موسسه آموزش عالی آزاد

کنترل کیفیت آماری

جزوه ۲۵٪ سوم

ویرایش اول

تالیف:

دکتر احمد گائینی

آذر ۸۹

فصل سوم

نمودارهای کنترل برای وصفی‌ها

می‌دانیم اگر متغیری قابل اندازه‌گیری نباشد به آن کیفی می‌گویند یکی از روش‌های ارزیابی متغیرهای کیفی تقسیم آن‌ها به دو بخش مطلوب و نا مطوب (پیروزی و شکست) می‌باشد. در آمار توزیع‌های برنولی و دوجمله‌ای و پواسون و هندسی از توزیع‌هایی هستند که در مورد این متغیرها موضوعاتی را مطرح می‌کنند. معمولاً برای این متغیرها نسبت پیروزی‌ها یا تعداد پیروزی‌ها به عنوان شاخص شناخته می‌شوند به عنوان مثال تعداد قطعات معیوب ـ نسبت کالاهای خارج از استاندارد از این نوع متغیرها هستند.

۱ـ نمودار کنترل برای نسبت اقلام معیوب (P)

می‌دانیم اگر در یک جامعه برنولی معیوب بودن به عنوان پیروزی قلمداد شود p، احتمال معیوب بودن برابر نسبت اقلام معیوب جامعه به تعداد کل اقلام جامعه می‌باشد. لازم به ذکر است این‌که معیوب بودن یا سالم بودن را پیروزی در نظر بگیریم و نسبت آن را بررسی کنیم کاملاً قراردادی است و با بررسی یکی، دیگری مشخص می‌شود.

فرض کنید یک نمونه nتایی از این جامعه برنولی با پارامتر p گرفته شود یعنی $X_1,\cdots,X_n \overset{i.i.d}{\sim} b(p)$

می‌دانیم بهترین برآورد p را به صورت $\hat{p}=\frac{X}{n}$ تعریف می‌کنیم که X تعداد پیروزی (معیوب) در نمونه n تایی است.

به $\hat{p}$ **نسبت اقلام معیوب نمونه** می‌گوییم.

می‌دانیم $X \sim b(n,p)$ یعنی X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p می‌باشد. و

$$E(X)=np \quad , \quad Var(X)=np(1-p)=npq$$

در نتیجه

$$E(\hat{p})=\frac{np}{n}=p \quad , \quad Var(\hat{p})=\frac{n(1-p)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}$$

حال اگر p معلوم باشد می‌توانیم خط مرکزی و حدود کنترل نمودار p را به صورت زیر بنویسیم.

$$C.L=p=E(\hat{p})$$

$$UCL = E(\hat{p}) + k\sqrt{Var(\hat{p})} = p + k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$LCL = E(\hat{p}) - k\sqrt{Var(\hat{p})} = p - k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

که در آن k فاصله خط مرکزی از حدود کنترل است و معمولاً برابر 3 در نظر گرفته می‌شود.

به عبارت دیگر خط مرکزی و حدود کنترل نمودار p عبارتند از:

$$CL = p$$

$$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

پس از رسم این نمودار بایستی m بار نمونه n تایی بگیریم و در هر نمونه نسبت اقلام نمونه را به صورت $\hat{p}_i = \frac{X_i}{n}$ برای $i = 1, 2, \cdots, m$ پیدا کنیم و هر یک از $\hat{p}_i$ را به عنوان نقطه‌ای در نمودار بالا رسم کنیم هر نقطه‌ای خارج از حدود کنترل بوده وجود خطای با دلیل در آن نقطه بررسی می‌شود و اگر همه نقاط در حدود کنترل باشند و نقاط رسم شده از روند منظم غیرتصادفی برخوردار نباشند فرآیند را تحت کنترل می‌دانیم.

بدیهی است اگر p را ندانیم بایستی آن را برآورد کنیم. بهترین برآورد p در این شرایط عبارت است از:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \hat{p}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{mn}$$

پس از محاسبه $\bar{p}$ است در حدود کنترل p که قبلاً یافته‌ایم به‌جای p از $\bar{p}$ استفاده کنیم بنابراین حدود کنترل آزمایشی مورد نظر عبارتند از:

$$CL = \bar{p}$$

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

لازم به ذکر است اگر LCL منفی شد به دلیل آن‌که p بایستی مثبت باشد و LCL را برابر صفر می‌گیریم. این مطلب را برای نمودار قبلی هم رعایت می‌کنیم.

مثال: اعداد زیر تعداد اقلام معیوب را در $m = 25$ روز نمونه‌گیری $n = 300$ تایی از خط تولید یک کارخانه نشان می‌دهد. حدود کنترل آزمایشی را محاسبه و نقاط خارج از کنترل را مورد بررسی قرار دهید.

شماره نمونه	X_i	$\hat{p}_i$
۱۶	5	0.017
۱۷	7	0.021
۱۸	8	0.026
۱۹	16	0.053
۲۰	2	0.007

شماره نمونه	X_i	$\hat{p}_i$
۱	12	0.04
۲	3	0.01
۳	9	0.03
۴	4	0.013
۵	0	0

۶	6	0.02
۷	6	0.02
۸	1	0.003
۹	8	0.026
۱۰	11	0.036
۱۱	2	0.007
۱۲	10	0.033
۱۳	9	0.03
۱۴	3	0.01
۱۵	0	0

۲۱	5	0.017
۲۲	6	0.02
۲۳	0	0
۲۴	3	0.01
۲۵	2	0.006
جمع	$\sum X_i = 138$	-

$$\bar{p} = \frac{\sum X_i}{mn} = \frac{138}{25(300)} = \frac{138}{7500} = 0.018$$

$$CL = \bar{p} = 0.018$$

$$UCL_p = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.018 + 3\sqrt{\frac{(0.018)(0.982)}{300}} = 0.041$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.018 - 3\sqrt{\frac{(0.018)(0.982)}{300}} = -0.005$$

که بایستی قرار دهیم $LCL = 0$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود زیر گروه شماره 19 دارای مقداری برای $\hat{p}$ است که بالاتر از UCL_p می‌باشد. با حذف این نمونه مجدداً حدود را حساب می‌کنیم.

$$\bar{P}_{new} = \frac{122}{7200} = 0.017$$

$$UCL_p = \bar{P}_{new} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}_{new}(1-\bar{P}_{new})}{n}} = 0.017 + 3\sqrt{\frac{(0.017)(0.983)}{300}} = 0.039$$

$$LCL_p = \bar{P}_{new} - 3\sqrt{\frac{(0.017)(0.983)}{300}} = -0.005$$

که LCL_p را صفر قرار می‌دهیم.

حال با این حدود کنترل همه نقاط داخل محدوده هستند.

تذکر: اگر تعداد نمونه زیر گروه‌ها برابر نباشد خط مرکزی عبارت است از:

$$\bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \hat{p}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

که n_i تعداد نمونه زیرگروه i ام و $\hat{p}_i = \frac{X_i}{n_i}$ برآورد نسبت معیوب‌ها در زیر گروه i ام می‌باشد.

حدود کنترل برای هر زیر گروه جداگانه حساب می‌شود.

$$UCL_i = \overline{p} + 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n_i}}$$

$$LCL_i = \overline{p} - 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n_i}}$$

لازم به ذکر است می‌توان این حدود را به سادگی حساب کرد چون تنها عامل متفاوت آن‌ها $\sqrt{n_i}$ در مخرج کسر می‌باشد.

نمودار زیر می‌تواند یک نوع از این زیرگروه‌ها را نشان دهد.

زیرگروه	n_i	$\hat{p}_i$
۱	180	0.15
۲	120	0.15
۳	142	0.14
۴	315	0.16
۵	162	0.14

تذکر: با توجه به آن‌که نموداری که با اندازه n_i های متفاوت رسم می‌شود از پیچیدگی برخوردار است و در بررسی و ارائه نتایج مشکلاتی به همراه دارد یکی از روش‌های رفع این مشکل این است که میانگین تعداد نمونه‌ها را برای زیرگروه‌ها و حدود کنترل در نظر بگیریم یعنی به‌جای n در روابط مربوط به حدود کنترل از

$$\overline{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{m}$$

استفاده کنیم.

