بسمه تعالی

جزوه

ارتعاشات مکانیکی

دانشگاه

تهران

استاد

دکتر یوسفی کما

ارتعاشات مکانیکی «بسمه تعالی» «سید محمد جعفر سبحانی» ص ۱

«دکتر یوسفی کما»

فهرست مطالب

منابع و مراجع:

1. Mechanical vibration, Rao
2. Theory of vibration with applications, Thamson & Dahleh
3. Engineering vibration, D. Inman
4. تئوری ارتعاشات و کاربرد آن در مهندسی

ارزشیابی:

جزوه بسته

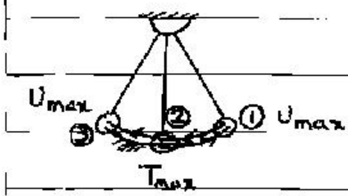
حل تمرین: ۲ نمره ADAMS: ۱ نمره میان ترم: ۷ نمره (حذفی نیست) پایان ترم: ۱۰ نمره

فصل اول : مقدمه مفاهیم ، تعریف

ارتعاشات ← تقابل انرژی پتانسیل و مکانیکی

برای ایجاد ارتعاش به یک المان انرژی نیاز داریم.

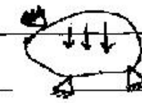
برای یک سیکل ارتعاشی غیر میرا، ۴ بار تبدیل انرژی انجام می‌گیرد.

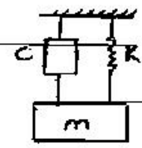


تقسیم بندی سیستم های ارتعاشی

الف)

1. سیستم های ممتد (continuous)
2. سیستم های گسسته (Discrete)



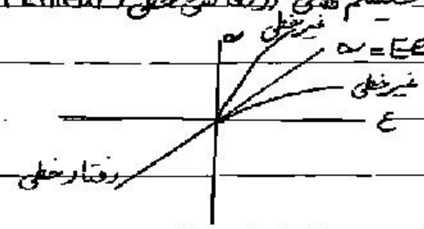


$F = Kx$

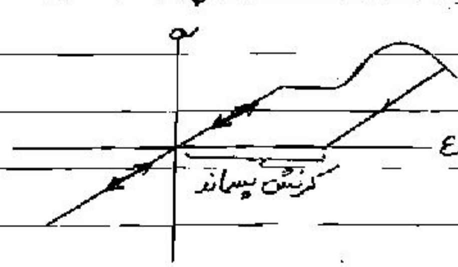
$F = Kx^3$

ب)

1. سیستم های ارتعاشی خطی (Linear)
2. سیستم های ارتعاشی غیرخطی (Nonlinear)



عوامل غیرخطی بودن : { 1- مواد یا سازه (خاصیت مواد) ← ماده از اول غیرخطی ; 2- large Deformation }



ج)

1. ارتعاشات آزاد
2. ارتعاشات اجباری

د)

1. ارتعاشات بدون میرایی (Damped)
2. ارتعاشات میراشونده (Undamped)

سید محمد جعفر سبحانی

ه)

۱. ارتعاشات معین (Deterministic)   2. ارتعاشات اتفاقی (Random)

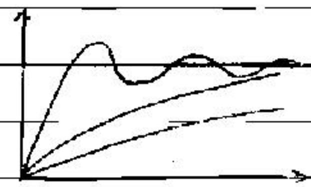
- ارتعاشات و نویز

- ارتعاشات و آکوستیک ← Acoustic   High Frequency vib.

Air   Structures

ارتعاشات مفید

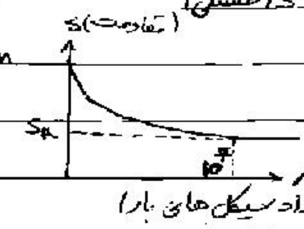
۱- سیستم تعلیق خودرو



2 System ID   3 Modal Analysis

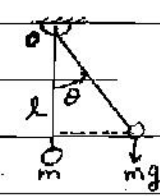
4 S-N (خستگی)

Design → Product → certification test



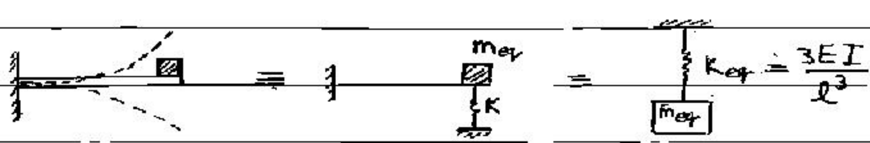
5 Vibratory finishing Process ← صیقل کردن قطعات

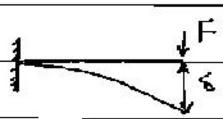
* سیستم های خطی ← ارتعاشات دامنه پایین



$$\Sigma M_o = I\alpha \rightarrow -mg\ell\sin\theta = m\ell^2\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

اگر $\theta \ll 1 \;:\; \theta < 6^\circ \Rightarrow \theta \approx \sin\theta \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$



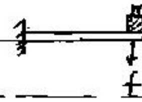


$$\delta = \frac{F\ell^3}{3EI} \rightarrow F = \frac{3EI}{\ell^3}\delta$$

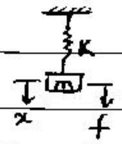
$$F = Kx$$

* مراحل تحلیل سیستم های ارتعاشی:

۱ـ مدل فیزیکی



2ـ مدل ریاضی

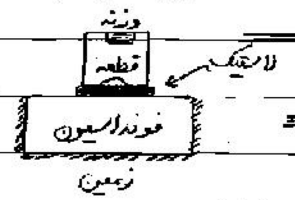


3ـ معادله حرکت $\sum \vec{F} = m\vec{a}\,,\ \sum M = J\alpha \;\Rightarrow\; m\ddot{x} + Kx = f(t)$

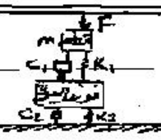
4ـ حل معادله حرکت (ارتعاشی)

5ـ فرکانس های طبیعی سیستم و شکل مودها

مثال:



=

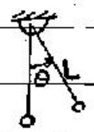


فرکانس طبیعی: فرکانسی است که در آن تمامی اجزای سیستم (ذرات) هماهنگ با یکدیگر حرکت می کنند.

درجه آزادی: تعداد حداقل مختصات لازم برای تحلیل حرکت یک سیستم دینامیکی یا ارتعاشی.

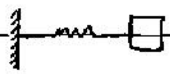
تعداد درجات آزادی = تعداد فرکانس طبیعی = تعداد شکل مودها

مثال:

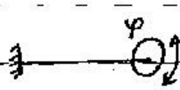


$\left.\begin{array}{l} x, y \\ x^2 + y^2 = L^2 \end{array}\right\}$ (تعداد قیود ـ تعداد مختصات = تعداد درجه آزادی)

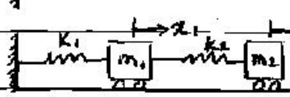
1 DoF (Degree of Freedom)



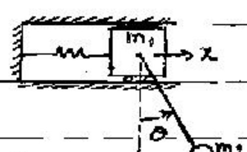
1 DoF



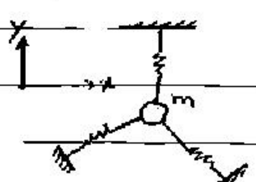
1 DoF



2 DoF



2 DoF



2 DoF

(با مراد m_1 ، m_2 جداگانه می تواند نوسان کند)

* فرکانس طبیعی:

$$\omega_n = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

دیمانسیون فرکانس طبیعی T^{-1}

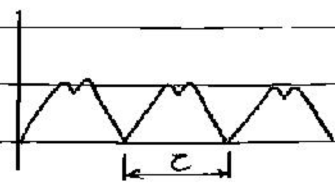
جرم و فنر: $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{MLT^{-2}L^{-1}}{M}} = T^{-1} \qquad \left(K = \frac{F}{x}\right)$

آونگ: $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{LT^{-2}}{L}} = T^{-1}$

* حرکت نوسانی: هر حرکت ارتعاشی که با یک معادله دیفرانسیل مشخص می‌شود.

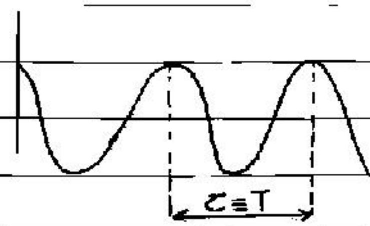
- انواع

① حرکت تناوبی (پریودیک) Periodic : $x(t+\tau) = x(t)$



② حرکت هارمونیک (حرکت سینوسی یا کسینوسی) : $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$

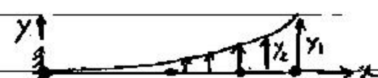
- حالت خاص نوع تناوبی است



$\omega_n = \frac{2\pi}{T}$ rad/s

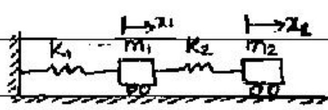
$f = \frac{1}{T}$ (Hz) $\frac{1}{s}$

③ سیستم‌های ممتد:



- دارای درجه آزادی بینهایت
- هر نقطه می‌تواند به طور مستقل ارتعاش کند.
- اگر بیش‌تر یا مساوی 2 درجه آزادی داشته باشیم، شکل mode تعریف می‌شود

مثال:



$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- برای سیستم‌های ممتد:

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} Y_1^1 \\ Y_2^1 \\ Y_3^1 \\ Y_4^1 \end{bmatrix} , \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} Y_1^2 \\ Y_2^2 \\ Y_3^2 \\ Y_4^2 \end{bmatrix}$$

* المان‌های اصلی سیستم‌های ارتعاشی:

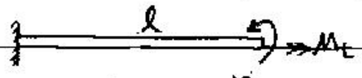
①	②	③
m	K	C
جرم	سختی (صلبیت)	میرایی
mass	stiffness	damping

① K سختی stiffness

$F = Kx \rightarrow K = \frac{F}{x}$ N/m $\Rightarrow$ سیستم یک درجه آزادی جابجایی خطی

$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow \boxed{K_{eq} = \frac{3EI}{l^3}}$ N/m

* فنر پیچشی



اگر مقطع دایره

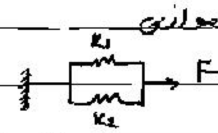
$\varphi = \frac{M_t l}{GJ} \longrightarrow \boxed{K_t = \frac{GJ}{l}}$ ($G =$ ضریب الاستیسیته در برش ، $J = \frac{\pi}{32} d^4$)

$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \frac{F}{A} = E\frac{\delta}{l} \rightarrow \delta = \frac{Fl}{AE}$

$\Rightarrow \boxed{K = \frac{AE}{l}}$

* فنر معادل :

① فنرهای موازی



$K_{eq} = K_1 + K_2$; $K_{eq} = K_1 + K_2 + \dots$

$x_1 = x_2 = x$; $F = F_1 + F_2$

$(K_{eq}x = K_1x + K_2x \rightarrow K_{eq} = K_1 + K_2)$

② فنرهای سری

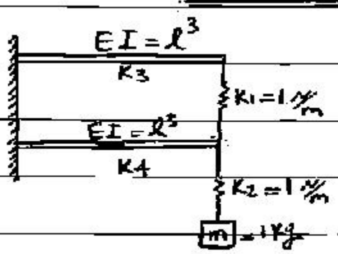
$F_1 = F_2 = F$; $x = x_1 + x_2$

$\frac{F}{K_{eq}} = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} \rightarrow \frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$

$\Rightarrow K_{eq} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$

مثال : از جرم میله‌ها صرف‌نظر شده است.

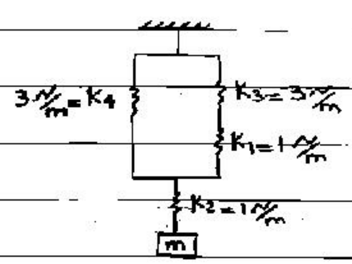
الف) فرکانس طبیعی؟ ب) معادله دیفرانسیل حرکت؟



الف) $K_3 = K_4 = \frac{3EI}{l^3} = 3\ N/m$

$K_{1,3} = \frac{3}{4} \rightarrow K_{1,3,4} = \frac{15}{4} \rightarrow K_{eq} = \frac{15}{19}$

$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{15}{19}}{1}} = \sqrt{\frac{15}{19}}$

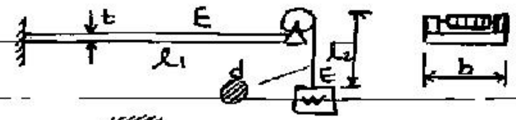


$m\ddot{x} + Kx = f \rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0 \rightarrow x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ با $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{15}{19} x = 0}$

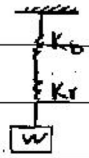
سید محمد جعفر سبحانی

مثال: $K_{eq} = ?$



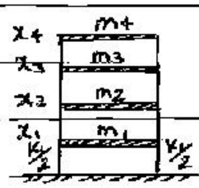
$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_r}$$

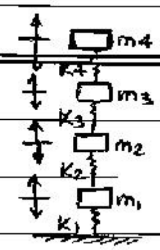
beam rope (ریسمان)



$$K_b = \frac{3EI}{l_1^3} \quad , \quad I = \frac{1}{12} b t^3$$

$$K_r = \frac{EA}{l_2} \quad , \quad A = \pi \frac{d^2}{4}$$





② جرم: عامل ذخیره کننده انرژی

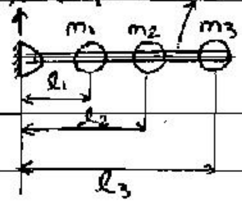
مثال:

استاتیک: حول نقطه تعادل استاتیکی δ_{st}

$$K\delta_{st} = mg \qquad \delta_{st} = \frac{mg}{K}$$

مثال:

محل بردن جرم مطلب

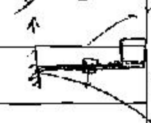


$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2$$

$$x_1 = \frac{l_1}{l_3} x_3 \quad , \quad x_2 = \frac{l_2}{l_3} x_3$$

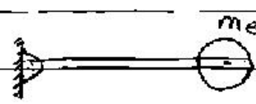
$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \underbrace{\left[m_1 \left(\frac{l_1}{l_3}\right)^2 + m_2 \left(\frac{l_2}{l_3}\right)^2 + m_3 \right]}_{m_{eq}} \dot{x}_3^2$$

مثال:

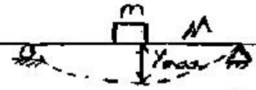


$$T = \frac{1}{2} \underbrace{(\quad)}_{m_{eq}} \dot{y}_{max}^2$$

$$\int_0^l$$

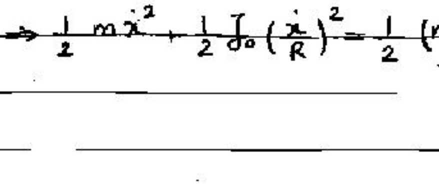


مثال:



$$m_{eq} = m + 0.5M$$

مثال: چرخ دنده + شانه (Rack & Pinion)



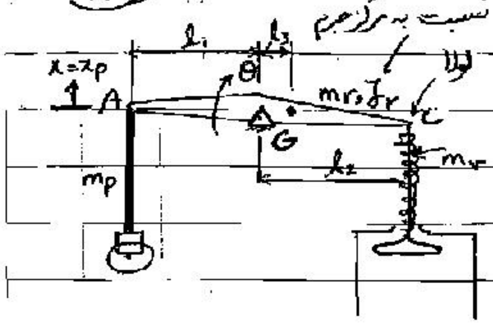
$$\dot{\theta} = \omega$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2$$

$$x = R\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \underbrace{(J_0 + mR^2)}_{J_{eq}} \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(m + \frac{J_0}{R^2}\right)}_{m_{eq}} \dot{x}^2$$



مثال: بادامک cam-follower

جرم معادل در نقاط A و C = ?

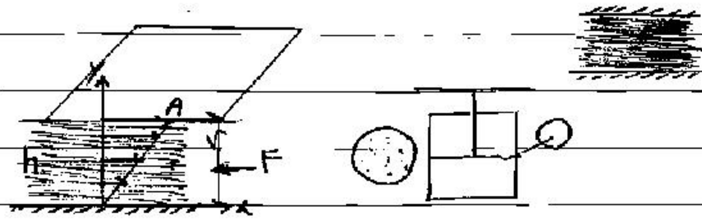
$$T = \frac{1}{2} m_p \dot{x}_p^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{x}_v^2$$

$$@A: \; m_p + m_r \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 + J_r \left(\frac{1}{l_1}\right)^2 + m_v \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 = m_{eq}$$

$$@C: \; m_v + m_r \left(\frac{l_3}{l_2}\right)^2 + J_r \left(\frac{1}{l_2}\right)^2 + m_p \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = m_{eq}$$

③ میرایی Damping — میرا کننده Damper — میرا کننده ویسکوز (لزجی) Viscous Damper (لزجی)

۱. میرایی لزجی (ویسکوزیته)



$$u = \frac{y}{h} V \longrightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{V}{h}$$ (μ ضریب لزجی)

$$\Rightarrow F = \tau A = \mu \frac{V}{h} A = \frac{\mu A}{h} V = cV \Longrightarrow \boxed{F = cV}$$ نیروی میرا کننده

* روابط فنر معادل برای میرا کننده‌ی معادل نیز صحیح می‌باشند (میرا کننده‌ی سری و موازی)

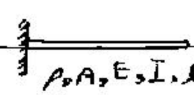
در حالت کلی $\rightarrow F = c_{eq} V$

2. میرایی کلمب (میرایی خشک) Dry Friction

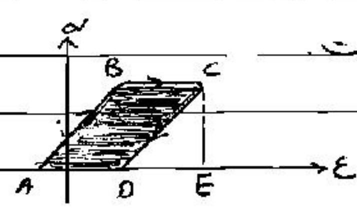
columb

$F = \mu_k N$

3. میرایی ساختاری structural Damping



$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$



* مسیر بارگذاری و باربرداری یکسان نیست.

