احتمال پی بردن به وجود تغییر حداقل به‌وسیله‌ی دومین نمونه بعد از ایجاد تغییر کدام گزینه است؟

۱) 0.8 ۲) 0.2 ۳) 0.25 ۴) 0.75

۲۸ ـ طراحی یک نمودار $\bar{X}$ بر اساس مقادیر استاندارد $n=36, \sigma=12, \mu=600$ موردنظر است. حدود کنترل پایین را با در نظر گرفتن ریسک α برابر با 0.05 تعیین کنید؟ $\left(Z_{0.025}\approx 2\right)$

۱) 399 ۲) 600 ۳) 596 ۴) 300

۲۹ـ به منظور کنترل قطر رینگ پیستون از نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و S استفاده می‌شود و در هر بار نمونه‌گیری 10 نمونه بررسی می‌شوند. و در تجارب قبلی اگر فرآیند تحت کنترل باشد قطر رینگ دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu = 80mm^2$ و انحراف معیار $\sigma = 10mm$ خواهد بود حد بالای نمودار کنترل $\bar{X}$ کدام است؟

۱) 70.51 ۲) 89.49 ۳) 90.36 ۴) 85.46

۳۰ـ در تست قبلی حد پایین نمودار کنترل S کدام است؟

۱) 0 ۲) 9.727 ۳) 16.69 ۴) 2.76

۳۱ـ وزن خالص یک پودر شوینده قرار است به وسیله نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و R با نمونه‌های 6 تایی که 50 نمونه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در صورتی که $\sum_{i=1}^{50} R_i = 200$, $\sum_{i=1}^{50} \bar{X}_i = 2000$ باشد و مشخصه کیفی دارای توزیع نرمال به صورت 41 ± 5 باشد و محصولی که پایین‌تر از حد مشخصه‌ی فنی باشد به عنوان دور ریز حساب شود. آن‌گاه چند درصد محصولات از فرآیند به‌صورت دورریز می‌باشد؟

۱) %5.7 ۲) %0.57 ۳) %0.07 ۴) %0.007

۳۲ـ خط مرکزی نمودار کنترل کنترل قدرت کششی یک قطعه‌ی فلزی برابر با 100 است و حدود کنترل سه انحراف معیار آن بر اساس اندازه نمونه‌های چهارتایی محاسبه گردیده است. اگر انحراف معیار فرآیند برابر با 6 باشد و میانگین از 100 به 92 تغییر کند احتمال پی بردن به وجود این تغییر به‌وسیله‌ی اولین نمونه بعد از ایجاد چه مقدار خواهد بود؟

۱) 0.63 ۲) 0.73 ۳) 0.37 ۴) 0.47

۳۳ـ یک نمودار $\bar{X}$ با حدود کنترل سه انحراف معیار دارای پارامترهای $\begin{matrix} UCL_{\bar{X}} = 104 \\ CL_{\bar{X}} = 100 \\ LCL_{\bar{X}} = 99 \end{matrix}$ است. فرض کنید مشخصه‌ی کیفی موردنظر دارای توزیع نرمال با میانگین واقعی 98 و انحراف معیار 8 است. در صورتی که $n = 5$ باشد متوسط طول دنباله کدام گزینه است؟

۱) 3 ۲) 2 ۳) 1 ۴) 4

۳۴ـ داده‌های مربوط به گران روی پلیمر در 20 مورد به‌صورت زیر می‌باشد حد بالا دامنه‌ی متحرک برای حالت 2 نمونه در هر بار نمونه‌گیری کدام گزینه است؟ $\overline{MR} = 0.0377$ $\quad \bar{\bar{X}} = 5.75$

۱) 0.1232 ۲) 0 ۳) 0.0377 ۴) 5.8568

۳۵ـ در تست قبلی حد پایین مشاهدات انفرادی مقادیر میانگین کدام گزینه است؟

۱) 5.85 ۲) 5.65 ۳) 5.75 ۴) 0.1232

پاسخنامه

۱ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\sum X_i = 1850$$

$$\sum R_i = 0.581 \qquad \overline{\overline{X}} = \frac{1850}{25} = 74$$

$$UCL\overline{X} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 74 + 0.577 \times 0.023 = 74.014$$

$$\overline{R} = \frac{0.581}{25} = 0.023$$

$$LCL\overline{X} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 74 - 0.577 \times 0.023 = 73.98$$

۲ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$UCLR = D_4\overline{R} = 2.11 \times 0.023 = 0.04853$$

$$LCLR = D_3\overline{R} = 0$$

۳ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\sum \overline{X}_i = 160 \quad \overline{\overline{X}} = \frac{160}{20} = 8$$

$$\sum S_i = 0.4 \quad \overline{S}_i = \frac{0.4}{20} = 0.02$$

$$UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_3\overline{S} = 8 + 1.287 \times 0.02 = 8.025$$

$$LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_3S = 8 - 1.287 \times 0.02 = 7.974$$

۴ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$UCL_S = B_4\overline{S} = 1.97 \times 0.02 = 0.0394$$

$$LCL_S = B_3\overline{S} = 0.03 \times 0.02 = 0.0006$$

۵ ـ گزینه ۳ صحیح است.