نکته: فرمول تعداد نمونه زیرگروه‌ها

می‌دانیم تعداد نمونه لازم برای آن‌که در سطح اطمینان $100(1-\alpha)\%$ حداکثر خطای برآورد $\hat{p}$ برابر e بشود عبارت است از:

$$n = \hat{p}\hat{q}\left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{e}\right)^2$$

در بحث ما با توجه به آن‌که $Z_{\frac{\alpha}{2}} = K = 3$ در نظر گرفته می‌شود و میزان تغییرات $e = \hat{p} - p$ می‌باشد می‌توانیم بنویسیم.

$$n = pq\left(\frac{k}{e}\right)^2$$

که در آن k نشان‌دهنده استفاده از حدود k انحراف معیار e میزان تفاوت p از مقدار جدید آن می‌باشد و $q = 1 - p$. در این حال وقتی $\hat{p} \approx N(np, npq)$ و نسبت معیوب در فرآیند خارج از کنترل $p = UCL$ در نظر گرفته شود احتمال $\hat{p} > UCL$ برابر 0.5 می‌شود.

به عنوان یک روش دیگر می‌توانیم n را طوری پیدا کنیم که $LCL > 0$ یعنی

$$p - k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} > 0$$

یا

$$n > \frac{1-p}{p} k^2$$

مثال: می‌خواهیم با حدود کنترل 3 انحراف معیار تعداد نمونه را طوری پیدا کنیم که وقتی $p = 0.054$ داشته با $LCL > 0$ چه تعداد نمونه لازم است؟

حل:

$$n > \frac{1-p}{p} K^2 = \frac{0.96}{0.04} p(3)^2 = 24(9) = 216$$

پس باید $n \geq 217$ نمونه در هر زیر گروه داشته باشیم.

تذکر: لازم به ذکر است وقتی p کوچک است بدیهی است در تعداد نمونه کم نمی‌توان معیوب مشاهده کرد یعنی باید وقتی p کوچک است آنقدر نمونه بگیریم که معیوبی را هم مشاهده نماییم.

۲ـ نمودار کنترل تعداد اقلام معیوب

بعضی مواقع لازم است به‌جای پرداختن به نسبت اقلام معیوب تعداد اقلام معیوب را مورد بررسی قرار دهیم. نمودار مربوط به تعداد اقلام معیوب را np هم می‌گویند. برای یافتن روابط مربوط به این نمودار کافی است در روابط نمودار P عدد n را ضرب کنیم در این حال

$$CL_{np} = np$$

$$UCL_{np} = np + 3\sqrt{np(1-p)}$$

$$LCL_{np} = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

اگر p که نسبت اقلام معیوب جامعه است نامعلوم باشد. به‌جای آن از $\overline{P} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \hat{p}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{mn}$ استفاده می‌کنیم.

۳ـ نمودار کنترل برای تعداد نقص‌ها

کالای معیوب ممکن است دارای چندین اشکال جزیی باشد که آن‌ها را نقص می‌گوییم. نمودار قبلی تعداد اقلام و نسبت اقلام معیوب را در نظر می‌گرفت در حالی که ممکن است حتی کالای سالم دارای نقص جزئی باشد.

در این نمودار می‌خواهیم تعداد نقص‌ها را در نظر بگیریم. به عنوان مثال وجود خش در رنگ بدنه یک یخچال نقص حساب می‌شود.

فرض کنید تعداد نقص‌ها در واحد مورد بررسی دارای توزیع پواسون باشد. واحد مورد بررسی می‌تواند یک زمان تولید ـ سطح یا حجم یک کالا یا چند کالا با هم باشد. می‌دانیم تابع احتمال تعداد نقص‌ها در واحد مورد بررسی عبارت است از:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \cdots$$

که در آن $\lambda > 0$ با فرض معلوم بودن λ بدیهی است خط مرکزی و حدود کنترل به انحراف معیار عبارتند از:

$$CL = \lambda$$

$$UCL = \lambda + 3\sqrt{\lambda}$$

$$LCL = \lambda - 3\sqrt{\lambda}$$

با توجه به آن‌که تعداد نقص‌ها نمی‌تواند منفی باشد وقتی $LCL < 0$ آن را صفر در نظر می‌گیریم.

اگر λ معلوم نباشد یا مقدار استانداردی برای آن وجود نداشته باشد آن را با میانگین تعداد نقص‌ها در نمونه m تایی یعنی با $\bar{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{m}$ برآورد می‌کنیم لذا حدود کنترل آزمایشی و خط مرکزی عبارتند از:

$$CL=\bar{\lambda}$$
$$UCL=\bar{\lambda}+3\sqrt{\bar{\lambda}}$$
$$LCL=\bar{\lambda}-3\sqrt{\bar{\lambda}}$$

مثال: فرض کنید اعداد زیر تعداد زنگ‌های موجود در یک توپ پارچه را در 25 نمونه نشان می‌دهد

تعدادزدگی	شماره نمونه	تعدادزدگی	شماره نمونه	تعدادزدگی	شماره نمونه
0	21	14	11	7	1
4	22	3	12	6	2
14	23	1	13	6	3
4	24	3	14	3	4
3	25	2	15	22	5
141	جمع	7	16	8	6
		5	17	6	7
		7	18	1	8
		2	19	0	9
		8	20	5	10

$$\bar{\lambda}=\frac{141}{25}=5.64$$
$$UCL=5.64+3\sqrt{5.64}=12.76$$
$$LCL=5.64-3\sqrt{5.64}<0$$

پس $LCL=0$

همان‌طور که مشهود است نمونه‌های شماره ۵ و ۱۱ و ۲۳ دارای تعداد نقص بیشتر از UCL هستند و باید حذف شوند پس از حذف آن‌ها حدود کنترل را مجدداً پیدا می‌کنیم.

$$\bar{\lambda}_{new}=\frac{141-(22+14+14)}{25-3}=4.136$$
$$UCL_{new}=4.136+3\sqrt{4.136}=10.237$$
$$LCL_{new}=4.136-3\sqrt{4.136}<0$$

که $LCL_{new}=0$

بنابراین در روابط اصلاح شده همه نمونه‌ها داخل حدود کنترل قرار دارند.

۴ـ نمودار متوسط تعداد نقص‌ها (نمودار U)

فرض می‌کنیم در هر بار نمونه‌گیری n واحد نمونه به عنوان زیرگروه در نظر می‌گیریم و λ تعداد کل نقض‌ها در زیر گروه باشد پس $U=\frac{\lambda}{n}$ متوسط تعداد نقض در هر واحد مورد بررسی است و بنابراین خط مرکزی و حدود کنترل آزمایشی عبارتند از:

$$CL = \bar{U}$$

$$UCL = \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$$

$$LCL = \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$$

که در آن $\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^{m} U_i}{m}$ متوسط تعداد نقض‌ها در هر واحد برای کل نمونه‌هاست.

مثال: اعداد زیر تعداد اشکال‌های جزئی در رنگ بدنه یخچال‌ها را نشان می‌دهد. 2 بار نمونه‌گیری شده و در هر بار 5 یخچال را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

متوسط تعداد اشکال	تعداد اشکال	شماره نمونه	متوسط تعداد اشکال	تعداد اشکال	شماره نمونه
2.2	11	11	1.4	7	1
0.6	3	12	2.4	12	2
1.4	7	13	2.2	11	3
2	10	14	2.6	13	4
2	10	15	2.2	11	5
1.6	8	16	3.2	16	6
1.6	8	17	2	10	7
2.6	13	18	1.6	8	8
1	5	19	2.4	12	9
1	5	20	2.5	13	10
38.6	193	جمع			

بنابراین

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^{m} U_i}{m} = \frac{38.6}{20} = 1.93$$

لذا حدود کنترل آزمایشی و خط مرکزی عبارتند از:

$$CL = \bar{U} = 1.93$$

$$UCL = 1.93 + 3\sqrt{\frac{1.93}{5}} = 3.79$$

$$LCL = 1.93 - 3\sqrt{\frac{1.93}{5}} = 0.07$$

بدیهی است در همه نمونه‌ها U_i داخل حدود کنترل قرار دارد.