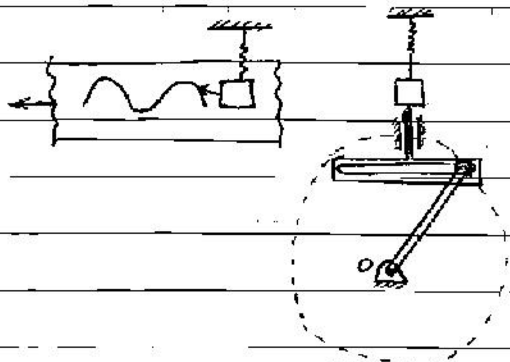
سطح زیر منحنی

انرژی ورودی سیستم ABCE

انرژی مستهلک شده BCDA

انرژی بازیافت شده CDE

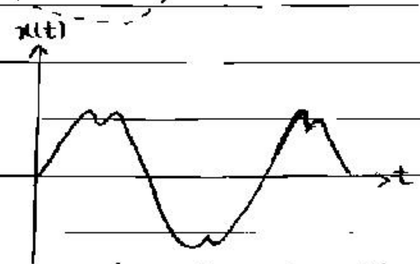
سید محمد جعفر سبحانی



حرکت هارمونیک:

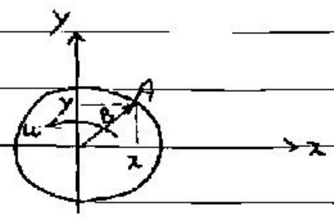
مکانیزم scotch yoke

* ترکیب دو حرکت هارمونیک با فرکانس های مختلف، یک حرکت پریودیک است و الزاماً هارمونیک نیست



$f(t) = \cos\omega t \;,\; \sin\omega t$

نمایش حرکت هارمونیک:

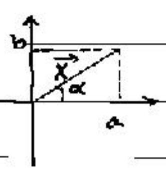


$$\begin{cases} x = B\cos\omega t \\ y = B\sin\omega t \end{cases}$$

* نمایش فازور یا مختلط ارتعاشات مکانیکی (حرکت هارمونیک):

$$\bar{x} = x e^{j\alpha} \longleftrightarrow x(t) = x\cos(\omega t + \alpha)$$

دامنه — فرکانس — فاز



فازور $\bar{X} = x e^{j\alpha}$ ، $|\bar{X}| = x$

$$\vec{X} = x\cos\alpha + j x\sin\alpha$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[\bar{x} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[x e^{j\alpha} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[x e^{j(\alpha+\omega t)}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[x\cos(\omega t+\alpha) + j x\sin(\omega t+\alpha)\right] = x\cos(\omega t+\alpha)$$

نتیجه: $\boxed{x(t) = x\cos(\omega t+\alpha) = \mathrm{Re}\left[x e^{j(\omega t+\alpha)}\right]}$

مثال:

$$x(t) = 5\sqrt{2}\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\bar{x} = 5\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{6}} \Longrightarrow x(t) = \mathrm{Re}\left[\bar{x} e^{j2\pi t}\right] = \mathrm{Re}\left[5\sqrt{2}\, e^{j(2\pi t + \frac{\pi}{6})}\right]$$

* یک فازور در واقع دامنه و فاز حرکت نوسانی را مشخص می کند.

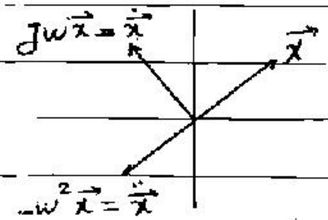
$$x(t) = Re\left[\bar{x} e^{J\omega t}\right] \rightarrow \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} Re\left[\bar{x} e^{J\omega t}\right] = Re\left[\bar{x} \frac{d}{dt} e^{J\omega t}\right]$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = Re\left[J\omega \bar{x} e^{J\omega t}\right] = Re\left[J\omega x e^{J\alpha} e^{J\omega t}\right]$$

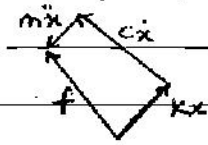
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = x\omega \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2} Re\left[\bar{x} e^{J\omega t}\right] = -x\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$

$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x(t)}$ در حرکات هارمونیک، شتاب با جابجایی متناسب است.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$



جمع دو تابع هارمونیک هم فرکانس:

$$x_1(t) = x_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \quad , \quad x_2(t) = x_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$= Re\left[\bar{x}_1 e^{j\omega t}\right] \quad , \quad = Re\left[\bar{x}_2 e^{j\omega t}\right]$$

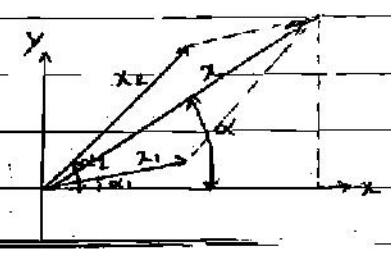
$$\bar{x}_1 = x_1 e^{j\alpha_1} \quad , \quad \bar{x}_2 = x_2 e^{j\alpha_2}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x \cos(\omega t + \alpha) = Re\left[\bar{x} e^{j\omega t}\right]$$

$$\bar{x} = x e^{j\alpha}$$

$$x(t) = Re\left[\bar{x}_1 e^{j\omega t} + \bar{x}_2 e^{j\omega t}\right] = Re\left[(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) e^{j\omega t}\right]$$

I) $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$



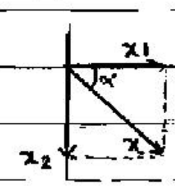
II) $tg\,\alpha = \dfrac{x_1 \sin\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_2}{x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2}$

مثال: $x_1(t) = x_1 \cos\omega t \ , \ x_2(t) = x_2 \sin\omega t$

$= x_2 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

$\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$

$$x(t) = x \cos(\omega t + \alpha) \begin{cases} x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \alpha = tg^{-1}\left(-\frac{x_2}{x_1}\right) \end{cases}$$



مثال : $x_1(t)=10\cos\omega t$, $x_2(t)=15\cos(\omega t+2)$

روش اول : $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

یادآوری : $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

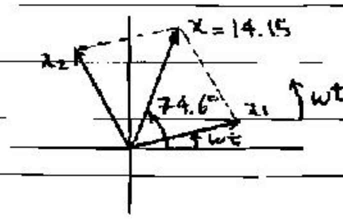
$$x(t)=x\cos(\omega t+\alpha)=10\cos\omega t+15\cos(\omega t+2)$$

$$\Rightarrow x\cos\omega t\cos\alpha-x\sin\omega t\sin\alpha=10\cos\omega t+15\cos\omega t\cos 2-15\sin\omega t\sin 2$$

$$\Rightarrow (x\cos\alpha)\cos\omega t-(x\sin\alpha)\sin\omega t=[10+15\cos 2]\cos\omega t-(15\sin 2)\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\cos\alpha=10+15\cos 2 \\ x\sin\alpha=15\sin 2\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=14.15 \\ \alpha=74.6^\circ\end{array}$$

روش دوم : هندسی

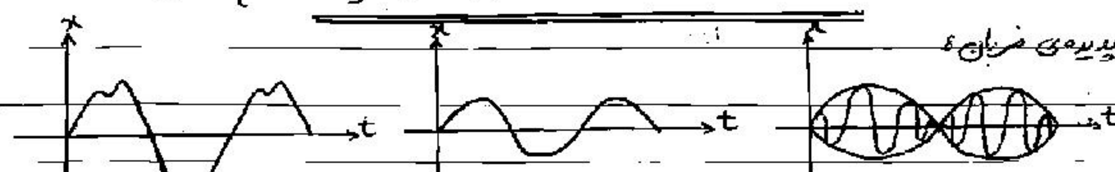


روش سوم : فازور

$$x_1(t)=\bar{x}_1 e^{j\omega t}\ ,\ \bar{x}_1=10\ ,\ \alpha_1=0$$
$$x_2(t)=\bar{x}_2 e^{j\omega t}\ ,\ \bar{x}_2=15\ ,\ \alpha_2=2 \longrightarrow \mathrm{I},\mathrm{II}\begin{cases} x=14.15 \\ \alpha=74.6^\circ\end{cases}$$

$$x(t)=Re\left[\bar{x}e^{j\omega t}\right]\ ,\ \bar{x}=xe^{j\alpha}$$

پدیده ضربان :



$x(t)=x\cos(\omega t+\alpha)$ $x(t)=X(t)\cos\omega t$

* ضربان : در سیستم های ارتعاشی که دو سیگنال هارمونیک با فرکانس های بسیار نزدیک به هم و دامنه های یکسان با یکدیگر ترکیب می شوند پدیده ای بنام ضربان (Beating) اتفاق می افتد.

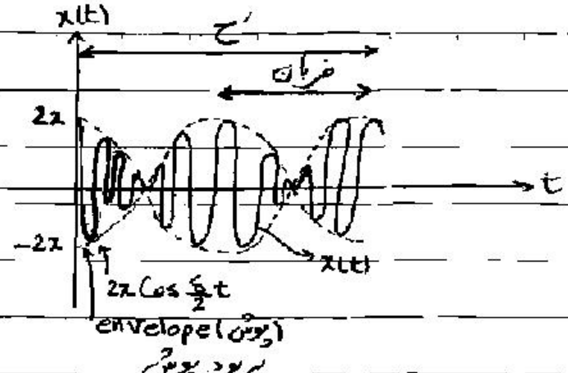
$x_1=x\cos\omega t$, $x_2(t)=x\cos(\omega+\delta)t$

یادآوری از مثلثات : $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=x\cos\omega t+x\cos(\omega+\delta)t=2x\cos\frac{\delta}{2}t\cos\left(\omega+\frac{\delta}{2}\right)t$$

$$\Rightarrow x(t)=\underbrace{\left(2x\cos\frac{\delta}{2}t\right)}_{\text{دامنه}}\underbrace{\cos\left(\omega+\frac{\delta}{2}\right)t}_{\text{سیگنال اصلی}}\qquad \left(\delta\ll\omega:\ \cos\left(\omega+\frac{\delta}{2}\right)t\simeq\cos\omega t\right)$$

* هرچه δ کمتر باشد ، ضربان بهتر شنیده می شود . زیرا دامنه بیشتر می شود.



پریود ضربان (τ): $\omega' = \frac{\delta}{2} = \frac{2\pi}{\tau'} \rightarrow \tau' = \frac{4\pi}{\delta} \Rightarrow \tau = \frac{\tau'}{2} = \frac{2\pi}{\delta}$

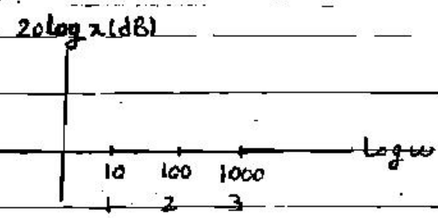
* Decibel دسی بل:

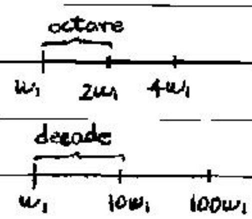
شدت صوت: دسی بل $10\log\frac{E}{E_0}$ ← انرژی مرجع

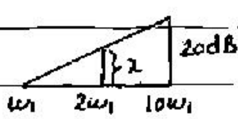
دسی بل $20\log x$

$$10\log\frac{\frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}kx_0^2} = 10\log\frac{x^2}{x_0^2} = 20\log\frac{x}{x_0} \xrightarrow{x_0=1} 20\log x$$

* در ارتعاشات ← شتاب مرجع : $a_0 = 1\mu g = 1\times 9.81\times 10^{-6}$







$$\boxed{20\ \frac{dB}{decade} = \overset{6}{x}\ \frac{dB}{octave}}$$

$$\frac{\log 10\omega_1 - \log\omega_1}{\log 2\omega_1 - \log\omega_1} = \frac{20}{x} \rightarrow \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{20}{x} \rightarrow x = 20\log 2 = 6$$

$$x(t) \xrightarrow[\text{لاپلاس}]{\mathcal{L}} X(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \qquad \begin{array}{l} A(s) = 0 \longrightarrow \text{صفرها} \quad (s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\ldots \\ B(s) = 0 \longrightarrow \text{قطب‌ها} \quad (s+\beta_1)(s+\beta_2)\ldots \end{array}$$

هر صفر که اضافه می‌شود 20dB شیب را زیاد می‌کند.
هر قطب « « « « « کم « .

سید محمد جعفر سجانی

آنالیز حرکت تناوبی :

$$(u_1 + u_2 + \dots + \dots)\, u \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow y\,(y_1 + y_2 + \dots + \dots)$$

$$u = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

فرض کنیم یک سیگنال تناوبی $x(t)$ با پریود τ داریم، می توان نشان داد که:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{(I)}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\,dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \sin(n\omega t)\,dt$$

اگر $\omega_m = m\omega$ ، $\omega_n = n\omega$ آنگاه:

$$\begin{cases} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos\omega_n t \cos\omega_m t\,dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\tau}{2} & m = n \end{cases} \\ \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \sin\omega_n t \sin\omega_m t\,dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\tau}{2} & m = n \neq 0 \end{cases} \\ \int_{0}^{\frac{\tau}{2}} \sin\omega_n t \cos\omega_m t\,dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 0 & m = n \end{cases} \end{cases}$$

برای نمایش مختلط سری فوریه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \\ \sin\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \end{cases}$$

تعریف: $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ، $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ ، $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \text{(II)}$$

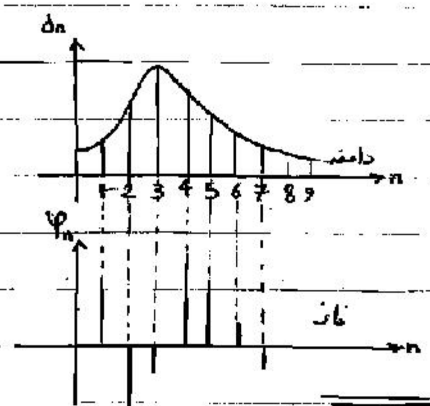
$$c_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{\pi}\left(\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\cos n\omega t\,dt - j\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\sin n\omega t\,dt\right)\right] = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x(t) e^{-jn\omega t}\,dt$$

* نمایش دیگر

$$x(t) = d_0 + d_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + d_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + \dots \quad \text{(III)}$$

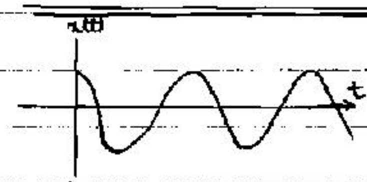
$$d_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad \underset{\uparrow}{d_n} = (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \varphi_n = \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$

نماینده هارمونیک

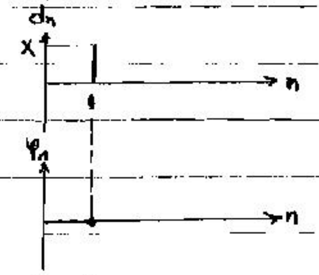


$\Rightarrow$ تبدیل فوریه (FFT $\rightarrow$ Matlab)

مثال :



$x(t) = X\cos\omega t \quad , n=1 \quad , \varphi = 0$



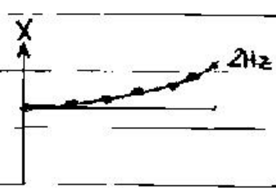
اسپکتروم فرکانسی : (PSD)

Power Spectrum Density

* Spill over : صرفنظر کردن از فرکانس های بالا در تقریب جملات با چند جمله اول مثلاً فوریه از جمله ۱ تا ۱۰ مثلاً

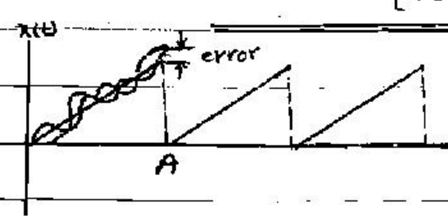
مود : (Mode)

* هر مود با یک فرکانس و شکل مود تعریف می‌شود.



$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \underset{\text{مثلاً}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad , f_1 = 2Hz$$

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ \vdots \\ -0.3 \end{bmatrix} \quad , f_2 = 5Hz$$



پدیده گیبس :

در توابع غیرپیوسته اتفاق می افتد. اگر چه با افزایش n (در سری فوریه) خطا (error) باریکتر می‌شود اما در نقاط ناپیوستگی (مثل A) خطا به یک مقدار ثابتی همگرا خواهد شد و قابل کاهش نیست.