۶ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{0.2}{6\hat{\sigma}} = 1.11 \Rightarrow \hat{\sigma} = 0.03$$

۷ ـ گزینه ۱ صحیح است.

نسبت قابلیت فرآیند $= \frac{1}{1.11} = 0.9$

۸ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} =$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2} \quad , \quad \hat{\sigma} = \frac{24}{2.059} = 11.65$$

$$\bar{R} = \frac{600}{25} = 24 \quad , \quad \hat{C}_p = \frac{90}{6 \times 11.65} = 1.28$$

۹ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{1}{1.28} = 0.78$$

۱۰ ـ گزینه ۱ صحیح است.

۱۱ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\bar{R} = 2.05 \qquad UCLR = D_4\bar{R} = 2.14 \times 2.05 = 4.33$$
$$LCRR = D_3\bar{R} = 0$$

۱۲ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$UCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 12.19 + 0.58 \times 2.05 = 13.37$$
$$\bar{\bar{X}} = 12.19$$
$$LCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 12.19 - 0.58 \times 2.05 = 11.01$$

۱۳ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\sigma_0 = \frac{R_0}{d_2} = \bar{X}_0 = \frac{243.8 - 13.5}{19} = 12.12$$
$$UCL\bar{X} = \bar{X}_0 + A\sigma_0 = 12.12 + 1.342x$$
$$LCL\bar{X} = \bar{X}_0 - A\sigma_0 =$$

۱۴ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\bar{S} = \frac{0.24}{20} = 0.012$$
$$\bar{\bar{X}} = 12.19$$
$$UCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S} = 12.19 + 1.427 \times 0.012 = 12.207$$
$$LCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S} = 12.19 - 1.427 \times 0.012 = 12.173$$

۱۵ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$UCL_S = B_4\bar{S} = 2.089 \times 0.012 = 0.025$$
$$LCL_S = B_3\bar{S} = 0$$

۱۶ ـ گزینه ۴ صحیح است.

۱۷ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$P\left(12 < X < 13 \middle| \mu = 12.5\right) = P\left(\frac{-0.5}{0.3} < Z < \frac{0.5}{0.3}\right) = P\left(-1.66 < Z < 1.66\right) = 0.9$$

$1 - P$ (در حدود باشد) $= 0.1$

۱۸ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$1-P\left(12<X<13\middle|\mu=12.53\right)=1-P\left(\frac{-0.53}{0.3}<Z<\frac{0.53}{0.3}\right)$$
$$1-P\left(-1.76<Z<1.76\right)=0.92$$
$$1-0.92=0.08$$

۱۹ ـ گزینه ۳ صحیح است.

راه‌حل:

$$P\left(\mu_0-3\sigma<x<\mu_0+3\sigma\middle|\mu_1=\mu_0+2\sigma\right)$$
$$=P\left(\frac{\mu_0-3\sigma-\mu_0-2\sigma}{\sigma}<Z<\frac{\mu_0+3\sigma-\mu_0-2\sigma}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(-5<Z<1\right)=0.8413$$

۲۰ ـ گزینه ۳ صحیح است.

راه‌حل اول:

$$\alpha_{Total}=1-\prod_{i=1}^{4}\left(1-\alpha_i\right)=1-\left[\left(1-0.045\right)\left(1-0.317\right)\times\left(1\right)\left(1-0.0027\right)\right]=0.65$$

α_1 برای 3 انحراف معیار از روی جدول توزیع نرمال 0.0027

α_2 برای 2 انحراف معیار 0.0455

α_3 برای 1 انحراف معیار 0.31732

۲۱ ـ گزینه ۲ صحیح است.

۲۲ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$ARL=\frac{1}{1-\beta}=10 \qquad 1-\beta=\frac{1}{10} \qquad \beta=\frac{9}{10}$$

احتمال این‌که پی بردن به نقطه خارج از حدود کنترل برابر $1-\beta=\frac{1}{10}$ می‌باشد.

دارای توزیع هندسی (رسیدن به موفقیت در این‌جا یعنی مشاهده‌ی نقطه خارج از کنترل است)

پس دارای میانگین $\frac{1}{P}$ است و میانگین تعداد همان 10 می‌شود.

۲۳ ـ گزینه ۲ صحیح است.

چون دارای توزیع هندسی است پس واریانس برابر $\frac{q}{P^2}$ می‌باشد.

$$\frac{q}{P^2}=\frac{0.9}{\left(0.1\right)^2}=0.09$$

۲۴ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$UCL=600+2\times\frac{12}{2}=612$$

$$CL=600$$

$$\beta = P\left(588 < \bar{X} < 612 \middle| M = 500\right) = P\left(\frac{588-500}{\frac{12}{2}} < Z < \frac{612-500}{\frac{12}{2}}\right)$$

$$= P\left(\frac{88}{6} < Z < \frac{12}{2}\right) = P\left(14.66 < Z < 18.66\right) = 0$$

با توجه به $1-\beta = 1$ توسط همان نمونه اول مشخص می‌شود. پس احتمال پی بردن توسط حداقل دومین نمونه صفر می‌شود.