نکته: اگر اندازه زیرگروه‌ها یعنی n_iها برابر نباشند بایستی برای هر نمونه حدود کنترل مخصوص آن نمونه را یافت این نمودار قدری پیچیده شده محاسبات را مشکل می‌سازد برای رفع این مشکل دو راه‌حل پیشنهاد می‌شود.

الف) از متوسط تعداد نمونه‌ها $\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{m}$ به عنوان مقدار برابر n استفاده می‌کنیم. در این حال یک حدود کنترل آزمایشی مانند قبل بوجود می‌آید

ب) آماره استانداردشده

$$Z_i = \frac{U_i - \bar{U}}{\sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}}$$

را به‌کار می‌بریم که U_i متوسط تعداد نقص در نمونه iام متوسط تعداد نقص در هر واحد برای کل نمونه‌هاست. در این حال بایستی قرار دهیم $CL = 0$ و $UCL = +3$ و $LCL = -3$

تابع مشخصه عملکرد نمودار P

می‌دانیم تابع مشخصه عملکرد احتمال قبول فرض H_0 را نشان می‌دهد. احتمال قبول H_0 بر حسب p پیدا می‌شود یعنی منحنی OC تابعی از p است احتمال خطای نوع دوم که همان احتمال قبول H_0 به شرط نادرستی H_0 است می‌تواند احتمال ماندن در حدود کنترل آزمایشی را وقتی p تغییر کرده بیشتر شود.

$$\beta = P\left(LCL < \hat{p} < UCL \middle| p\right)$$

$$= P\left(\hat{p} < UCL \middle| p\right) - P\left(\hat{p} \le LCL \middle| p\right) \quad (\text{با توجه به تعریف } \hat{p} = \frac{X}{n})$$

$$= P\left(X < nUCL \middle| p\right) - P\left(X \le nLCL \middle| p\right)$$

که $X \sim b(n,p)$

برای محاسبه β بر حسب p از فرمول بالا کافی است تابع توزیع تجمعی دوجمله‌ای را برای p,n داشته باشیم. استفاده از $\bar{p}$ به‌جای p در روابط بالا اشکالی ندارد.

در مثال زیر جدول مربوط به محاسبه β را می‌توان دید.

حال می‌توانیم متوسط طول دنباله ARL (Average Run Length) را برای نسبت اقلام معیوب محاسبه نماییم. در واقع وقتی فرآیند واقعاً تحت کنترل باشد ARL متوسط تعداد نقاطی است که باید رسم شود تا یک نقطه اشتباهاً خارج از کنترل رسم شود و وقتی فرآیند خارج از کنترل است ARL متوسط نقاطی است که باید رسم شود تا یک نقطه به درستی خارج از کنترل رسم شود.

مثال: فرض کنید در یک فرآیند که برای نمونه‌های n=100 تایی از قطعات تولیدی یک کارخانه نسبت معیوب‌ها را بررسی می‌کند حدود کنترل آزمایشی به شرح زیر موجود است.

$$CL = 0.04 \quad , \quad UCL = 0.075 \quad , \quad LCL = 0.005$$

الف) احتمال خطای نوع دوم را به عنوان تابعی از p تشکیل دهید و برای 15 مقدار متفاوت p نمودار OC را رسم کنید.

حل :

$$\beta = P\left(\hat{p} < UCL \mid p\right) - P\left(\hat{p} \le LCL \mid p\right)$$

$$= P\left(X < nUCL\right) - P\left(X \le nLCL\right)$$

$$= P\left(X < 100(0.075)\right) - P\left(X \le 100(0.05)\right)$$

$$= P\left(X < 7.5\right) - P\left(X \le 0.5\right) = g(p)$$

برای محاسبه با توجه به آن‌که $X \sim b(n=100,p)$ می‌توانیم برای

$$\lambda = np = 100p < 10$$

از تقریب پواسون و برای $np = 100p > 10$ از تقریب نرمال استفاده نماییم.

p	np	$P\{X<7.5\mid np\}$	$P\{X\le 0.5\mid np\}$	β
0	0	1.0000	1.0000	0.0000
0.005	0.5	1.0000	0.6065	0.3935
0.01	1	1.0000	0.3679	0.6321
0.03	3	0.9881	0.0498	0.9383
0.04	4	0.9489	0.0183	0.9306
0.06	6	0.7440	0.0025	0.7415
0.07	7	0.5987	0.0009	0.5978
0.08	8	0.4530	0.0003	0.4526
0.1	10	0.2202	0.0000	0.2202
0.125	12.5	0.0698	0.0000	0.0698
0.2	20	0.0008	0.0000	0.0008
0.25	25	0.0000	0.0000	0.0000

ب) احتمال خطای نوع اول چقدر است.

$\alpha = P(H_0$ رد $\mid H_0$ درستی$) = P($نقطه خارج از حدود کنترل$\mid p=0.04)$

$= P\left(\hat{p}\le LCL\mid p=0.04\right)+P\left(\hat{p}\ge UCL\mid p=0.04\right)$

$= P\left(X\le 100\,LCL\mid p=0.04\right)+P\left(X\ge 100\,UCL\mid p=0.04\right)$

که $X\sim b(100,p=0.04)$ و با توجه به $\lambda=np=4$ تقریب پواسون برای دوجمله‌ای مناسب می‌باشد لذا

$\alpha=P\left(X\le 100(0.005)\right)+P\left(X\ge 100(0.075)\right)$

که $X\sim P(\lambda=4)$ و بر اساس جدول پواسون

$\alpha = P\left(X\le 0.5\right)+P\left(X\ge 7.5\right)$

$= P\left(X=0\right)+1-P\left(X\le 7\right)$

$= 0.018+\left(1-0.948\right)=0.07$

ج) احتمال خطای نوع دوم را برای $p=0.07$ حساب کنید.

$\beta = P(H_0$ قبول$\mid H_0$ نادرستی$) = P($نقطه داخل حدود کنترل$\mid p=0.07)$

$= P\left(\hat{p}<UCL\mid p=0.07\right)=P\left(\hat{p}\le LCL\mid p=0.005\right)$

$= P\left(X<100(0.075)\right)-P\left(X\le 100(0.005)\right)$

$= P\left(X<7.5\right)-P\left(X\le 0.5\right)$

که $X\sim P(\lambda=7)$ و بنا به جدول

$\beta = 0.598-0=0.598$

د) مقادیر ARL را برای دو حالت تحت کنترل و خارج از کنترل بودن فرآیند پیدا کنید. در صورت خارج از کنترل بودن $p=0.07$ را در نظر بگیرید.

$$ARL=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{0.07}=14.29\approx 15\\[2mm] \dfrac{1}{1-\beta}=\dfrac{1}{1-0.598}=2.48\approx 3\end{cases}$$

یعنی در صورتی که نسبت معیوب‌ها به 0.07 افزایش یابد با سومین نقطه این مطلب مشخص می‌شود و اگر 15 نقطه رسم کنیم حتی وقتی نسبت واقعی معیوب‌ها 0.04 می‌باشد یک نقطه خارج از حدود کنترل رسم می‌شود.

طبقه‌بندی نقص‌ها

یک نقطه سیاه روی رنگ در یک اتومبیل نقص است انحراف فرمان اتومبیل هم یک نقص است اما به وضوح تفاوت بسیار زیادی بین این دو نقص وجود دارد پس لازم است نقص‌ها از نظر اهمیت تقسیم‌بندی کنیم.

گروه A (بسیار مهم) نشان دهنده آن است که محصول برای استفاده مناسب نیست.

گروه B (مهم) نشان‌دهنده آن است که محصول دچار از کارافتادگی می‌شود و هزینه نسبت بالا دارد.

گروه C (با اهمیت متوسط) نشان‌دهنده نقصان عملکرد در حین کار است.