سید محمدجعفر سبحانی

برخی تعاریف موردی:

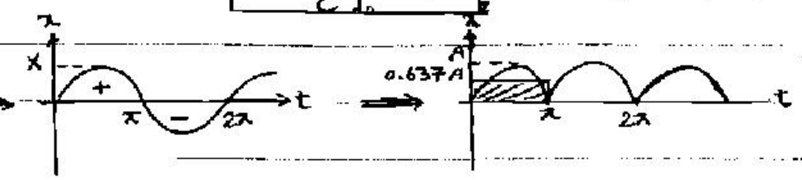
- مقدار متوسط

$x(t)$

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

در توابع تناوبی با دوره تناوب τ ←
$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x(t)\,dt}$$

مثال →



$x_1 = X\sin\omega t$

$\tau = 2\pi \rightarrow \bar{x}_1 = 0$

$$\bar{X} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin t\,dt = \frac{2A}{\pi} = 0.637A$$

- متوسط مربعات (Mean Squares)

$$\bar{X}^2 = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x^2(t)\,dt = MS = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$$

مثال: $x(t) = A\sin\omega t \ \underset{\tau=2\pi}{\overset{⊛}{\longrightarrow}}\ \bar{X}^2 = \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\omega t\,dt = \frac{1}{2}A^2 \equiv MS$

- جذر متوسط مربعات (RMS)(Root Mean Squares)

$RMS \equiv \sqrt{MS}$

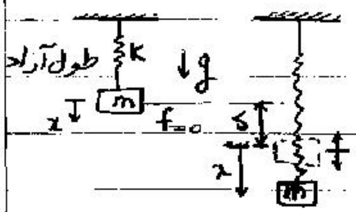
انرژی $\times 50$

مثال ⊛ بالا $\longrightarrow RMS = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}A = 0.707A \equiv -3\,dB$

$MS \equiv A^2$

$RMS \equiv A$

فصل دوم : ارتعاشات آزاد سیستم های یک درجه آزادی



$\delta =$ جابجایی استاتیکی

تعادل استاتیکی : $K\delta = mg$

معادله حرکت : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow mg - K(x+\delta) = m\ddot{x}$

$$\rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

استخراج معادلات حرکت :

1 ـ قانون دوم نیوتن : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ یا $\sum M = I\alpha$

2 ـ روش انرژی :

2 .I) در میدان پایستار، جمع انرژی جنبشی و پتانسیل ثابت است. $E = cte$

$$U = \frac{1}{2}Kx^2,\ T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \rightarrow E = U + T = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = cte \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow K\cancel{\dot{x}}x + m\cancel{\dot{x}}\ddot{x} = 0 \rightarrow Kx + m\ddot{x} = 0$$

2 .II) $U_{max} = T_{max}$

حرکت هارمونیک :

$$x(t) = X\cos(\omega t + \alpha) \quad , \quad x = Re\left[\bar{X}e^{j\omega t}\right] = Re\left[Xe^{j(\omega t+\alpha)}\right]$$

$$\dot{x}(t) = -X\omega\sin(\omega t + \alpha) \quad , \quad \dot{x} = Re\left[Xj\omega e^{j(\omega t+\alpha)}\right]$$

$$\ddot{x}(t) = -X\omega^2\cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x \quad , \quad \ddot{x} = Re\left[-X\omega^2 e^{j(\omega t+\alpha)}\right] = -\omega^2 Re\left[\bar{X}e^{j\omega t}\right]$$

$$= -\omega^2 x(t)$$

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}Kx^2 \longrightarrow U_{max} = \frac{1}{2}KX^2 \\ T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad T_{max} = \frac{1}{2}m(X\omega)^2 \end{cases} \Longrightarrow U_{max} = T_{max} \rightarrow \frac{1}{2}KX^2 = \frac{1}{2}mX^2\omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{K}{m}} \quad (\omega = \omega_n) \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\Downarrow$$

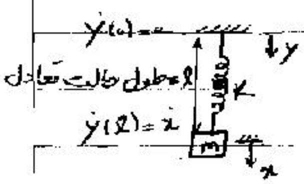
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

---

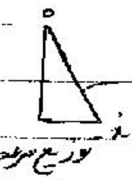
3 .II) روش ریلی $\qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K_{eff}}{m_{eff}}} = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$

کاربرد در سیستم های پیوسته

$$T = T = \frac{1}{2}\left[m_{eq}\right]\dot{x}^2$$



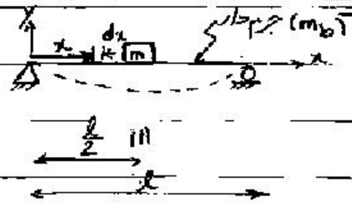
مثال : فنر جرم دار (m_s جرم فنر)
— توزیع جرم برای فنر یکسان است



$\dot{Y}=\frac{\dot{x}}{l}y$

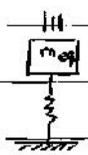
برای فنر
$$\begin{cases} T_s=\frac{1}{2}\int \overbrace{\frac{m_s}{l}\,dy}^{dm}\,\dot{Y}^2=\frac{m_s}{2l}\int_0^l\left(\frac{\dot{x}}{l}\right)^2 y^2\,dy=\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{3}m_s\right)}_{m_{eq_s}}\dot{x}^2 \\ T_s=\frac{1}{2}(m_{eq_s})\dot{x}^2 \end{cases}$$

$$\overset{T_s+T_m}{\uparrow}\quad T_{کل}=\frac{1}{2}\overbrace{(m+m_{eq_s})}^{m+\frac{1}{3}m_s}\dot{x}^2=\frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2 \Rightarrow \text{برای کل سیستم} \longrightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{K}{m_{eq}}}\qquad m+\frac{1}{3}m_s=m_{eq}$$



مثال : برای تیر $\longrightarrow Y=Y_{max}\left[\frac{3x}{l}-4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]\;;\;0<x<\frac{l}{2}$

$$\begin{cases} x=0\longrightarrow y=0 \\ x=\frac{l}{2}\longrightarrow y=Y_{max} \end{cases}$$



$$T_b=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{m_b}{l}\left[\dot{Y}_{max}\left(\frac{3x}{l}-4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right)\right]^2 dx\;\underset{\text{کل تیر}}{\times 2}\cong\frac{1}{2}\underbrace{(0.49\,m_b)}_{m_{eq_b}}\dot{Y}_{max}^2$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow m_{eq}=m+0.49\,m_b \\ &\text{از طرفی}: K_{eq}=\frac{48EI}{l^3} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}=\sqrt{\frac{48EI\,l^{-3}}{m+0.49\,m_b}}$$

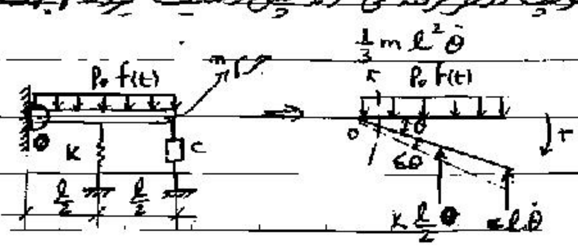
II.4 روش کار مجازی

برای یک سیستم در حالت تعادل تحت یک سری نیروها، کار انجام شده توسط نیروها در اثر یک جابجایی مجازی صفر خواهد بود ← اصل کار مجازی بر پایه‌ی اصل دالامبر استوار است

* در اصل دالامبر نیروهای اینرسی نیز به عنوان نیروهای فعال درنظر گرفته شده‌اند

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}\;\longrightarrow\;\sum\vec{F}-m\vec{a}=0$$

مثال : در اصل کار مجازی جابجایی‌ها فوق العاده کوچک درنظر گرفته می‌شوند پس وضعیت نیروها (جهت نیروها) پس از جابجایی تغییر نمی‌کند



$\Sigma M_o = I_o \alpha$ ، $\Sigma M = I\alpha$

$\delta W = 0$

$\delta W_1 = -\left[\left(K\frac{l}{2}\theta\right)\frac{l}{2}\right]\delta\theta$ ، $\delta W_2 = -\left[(cl\dot{\theta})l\right]\delta\theta$ ، $\delta W_3 = -\left(\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}\right)\delta\theta$

$\delta W_4 = \int_0^l (P_0 f(t))(x\,\delta\theta)\,dx$

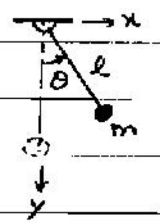
$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \delta W_4 = 0 \longrightarrow \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + cl^2\dot{\theta} + K\frac{l^2}{4}\theta = P_0\frac{l^2}{2}f(t)$

۵-۲. روش لاگرانژ

برخلاف روش قانون دوم نیوتن، روش لاگرانژ یک روش اسکالر می باشد. مزیت این روش در سیستم های با درجه ی آزادی بالا خود را نشان می دهد. در واقع یک سیستم n درجه آزادی را تبدیل به یک دستگاه معادلات از رسته ی n می کند. این روش بر پایه ی محاسبه ی انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل کل سیستم استوار است. در این روش از مختصات تعمیم یافته (generalized Coordinates)(q_i) و نیروهای تعمیم یافته (generalized Forces)(Q_i) استفاده می شود. نیروهای ناپایستار

* مختصات تعمیم یافته: یک سیستم دینامیکی n درجه آزادی نیاز به n مختصه ی مستقل برای بیان حرکت می باشد. به هر مجموعه ای از مختصات مستقل که شامل حداقل مختصات لازم برای بیان حرکت سیستم می باشد، مختصات تعمیم یافته گویند.

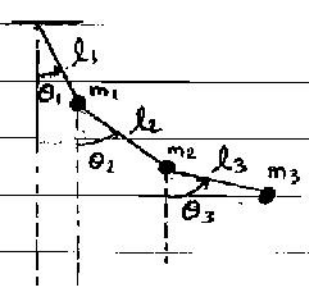
مثال:



$\theta \rightarrow q$

$\begin{cases} x, y \\ x^2 + y^2 = l^2 \end{cases}$ ، $2-1=1$

مثال:



$[q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$

* نیروهای تعمیم یافته: اگر نیرو یا ممان باعث انجام کار روی سیستم شود و فرض کنیم که جابجایی متناظر با آن نیروها δx یا $\delta\theta$ باشد (کار انجام شده را با W نشان می دهیم)، در این صورت می توان نشان داد که معادلات حرکت ($Q_i = \frac{W}{\delta q_i}$ نیروی تعمیم یافته $\Leftarrow$ $F = \frac{W}{\delta x}$ ، $M = \frac{W}{\delta\theta}$)

یک سیستم n درجه آزادی به فرم زیر خواهد بود:

$[Q] = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$

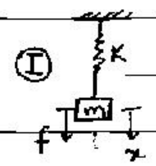
(I) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \rightarrow$ ($T=$ انرژی جنبشی کل سیستم ، $V=$ انرژی پتانسیل کل سیستم)

لاگرانژین را تعریف می‌کنیم $\rightarrow L = T - V \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i}$

* این معادله باید به تعداد n بار، بازنویسی شود.

مثال:

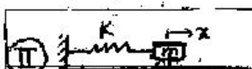
(I)



$$V = \frac{1}{2}Kx^2 + \overbrace{\frac{1}{2}K\delta^2}^{\alpha} \rightarrow V = \frac{1}{2}Kq^2 + \alpha \qquad (x=q),\ f = Q_1$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot x^2 \rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot q^2$$

(II)



$$V = \frac{1}{2}Kx^2 \rightarrow V = \frac{1}{2}Kq^2 \qquad (x=q),\ f = Q_1$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot x^2 \rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot q^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot q^2 - \frac{1}{2}Kq^2$$

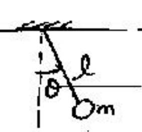
حال معادله‌ی لاگرانژ را اعمال می‌کنیم: صفر ← $\frac{1}{2}Kq^2$ مشتق ← چون نسبت به $\dot q$ مشتق گرفتیم

$$i=1,\ q_1 : \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = m\dot q \ ,\ \frac{\partial L}{\partial q} = -Kq \ ,\ Q_i = \overset{f}{0} \Rightarrow m\ddot q + Kq = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot x + Kx = 0$$

در جابجایی خطی Q متناسب است با f و در جابجایی زاویه‌ای متناظر است با M.

مثال:



$$q = \theta$$

$$V = mg\,l(1-\cos\theta) = mg\,l(1-\cos q)$$

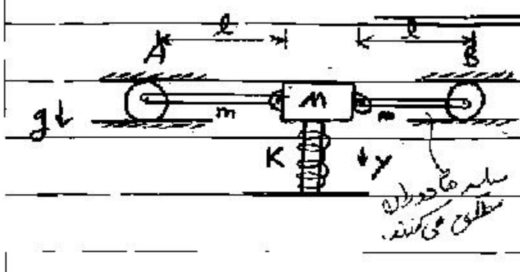
$$T = \frac{1}{2}m(l\dot\theta)^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot q^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot q} = ml^2\dot q \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) = ml^2\ddot q \qquad \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = mg\,l\sin q \ ,\qquad Q_i = 0$$

$$\text{I دوبز}: ml^2\ddot{\theta} - 0 + mgl\sin q = 0 \quad;\quad \theta \ll 1 : \sin q \simeq q \;\Bigg\}\Rightarrow \ddot{q} + \frac{g}{l}q = 0 \longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

مثال:



$K = 1.5\,KN/m \qquad M = 3\,kg$

$m = 1.2\,kg \qquad l = 0.3\,m$

- از اصطکاک صرفنظر شده است.
- از جرم غلتک نیز صرفنظر شده است.

$q = y$

$$U = \frac{1}{2}Ky^2 = \frac{1}{2}Kq^2 \quad,\quad T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\left(\frac{\dot{y}}{l}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{3}m\dot{y}^2$$

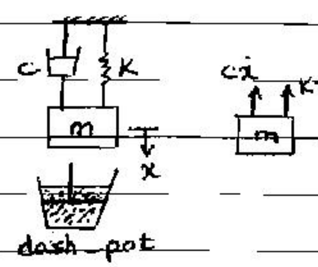
$$\frac{\partial U}{\partial q} = Kq = 1500q$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = M\dot{y} + \frac{2}{3}m\dot{y} = 3.8\dot{y} \quad,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = 3.8\ddot{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \quad,\quad Q = 0$$

$$\text{I فرمول}: 3.8\ddot{y} + 1500y = 0 \longrightarrow \ddot{y} + \frac{1500}{3.8}y = 0 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{1500}{3.8}} = 19.87\,(2\pi)\ rad/s$$

ارتعاشات در سیستم های یک درجه آزادی با میرایی لزجی (ویسکوز):



$F_d = -c\dot{x}$

$\Sigma F = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} = -c\dot{x} - Kx$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0}$$

$$x = c'e^{st} \qquad \dot{x} = c's\,e^{st} \qquad \ddot{x} = c's^2e^{st}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} c'ms^2e^{st} + c'cse^{st} + c'Ke^{st} = 0 \rightarrow (ms^2 + cs + K)e^{st} = 0$$

$$\rightarrow ms^2 + cs + K = 0 \rightarrow s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} \ *$$

$$x(t) = c_1e^{s_1t} + c_2e^{s_2t} \qquad \underbrace{[x(0), \dot{x}(0)]}_{\text{شرط اولیه}} \rightarrow c_1, c_2$$

حالت خاص : $\begin{cases} \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m} = 0 \\ c = c_c \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{K}{m}}_{\text{در این حالت میرایی بحرانی}} \longrightarrow c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$

ضریب میرایی : $\zeta = \frac{c}{c_c}$ (Damping ratio) $\Rightarrow \frac{c}{2m} = \zeta\omega_n$

$$\circledast \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\,\omega_n$$

بررسی حرکت ارتعاشی برحسب ζ :

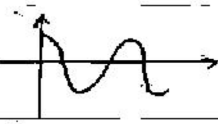
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0 \longrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \longrightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$\longrightarrow x(t) = c_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + c_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$

$$\longrightarrow x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(c_1 e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n t} + c_2 e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n t}\right)$$

(I) $\zeta = 0$ Undamped : سیستم بدون میرایی

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \longrightarrow x(t) = X\cos(\omega_n t + \alpha)$$



(II) $\zeta = 1$ Critically damped : سیستم با میرایی بحرانی

$$\ddot{x} + 2\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \longrightarrow s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \longrightarrow s_{1,2} = -\omega_n$$

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega_n t} \quad [x(0), \dot{x}(0)] \longrightarrow c_1, c_2 \longrightarrow \dot{x}(t) = c_2 e^{-\omega_n t} + (c_1 + c_2 t)(-\omega_n e^{-\omega_n t})$$

$$c_1 = x(0) \qquad\qquad \dot{x}(0) = c_2 - c_1\omega_n$$

$$\longrightarrow \begin{cases} c_1 = x(0) \\ c_2 = \dot{x}(0) + \omega_n x(0) \end{cases} \longrightarrow x(t) = x(0)e^{-\omega_n t} + (\dot{x}(0) + \omega_n x(0)\,t)\,e^{-\omega_n t}$$

(III) $\zeta > 1$ Over damped : سیستم فوق میرا

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(c_1 e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n t} + c_2 e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n t}\right)$$

$$x_0 = x(0), \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0)$$

$$c_1 = \frac{x_0\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \quad c_2 = \frac{-x_0\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

(IV) $0<\zeta<1$ Under damped زیرمیرا

$$S_{1,2}=\omega_n\left(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)=\omega_n\left(-\zeta\pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

$$x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left(c_1 e^{j\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t}+c_2 e^{-j\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t}\right)$$

$$=e^{-\zeta\omega_n t}\left((c_1+c_2)\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t)+j(c_1-c_2)\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t)\right)$$

$$=e^{-\zeta\omega_n t}\left\{c_1'\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t)+c_2'\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t)\right\}$$

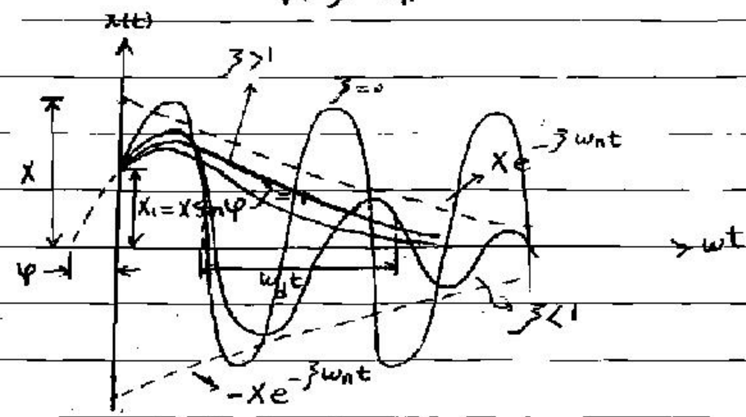
$$x(t)=X\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\varphi)$$

$$\overset{l}{=}X_0\,e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\varphi_0)$$

x_0 $\dot{x}_0$
$x(0)$ $\dot{x}(0)$
c_2, c_1
c_2', c_1'
φ, X
φ_0, X_0

$$X=X_0=\sqrt{c_1'^2+c_2'^2}\quad,\ \varphi=tg^{-1}\left(\frac{c_1'}{c_2'}\right)\quad,\ \varphi_0=tg^{-1}\left(-\frac{c_2'}{c_1'}\right)$$

$$c_1'=x_0\quad,\ c_2'=\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$$



$\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$ فرکانس میرایی $\rightarrow x(t)=X\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\varphi)$