۲۵ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$ARL = 100 = \frac{1}{\alpha} \quad , \quad \alpha = 0.01 \quad , \quad \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

$$UCL = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 + 2.57 \times \frac{4}{2} = 105.14$$

$$LCL = 100 - 2.57 \times \frac{4}{2} = 94.86$$

۲۶ ـ گزینه ۳ صحیح است.

P (پی بردن به تغییر حداکثر به‌وسیله سومین نمونه) $= (1-\beta) + \beta(1-\beta) + \beta^2(1-\beta) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{16}{25} \times \frac{1}{5} = \frac{21}{75} = \frac{7}{25} = 0.28$

۲۷ ـ گزینه ۱ صحیح است.

P(پی بردن به تغییر حداقل به وسیله دومین نمونه) $= \beta(1-\beta) + \beta^2(1-\beta) + \beta^3(1-\beta) + \cdots = \beta(1-\beta) \times \frac{1}{1-\beta} = \beta = \frac{4}{5} = 0.8$

۲۸ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$UCL = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 600 + 2 \times \frac{12}{6} = 604$$

$$CL = \mu$$

$$LCL = \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 600 - 2 \times \frac{12}{6} = 596$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

۲۹ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$n = 10 \qquad \sigma_0 = 10 \qquad A = 0.949$$

$$UC\bar{X} = \mu + A\sigma_0 = 80 + 0.949 \times 10 = 89.49$$

$$CL\bar{X} = \mu = 80$$

$$LCL\bar{X} = \mu - A\sigma_0 = 80 - 0.949 \times 10 = 70.51$$

۳۰ ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$UCLS = B_6\,\sigma = 1.669 \times 10 = 16.69$$

$$CLS = C_4\,\sigma = 0.9727 \times 10 = 9.727$$

$$LCLS = B_5\sigma = 0.276 \times 10 = 2.76$$

۳۱ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{R} = \frac{200}{50} = 4$$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}_i}{50} = \frac{2000}{50} = 40 \qquad \hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{4}{2.534} = 1.579$$

$$P_{\text{دورریز}} = P\{X < LSL\} = P(X < 36) = \varphi\left(\frac{36-40}{1.579}\right) = \varphi(-2.533) = 0.0057$$

۳۲ ـ گزینه ۳ صحیح است.

$$\mu = 3 \qquad n = 4 \qquad \mu_1 = 92$$

$$K = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma} = \frac{92-100}{6} = -1.33$$

$$P\,(\text{شناسایی تغییر در اولین نمونه}) = 1 - P\,(\text{عدم شناسایی تغییر در اولین نمونه}) = 1-\beta = 1-\left[\varphi\left(3-K\sqrt{n}\right)-\varphi\left(-3-K\sqrt{n}\right)\right]$$

$$= 1-\left[\varphi\left(3-(-1.33)\sqrt{4}\right)-\varphi\left(-3-(-1.33)\sqrt{4}\right)\right] = 1-\left[\varphi(5.66)-\varphi(-0.34)\right]$$

$$= 1-[1-0.37] = 0.37$$

۳۳ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$\beta = P\left(LCL_{\bar{X}} \le \bar{X} \le UCL_{\bar{X}}\right) = P\left(\bar{X} \le UCL_{\bar{X}}\right) - P\left(\bar{X} \le LCL_{\bar{X}}\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{104-98}{\frac{8}{\sqrt{5}}}\right) - \varphi\left(\frac{96-98}{\frac{8}{\sqrt{5}}}\right) = \varphi(1.68) - \varphi(-0.56) = 0.6658$$

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1-0.6658} = 2.992$$

۳۴ ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$UCL_{\overline{MR}} = D_4\overline{MR} = 3.267(0.0377) = 0.1232$$

۳۵ ـ گزینه ۲ صحیح است.

$$UCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\overline{MR}}{d_2} = 5.7566 + 3\frac{(0.0377)}{1.128} = 5.85$$

$$CL\bar{X} = \bar{\bar{X}} = 5.7566$$

$$LCL\bar{X} = \bar{\bar{X}} - \frac{3\overline{MR}}{d_2} = 5.7566 - 3\left(\frac{0.0377}{1.128}\right) = 5.65$$

Observations in Sample, n	Chart for Averages			Chart for Standard Deviations							Chart for Ranges						
	Factors for Control Limits			Factors for Center Line		Factors for Control Limits					Factors for Center Line		Factors for Control Limits				
	A	A_2	A_3	c_4	$1/c_4$	B_3	B_4	B_5	B_6		d_2	$1/d_2$	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606		1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276		1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.575
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088		2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964		2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.115
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874		2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	1.04230	0.118	1.882	0.113	1.806		2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751		2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707		2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669		3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637		3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610		3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585		3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563		3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544		3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526		3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511		3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496		3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483		3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470		3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459		3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448		3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438		3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429		3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420		3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541

For $n > 25$

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}}, \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}, \quad c_4 \simeq \frac{4(n-1)}{4n-3},$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}$$

$$B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}.$$