گروه D (با اهمیت کم) آن است که عملکرد دستگاه مشکلی ندارد اما در شکل ظاهری یا کارکرد خوب اشکال دارد.

این رده‌بندی توسط اچ اف داج H.F.Dodge در سال ۱۹۲۸ ارائه شده است.

با فرض آن‌که X_D, X_C, X_B, X_A تعداد نقص‌های گروه‌های چهارگانه فوق باشد $X = 100X_A + 50X_B + 10X_C + X_D$ تعداد نقص‌ها در واحد مورد بررسی را اندازه می‌گیرد و وزن‌های مطر شده به صورت تجربی معمولاً به‌کار می‌رود اما در صورت نیاز به استفاده از وزن‌های دیگر با توجه به شرایط بوجود آمده اشکالی ندارد.

در صورت وزن‌دهی بالا می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.

$$U = \frac{X}{n} \to \bar{U} = 100\bar{U}_A + 50\bar{U}_B + 10\bar{U}_C + \bar{U}_D$$

$$U = \frac{(100)^2\,\bar{U}_A + (50)^2\,\bar{U}_B + (10)^2\,\bar{U}_C + \bar{U}_D}{n}$$

و لذا خط مرکزی و حدود کنترل آزمایشی عبارتند از:

$$C.L = \bar{U}$$
$$UCL = \bar{U} + 3\hat{\sigma}_u$$
$$LCL = \bar{U} - 3\hat{\sigma}_u$$

تابع مشخصه عملکرد نمودارهای U, C

در نمودار C احتمال خطای نوع دوم برابر است با:

$$\beta = P\left(X < UCL \mid C\right) - P\left(X \le LCL \mid C\right)$$

که در آن X دارای توزیع پواسون با پارامتر C است.

و در نمودار U احتمال خطای نوع دوم عبارت است از:

$$\beta = \left(P\left(LCL < \frac{C}{n}\right)UC \mid UL\right)$$
$$= P\left(nLCL < C \le nUCL \mid U\right)$$
$$= \sum_{[nLCL]+1}^{[nUCL]} \frac{e^{-nu}\,(nu)^c}{c!}$$

که در آن $[nUCL]$ جزء صحیح nUCL است.

مثال: فرض کنید 30 بار نمونه 400 تایی گرفته‌ایم و جمعاً 1200 قلم معیوب مشاهده کرده‌ایم و اگر بدانیم نسبت معیوب‌ها به 0.2 تغییر یافته است الف) احتمال آن‌که این تغییر به وسیله اولین نمونه بعد از ایجاد آن کشف شود چقدر است.

ب) طول دنباله موردنیاز برای پی بردن به این تغییر را بیابید.

حل : الف) بر اساس اطلاعات داده شده

$$\bar{p}=\sum_{i=1}^{m}\frac{X_i}{mn}=\frac{1200}{30(400)}=0.1 \quad , \quad n\bar{p}=400(0.1)=40$$

$$UCL_{np}=n\bar{p}+3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}=40+3\sqrt{40(1-0.1)}=58$$

$$LCL_{np}=n\bar{p}-3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}=40-3\sqrt{40(1-0.1)}=22$$

حال

$$\text{توان}=1-\beta=P\ (\text{کشف تغییر در اولین نمونه})=1-P\left(LCL<X<UCL \mid p=0.2\right)$$

$$=1-P\left(X<UCL \mid p=0.2\right)+P\left(X\le LCL \mid p=0.2\right)$$

که

$$np=80>10 \ \text{با توجه به آن‌که}\ X\sim b\left(n=400,P=0.2\right)$$

تقریب نرمال با تصحیح پیوستگی مناسب می‌باشد.

$$1-\beta=1-\Phi\left(\frac{58+0.5-80}{\sqrt{80(0.8)}}\right)+\Phi\left(\frac{22-0.5-80}{\sqrt{80(0.8)}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{-21.5}{8}\right)+\Phi\left(\frac{-58.5}{8}\right)$$

$$=1-\Phi(-2.69)+\Phi(-7.31)$$

$$1-\Phi(-2.69)=\Phi(2.69)=0.99158$$

حل : ب)

$$ARL=\frac{1}{1-\beta}=\frac{1}{0.99158}\approx 1$$

مثال: می‌خواهیم یک نمودار کنترل با خط مرکزی 0.02 و حدود کنترل 2.5 انحراف معیار رسم کنیم طوری که حد پایین کنترل (LCL) مثبت باشد چه تعداد نمونه لازم است؟

حل :

$$P=0.02 \quad , \quad K=2.5$$

$$n>\frac{1-p}{p}K^2 \to n>\frac{0.98}{0.02}(2.5)^2=306.25$$

پس

$$n\ge 307$$

مثال: در مثال قبل اگر نسبت اقلام معیوب به 0.045 تغییر پیدا کند و بخواهیم با احتمال 50% به این رخداد پی ببریم چه تعداد نمونه لازم است؟

حل : با توجه به فرمول زیر داریم.

$$n=\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 p(1-p)=\left(\frac{2.5}{0.025}\right)^2(0.2)(0.98)=196$$

زیرا

$$\delta=\hat{p}-p=0.045-0.02=0.025$$

مثال: فرض کنید در یک فرایند تولیدی نمونه‌های 100تایی گرفته‌ایم و خط مرکزی نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب $CL = 0.03$ بوده است. اگر 10 نمونه 100 تایی جدید به صورت زیر گرفته باشیم آیا فرآیند تحت کنترل آماری می‌باشد؟

شماره نمونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تعداد معیوب	4	7	6	3	0	5	2	4	7	7

حل: کافی است $H_0 : p_1 = p_2$ را در برابر $H_1 = p_1 \neq p_2$ آزمون کنیم که p_1 نسبت اقلام معیوب جدید و p_2 همان نسبت اقلام معیوب قبلی است که برآورد آن برابر 0.03 در نظر گرفته می‌شود پس $\hat{p}_1 = \frac{\sum X_i}{\sum n_i} = \frac{35}{10(100)} = 0.035$

$\hat{p}_2 = 0.03$

نسبت آمیخته $\hat{p} = \frac{n\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{100(0.035)+100(0.03)}{200} = \frac{3.5+3}{200} = \sqrt{0.0325}$

حال بر اساس آماره آزمون نرمال داریم $0035 - 0.03$

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.035-0.03}{\sqrt{(0.0325)(0.9675)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)}} = 0.2$$

که چون $|Z| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ یعنی $0.2 \not> Z_{0.025} = 1.96$ پس H_0 رد نمی‌شود و فرآیند هنوز تحت کنترل می‌باشد یعنی نسبت اقلام معیوب در سطح $\alpha = 0.05$ تغییر نکرده است.

مثال: فرض کنید در یک کارخانه هر بار 3 یخچال را به عنوان نمونه در نظر گرفته تعداد نقص‌ها را می‌شماریم. اگر متوسط تعداد نقص در هر یخچال وقتی فرآیند تحت کنترل است برابر 3 برآورد شود احتمال خطای نوع اول کدام است؟

$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 12$

حل: می‌دانیم $\bar{C} = n\bar{U} = 3(3) = 9$ و لذا $UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 12$
$LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} < 0$

$\alpha = P(H_0$ رد $| H_0$ درستی$)$

$= P(X < LCL|\lambda = 10) + P(X \geq UCL|\lambda = 10)$

$= P(X < 0|\lambda = 10) + 1 - p(X \leq 11|\lambda = 10)$

$= 0 + 1 - 0.696 = 0.304$

تست‌ها

۱ ـ فرض کنید اعداد زیر تعداد بخاری‌های نمونه گرفته شده و خراب را در 10 روز نشان می‌دهد.