$(\omega_d<\omega_n)$

$\frac{2\pi}{T_d}<\frac{2\pi}{T}\longrightarrow T_d>T$

پریود سیستم
میرا شونده

* برای یک فنر مناسب $0.5<\zeta<0.8$ پیشنهاد می‌شود

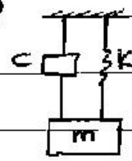
سید محمد جعفر سبحانی

شناسایی سیستم:

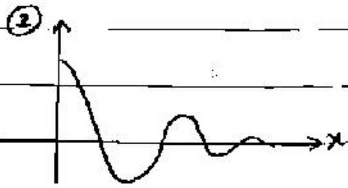
* صورت های مختلف نمایش:

$\begin{cases}\zeta=1\\ \zeta>1\end{cases}$ غیر نوسانی $\begin{cases}\zeta=0\\ 0<\zeta<1\end{cases}$ نوسانی

(1)

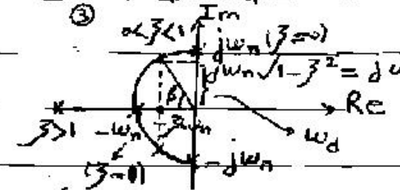


(2)



(3) $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$

(3)

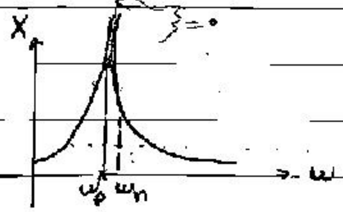


* $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \to \ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0 \to s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \to s_{1,2}=$

$0<\zeta<1 \to s_{1,2}=(-\zeta\pm j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n \to \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \to s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_d$

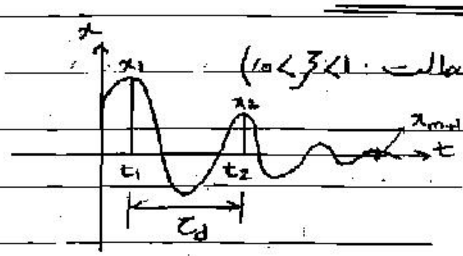
$$\boxed{\zeta=\cos\beta}$$

(4)



ترسیم شکل مودها ← آنالیز مودال
(۴)

کاهش لگاریتمی: (برای حالت $0<\zeta<1$)



$\lim_{t\to\infty}x(t)=x_{ss}$ حالت پایا $=0$

$x(t)=X_0e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi_0)$

$t_2=t_1+\tau_d$; $\tau_d=\frac{2\pi}{\omega_d}$; $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)}=\frac{X_0e^{-\zeta\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1-\varphi_0)}{X_0e^{-\zeta\omega_n t_2}\cos(\omega_d t_2-\varphi_0)}$$

$\omega_d t_2=\omega_d(t_1+\tau_d)=\omega_d t_1+2\pi \to \cos(\omega_d t_2-\varphi_0)=\cos(\omega_d t_1-\varphi_0+2\pi)=\cos(\omega_d t_1-\varphi_0)$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+\tau_d)}}=e^{\zeta\omega_n\tau_d} \to \delta=\ln\frac{x_1}{x_2}=\zeta\omega_n\overbrace{\tau_d}^{\frac{2\pi}{\omega_d}}=\zeta\cancel{\omega_n}\frac{2\pi}{\cancel{\omega_n}\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\to \delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \to \boxed{\zeta=\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+\pi^2}}}$$

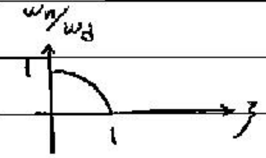
جواب همیشه
تخمین دارند
$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$
$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$
$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$

$$\boxed{\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi/\tau_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = e^{m\zeta\omega_n\tau_d} \longrightarrow \delta = \frac{1}{m} \ln\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}\right)$$

m فاصله دو نقطه
سیکل

$$\ast\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \longrightarrow$$



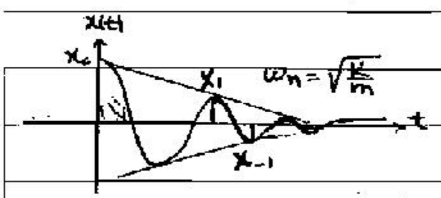
$$\rightarrow \left(\frac{\omega_d}{\omega_n}\right)^2 + \zeta^2 = 1$$

ارتعاشات آزاد در حضور میرایی کولمب (Dry friction) (Coulomb Damping)

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -Kx - \mu N$$

$F = \mu N = \mu mg$ در این مسأله $m\ddot{x} + \mu mg\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) + Kx = 0$

در حالت کلی: $\vec{F} = -F_d \frac{\vec{\dot{x}}}{|\vec{\dot{x}}|} = -F_d \cdot \mathrm{sgn}(\dot{x}) \Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + F_d\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) + Kx = 0 \\ m\ddot{x} + Kx = -F_d\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) \end{cases}$



کار انجام شده در یک نیم سیکل $= \frac{1}{2}K(X_1^2 - X_{-1}^2) - F_d(X_1 + X_{-1}) = 0$
(قضیه کار و انرژی)

$$\longrightarrow X_1 - X_{-1} = 2\frac{F_d}{K}$$ کاهش دامنه یک نیم سیکل

$\frac{4\mu mg}{K} = \frac{4F_d}{K}$: کاهش دامنه یک سیکل

به عبارت دیگر تعداد نیم سیکل هایی که می بایست طی شود تا حرکت ارتعاشی کاملاً متوقف شود، از رابطه زیر بدست می آید:

$$\left[X_0 - n\left(\frac{2F_d}{K}\right)\right] \leqslant \frac{\mu N}{K} \xrightarrow{\text{گرد به سمت بالا}} n \geqslant \frac{X_0 - F_d/K}{2F_d/K}$$

مشخصات میرایی کولمب:

① میرایی کولمب غیرخطی است در صورتی که میرایی لزجی خطی است.

② فرکانس نوسان سیستم تغییر نمی کند در صورتی که در میرایی لزجی فرکانس نوسان سیستم ارتعاشی کاهش پیدا می کند.

③ در حضور میرایی کولمب حرکت نوسانی سیستم همیشه پریودیک و نوسانی است در صورتی که در برخی حالات میرایی لزجی حرکت می تواند غیرنوسانی باشد مثلاً برای حالت $\zeta = 1$ و $\zeta > 1$

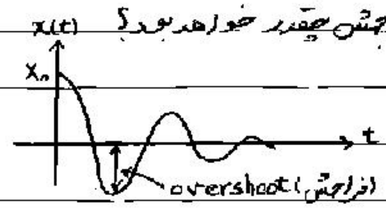
④ در حضور میرایی کولمب سیستم بعد از مدتی متوقف می‌شود در صورتی که در میرایی لزجی دامنه در بینهایت صفر می‌شود.

⑤ در میرایی کولمب دامنه به صورت خطی کاهش می‌یابد در صورتی که در میرایی لزجی دامنه به صورت نمایی کاهش می‌یابد.

⑥ شیب خط پوش (در میرایی کولمب) $a=\dfrac{-4F_d/K}{\frac{2\pi}{\omega_n}}$ یا $a=-\dfrac{2F_d\omega_n}{\pi K}$ (دو نقطه‌ی نمودار شیب $\Big|\begin{smallmatrix}\frac{2\pi}{\omega_n}\\ X_1\end{smallmatrix}$ $\Big|\begin{smallmatrix}0\\ X_0\end{smallmatrix}$)

⑦ در هر سیکل مقدار دامنه به اندازه $\frac{4\mu N}{K}$ کاهش می‌یابد: $X_m=X_{m-1}-\frac{4\mu N}{K}$

مثال: یک کمک فنر (shock absorber) باید بگونه‌ای طراحی شود که ماکزیمم فراجهش نسبت به جابجایی اولیه 15٪ باشد. مقدار لازم نسبت میرایی (ζ) را بدست آورید. در صورتی که نسبت میرایی به $\zeta=\frac{3}{4}\zeta_0$ کاهش پیدا کند، فراجهش چقدر خواهد بود؟



الف) $\delta=\dfrac{1}{m}\ln\dfrac{X_1}{X_{m+1}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\ln\dfrac{X_0}{0.15X_0}=3.794 \rightarrow \zeta_0=\dfrac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}=0.517$

نصف سیکل $m=\frac{1}{2}$

ب) $\zeta=\frac{3}{4}\zeta_0=0.388$, $\delta=\dfrac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=2.643$

(نکته: اگر $\zeta\ll1 \rightarrow \delta=2\pi\zeta$)

$$\delta=\frac{1}{\frac{1}{2}}\ln\frac{X_0}{X_{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{\delta}{2}=\ln\frac{X_0}{X_{\frac{1}{2}}} \rightarrow e^{\frac{\delta}{2}}=\frac{X_0}{X_{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{X_{\frac{1}{2}}}{X_0}=0.267$$

$\rightarrow$ overshoot = 26.7%

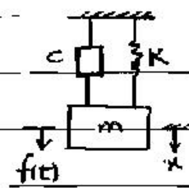
فصل سوم: ارتعاشات اجباری سیستم های یک درجه آزادی

(Forced Vibration)

ارتعاشات اجباری به دو دسته تقسیم می شوند:

① ارتعاشات اجباری تحت اثر نیرو ② ارتعاشات اجباری تحت اعمال جابجایی

فرض بر این است که ورودی ها (تحریک) هارمونیک می باشد.



ابتدا با اعمال نیرو به عنوان تحریک شروع می کنیم:

① تحت اثر نیرو: $f(t)$ به یکی از صورت های زیر وارد معادله می شود:

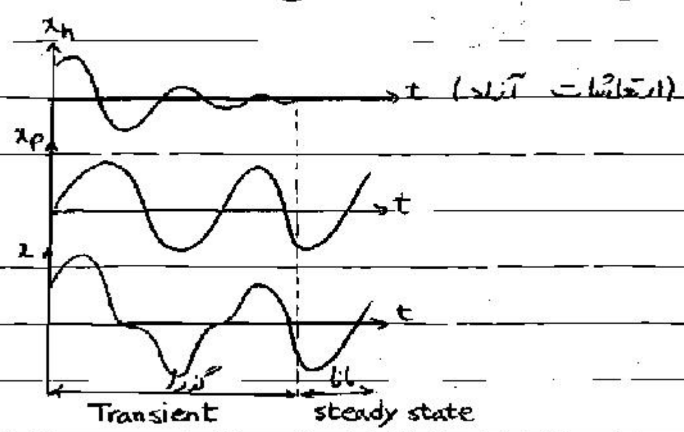
$$f(t)=F_0 e^{j(\omega t+\varphi)} ,\quad f(t)=F_0\cos(\omega t+\varphi)$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=f(t) \qquad f(t)=F_0\sin(\omega t+\varphi)$$

پاسخ یک سیستم یک درجه آزادی به تحریک هارمونیک منجر به یک پاسخ هارمونیک خواهد شد. (چون در معادله صدق می کند)

$$x(t)=x_h(t)+x_p(t)$$

$x_h(t)$: فصل ۲ (آزاد) — $x_p(t)$: فصل ۳ (اجباری)



فرض می کنیم $f(t)=F_0\cos\omega t$ ، $x_p(t)=X\cos(\omega t-\varphi)$

$$\begin{cases}\cos(\omega t-\varphi)=\cos\omega t.\cos\varphi+\sin\omega t\sin\varphi\\ \sin(\omega t-\varphi)=\sin\omega t\cos\varphi-\sin\varphi\cos\omega t\end{cases}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=f(t) \longrightarrow X=\frac{F_0}{\sqrt{(K-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \ (\mathrm{I})\ ;\ \varphi=tg^{-1}\frac{c\omega}{K-m\omega^2}$$

$\omega\to 0$ بارگذاری خیلی آرام

$$\delta_{st}=\frac{F_0}{K} \rightarrow \text{جابجایی زیر بار استاتیکی } F_0$$

$$\frac{c}{m}=2\zeta\omega_n ,\quad \omega_n=\sqrt{\frac{K}{m}} ,\quad r=\frac{\omega}{\omega_n}$$

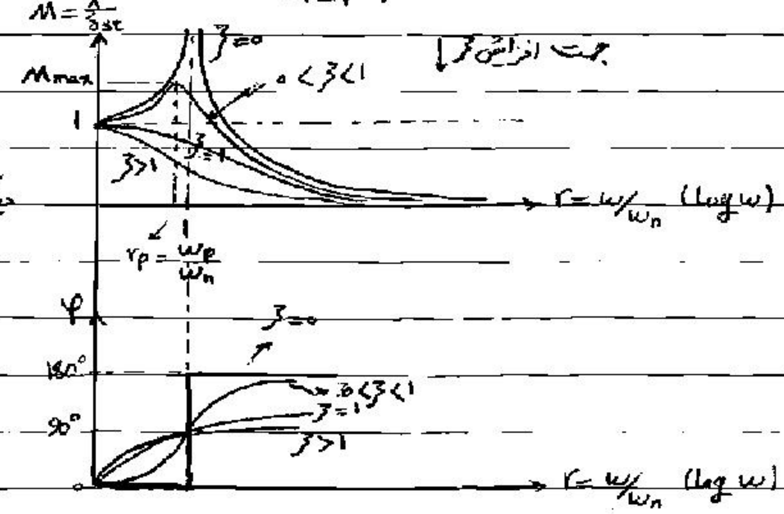
$$\Rightarrow \ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$M = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

Amplitude factor ≡ Amplitud Ratio ≡ Magnitude Factor

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

دیاگرام بود
Bode



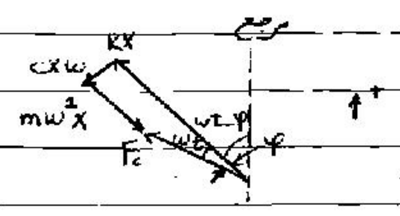
$\frac{dI}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega_p = ✓$

$\omega_p \rightarrow I \rightarrow M_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ → از این رابطه برای بدست آوردن ضریب میرایی (ζ) از منحنی پاسخ فرکانسی استفاده می‌شود.

شناسایی سیستم دینامیکی از روی نمودار → $M_{max} \Rightarrow \zeta$ ✓ $\xrightarrow[1D]{system} \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

$(\zeta, \omega_p) \rightarrow \omega_n$ ✓

نمایش فازوری:



مشاهدات:

① دامنه‌ی رزونانس با افزایش ζ کاهش می‌یابد

② برای سیستم بدون میرایی در فرکانس طبیعی دامنه به سمت ∞ میل می‌کند $r=1 \Rightarrow M \rightarrow \infty$

③ برای تمامی مقادیر r، با افزایش میرایی، مقدار M کاهش می‌یابد

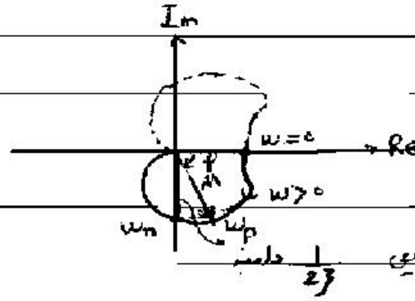
④ برای $r=0$، $M=1$

⑤ $\omega_p < \omega_d < \omega_n$

⑥ برای $r=\sqrt{1-2\zeta^2}$، $M = M_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

⑦ برای $r=1$، $M = \frac{1}{2\zeta}$

⑧ اگر $r \gg 1$ → $M \rightarrow 0$



مشاهدات :

① $\varphi = 0 \;:\; 0 < r < 1 \;,\; \zeta = 0$

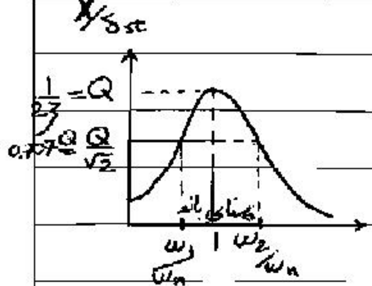
② $\varphi = 180^\circ \;:\; r > 1 \;,\; \zeta = 0$

③ $0 < \varphi < 90 \;:\; 0 < r < 1 \;,\; \zeta > 0$

④ اختلاف فاز ورودی و خروجی در فرکانس طبیعی 90° — $\varphi = 90^\circ \;:\; r = 1 \;,\; \zeta > 0$

⑤ $\varphi = 180^\circ \;:\; r \gg 1 \;,\; \zeta > 0$

فاکتور کیفیت و پهنای باند :

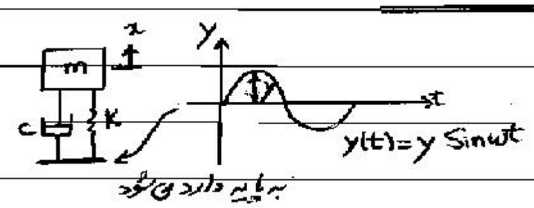


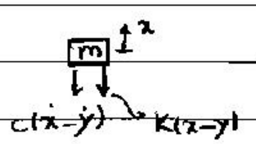
$$Q \text{ (کیفیت)} = \frac{1}{2\zeta} \longleftarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 1$$

$$\zeta < 0.05 : \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{max\ (\omega=\omega_p)} \simeq \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta}$$

$$2\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$$

ب) پاسخ یک سیستم میرا شونده به تحریک هارمونیک پایه





$$m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{y}) + K(x-y) = 0 \longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = c\dot{y} + Ky$$

$$\longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = cy\omega\,\mathrm{Cos}\,\omega t + Ky\,\mathrm{Sin}\,\omega t$$

$$= A\,\mathrm{Sin}(\omega t - \alpha)$$

$$A = y\sqrt{K^2 + (c\omega)^2} \qquad \alpha = tg^{-1}\left(-\frac{c\omega}{K}\right)$$