روز	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	جمع
تعداد نمونه n_i	80	110	90	75	130	120	70	125	105	95	1000
تعداد خراب X_i	4	7	5	8	6	6	4	5	8	7	60

حد کنترل بالایی برای نسبت اقلام معیوب بر اساس متوسط تعداد نمونه‌ها کدام است؟

۱) 0.13　　۲) 0.024　　۳) 0.074　　۴) 0.123

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$\bar{p}=\frac{\sum X_i}{\sum n_i}=\frac{60}{1000}=0.06 \quad , \quad \bar{n}=\frac{\sum n_i}{m}=\frac{1000}{10}=100$$

$$UCL=\bar{p}+3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{\bar{n}}}=0.06+3\sqrt{\frac{(0.06)(0.94)}{100}}=0.132$$

۲ ـ یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب فرآیندی در نمونه‌های 50 تایی برابر 0.04 نشان می‌دهد اگر نسبت اقلام معیوب به 0.07 تغییر پیدا کند احتمال آن‌که روز بعد به‌وجود این تغییر پی برده شود کدام است؟

۱) 0.066　　۲) 0.096　　۳) 0.934　　۴) 0.904

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{p}=0.04 \quad , \quad UCL=0.04+3\sqrt{\frac{(0.04)(0.96)}{50}}=0.135$$

$$LCL=0$$

$1-\beta=p$ (وقوع تغییر | کشف تغییر در اولین نمونه)

$$=p\left(X>50(0.135)\middle|p=0.07\right)+p\left(X\le 0\,|\,p=0.07\right)$$

با توجه به تقریب پواسون برای دوجمله‌ای

$$=1-P\left(X\le 6.75\middle|np=\lambda=3.5\right)+p\left(X\le 0\,|\,\lambda=3.5\right)$$

$$=1-0.934+0.03=0.066+0.03=0.096$$

۳ ـ در یک نمودار کنترل با مقدار np=16 برای تعداد قطعات معیوب تولیدی توسط یک کارخانه در نمونه‌های 400 تایی بررسی می‌شود اگر میانگین فرآیند به np=20 تغییر یابد احتمال پی بردن به این تغییر حداقل تا پایان روز سوم کدام است؟

۱) 0.983　　۲) 0.967　　۳) 0.976　　۴) 0.0170

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$np=16 \quad , \quad n=400 \quad \to \quad \bar{p}=\frac{16}{400}=0.04$$

$$UCL=np+3\sqrt{np(1-\bar{p})}=16+3\sqrt{16(1-0.04)}=27.758\cong 28$$

$$LCL=np-3\sqrt{np(1-\bar{p})}=16-3\sqrt{16(1-0.04)}=16-11.758=4.242\cong 4$$

با توجه به تقریب نرمال $1-\beta=p(X>UCL)+p(X<LCL)$

$$1-\Phi\left(\frac{28+\frac{1}{2}-20}{\sqrt{20(0.8)}}\right)+\Phi\left(\frac{4-\frac{1}{2}-20}{\sqrt{20(0.8)}}\right)$$
$$=1-\Phi(2.12)=1-0.983=0.017$$

حال

p (شناسایی حداقل در سومین نمونه)=[p(عدم شناسایی)]^2
$$=(0.983)^2=0.967$$

۴ـ در سوال قبل تعداد نمونه حداقل چه باشد تا حد کنترل پایین نمودار با حدود کنترل 3.5 انحراف معیار مثبت بماند؟

۱) 74 ۲) 48 ۳) 64 ۴) 65

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$$n>\left(\frac{1-p}{p}\right)L^2=\frac{1-0.16}{0.16}(3.5)^2=64.313$$

پس $n\geq 65$

۵ـ در یک فرآیند خط مرکزی نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب p=0.014 بوده است اگر بخواهیم حدود کنترل 2.5 انحراف معیار را طوری به‌کار ببریم که حد پایین نمودار کنترل مثبت باشد چه تعداد نمونه لازم است؟

۱) 400 ۲) 360 ۳) 441 ۴) 280

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$n>\frac{1-p}{p}L^2=\frac{1-0.014}{0.014}(3.5)^2=440.1\approx 441$$

۶ـ در سوال قبل اگر نسبت اقلام معیوب به 0.024 تغییر یابد چه تعداد نمونه لازم است تا بتوان با احتمال $\frac{1}{2}$ به وجود تغییر پی برد؟

۱) 800 ۲) 863 ۳) 470 ۴) 629

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$n=\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 p(1-p)=\left(\frac{2.5}{0.01}\right)^2(0.014)(0.986)=862.75\simeq 863$$
$$\delta=0.024-0.014=0.1=0.01$$

۷ـ اگر احتمال پی بردن به یک تغییر در اولین نمونه پس از ایجاد آن در نمودار کنترل p برابر 0.15 باشد احتمال آن‌که این تغییر حداقل در نمونه چهارم مشاهده شود کدام است؟

۱) $(0.85)^3$ ۲) $(0.85)^4$ ۳) $(0.85)^2(0.815)$ ۴) $(0.85)^3(0.815)$

حل : گزینه ۱ صحیح است.

بر اساس روابط توزیع هندسی

$$P(X\geq 4)=q^3=(0.85)^3 \qquad q=1-0.15=0.85$$

که X تعداد نمونه لازم برای یافتن تغییر و دارای توزیع هندسی یا پارامتر p=0.15 است.

۸ ـ فرض کنید با نمونه‌های 100 تایی حدود کنترل و خط مرکزی نمودار نسبت اقلام معیوب را به صورت زیر یافته‌ایم.

$CL = 0.1 \quad , \quad UCL = 0.19$

$LCL = 0.01$

احتمال خطای نوع اول کدام است؟

۱) 0.05 ۲) 0.08 ۳) 0.005 ۴) 0.008

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$$\alpha = p \ (\text{خطای نوع اول}) = P(X \le LCL | p = 0.1) + P(X \ge UCL | p = 0.1)$$

با توجه به تقریب دوجمله‌ای به پواسون داریم $\lambda = np = 10$ و لذا

$$\alpha = p(X \le 100(0.01)) + P(X \ge 100(0.19))$$

با استفاده از جدول پواسون

$$= 0 + 1 - 0.992 = 0.008$$

۹ ـ در سوال قبلی احتمال خطای نوع دوم بازای p=0.020 کدام است؟

۱) 0.18 ۲) 0.381 ۳) 0.138 ۴) 0.008

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$= P(X < 100(0.19) | \lambda = 20) - P(X \le 100(0.01) | \lambda = 20)$$
$$= P(X < 19 | \lambda = 20) - P(X \le 1 | \lambda = 20)$$
$$= P(X \le 18 | \lambda = 20) - P(X \le 1 | \lambda = 20) = 0.381$$

۱۰ ـ اگر در یک فرآیند نسبت اقلام معیوب وجود یک تغییر در p با احتمال 0.217 در اولین نمونه پس از وقوع تغییر کشف شود به صورت متوسط چه مقدار نمونه n تایی باید گرفت؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{0.217} = 4.6 \approx 5$$

۱۱ ـ اگر در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب داشته باشیم

$UCL = 0.0862 \quad , \quad LCL = 0.0138 \quad , \quad n = 100$

فاصله حدود کنترل چه ضریبی از انحراف معیار $\bar{p}$ می‌باشد؟

۱) 4.5 ۲) 3.3 ۳) 2.5 ۴) 3

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$UCL - LCL = 0.0862 - 0.0138 = 0.0724$$
$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = \sqrt{\frac{(0.05)(0.95)}{100}} = 0.0218$$

حال

$$\frac{0.0724}{0.0318} = 3.32$$

۱۲ ـ اگر حدود کنترل بالا و پایین نمودار نسبت اقلام معیوب به صورت LCL=0.049 , LCL=0.031 باشد احتمال خطای نوع اول بر اساس تعداد اقلام معیوب در نمونه‌های 100 تایی به چه فرمی است؟

۱) $P(X<3|p=0.04)$

۲) $P(X\le 3|p=0.04)+P(X>5|p=0.04)$

۳) $P(X\le 3|p=0.04)+P(X\ge 5|p=0.04)$

۴) $P(X<3|p=0.04)+P(X\ge 5|p=0.04)$

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$\alpha=P(X\le 100\,\text{LCL}|p=\text{CL}=0.04)$$
$$+P(X\ge 100\,\text{UCL}|p=0.04)$$
$$=P(X\le 3.1|p=0.04)+P(X\ge 4.9|p=0.04)$$
$$=P(X\le 3|p=0.04)+P(X\ge 5|p=0.04)$$

۱۳ ـ فرض کنید خط مرکزی نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب CL=0.03 باشد و با احتمال 0.002 علی‌رغم آن‌که فرآیند تحت کنترل است ما فرآیند را خارج از کنترل اعلام می‌کنیم چه تعداد نمونه n=160 تایی لازم است گرفته شود تا فرآیند تحت کنترل را خارج از کنترل اعلام کنیم.

۱) 160

۲) 32

۳) 500

۴) ۳۲۰

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{ARL}=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{0.002}=\frac{100}{2}=500$$

۱۴ ـ تعداد کل کلیدهای معیوب در 20 بار نمونه‌گیری 100 تایی 117 عدد می‌باشد حد بالای نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب کدام گزینه است؟

۱) ۰،۱۲۸۹

۲) 0.0585

۳) 0

۴) 0.0289

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$n=100\quad,\quad m=20\ \sum_{i=1}^{m}D_i=117\qquad \bar{P}=\frac{\sum_{i=1}^{m}D_i}{mn}=\frac{117}{20(100)}=0.0585$$

$$\text{UCL}_p=\bar{P}+3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}=0.0585+3\sqrt{\frac{0.0585(1-0.0585)}{100}}=0.1289$$

۱۵ ـ در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب فرآیندی برابر 0.02 است، اگر نسبت اقلام معیوب فرآیند به 0.04 تغییر پیدا کند آن‌گاه احتمال این‌که 2 روز بعد به‌وجود این تغییر پی برده شود کدام گزینه است؟ (نمونه‌های 90 تایی بازرسی می‌شوند)

۱) 0.3

۲) 0.2

۳) 0.145

۴) 0.278

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{p}=0.02\quad,\quad n=50$$

$$\text{UCL}=\bar{p}+3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{p})}{n}}=0.02+3\sqrt{\frac{0.02\times 0.98}{50}}=0.0794$$

$$\text{LCL}=\bar{p}-3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{p})}{n}}=0.02-3\sqrt{\frac{0.02\times 0.98}{50}}=0.02-0.0594\ \Rightarrow\ 0$$

از آن‌جایی که P_{new} از 0.1 کوچکتر است و تعداد نمونه‌ها (50 تایی) به اندازه‌ی کافی بزرگ است از تقریب پواسون برای دوجمله‌ای استفاده می‌شود. $\lambda = nP_{new} = 50\times 0.04 = 0.2$

$$P(\text{شناسایی اولین نمونه}|P_{new}=0.04)=1-\beta=1-P\{LCL<\hat{P}<UCL|P_{new}=0.04\}$$
$$=1-P\{D<nUCL|\lambda\}+P\{D\le n\times LCL|\lambda\}=1-P\{D<3.97|2\}-P\{D\le 0|2\}$$
$$=1-0.857+0.135=0.278$$

شناسایی توسط دومین‌بار

$$P(\text{شناسایی توسط دومین نمونه})=(1-0.278)^1\times 0.278=0.2$$

۱۶ ـ مقدار نسبی اقلام معیوب در نمونه‌های 16 تایی برابر 0.2 می‌باشد که کوچکترین اندازه‌ی نمونه که باعث شود تا حد کنترل پایین نمودار مثبت باشد کدام گزینه است؟ (حدود کنترل 3σ است.)

۱) 16 ۲) 64 ۳) 36 ۴) 81

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$n>\frac{(1-p)}{p}L^2 \quad , \quad n>\frac{(1-0.2)}{0.2}(3)^2 \quad , \quad n>36$$

۱۷ ـ فرایندی توسط نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب با حدود سه انحراف معیار، LCL=0 و CL=0.02 و UCL=0.0794 کنترل می‌شود حد بالای نمودار کنترل برای تعداد اقلام معیوب کدام گزینه است؟ (n=100 می‌باشد.)

۱) 6.2 ۲) -2.2 ۳) 2 ۴) 0

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$np=100(0.02)=2 \qquad 100\times 0.2=2$$
$$UCL=np+3\sqrt{np(1-p)}=2+3\sqrt{2\times(1-0.02)}=2+3\sqrt{2\times 0.98}=2+3\times 1.4=6.2$$

۱۸ ـ در سوال قبلی احتمال خطای نوع I برابر کدام گزینه است؟

۱) 0.004 ۲) 0.005 ۳) 0.995 ۴) 0.996

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\lambda=np=2$$

چون p کوچک و n بزرگ است به توزیع پواسون تقریب می‌زنیم.

$$\alpha=1-p(D<UCL\,|\,\lambda=2)+p(D\le LCL\,|\,\lambda=2)$$
$$=P(D<0|\lambda=2)+1-P(D\le 6.2|\lambda=2)=0+1-POI(6\,,2)$$
$$=1-0.995=0.005$$

۱۹ ـ در سوال قبلی اگر نسبت اقلام معیوب به 0.2 تغییر کند با استفاده از تقریب مناسب احتمال خطای نوع II را تعیین کنید؟

۱) 0.05 ۲) 0.005 ۳) 0.0005 ۴) 0

حل : گزینه ۳ صحیح است.

چون $nP_{new}=100(0.2)=20$ بنابراین از تقریب نرمال برای دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\beta=P\{D<UCL|nP_{new}\}-P\{D\le LCL|nP_{new}\}$$

$$=\varphi\left(\frac{UCL+0.5-nP_{new}}{\sqrt{nP(1-p)}}\right)-\varphi\left(\frac{LCL-0.5-nP_{new}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$=\varphi\left(\frac{6.2+0.5-20}{\sqrt{20(1-,2)}}\right)-\varphi\left(\frac{0-0.5-20}{\sqrt{20(1-0.02)}}\right)=\varphi(-3.325)-\varphi(-5.125)=0.0005$$

۲۰ ـ در طراحی یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب با خط مرکزی P=0.3 و حدود کنترل سه انحراف معیار، چه اندازه نمونه موردنیاز است تا بتوان با احتمال 0.5 به وجود تغییر نسبت اقلام معیوب به 0.38 پی برد؟

۱) 296 ۲) 295 ۳) 400 ۴) 399

حل : گزینه ۱ صحیح است.

با استفاده از روش دانکن برای 0.5= (شناسایی)P

$$n=\left(\frac{k}{p_2-p_1}\right)^2\times p_1(1-p_1)=\left(\frac{3}{0.08}\right)^2\times 0.3(1-0.3)=295.3\simeq 296$$

۲۱ ـ در فرآیندی متوسط نسبت اقلام معیوب 0.07 به‌دست آمده است و حدود کنترل 3 انحراف معیار برای آن در نظر گرفته شده است، در صورتی که نسبت اقلام معیوب به‌طور ناگهانی به 0.1 تغییر کند احتمال پی بردن به وجود تغییر به‌وسیله‌ی نمونه اول یا دوم بعد از ایجاد آن کدام گزینه است؟ (اندازه‌ی نمونه‌ها 400 می‌باشد)

۱) 0.53 ۲) 0.47 ۳) 0.27 ۴) 0.73

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$P(\text{شناسایی تغییر}|P_{new})=1-\beta=1-P(\hat{p}<UCL|P_{new})+P(\hat{p}\le LCL|P_{new})$$

$$=1-P(D<nUCL|nP_{new})+P(D\le LCL|nP_{new})$$

که چون $nP_{new}=400\times 0.1=40>15$ بنابراین از تقریب نرمال برای Bin استفاده می‌کنیم.

$$=1-\varphi\left(\frac{nUCL-np+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)+\varphi\left(\frac{nLCL-np-0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$=1-\varphi\left(\frac{43.2-40+0.5}{\sqrt{40(1-0.1)}}\right)+\varphi\left(\frac{12.8-40-0.5}{\sqrt{40(1-0.1)}}\right)$$

$$=1-\varphi(0.62)+\varphi(-4.62)=1-0.72907+0=0.27$$

$$P(\text{شناسایی در اولین یا دومین نمونه})=0.27+(1-0.27)\times 0.27=0.47$$

۲۲ ـ در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب UCL=0.19 و CL=0.1 , LCL=0.01 برای کنترل فرآیندی استفاده می‌شود، اگر نسبت اقلام معیوب واقعی P=0.02 باشد آن‌گاه احتمال پی بردن به وجود تغییر حداقل به‌وسیله‌ی سومین نمونه بعد از ایجاد آن کدام گزینه است؟

۱) ۰٫۶۱۹ ۲) 0.381 ۳) 0.145 ۴) 0.383

حل : گزینه ۳ صحیح است.