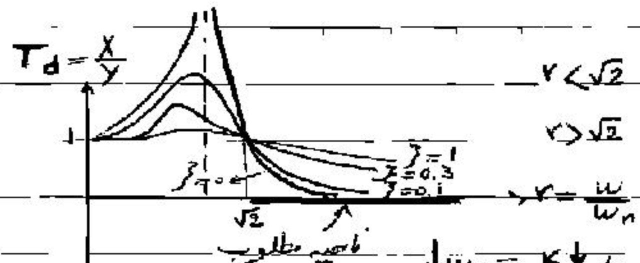
$$\Rightarrow x_p(t) = X\,\mathrm{Sin}(\omega t - \varphi)$$

تابع انتقال جابجایی

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{K^2 + (c\omega)^2}{(K - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = T_d$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{mc\omega^3}{K(K - m\omega^2) + (c\omega)^2}\right) = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}\right)$$

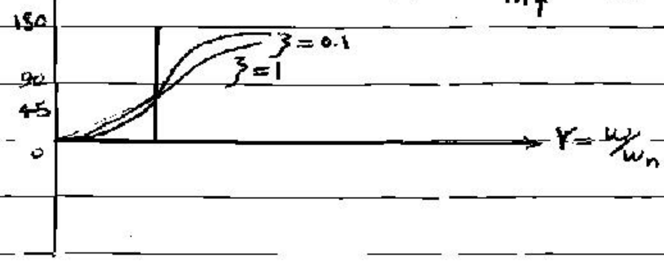
سید محمد جعفر سبحانی



$r<\sqrt{2} \quad \downarrow\zeta \equiv T_d\uparrow$

$r>\sqrt{2} \quad \downarrow\zeta \equiv T_d\downarrow$

$\downarrow\omega_n \equiv \frac{K\downarrow}{m\uparrow}$ (طراحی مطلوب) $(T_d<1)$



مشاهدات:

① در $r=0$ ، $T_d=1$

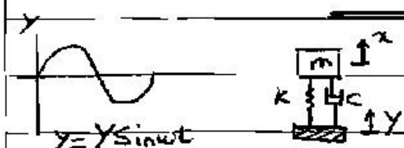
② برای همه مقادیر ζ در $r=\sqrt{2}$ ، $T_d=1$

③ برای مقادیر کوچک r ، T_d نزدیک 1 است

④ برای $\zeta=0$ (undamped) در $r=1$ (یعنی رزونانس) T_d به سمت ∞ می رود

⑤ برای $r>\sqrt{2}$ ، $T_d<1$ (ناحیه طراحی مناسب)

حرکت نسبی:



$\frac{X}{Y}$ $\quad x(t)=X\sin(\omega t-\varphi)$

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{y}=-Y\omega^2\sin\omega t \\ \text{متغیر کمکی}: z=x-y \end{array}\right\} \rightarrow m\ddot{z}+c\dot{z}+Kz=mY\omega^2\sin\omega t$$

$$\rightarrow m\ddot{x}+c(\dot{x}-\dot{y})+K(x-y)=0 \rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=c\dot{y}+Ky=-cY\omega\cos\omega t+KY\sin\omega t$$

$\rightarrow \frac{X}{Y}$ ✓

$$m\ddot{z}+c\dot{z}+Kz=\overbrace{mY\omega^2}^{F_0}\sin\omega t \rightarrow z(t)=Z\sin(\omega t-\varphi_1)$$

$$Z=\frac{mY\omega^2}{\sqrt{(K-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}Y \rightarrow \frac{Z}{Y}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

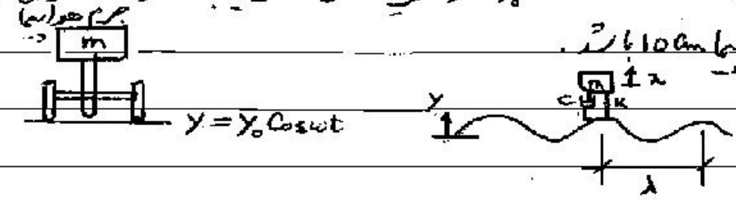
نامیزانی دوار

$$\varphi_1=tg^{-1}\left(\frac{c\omega}{K-m\omega^2}\right)=tg^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

$f \rightarrow x \rightarrow \frac{X}{F_0/K}$

$$\begin{cases} y \rightarrow x \rightarrow X/Y \\ y \rightarrow z \rightarrow Z/Y \end{cases}$$

مثال: سیستم چرخ فرود هواپیما را می‌توان در حالت ایده‌آل به صورت جرم و فنر و damper تقریب زد. فرض کنید سطح جاده را بتوان با معادله $y = Y_0 \cos\omega t$ تعریف کرد. ضرایب c و K را طوری طراحی کنید که حداکثر دامنه نوسان هواپیما 10cm باشد.

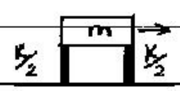


$Y_0 = 0.2m \ , \ m = 2000kg \ , \ \omega = 157.68 \ rad/s$

$?(c, K) \rightarrow X = 0.1$

$$\frac{X}{Y} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5 = \frac{\sqrt{K^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \xrightarrow{\text{set } K} K = 5\times10^6 \ N/m \rightarrow c = 158800 \ N.s/m$$

مثال: مدل ایده‌آل یک ساختمان یک طبقه به صورت شکل مقابل در نظر می‌گیریم که تحت یک لرزش هارمونیک زمین قرار دارد. حرکت ماندگار (steady state) کف m را بررسی کنید.



$\ddot{x}_y = A\cos\omega t$

$$\ddot{x}_y = A\cos\omega t \rightarrow \dot{x}_y = \frac{A}{\omega}\sin\omega t + B_1$$

$$\rightarrow x_y = -\frac{A}{\omega^2}\cos\omega t + B_1 t + B_2$$

فرض: $\dot{x}_y(0) = 0 \ , \ x_y(0) = -\frac{A}{\omega^2} \rightarrow x_y(t) = -\frac{A}{\omega^2}\cos\omega t$

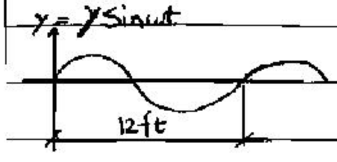
$c = 0 \ (\zeta = 0) \rightarrow \varphi = 0$

$$m\ddot{x} + K(x - x_y) = 0 \rightarrow m\ddot{z} + kz = -m\ddot{x}_y = -mA\cos\omega t \rightarrow m\ddot{z} + kz = mA\cos\omega t$$

$$z = Z\cos\omega t \rightarrow Z = \underbrace{\frac{mY\omega^2}{\sqrt{(K - m\omega)^2 + (c\omega)^2}}}_{\text{به فرمول}} = \frac{mA}{K - m\omega^2}$$

$$z = x - x_y \rightarrow x = z + x_y = \left(\frac{m}{K - m\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\right)A\cos\omega t$$

مثال: اتومبیلی به وزن 1000 پوند در حالت خالی و ۳۰۰۰ پوند در حالت پر با سرعت 55 mile/h روی جاده‌ی ناهموار به شکل یک موج سینوسی با دامنه‌ی Y و طول موج 12ft در حالت حرکت گرفتار ارتعاشات عمودی می‌شود. سیستم را می‌توان با سیستم یک درجه آزادی $K = 30\times10^3 \ lbf/ft$ و $\zeta = 0.2$ در نظر گرفت. میزان جابجایی اتومبیل را برای هر دو حالت خالی و پر به دست آورید $\left(\frac{X}{Y}\right)$



$$v = 55 \ mph = 55 \ \frac{5280}{3600} \ ft/s$$

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

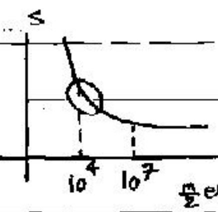
$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \ , \ \omega = 2\pi\left(\frac{v}{\lambda}\right) \Rightarrow \omega = 42.24 \ rad/s$$

$$W = 1000 \ lbf \rightarrow m = \frac{1000}{32.2} = 31.06 \ slug \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = 31.08 \ rad/s$$

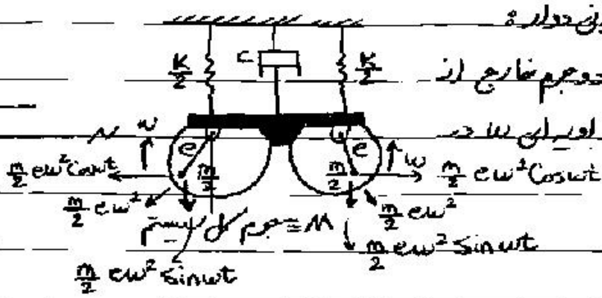
$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = 1.36 \rightarrow \frac{X}{Y} = 1.13$$

لب $\omega=\sqrt{\frac{K}{m_2}}$ ، $m_2=\frac{3000}{32.2}=93.17\,slug \rightarrow \omega_n=17.94\,rad/s \rightarrow r=235$

$\frac{X}{Y}=0.3$ ✓ (کاهش ۷۰٪ دامنه)



پاسخ یک سیستم میرا تحت نامیزانی دوار:



جرم کل سیستم M می‌باشد و دو جرم خارج از مرکز به اندازه $\frac{m}{2}$ با سرعت زاویه‌ای ω در خلاف جهت حرکت می‌کنند.

مثال: با رسم دیاگرام آزاد

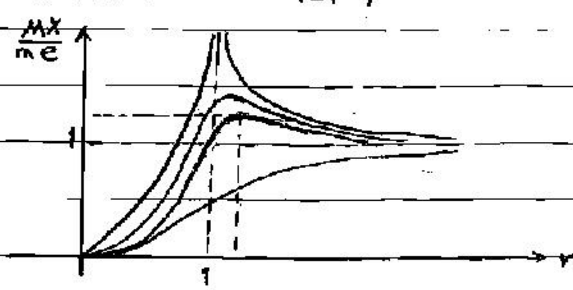
$$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin\omega t$$

$$x(t)=X\sin(\omega t-\varphi)$$

$$X=\frac{me\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \rightarrow \frac{MX}{me}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$$\varphi=tg^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)=tg^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

معادل جواب تحریک پایه و حل حرکت نسبی $\frac{Z}{Y}$



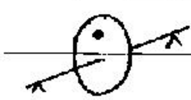
$$\left(\frac{MX}{me}\right)_{max}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad @\ r=\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}>1$$

به ازای $\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}$ منحنی پیک خواهد داشت

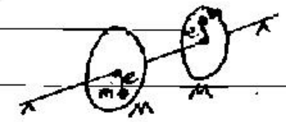
به ازای $r=0$ ، $\frac{MX}{me}=0$ — به ازای $r\rightarrow\infty$ ، $\frac{MX}{me}\rightarrow 1$

نامیزانی دوار موتور:

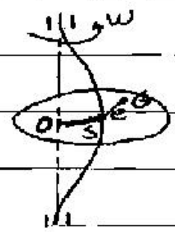
نامیزانی استاتیکی (عدم بالانس استاتیکی): زمانی که تمام جرم‌های نامیزان در یک صفحه قرار دارند نامیزانی بدون چرخاندن (حرکت) نیز قابل مشاهده است. به این نامیزانی، نامیزانی استاتیکی گوییم.



سوم - بالانس دینامیکی، زمانی که نامیزانی بیش از یک صفحه وجود داشته باشد ممکن است در برخی موارد نامیزانی (نامیزانی) قابل مشاهده نباشد. مثلاً دو چرخ با دو جرم نامیزان یکسان با اختلاف فاز 180°، این سیستم از نظر استاتیکی بالانس و از نظر دینامیکی نامیزان است. اثر این نامیزانی به صورت لنگرهای مزاحم در یاتاقان ها ظاهر خواهد شد.



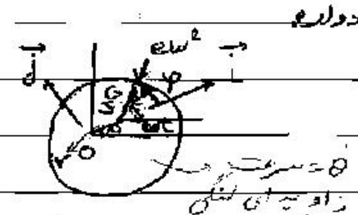
لنگی محورهای دوار



$S =$ مرکز هندسی

$G =$ مرکز جرم

$SG = e$ (خروج از مرکز)



$\dot\theta$ = سرعت زاویه ای لنگی

این پدیده در اثر حرکت دورانی صفحه متشکل از یک محور خم شده به وجود می آید. محور با سرعت زاویه ای ω می چرخد.

$$\vec{a}_G = \vec{a}_S + \vec{a}_{G/S} \qquad |a_{G/S}| = e\omega^2$$

$$\vec{a}_G = \left[(\ddot r - r\dot\theta^2) - e\omega^2\cos(\omega t-\theta)\right]\vec{i} + \left[(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta) - e\omega^2\sin(\omega t-\theta)\right]\vec{j}$$

در نظر می گیریم که سیستم یک سختی (فنر) در جهت r و میرایی در راستای $\dot r$ و $r\dot\theta$ دارد. بنابراین معادلات حرکت را می توان به صورت زیر نوشت

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G : \begin{cases} -kr - c\dot r = \left[\ddot r - r\dot\theta^2 - e\omega^2\cos(\omega t-\theta)\right]m \\ -cr\dot\theta = \left[r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - e\omega^2\sin(\omega t-\theta)\right]m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot r + \frac{c}{m}\dot r + \left(\frac{k}{m} - \dot\theta^2\right) r = e\omega^2\cos(\omega t-\theta) \\ r\ddot\theta + \left(\frac{c}{m} r + 2\dot r\right)\dot\theta = e\omega^2\sin(\omega t-\theta) \end{cases}$$

این سیستم یک سیستم ۲ درجه آزادی است (دو معادله، دو مجهول r و θ). اما می توان با فرضیاتی آن را ساده نمود. تحت شرایط لنگی هماهنگ فرض می کنیم ($\dot\theta = \omega \rightarrow \theta = \omega t - \varphi$)

$$\ddot\theta = 0 ,\ \ddot r = 0 ,\ \dot r = 0 \longrightarrow \text{معادلات جدید} \begin{cases} \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) r = e\omega^2\cos\varphi \\ \frac{c}{m}\omega r = e\omega^2\sin\varphi \end{cases}$$

$$\longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{c}{m}\omega}{\frac{k}{m} - \omega^2} = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad , \quad r = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{er^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

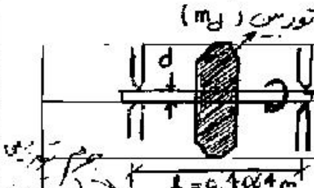
$$(c = 0 , \zeta = 0) \longrightarrow \varphi = 0$$

سید محمد جعفر سجانی

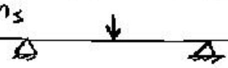
خلاصه : $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ و $r \equiv$ فاصله

$$(I)\; r = \frac{e\Omega^2}{\left[(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad \varphi = \frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}$$

مثال : محور روتور یک توربین بوزن 13.6kg از جنس فولاد در وسط محور توسط یاتاقان‌هایی به فاصله‌ی 0.4064m نگهداری می‌شود. روتور بوسیله‌ی یک نامیزانی دوار به مقدار 0.2879kg.Cm می‌باشد. تعیین کنید نیروهای وارد بر یاتاقان را در سرعت 6000rpm - ω . الف) d=2.54Cm ب) d=1.905Cm



فرض کنید که محور به صورت تیر دو سرگیردار روی یاتاقان نگهداری می‌شود.



(*چون ذکر نشده، میرایی قابل صرفنظر است)

$m_d = 13.6\,Kg \quad , \quad m_d e = 0.2879\ Kg.Cm \quad , \quad \rho_{st} = 7830\ Kg/m^3 \quad , \quad E_{st} = 200\,GPa$

$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ الف) m_{eq} ، K_{eq} را در وسط تیر پیدا می‌کنیم :

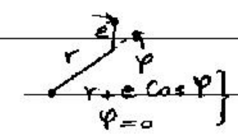
$K_{ef} = \frac{48EI}{l^3} \quad , \quad \begin{cases} m_s \equiv \text{جرم محور} = \rho l(\frac{\pi}{4}d^2) \\ (\text{محور})\ m_{ef} = 0.486 m_s \end{cases} \quad , \quad m = m_d + m_{ef} = 14.38Kg$

$I = \frac{\pi}{64}d^4 = \frac{\pi}{64}(2.54\times10^{-2})^4 = 2.043\times10^{-8}\,m^4$

$K_{ef} = \frac{48EI}{l^3} = 2.922\times10^6\,N/m$

$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_{ef}}{m}} = 71.79\,Hz \quad , \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n} = 1.394$

سیستم بدون میرایی فرض شده : $\zeta = 0$ ، $\varphi = 0\ (\cos\varphi = 1)$



$r + e$

$m_d e = 0.2879 \longrightarrow e = \frac{0.2879}{13.6} = 0.02117\,Cm$

$(I) \;\rightarrow\; r = \frac{e\,\Omega^2}{1-\Omega^2} = 0.04316\,Cm \quad , \quad \omega = 6000\,rpm = 2\pi\left(\frac{6000}{60}\right) = 2\pi(100)\ rad/s$

$F = m(r+e)\omega^2 = 3652\,N$

ب) $m = 14.04\,Kg \ ,\ K_{ef} = 0.9401\times10^6\,N/m \ ,\ \omega_n = 2476\,rpm \ ,\ \Omega = \frac{\omega}{\omega_n} = 2.423$

$r = 0.02552 \ ,\ F = m(r+e)\omega^2 = 2588\,N$

ایزوله سازی ارتعاشات:

ارتعاشات وارد شده یا خارج شده از سیستم را حداقل کنیم

هدف از ایزوله سازی ارتعاشات:

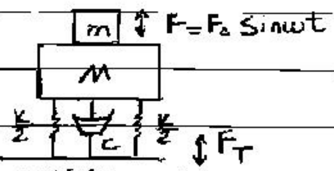
۱ـ حداقل سازی ارتعاشات انتقالی (جابجایی) از محیط (پایه ـ فونداسیون) به سیستم دینامیکی مورد نظر

۲ـ حداقل سازی نیروهای انتقالی از سیستم دینامیکی به محیط (پایه)

بازه کاری مناسب $\longrightarrow \frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2} \quad (r > \sqrt{2})$

$$\uparrow \omega_n \equiv \uparrow M , \downarrow K$$

بحث انتقال جابجایی به سیستم دینامیکی قبلاً بررسی شد اکنون به بحث انتقال نیرو از سیستم دینامیکی به پایه می‌پردازیم