از توزیع پواسون برای تقریب استفاده شده است.

$$\lambda=nP_{new}=100\times 0.2=20$$

$$\beta = P\left(D < nUCL|\lambda\right) - P\left(D \le nLCL\,|\,\lambda\right) = P\left(D < 100\times0.19\,|\,20\right) - P\left(D \le 100\times0.01\,|\,20\right)$$
$$= POI(18,20) - POI(1,20) = 0.381$$
$$1-\beta = 0.619$$

1-p(شناسایی به‌وسیله نمونه اول یا دوم) $= 1-\left[0.619+0.619\times0.381\right] = 0.145$

۲۳ ـ در سوال قبلی متوسط طول دنباله برای پی بردن به وجود این تغییر کدام گزینه است؟

۱) 1　　۲) 2　　۳) 3　　۴) 4

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{0.619} = 1.61 \simeq 2$$

۲۴ ـ در تست ۲۲ قبلی متوسط طول دنباله موقعی که فرآیند تحت کنترل است و نسبت اقلام معیوب 0.1 می‌باشد کدام گزینه است؟

۱) 125　　۲) 13　　۳) 210　　۴) 120

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$ARL = \frac{1}{\alpha} \quad , \quad \lambda = 0.1\times100 = 10$$
$$\alpha = 1-P\left(D < nUCL\,|\,\lambda=10\right) + P\left(D \le nLCL\,|\,\lambda=10\right)$$
$$= 1-P\left(D < 100\times(0.19)\,|\,\lambda=10\right) + P\left(D \le 100\times(0.01)\,|\,\lambda=10\right)$$
$$= 1-POI(18,10) + POI(1,10) = 1-0.992+0 = 0.008$$
$$ARL = \frac{1}{0.008} = 125$$

۲۵ ـ یک فرآیند به‌وسیله نمودار نسبت اقلام معیوب کنترل می‌شود. اندازه نمونه 100 و خط مرکزی CL=0.01 است، نمونه‌های جدیدی به‌دست آمده که مجموع اقلام معیوب در 10 بار نمونه‌گیری با همان اندازه‌ی نمونه 28 می‌باشد مقدار آماره‌ی آزمون برای تحت کنترل بودن آن کدام گزینه است؟

۱) -18　　۲) -9　　۳) 18　　۴) -3

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{p}_1 = 0.01 \quad , \quad n = 100 \quad , \quad \bar{p}_2 = \frac{28}{1000} = 0.028 \quad , \quad n = 100$$
$$\hat{p} = \frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2} = \frac{100\times0.01+100\times0.028}{200} = 0.019$$
$$Z_0 = \frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.01-0.028}{\sqrt{0.019(1-0.019)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)}} = \frac{-0.018}{0.02} \simeq -9$$

۲۶ ـ مجموع تعداد نقص‌های مشاهده شده در 25 کیت الکترونیکی 225 می‌باشد حد بالای نمودار کنترل تعداد نقص‌ها کدام گزینه می‌باشد؟

۱) 18　　۲) 0　　۳) 9　　۴) 36

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$CL = \bar{C} = \frac{225}{25} = 9$$
$$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 9 + 3\times 3 = 18$$

۲۷ ـ می‌خواهیم فرآیند تولید یک ساعت الکتریکی را با استفاده از نمودار تعداد نقص‌ها کنترل کنیم. واحد بازرسی 1 ساعت است و در بررسی 100 ساعت الکتریکی 16 ساعت معیوب مشاهده گردید. حد بالای 3 انحراف معیار را برای این نمودار به‌دست آورید؟

۱) 1.3 ۲) 1.36 ۳) 0.64 ۴) 0.16

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\sum D_i = 16 \quad , \quad \bar{C} = \frac{16}{100} = 0.16$$
$$UCL_{\bar{c}} = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 0.16 + 3\times 0.4 = 0.16 + 1.2 = 1.36$$
$$LCL_{\bar{c}} = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} = 0.16 - 3\times 0.4 \quad \Rightarrow \quad 0$$

۲۸ ـ در سوال قبلی احتمال خطای نوع I برابر کدام گزینه است؟

۱) ۰،۰۰۴ ۲) 0.0128 ۳) 0.995 ۴) 0.005

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\alpha = P(D < LCL \mid C) + P(D \ge UCL \mid C) = P(D < 0 \mid C = 0.16) + 1$$
$$-P(D < UCL \mid C = 0.16) = 0 + 1 - POI(1, 0.16) = 1 - 0.9872 = 0.0128$$

از روش درون‌یابی $POI(1,0.16)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda = 0.1 \quad POI = 0.995$$
$$\lambda = 0.2 \quad POI = 0.982$$
$$\frac{0.16 - 0.1}{0.1} = \frac{X - 0.995}{0.982 - 0.995}$$
$$0.1X = 0.06\times(0.982 - 0.995) + 0.1\times 0.995$$
$$X = 0.9872$$

۲۹ ـ اگر تعداد متوسط نقص‌های واقعی در سوال قبلی 1 باشد احتمال خطای نوع II کدام گزینه است؟

۱) 0.265 ۲) 0.735 ۳) 0.01 ۴) 0.99

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\beta = P(LCL < D < UCL \mid C = 1) = P(0 < D < 1.36 \mid C = 1)$$
$$= POI(1,1) - POI(0,1) = 0.735$$

۳۰ ـ اگر تعداد متوسط نقص‌ها واقعی در سوال قبلی 1 باشد، متوسط طول دنباله کدام گزینه است؟

۱) 3 ۲) 4 ۳) 2 ۴) 1

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{0.265} = 3.77 \simeq 4$$

۳۱ـ در صورتی که متوسط طول دنباله برای کشف تغییر در تعداد نقص‌ها برابر 4 باشد احتمال خطای نوع II برابر کدام گزینه است؟

۱) 0.25 ۲) 0.1 ۳) 0.75 ۴) 0.9

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$ARL = 4 = \frac{1}{1-\beta} \quad , \quad 1-\beta = 0.25 \quad , \quad \beta = 0.75$$

۳۲ـ در صورتی که متوسط طول دنباله برای موقعی که نمودار نسبت معیوب تحت کنترل است برابر 3 باشد احتمال خطای نوع I برابر کدام گزینه است؟

۱) 0.33 ۲) 0.77 ۳) 1 ۴) 0

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$ARL = 3 = \frac{1}{\alpha} \quad , \quad \alpha = \frac{1}{3} = 0.33$$

Appendix I

Cumulative poisson distribution*

x	0.01	0.05	0.10	λ 0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
0	0.990	0.951	0.904	0.818	0.740	0.670	0.606	0.548
1	0.999	0.998	0.995	0.982	0.963	0.938	0.909	0.878
2		0.999	0.999	0.998	0.996	0.992	0.985	0.976
3				0.999	0.999	0.999	0.998	0.996
4					0.999	0.999	0.999	0.999
5							0.999	0.999

x	0.70	0.80	0.90	λ 1.00	1.10	1.20	1.30	1.40
0	0.496	0.449	0.406	0.367	0.332	0.301	0.272	0.246
1	0.844	0.808	0.772	0.735	0.699	0.662	0.626	0.591
2	0.965	0.952	0.937	0.919	0.900	0.879	0.857	0.833
3	0.994	0.990	0.986	0.981	0.974	0.966	0.956	0.946
4	0.999	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992	0.989	0.985
5	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996
6		0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
7				0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
8							0.999	0.999

x	1.50	1.60	1.70	λ 1.80	1.90	2.00	2.10	2.20
0	0.223	0.201	0.182	0.165	0.149	0.135	0.122	0.110
1	0.557	0.524	0.493	0.462	0.433	0.406	0.379	0.354
2	0.808	0.783	0.757	0.730	0.703	0.676	0.649	0.622
3	0.934	0.921	0.906	0.891	0.874	0.857	0.838	0.819
4	0.981	0.976	0.970	0.963	0.955	0.947	0.937	0.927
5	0.995	0.993	0.992	0.989	0.986	0.983	0.979	0.975
6	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996	0.995	0.994	0.992
7	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.998	0.998
8	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
9			0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
10							0.999	0.999

* Entries in the table are values $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{c=0}^{x}(e^{-\lambda}\lambda^{c}/c!)$. Blank spaces below the last entry in any column may be read as 1.0; blank spaces above the first entry in any column may be read as 0.0.

Appendix I (Continued)

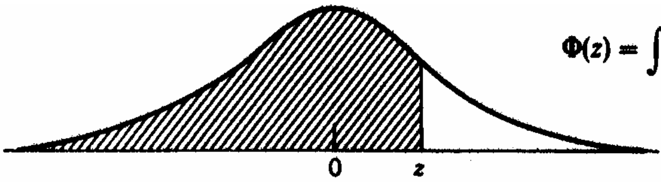
x	λ 2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
0	0.100	0.090	0.082	0.074	0.067	0.060	0.055	0.049
1	0.330	0.308	0.287	0.267	0.248	0.231	0.214	0.199
2	0.596	0.569	0.543	0.518	0.493	0.469	0.445	0.423
3	0.799	0.778	0.757	0.736	0.714	0.691	0.669	0.647
4	0.916	0.904	0.891	0.877	0.862	0.847	0.831	0.815
5	0.970	0.964	0.957	0.950	0.943	0.934	0.925	0.916
6	0.990	0.988	0.985	0.982	0.979	0.975	0.971	0.966
7	0.997	0.996	0.995	0.994	0.993	0.991	0.990	0.988
8	0.999	0.999	0.998	0.998	0.998	0.997	0.996	0.996
9	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998
10	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
11			0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
12							0.999	0.999

x	λ 3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00
0	0.030	0.018	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001	0.000
1	0.135	0.091	0.061	0.040	0.026	0.017	0.011	0.007
2	0.320	0.238	0.173	0.124	0.088	0.061	0.043	0.029
3	0.536	0.433	0.342	0.265	0.201	0.151	0.111	0.081
4	0.725	0.628	0.532	0.440	0.357	0.285	0.223	0.172
5	0.857	0.785	0.702	0.615	0.528	0.445	0.369	0.300
6	0.934	0.889	0.831	0.762	0.686	0.606	0.526	0.449
7	0.973	0.948	0.913	0.866	0.809	0.743	0.672	0.598
8	0.990	0.978	0.959	0.931	0.894	0.847	0.791	0.729
9	0.996	0.991	0.982	0.968	0.946	0.916	0.877	0.830
10	0.998	0.997	0.993	0.986	0.974	0.957	0.933	0.901
11	0.999	0.999	0.997	0.994	0.989	0.979	0.966	0.946
12	0.999	0.999	0.999	0.997	0.995	0.991	0.983	0.973
13	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.996	0.992	0.987
14		0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.994
15			0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997
16				0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
17					0.999	0.999	0.999	0.999
18						0.999	0.999	0.999
19							0.999	0.999
20								0.999

Appendix I (Continued)

x	λ 7.50	8.00	8.50	9.00	9.50	10.0	15.0	20.0
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.004	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.020	0.013	0.009	0.006	0.004	0.002	0.000	0.000
3	0.059	0.042	0.030	0.021	0.014	0.010	0.000	0.000
4	0.132	0.099	0.074	0.054	0.040	0.029	0.000	0.000
5	0.241	0.191	0.149	0.115	0.088	0.067	0.002	0.000
6	0.378	0.313	0.256	0.206	0.164	0.130	0.007	0.000
7	0.524	0.452	0.385	0.323	0.268	0.220	0.018	0.000
8	0.661	0.592	0.523	0.455	0.391	0.332	0.037	0.002
9	0.776	0.716	0.652	0.587	0.521	0.457	0.069	0.005
10	0.862	0.815	0.763	0.705	0.645	0.583	0.118	0.010
11	0.920	0.888	0.848	0.803	0.751	0.696	0.184	0.021
12	0.957	0.936	0.909	0.875	0.836	0.791	0.267	0.039
13	0.978	0.965	0.948	0.926	0.898	0.864	0.363	0.066
14	0.989	0.982	0.972	0.958	0.940	0.916	0.465	0.104
15	0.995	0.991	0.986	0.977	0.966	0.951	0.568	0.156
16	0.998	0.996	0.993	0.988	0.982	0.972	0.664	0.221
17	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.985	0.748	0.297
18	0.999	0.999	0.998	0.997	0.995	0.992	0.819	0.381
19	0.999	0.999	0.999	0.998	0.998	0.996	0.875	0.470
20	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.917	0.559
21	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.946	0.643
22		0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.967	0.720
23			0.999	0.999	0.999	0.999	0.980	0.787
24					0.999	0.999	0.988	0.843
25						0.999	0.993	0.887
26							0.996	0.922
27							0.998	0.947
28							0.999	0.965
29							0.999	0.978
30							0.999	0.986
31							0.999	0.991
32							0.999	0.995
33							0.999	0.997
34								0.998

Appendix II



$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	z
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.0
0.1	0.53983	0.54379	0.54776	0.55172	0.55567	0.1
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.2
0.3	0.61791	0.62172	0.62551	0.62930	0.63307	0.3
0.4	0.65542	0.65910	0.62276	0.66640	0.67003	0.4
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.5
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.6
0.7	0.75803	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.7
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79954	0.8
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.9
1.0	0.84134	0.84375	0.84613	0.84849	0.85083	1.0
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87285	1.1
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	1.2
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	1.3
1.4	0.91924	0.92073	0.92219	0.92364	0.92506	1.4
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	1.5
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	1.6
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	1.7
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96637	0.96711	1.8
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	1.9
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	2.0
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	2.1
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	2.2
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	2.3
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	2.4
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	2.5
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	2.6
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	2.7
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	2.8
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	2.9
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	3.0
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	3.1
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	3.2
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	3.3
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	3.4
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	3.5
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	3.6
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	3.7
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	3.8
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	3.9

Appendix II (Continued)

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$$

z	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.0	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586	0.0
0.1	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57534	0.1
0.2	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409	0.2
0.3	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173	0.3
0.4	0.67364	0.67724	0.68082	0.68438	0.68793	0.4
0.5	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240	0.5
0.6	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490	0.6
0.7	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78523	0.7
0.8	0.80234	0.80510	0.80785	0.81057	0.81327	0.8
0.9	0.82894	0.83147	0.83397	0.83646	0.83891	0.9
1.0	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214	1.0
1.1	0.87493	0.87697	0.87900	0.88100	0.88297	1.1
1.2	0.89435	0.89616	0.89796	0.89973	0.90147	1.2
1.3	0.91149	0.91308	0.91465	0.91621	0.91773	1.3
1.4	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189	1.4
1.5	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408	1.5
1.6	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95448	1.6
1.7	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327	1.7
1.8	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062	1.8
1.9	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670	1.9
2.0	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169	2.0
2.1	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574	2.1
2.2	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899	2.2
2.3	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158	2.3
2.4	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361	2.4
2.5	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520	2.5
2.6	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643	2.6
2.7	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736	2.7
2.8	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807	2.8
2.9	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861	2.9
3.0	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900	3.0
3.1	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929	3.1
3.2	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950	3.2
3.3	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965	3.3
3.4	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976	3.4
3.5	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983	3.5
3.6	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989	3.6
3.7	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992	3.7
3.8	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995	3.8
3.9	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997	3.9