$x = X \sin(\omega t - \varphi)$ } Kx
$\dot{x} = X\omega \cos(\omega t)$ } $c\dot{x}$ نیرو

پاسخ هارمونیک می‌شوند $\leftarrow$ $F = F_0 \sin \omega t$: فرض

$$F_T = \sqrt{(KX)^2 + (cX\omega)^2} = X\sqrt{K^2 + c^2\omega^2} \quad (*)$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{F_0/K}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (**)$$

$$(*), (**) \longrightarrow TR = \frac{F_T}{F_0} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$TR \downarrow$ نسبت نیروی انتقالی به نیروی اغتشاش

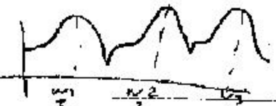
درصورتی که $\zeta \ll 1$ آنگاه: $\quad (\mathrm{I})\ TR = \frac{1}{r^2 - 1} \quad (r > \sqrt{2})$

$$(m + M)g = K\Delta \longrightarrow \frac{K}{M+m} = \frac{g}{\Delta} = \omega_n^2$$

(جابجایی استاتیکی $\Delta \equiv$)

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi f}{\sqrt{g/\Delta}}$$

$$\longrightarrow (\mathrm{I}) \quad TR = \frac{1}{(2\pi f)^2 \frac{\Delta}{g} - 1} = \frac{F_T}{F_0}$$



ص ۳۷

C به صورت تجربی برای سازه‌ها به‌دست می‌آید

$$\zeta_1,\quad \zeta_2=\zeta_1\frac{\omega_2}{\omega_1},\quad \vdots,\quad \zeta_n=\zeta_1\frac{\omega_n}{\omega_1}$$

میرایی تناسبی $\alpha[M]+\beta[K]=[C]$ از آزمایش

میرایی معادل:

$$W_d=\pi c_{eq}\omega X^2$$

نکته:

$$M=\frac{X}{F_0/K}=\frac{1}{2\zeta}\quad\left(r=\frac{\omega}{\omega_n}=1\right)\longrightarrow X=\frac{F_0}{2\zeta K}=\frac{F_0}{c\omega_n}$$

مثال: میرایی معادل میرایی کولمب:

$$W_d=4\mu NX=4F_dX=\pi c_{eq}\omega X^2\rightarrow c_{eq}=\frac{4F_d}{\pi\omega X}=\frac{4\mu N}{\pi\omega X}$$

حل مسأله‌ی یک سیستم ارتعاشی در حضور میرایی کولمب:

$$x_p=X\sin(\omega t-\varphi)\quad;\quad X,\varphi=?$$

$$*\quad X=\frac{F_0/K}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta_{eq}r)^2}}\ ,\ \zeta_{eq}=\frac{c_{eq}}{2m\omega_n}\ ,\ c_{eq}=\frac{4F_d}{\pi\omega X}\ ,\ r=\frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}}\ X=\frac{F_0/K}{\sqrt{(1-r^2)^2+\left(\frac{4F_d}{\pi KX}\right)^2}}\rightarrow X=\frac{F_0}{K}\,\frac{\sqrt{1-\left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}}{(1-r^2)}$$

اما این فرضیات و معادل‌سازی فقط برای جابجایی‌های کوچک صادق است. یعنی:

$$1-\left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2>0\longrightarrow F_d<\frac{\pi F_0}{4}$$

$$**\quad \varphi=tg^{-1}\left(\frac{c_{eq}\omega}{K-m\omega^2}\right)=tg^{-1}\left(\frac{2\zeta_{eq}r}{1-r^2}\right)=tg^{-1}\left(\frac{4F_d/\pi KX}{1-r^2}\right)$$

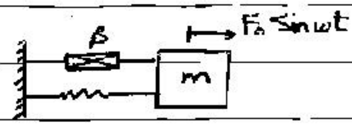
مثال: میرایی معادل میرایی سازه‌ای:

انرژی ارتعاشی در سازه‌ها معمولاً به صورت حرارت تلف می‌شود

$$W_d=\alpha X^2=\pi c_{eq}\omega X^2\rightarrow c_{eq}=\frac{\alpha}{\pi\omega}\underset{\text{فرض}}{=}\frac{\beta K}{\omega}\rightarrow \beta=\text{ضریب میرایی سازه‌ای}$$

$$m\ddot{x}+\frac{\beta K}{\omega}\dot{x}+Kx=F_0\sin\omega t\rightarrow x_p(t)=X\sin(\omega t-\varphi)$$

$$X=\frac{F_0/K}{\sqrt{(1-r^2)^2+\beta^2}}\quad\left(\text{فرض}:\ \frac{\beta K}{m\omega}=2\zeta\omega_n\rightarrow\beta=2\zeta r\right)\ ,\quad \varphi=tg^{-1}\frac{\beta}{1-r^2}$$



اگر $F(t)=F_0 e^{j\omega t}$ ، $x=Xe^{j(\omega t-\varphi)}$ ، $\dot{x}=j\omega X e^{j(\omega t-\varphi)}$

$$\rightarrow \frac{\beta K}{\omega}\dot{x}=\frac{\beta K}{\omega}(j\omega \underbrace{Xe^{j(\omega t-\varphi)}}_{x}) \Rightarrow m\ddot{x}+(j\beta K+K)x=F_0 e^{j\omega t}$$

$$\rightarrow m\ddot{x}+K(j\beta+1)x=F_0 e^{j\omega t} \rightarrow K(j\beta+1)\equiv \text{سختی مختلط}$$

$\beta \equiv$ میرایی مختلط

مثال ۶ میرایی معادل $F_d=c\dot{x}^n$ ، $x(t)=X\sin\omega t$

$$\text{یک سیکل } W_d=4\int_0^x c\dot{x}^n dx=4\int_0^x c(X\omega\cos\omega t)^n dx=\pi c_{eq}\omega X^2$$

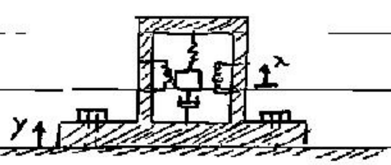
$dx=\dot{x}dt=X\omega\cos\omega t\,dt$

$$\rightarrow \boxed{c_{eq}=c\omega^n X^{n-1}\alpha_n} \quad , \quad \alpha_n=\frac{4}{\pi}\left(\frac{n}{n+1}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\cos^{n-1}\omega t\,dt$$

n	1	2	3	4
α_n	$\frac{1}{\omega}$	$\frac{8}{3\pi\omega}$	$\frac{3}{4\omega}$	$\frac{32}{15\pi\omega}$

$$X=\frac{F_0}{\sqrt{(K-m\omega^2)^2+(c_{eq}\omega)^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{K^2(1-r^2)^2+c^2\omega^{2(n+1)}X^{2(n-1)}\alpha_n^2}}$$

شتاب سنج و لرزه نگار:



اندازه گیری داخلی : $Z=x-y$

$$\rightarrow \frac{Z}{Y}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$r=\frac{\omega}{\omega_n}$ (ω از محیط ، ω_n فرکانس طبیعی لرزه نگار) $\rightarrow \infty \quad \frac{Z}{Y}\rightarrow 1 \rightarrow Z=Y$ لرزه نگار

$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow 0 \quad \downarrow K$ یا $m\uparrow$

لرزه نگار بسیار حجیم و سنگین هستند.

ضعف اصلی این وسایل بزرگ بودن و سنگین بودن آنهاست. عملاً m یک جرم مغناطیسی است که در داخل یک سیم پیچ حرکت می کند و این حرکت تبدیل به یک سیگنال الکتریکی می شود که آن را اندازه می گیریم. معمولاً فرکانس طبیعی لرزه نگارها بین 5-1 هرتز و محدوده کاری بین 2000Hz - 10 می باشد.

* شتاب سنج : $r \to 0 : Z = r^2 Y = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} Y \Rightarrow Z = \ddot{y} \to |Z| = |\ddot{Y}|$

$y = Y \sin \omega t \to \ddot{y} = -\omega^2 y$ دامنه

$r \to 0 : \frac{\omega}{\omega_n} \xrightarrow{\text{تحریک}} 0 \to \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \to \infty \quad \uparrow K , m \downarrow$

فرکانس طبیعی

به همین دلیل شتاب سنج ها معمولاً جرم کم و سختی بالایی دارند. (شتاب سنج پیزوالکتریک)
در این صورت حرکت نسبی جرم متناسب است با شتاب ورودی. مثلاً برای $\zeta = 0.7$ محدوده ی قابل قبول برای شتاب سنج بین 0 تا 20% است. بطور مثال اگر فرکانس طبیعی شتاب سنج 100Hz باشد محدوده ی مفید اندازه گیری 0 تا 20 هرتز است. شتاب سنج های پیزوالکتریک دارای سختی بالا و میرایی کم می باشند و فرکانس طبیعی آنها می تواند تا ده ها کیلوهرتز باشد. بنابراین می توان فرکانس های بسیار بالا (مثلاً 5000Hz) را با آنها اندازه گرفت. شتاب سنج های پیزوالکتریک بسیار قابل اعتماد و rugged هستند (حساس نیستند)

پاسخ ماندگار سیستم دینامیکی به نیروی تناوبی $f(t)$:

هر نیروی تناوبی با دوره تناوب $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_i \cos(i\omega t) + \sum_{1}^{\infty} b_i \sin(i\omega t)$$ سری فوریه

$$a_i = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos(i\omega t)\, dt \quad , \quad b_i = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin(i\omega t)\, dt$$

حال در پاسخ ماندگار داریم:

معادله حرکت $\to m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_i \cos(i\omega t) + \sum_{1}^{\infty} b_i \sin(i\omega t)$

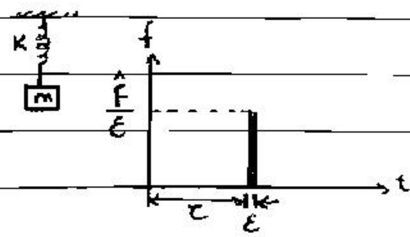
$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{a_0}{2K} + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_i / K}{\sqrt{(1 - i^2 r^2)^2 + (2\zeta i r)^2}} \cos(i\omega t - \varphi_i)$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} \frac{b_i / K}{\sqrt{(1 - i^2 r^2)^2 + (2\zeta i r)^2}} \sin(i\omega t - \varphi_i)$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad , \quad \varphi_i = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta i r}{1 - i^2 r^2}\right)$$

فصل چهارم : ارتعاشات یک سیستم یک درجه آزادی تحت نیروی کلی $f(t)$

فرض می‌کنیم سیستم ارتعاشی ما تحت اثر یک نیروی غیرتناوبی $f(t)$ قرار دارد و هدف یافتن پاسخ سیستم است.



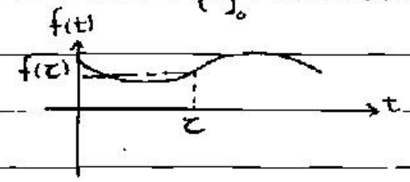
ضربه $\quad \mathcal{J} = \int f\,dt = \hat F$

معمولاً در عمل، این ضربه توسط impact hammer به سیستم داده می‌شود.

$\epsilon \to 0 ,\ \hat F \to 1$ ($\delta(t)$ دلتای دیراک) ضربه ایده‌آل $\Rightarrow \begin{cases} \delta(t-\tau)=0 \\ \int_0^\infty \delta(t-\tau)\,dt = 1 \end{cases}$

unit impulse

$$\Rightarrow f(\tau) = \int_0^\infty f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt$$



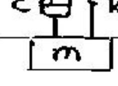
$$f = m\frac{dv}{dt} \to f\,dt = m\,dv \to \int f\,dt = mv \to \frac{\int f\,dt}{m} = v \to \frac{\hat F}{m} = v = \dot x$$

حال از پاسخ گذرای سیستم به ازای شرایط اولیه ($x_0 = \dot x_0 = 0$) برای استخراج پاسخ کلی سیستم به ضربه استفاده می‌کنیم:

$$m\ddot x + Kx = 0 \to x_h(t) = \frac{\dot x(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t) + x(0)\cos(\omega_n t) \qquad \left(x(0)=0,\ \dot x(0)=\frac{\hat F}{m}\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\hat F}{m\omega_n}\sin(\omega_n t) \xrightarrow[\hat F = 1]{\text{پاسخ به ضربه واحد}} \boxed{h(t) = g(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin(\omega_n t)}$$

در صورت وجود میرایی:



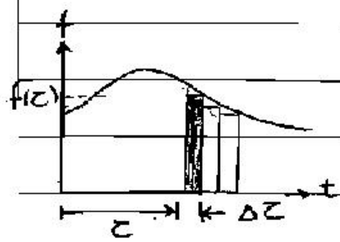
$$m\ddot x + c\dot x + Kx = 0$$

$$x_h(t) = \frac{\dot x(0)\,e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} + \qquad \left(\dot x(0) = \frac{\hat F}{m}\right)$$

$$\underset{\hat F}{\text{Impulse}}\ \text{پاسخ به}\ \ x(t) = \frac{\hat F\,e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$$

پاسخ سیستم به ضربه واحد $\quad \boxed{h(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\underbrace{\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_n}\,t} \quad \zeta = 0$

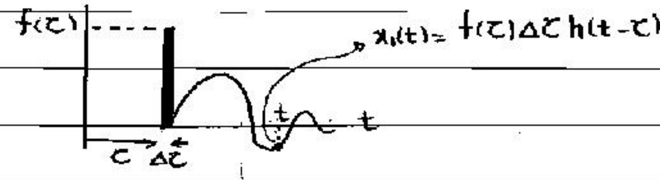
$h(t)$ در واقع معرف مشخصات دینامیکی سیستم می باشد و در واقع می توان نشان داد با داشتن $h(t)$ پاسخ سیستم به هر ورودی دیگر را نیز می توان بدست آورد. $h(t)$ در واقع شناسنامه سیستم (system ID) می باشد.



$$\hat{F} \rightarrow x(t) = \hat{F}\, h(t)$$

$$\hat{F} = f(\tau)\,\Delta\tau$$

$$\hookrightarrow x_1(t) = \hat{F}\, h(t) = f(\tau)\,\Delta\tau\, h(t-\tau)$$



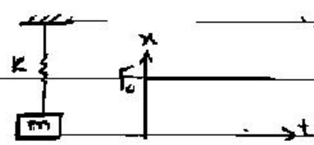
حال برای کل ازمنه زمان t با توجه به اینکه سیستم خطی فرض می شود پاسخ کل سیستم (شامل حل ها و حل کلی ها) توسط اصل برهم نهی (super position) به شکل زیر بدست می آید:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad \leftarrow \text{انتگرال کانولوشن}$$

$$x(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

$$\boxed{x(t) = f(t) * h(t)}$$

مثال: پاسخ یک سیستم یک درجه آزادی به ورودی پله را بدست آورید.

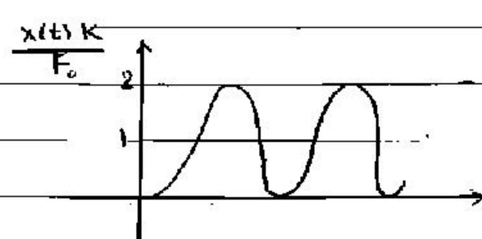


$$m\ddot{x} + Kx = F_0\, u(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t \rightarrow x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

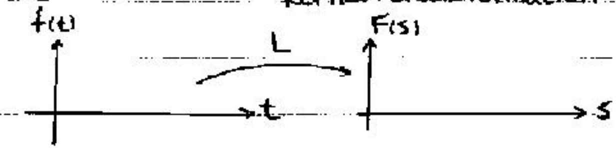
$$\rightarrow x(t) = \int_0^t F_0 \frac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n \tau)\, d\tau = \frac{F_0}{K}(1 - \cos \omega_n t) \qquad t>0,\ u(t)=1$$

ماکزیمم دامنه پاسخ به ازای $\cos \omega_n t = -1$ بدست می آید: $\cos \omega_n t = -1 \rightarrow x_{max}(t) = \frac{2F_0}{K} = 2\delta_{st}$



تبدیل لاپلاس : $F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

e^{-st} : kernel transformation



Differential Equation $\rightarrow$ Algebric Equation

$L\{x(t)\} = X(s)$

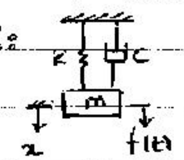
$L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$

$L\{\ddot{x}(t)\} = s^2X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)$

$\vdots$

$L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$

مثال :



$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \xrightarrow{L} (ms^2 + cs + k)X(s) = (ms + c)x(0) + m\dot{x}(0) + F(s)$

اگر $x(0) = 0 ,\ \dot{x}(0) = 0 \longrightarrow (ms^2 + cs + k)X(s) = F(s)$

$\longrightarrow \dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{ms^2 + cs + k}$ = $\dfrac{\text{لاپلاس خروجی}}{\text{لاپلاس ورودی}}$ = تابع تبدیل سیستم

بی بعد کردن $\longrightarrow \dfrac{X(s)}{F(s)/K} = \dfrac{K/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \longrightarrow \dfrac{X(s)}{F(s)/K} = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

اگر $f(t) = \delta(t) \longrightarrow L\{f(t)\} = F(s) = 1 \longrightarrow X(s) = \dfrac{1}{ms^2 + cs + K} = H(s)$

$f(t) = \delta(t) \longrightarrow x(t) = h(t)$

$\longrightarrow L\{h(t)\} = \dfrac{1}{ms^2 + cs + K} = H(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)}$ ~ مبنای آنالیز مودال

لاپلاس پاسخ به ضربه واحد

$\left.\begin{array}{l} h(t) \xrightarrow{L} H(s) \\ f(t) \xrightarrow{L} F(s) \end{array}\right\} \longrightarrow X(s) = H(s)F(s) \xrightarrow{L^{-1}} x(t)$

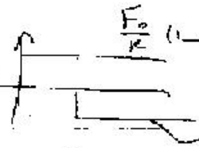
$F(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow X(s)$

$F(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow X(s)$

$X(s) = F(s)\,G(s)$

از طرفی : $x(t) = \int_0^t f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = f(t) * h(t)$

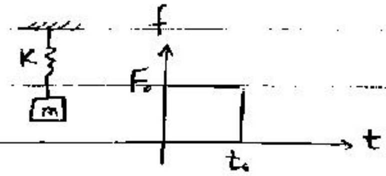
(با فرض شرایط اولیه صفر) $x(0) = 0 ,\ \dot{x}(0) = 0$ $\xrightarrow{L}$ $X(s) = F(s)\,H(s) \longrightarrow \begin{cases} G(s) \leftarrow \text{تابع تبدیل} & \text{شناسنامه (IO) در حوزه لاپلاس} \\ g(t) \leftarrow \text{تابع تبدیل} & \text{شناسنامه (IO) در حوزه زمان} \end{cases}$



سید محمد جعفر سبحانی

$\frac{F_0}{K}\left(1-\cos\omega_n(t-t_0)\right)u(t-t_0)$ ← با استفاده از شیفت تبدیل تفاضل

مثال: پاسخ یک سیستم جرم و فنر را به ورودی نیروی مربعی مطابق شکل زیر بدست آورید



$$f(t)=\begin{cases} F_0 & 0\leq t<t_0 \\ 0 & t>t_0 \end{cases}$$

$$f(t)=F_0u(t)-F_0u(t-t_0)=F_0\left[u(t)-u(t-t_0)\right]$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)=\frac{F_0}{s}-\frac{F_0e^{-st_0}}{s}=\frac{F_0}{s}\left(1-e^{-st_0}\right)$$

از طرفی: $H(s)=\frac{1}{ms^2+K} \longrightarrow X(s)=H(s)F(s)=\frac{F_0}{s(ms^2+K)}\left(1-e^{-st_0}\right)$

$$\longrightarrow X(s)=\frac{F_0}{m}\left\{\frac{1}{s(s^2+\omega_n^2)}-\frac{e^{-st_0}}{s(s^2+\omega_n^2)}\right\}$$

$$\xrightarrow[\mathcal{L}^{-1}+]{\text{تبدیل به کسرهای جزئی}} x(t)=\underbrace{\frac{F_0}{m\omega_n^2}}_{\frac{F_0}{K}}\left\{(1-\cos\omega_n t)u(t)-(1-\cos\omega_n(t-t_0))u(t-t_0)\right\}$$

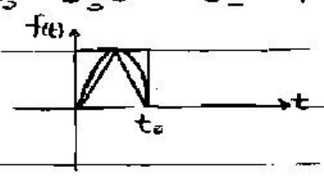
* این جواب را در نواحی مختلف مشخص کنیم:

$$x(t)=\begin{cases} \frac{F_0}{K}(1-\cos\omega_n t) & 0\leq t\leq t_0 \\ \frac{F_0}{K}\left\{\cos\omega_n(t-t_0)-\cos\omega_n t\right\} & t\geq t_0 \end{cases}$$

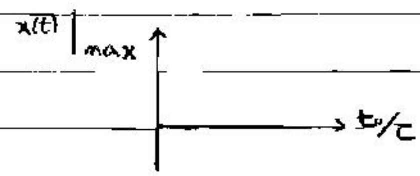
طیف پاسخ شوک (SRS): standard $\begin{cases} \text{MIL-E-J400} \\ \text{MIL-STD-810} \end{cases}$

وقتی که زمان اعمال تحریک (pulse) یعنی t_0 کوچکتر از پریود سیستم باشد، تحریک را شوک می‌نامیم.

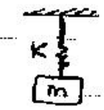
$$t_0<\frac{2\pi}{\omega_n}=\tau_n$$



طیف پاسخ شوک (SRS) در واقع منحنی ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ نسبت به پریود طبیعی سیستم ارتعاشی می‌باشد.

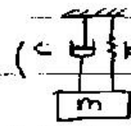


مثال: سیستم جرم و فنر



$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t$$

(با میرایی



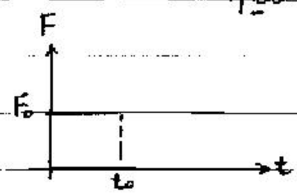
)

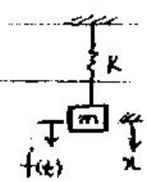
$$h(t) = \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t \qquad (\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2})$$

ورودی نیرو : $\left|x(t)\right|_{max} = \left|\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t f(\tau) \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau\right|_{max}$

ورودی جابجایی : $\left|x(t)\right|_{max} = \left|-\frac{1}{\omega_n}\int_0^t \ddot{y}(\tau) \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau\right|_{max}$

حال می‌خواهیم SRS سیستم جرم و فنر به ازای ورودی مربعی را بدست آوریم:





چون می‌خواهیم رفتار سیستم پس از اعمال تحریک را بررسی کنیم

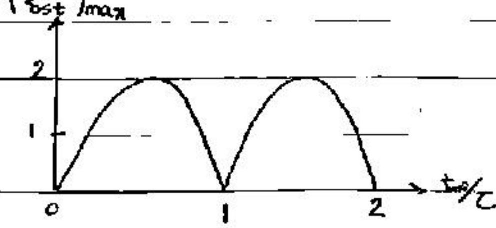
$$(*)\quad \frac{xK}{F_0} = \frac{x}{F_0/K} = \left[-\cos \omega_n t + \cos \omega_n (t-t_0)\right] \quad t>t_0$$

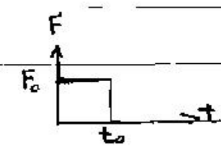
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{xK}{F_0}\right) = \omega_n \left[\sin \omega_n t_p - \sin \omega_n (t_p - t_0)\right] = 0 \longrightarrow tg(\omega_n t_p) = \frac{-\sin(\omega_n t_0)}{1-\cos(\omega_n t_0)}$$

$$\longrightarrow \sin(\omega_n t_p) = \frac{-\sin \omega_n t_0}{\sqrt{2(1-\cos \omega_n t_0)}} \quad , \quad \cos(\omega_n t_p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(\omega_n t_0)}$$

$$(*)\quad \left.\frac{xK}{F_0}\right|_{max} = \sqrt{2(1-\cos(\omega_n t_0))} = 2\sin \frac{1}{2}\omega_n t_0 = 2 \sin \frac{\pi t_0}{\tau} \quad (t>t_0)$$

ضریب تقویت $= \left(\frac{x}{F_0/K}\right)_{max} = \left(\frac{x}{\delta_{st}}\right)_{max}$





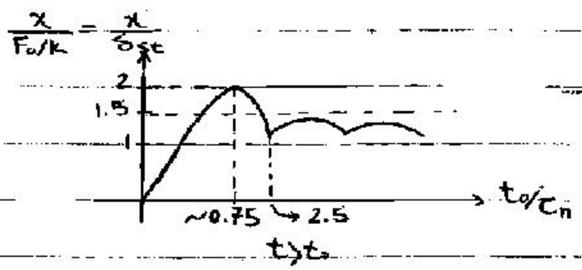
بنابراین:
$A' = \frac{\alpha\pi}{\omega_n t_0}\sin\omega_n t_0 \quad , \quad B' = \frac{\alpha\pi}{\omega_n t_0}(1+\cos\omega_n t_0)$

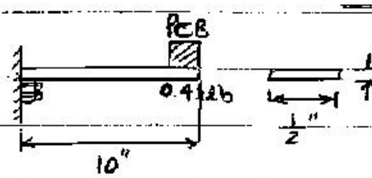
پس:
$$\frac{x(t)}{F_0/K} = \frac{\tau_n/t_0}{2\left\{1-\left(\frac{\tau_n}{2t_0}\right)^2\right\}}\left[\sin 2\pi\left(\frac{t_0}{\tau_n}-\frac{t}{\tau_n}\right) - \sin 2\pi\frac{t}{\tau_n}\right] \quad (t>t_0)$$

حال برای بدست آوردن منحنی SRS ، داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{F_0/K}\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{F_0/K}\right)_{max} = \dfrac{2}{\frac{\tau_n}{2t_0}-\frac{2t_0}{\tau_n}}\cos\dfrac{\pi t_0}{\tau_n} \; ; \; t>t_0 \\ \left(\frac{x}{F_0/K}\right)_{max} = \dfrac{1}{1-\frac{\tau_n}{2t_0}}\,\dfrac{\sin 2\pi\left(\frac{\tau_n}{2t_0}\right)}{1+\frac{\tau_n}{2t_0}} \quad t<t_0 \end{cases}$$

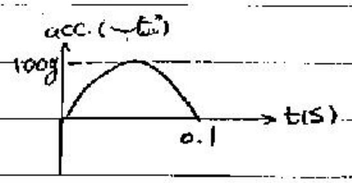
از معادلات مربوط به خودش مشتق گرفتیم.





$\rho = 0.435\ \frac{lb}{in^3}$ ، $E = 10^7 psi$ ، $\sigma_w = 26000 psi$

$d = ?$



$W_{eq} = W_{b\,eq} + W_{PCB}$ معادل

$W_{eq} = 10(0.5d)(0.435)(0.23) + 0.4 = 0.5d + 0.4\ lb$

$\tau_n = ?$

$I = \frac{1}{12}(0.5)d^3 = 0.04167\,d^3\ in^4$

$\delta_{st} = \frac{W_{eq}\,\ell^3}{3EI} = 8\times10^{-4}\times\frac{0.5d+0.4}{d^3}$

به $\frac{t_0}{\tau_n}$ نیاز داریم. روش سعی و خطا:

1 فرض: $d = 0.5''$ ، $\delta_{st} = 41.6\times10^{-4}\ in$

از طرفی: $\delta_{st} = \frac{W_{eq}}{K_{eq}} = \frac{m_{eq}\cdot g}{K_{eq}} = \frac{g}{\omega_n^2} \rightarrow \omega_n^2 = \frac{g}{\delta_{st}} \rightarrow \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/\delta_{st}}}$

$g = 387\ \frac{in}{s^2}$

$\Rightarrow \tau_n = 0.0206\,s \rightarrow \frac{t_0}{\tau_n} = \frac{0.1}{0.0206} = 4.8508$

Half Sine SRS

سید محمد جعفر سبحانی

از منحنی SRS مربوطه: 1.1 = ضریب تقویت

$$\left.\frac{x}{\delta_{st}}\right|_{max} = 1.1 \rightarrow x_{max} = 1.1\,\delta_{st}$$

$$P_{max} = m_{eq}\,a\,(1.1) = 1.1\,\frac{W_{eq}}{g}\,(100g) \rightarrow P_{max} = 110\,w_{eq} = 71.5\ lb$$

$I = 0.00521\ in^4$

$$M_{max} = P_{max}\cdot l \Longrightarrow \sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M_{max}\frac{d}{2}}{I} = 34315.6\ lb/_{in^2} \rightarrow \sigma_{max} > \sigma_w$$

X

$$\tau_n = 0.61627 \rightarrow \frac{t_0}{\tau_n} = 6.14 \rightarrow \left.\frac{X}{\delta_{st}}\right|_{max} = 1.1$$ $d = 0.6''$ (2)

$$P_{max} = 77.0\ lb \rightarrow \sigma_{max} = 25663.8\ lb/_{in^3} < \sigma_w\ \checkmark$$

فصل ۵: سیستم‌های ۲ درجه آزادی و بالاتر

در حل معادلات دیفرانسیل سیستم‌های ۲ درجه آزادی به یک معادلهٔ فرکانسی (معادلهٔ مشخصه) می‌رسیم که از حل آن معادله فرکانس‌های طبیعی سیستم بدست می‌آید.

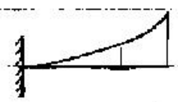
در سیستم ۲ درجه آزادی به دو مختصهٔ مستقل برای بیان حرکت ارتعاشی سیستم نیاز داریم.

همان طور که قبلاً گفته شد فرکانس طبیعی سیستم فرکانسی است که در آن همهٔ اجزای سیستم با یک آهنگ خاص شکل مشخصی را تعقیب می‌کنند.

در هر فرکانس طبیعی (مد ارتعاشی) این دو مختصه با یک شکل خاص به یکدیگر مرتبط می‌شوند که به آن شکل مد (mode shape) یا مد نرمال (مد اصلی - مد طبیعی) می‌گوییم. فرکانس مربوطه نیز فرکانس طبیعی (فرکانس مودال - فرکانس نرمال) نامیده می‌شود.

در تحریکات هارمونیک اگر فرکانس تحریک منطبق بر فرکانس طبیعی سیستم شود (با فرض میرایی صفر) رزونانس اتفاق می‌افتد.

ارتعاشات تحت تأثیر هر نیروی دلخواه دیگر ترکیب خطی از شکل مودهای سیستم خواهد شد.



$V_1 = \begin{bmatrix} Y_1^1 \\ Y_2^1 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow V = \alpha V_1 + \beta V_2$

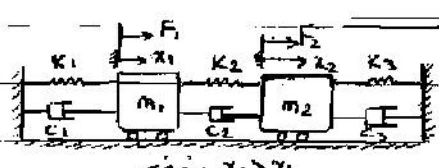
$V_2 = \begin{bmatrix} Y_1^2 \\ Y_2^2 \end{bmatrix}$

$$x(t) = X_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

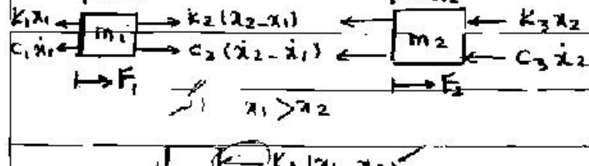
$x_1(0),\ \dot{x}_1(0),\ x_2(0),\ \dot{x}_2(0)$ ← فرکانس طبیعی اول — فرکانس طبیعی دوم

در حالت کلی معادلات ارتعاشی (دینامیکی) سیستم‌های چند درجه آزادی به صورت کوپل می‌باشند اما همیشه می‌توان مختصاتی یافت که معادلات ارتعاشی (دینامیکی) سیستم در آن مختصات، معادلات سیستم دیکوپله باشند. این مختصات همان مختصات اصلی سیستم می‌باشد.

مثال:



فرض: $x_2 > x_1$



اگر $x_1 > x_2$

جواب های غیر بدیهی
$$\longrightarrow \begin{cases} \left[-m_1 w^2 + (K_1+K_2)\right] X_1 - K_2 X_2 = 0 \\ -K_2 X_1 + \left[-m_2 w^2 + (K_2+K_3)\right] X_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -m_1 w^2 + (K_1+K_2) & -K_2 \\ -K_2 & -m_2 w^2 + (K_2+K_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$

شرط وجود جواب غیر صفر:

$$\begin{vmatrix} -m_1 w^2 + (K_1+K_2) & -K_2 \\ -K_2 & -m_2 w^2 + (K_2+K_3) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow m_1 m_2 w^4 - \left[(K_2+K_3)m_1 + (K_1+K_2)m_2\right] w^2 + (K_1+K_2)(K_2+K_3) - K_2^2 = 0$$

معادله مشخصه سیستم ارتعاشی (معادله فرکانسی)

از حل معادله مشخصه، فرکانس های اصلی سیستم بدست خواهند آمد:

$$\lambda = w^2 \rightarrow \quad w_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\left[\frac{(K_1+K_2)m_2 + (K_2+K_3)m_1}{m_1 m_2}\right] \mp \left\{\left[\frac{(K_1+K_2)m_2 + (K_2+K_3)m_1}{m_1 m_2}\right]^2 - 4\left[\frac{(K_1+K_2)(K_2+K_3) - K^2}{m_1 m_2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$$

نسبت $\equiv$ شکل مود

پارامترهای زیر را بدین شکل تعریف می کنیم: ($*$)

مود اول

$$r_1 = \frac{X_2^{1}}{X_1^{1}} = \frac{-m_1 w_1^2 + (K_1+K_2)}{K_2} = \frac{K_2}{-m_2 w_1^2 + (K_2+K_3)}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{2}}{X_1^{2}} = \frac{-m_1 w_2^2 + (K_1+K_2)}{K_2} = \frac{K_2}{-m_2 w_2^2 + (K_2+K_3)}$$

شکل مودها (بردارهای مودال) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{X}^1 = \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ r_1 X_1^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} X_1^1 \quad , \quad \vec{X}^2 = \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ r_2 X_1^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} X_1^2$$

$$\vec{x}^1(t) = \begin{Bmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{Bmatrix} = X_1^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} \cos(w_1 t + \varphi_1) \equiv \text{mode shape (1)}$$

$$\vec{x}^2(t) = \begin{Bmatrix} x_1^2(t) \\ x_2^2(t) \end{Bmatrix} = X_1^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \cos(w_2 t + \varphi_2) \equiv \text{mode shape (2)}$$

$\varphi^1=\begin{Bmatrix}1\\ r_1\end{Bmatrix}$ ، $\varphi^2=\begin{Bmatrix}1\\ r_2\end{Bmatrix}$

X_1^1 ، X_1^2 ، φ_1 و φ_2 از شرایط اولیه بدست می‌آیند: $x_1(0)$ ، $x_2(0)$ ، $\dot{x}_1(0)$ ، $\dot{x}_2(0)$

چون سیستم خطی است هر حرکت ارتعاشی این سیستم ترکیب خطی از حرکت اصلی یا مودهای اصلی سیستم خواهد بود.

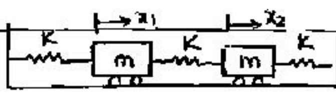
$$\vec{x}(t)=\begin{Bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{Bmatrix}=c_1\vec{X}^1(t)+c_2\vec{X}^2(t)$$

بدون آنکه به عمومیت مسأله لطمه‌ای وارد آید، فرض می‌کنیم:

$$c_1=c_2=1\Rightarrow\begin{cases}x_1(t)=X_1^1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+X_1^2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\\ x_2(t)=\underbrace{X_2^1}_{r_1X_1^1}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+\underbrace{X_2^2}_{r_2X_1^2}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\end{cases}$$

در این دستگاه معادلات X_1^1 و X_1^2 و φ_1 و φ_2 از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

مثال: فرکانس طبیعی و شکل مودها را بدست آورید.



$$\begin{cases}m_1\ddot{x}_1+2Kx_1-Kx_2=0\\ m_2\ddot{x}_2-Kx_1+2Kx_2=0\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2K&-K\\-K&2K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0$$

$$\rightarrow[M][\ddot{X}]+[K][X]=0\rightarrow\{[K]-\omega^2[M]\}[X]=0$$

$$\boxed{\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0}$$ معادله مشخصه (برای تمامی حالات صادق)

$$\rightarrow\left|\begin{bmatrix}2K&-K\\-K&2K\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}m&0\\0&m\end{bmatrix}\right|=0\rightarrow\begin{vmatrix}2K-m\omega^2&-K\\-K&2K-m\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$\rightarrow(2K-m\omega^2)^2-K^2=0\rightarrow 2K-m\omega^2=\pm K\begin{cases}\omega_1^2=\frac{K}{m}\\ \omega_2^2=3\frac{K}{m}\end{cases}$$

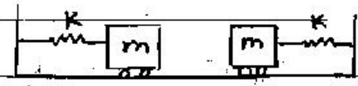
$$\Rightarrow\begin{cases}r_1=\dfrac{X_2^1}{X_1^1}=\dfrac{2K-m\omega_1^2}{K}=\dfrac{K}{2K-m\omega_1^2}=1\rightarrow\varphi^1=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\\ r_2=\dfrac{X_2^2}{X_1^2}=\dfrac{2K-m\omega_2^2}{K}=\dfrac{K}{2K-m\omega_2^2}=-1\rightarrow\varphi^2=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}\end{cases}$$

$$\vec{x}^1=\begin{Bmatrix}x_1^1(t)\\ x_2^1(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1^1\cos(\sqrt{\frac{K}{m}}t+\varphi_1)\\ X_1^1\cos(\sqrt{\frac{K}{m}}t+\varphi_1)\end{Bmatrix}=X_1^1\underbrace{\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}}_{\varphi_1(y)}\underbrace{\cos(\sqrt{\tfrac{K}{m}}t+\varphi_1)}_{q_1(t)}$$

$$\vec{X}^2 = \begin{Bmatrix} x_1^2(t) \\ x_2^2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^2 \cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\,t + \varphi_2\right) \\ -X_1^2 \cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\,t + \varphi_2\right) \end{Bmatrix} = X_1^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\,t + \varphi_2\right)$$

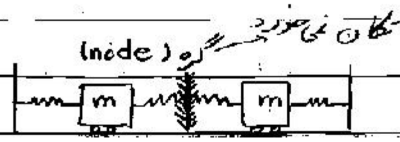
$w_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ $\qquad$ $w_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$

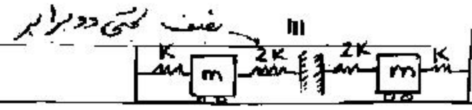
مود اول:



$w_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

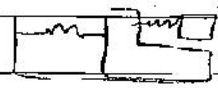
مود دوم: KT کاردنوی

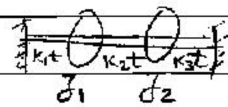




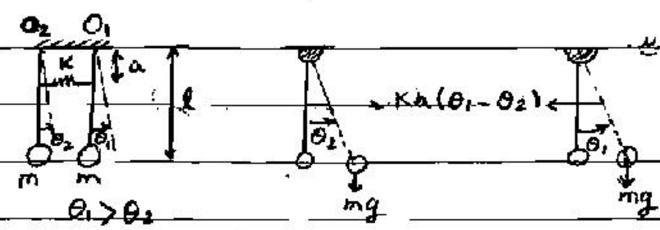
$w_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$

* اگر جرم دو جسم برابر نباشد، نقطه گره در مکانی قرار دارد که فرکانس طبیعی دو جسم برابر شود.





مثال: فرکانس‌های طبیعی را بدست آورید.



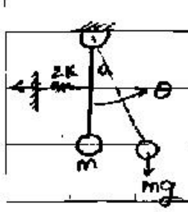
روش اول:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{O_1} = J_{O_1}\ddot{\theta}_1 &\rightarrow \begin{cases} -mgl\theta_1 - Ka^2(\theta_1 - \theta_2) = ml^2\ddot{\theta}_1 \\ -mgl\theta_2 + Ka^2(\theta_1 - \theta_2) = ml^2\ddot{\theta}_2 \end{cases} \\ \Sigma M_{O_2} = J_{O_2}\ddot{\theta}_2 &\rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow [M]\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + [K]\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ka^2 + mgl & -Ka^2 \\ -Ka^2 & Ka^2 + mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \left| [K] - w^2[M] \right| = 0 \rightarrow w_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ , \quad w_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{m}\frac{a^2}{l^2}}$$

روش دوم:



$$-mgl\theta_1 - 2Ka^2\theta_1 = ml^2\ddot{\theta}_1$$

$$\rightarrow \ddot{\theta}_1 + \underbrace{\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right)}_{w_n^2}\theta_1 = 0$$

سید محمد جعفر سجادی

تابع step

step(time, ۰, ۰, 1.001, 1)

کوپلینگ مختصات و مختصات اصلی :

برای بیان رفتار یک سیستم n درجه آزادی به n مختصات مستقل نیاز داریم که معمولاً از حالت تعادل سیستم تعریف می‌شود. اما همیشه می‌توان مختصات مستقل متنوعی برای بیان حرکت یک سیستم پیدا کرد و الزاماً هم مربوط به حالت تعادل نمی‌باشند. به همین این دسته‌ی مختصات را مختصات عام (generalize Cordinates) گویند. بسته به نوع دستگاه مختصات انتخابی حالات زیر ممکن است به وجود آید:

۱ـ کوپلینگ استاتیکی Elastic or static coupling ← $[K]$ غیرقطری

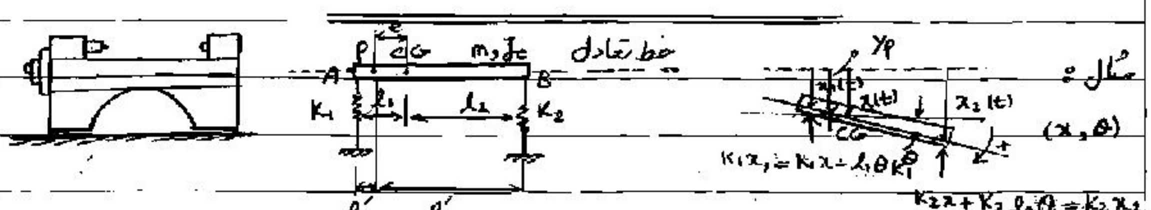
۲ـ کوپلینگ دینامیکی Dynamic or inertia coupling ← $[M]$ غیرقطری

۳ـ کوپلینگ میرایی Damping or coupling ← $[C]$ غیرقطری

۴ـ غیرکوپله (دکوپله) ← $[M]$ و $[K]$ و $[C]$ قطری هستند.

کوپلینگ از مختصات ذاتی سیستم نیست بلکه از انتخاب دستگاه معادلات است.

مثال :



(x, θ)

$$\begin{cases} \sum F = ma_G \rightarrow m\ddot{x} = -K_1x_1 - K_2x_2 \rightarrow m\ddot{x} + (K_1+K_2)x - (K_1l_1 - K_2l_2)\theta = 0 \\ \sum M_G = J\alpha \rightarrow J_G\ddot{\theta} = K_1x_1l_1 - K_2l_2x_2 \rightarrow J_G\ddot{\theta} + (K_1l_1^2 + K_2l_2^2)\theta - (K_1l_1 - K_2l_2)x = 0 \end{cases}$$

انتخاب دستگاه $[x,\theta]$، $[x,m]$، $[y,\theta]$.

$[x,\theta]$ ①

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_1+K_2 & -(K_1l_1-K_2l_2) \\ -(K_1l_1-K_2l_2) & K_1l_1^2+K_2l_2^2 \end{bmatrix}}_{\text{کوپله استاتیکی}}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* شرط دی کوپله کردن ← $K_1l_1 = K_2l_2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_P \end{bmatrix}}_{\text{کوپله دینامیکی}}\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_1+K_2 & K_2l'_2-K_1l'_1 \\ K_2l'_2-K_1l'_1 & K_1l'^2_1+K_2l'^2_2 \end{bmatrix}}_{\text{کوپله استاتیکی}}\begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = y + e\theta$ $[y,\theta]$ ②

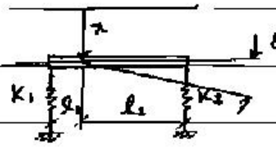
$\Downarrow$

$\ddot{x} = \ddot{y} + e\ddot{\theta}$

* شرط دی کوپله کردن استاتیکی ← $K_1l'_1 = K_2l'_2$

$$\begin{cases} \sum F = ma_G \rightarrow m\ddot{x} = -K_1x_1 - K_2x_2 \rightarrow m(\ddot{y} + e\ddot{\theta}) + K_1(y - l'_1\theta) + K_2(y + l'_2\theta) = 0 \\ \quad \Rightarrow m\ddot{y} + me\ddot{\theta} + (K_1+K_2)y + (K_2l'_2 - K_1l'_1)\theta = 0 \\ \sum M_P = J_G\alpha + m\bar{a}d \rightarrow +K_1x_1l'_1 - K_2x_2l'_2 = J_G\ddot{\theta} + m\ddot{x}e \\ \quad \Rightarrow me\ddot{y} + \underbrace{(J_G + me^2)}_{J_P}\ddot{\theta} + (K_2l'_2 - K_1l'_1)y + (K_1l'^2_1 + K_2l'^2_2)\theta = 0 \end{cases}$$

مثال: تحلیل ارتعاشی سیستم یک خودرو



فرکانس های حرکت Pitching (کلگی) و Bouncing (بالا پایین) و مراکز نوسان (گره ها) را برای اتومبیل با مشخصات زیر بدست آورید.

$m = 1000\,kg$ ، شعاع ژیراسیون $= r = 0.9\,m$ ، $l_1 = 1\,m$ ، $l_2 = 1.5\,m$

$K_1 = 18\,KN/m$ ، $K_2 = 22\,KN/m$ $\searrow r_0 = \sqrt{\dfrac{J_0}{m}}$

$$(x,\theta) \rightarrow \begin{bmatrix} m\omega^2 + K_1 + K_2 & -K_1 l_1 + K_2 l_2 \\ -K_1 l_1 + K_2 l_2 & -J_0\omega^2 + K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با فرض حرکت هارمونیک $x = X\cos(\omega t + \varphi)$ ، $\theta = \Theta\cos(\omega t + \varphi)$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1000\omega^2 + 40000 & 15000 \\ 15000 & -810\omega^2 + 67500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

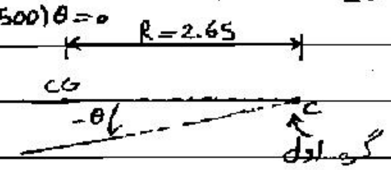
با مساوی قرار دادن دترمینان ضرایب داریم:

$$\Rightarrow 8.1\omega^4 - 999\omega^2 + 24750 = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 5.86\ rad/s \\ \omega_2 = 9.43\ rad/s \end{cases}$$

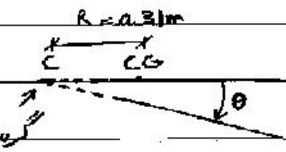
$$(*) \begin{cases} (-\omega^2 + 40)X + 15\theta = 0 \\ 15000\,X + (-810\omega^2 + 67500)\theta = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ با گذاشتن فرکانس ω_1 و ω_2 در معادله ماتریسی بالا

$$\omega_1: \begin{bmatrix} X^1 \\ \theta^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.65 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\omega_2: \begin{bmatrix} X^2 \\ \theta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.31 \\ 1 \end{bmatrix}$$



ارتعاشات کوچک: $\theta \simeq tg\theta = \dfrac{X}{R} \rightarrow X = R\theta$

ارتعاشات اجباری هارمونیک:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \qquad f_i(t) = F_i e^{j\omega t},\ i = 1, 2$$

$$\Rightarrow x_i(t) = X_i e^{j\omega t} e^{j\varphi_i} \ ;\ (\text{if } [C] = 0 \Rightarrow \varphi_i = 0)$$

با جاگذاری x_i ها در معادلات بدست آمده داریم:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + j\omega c_{11} + K_{11} & j\omega c_{12} + K_{12} \\ j\omega c_{21} + K_{21} & -\omega^2 m_2 + j\omega c_{22} + K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 e^{j\varphi_1} \\ X_2 e^{j\varphi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

سید محمدجعفر سبحانی

امپدانس مکانیکی $[Z] =$ mechanical impedence $\Longrightarrow [Z(j\omega)]\begin{bmatrix} X_1 e^{j\varphi_1} \\ X_2 e^{j\varphi_2}\end{bmatrix} = [F]$

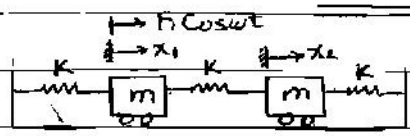
$$[Z(j\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}$$

حالت بدون میرایی $\rightarrow [C] = 0 \rightarrow \varphi_i = 0 \rightarrow [X] = [Z]^{-1}[F]$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{Z_{22}F_1 - Z_{12}F_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \quad , \quad X_2 = \frac{Z_{11}F_2 - Z_{21}F_1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

مثال ۲:



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \cos\omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \varphi_i) \xrightarrow[\varphi_i = 0]{\text{بدون میرایی}} x_i(t) = X_i \cos\omega t \qquad i = 1, 2$$

با جایگذاری x_i ها داریم:

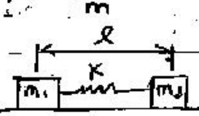
$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + 2K & -K \\ -K & -m\omega^2 + 2K\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -m\omega^2 + 2K & -K \\ -K & -m\omega^2 + 2K\end{bmatrix} \rightarrow Z_{11} = Z_{22} = -m\omega^2 + 2K \quad , \quad Z_{12} = Z_{21} = -K$$

$$X_1(\omega) = \frac{(-m\omega^2 + 2K)F_1}{(-m\omega^2 + 3K)(-m\omega^2 + K)} = \frac{\left[2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]F_1}{K\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]} = \frac{F_1}{K}\,\frac{2 - r^2}{(3 - r^2)(1 - r^2)}$$

$$X_2(\omega) = \frac{F_1 K}{(-m\omega^2 + 3K)(-m\omega^2 + K)} = \frac{F_1}{K}\,\frac{1}{(3 - r^2)(1 - r^2)}$$

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m} \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{m} \quad , \quad \frac{\omega}{\omega_1} = r$$



سیستم‌های نیمه‌متناهی:

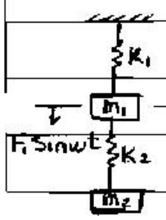
سیستم‌هایی که یکی از فرکانس‌های طبیعی آنها صفر باشد، سیستم‌های نیمه‌متناهی هستند. مود مربوط به فرکانس صفر را Rigid body mode گویند

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$ معادله مشخصه: $\omega^2\left[m_1 m_2 \omega^2 - K(m_1 + m_2)\right] = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0 \longrightarrow \text{Rigid body mode} \\ \omega_2 = \sqrt{K\,\dfrac{m_1+m_2}{m_1 m_2}} \end{cases}$$

نسبت m_1 و m_2 محل گره را مشخص می کند.

جاذب ارتعاشات (vibration absorber):



هدف این است که ارتعاشات یک جزء را به جزء دیگر انتقال دهیم. هدف بدست آوردن $X_1(\omega)$ است و هم نسبت $X_2(\omega)$ چقدر باشد. می خواهیم انرژی های ناشی از ارتعاشات را صرف جابجایی کنترل شده x_2 کنیم.

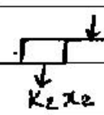
فرض: $\omega_{11}^2 = \dfrac{K_1}{m_1}$ ، $\omega_{22}^2 = \dfrac{K_2}{m_2}$ ، $\mu = \dfrac{m_2}{m_1}$ $\Rightarrow \dfrac{K_2}{K_1} = \mu\left(\dfrac{\omega_{22}}{\omega_{11}}\right)^2$

می خواهیم شرایطی را بدست آوریم که در حالت $X_1 = 0$ است. پس:

$$\frac{X_1 K_1}{F_0} = \frac{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right]}{\left[1+\frac{K_2}{K_1}-\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right]-\frac{K_2}{K_1}}$$

اگر $\omega = \omega_{22} \rightarrow X_1 = 0$

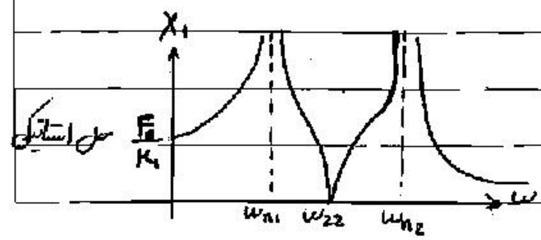
یعنی محل X_1 را دیوار کرده ام. پس:

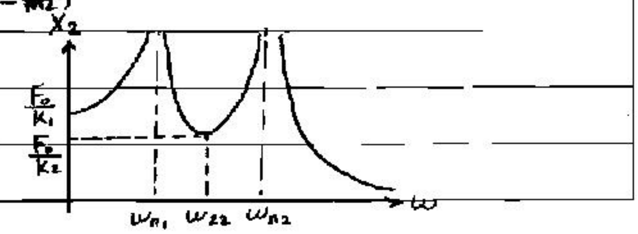


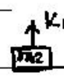
$(F_0 + K_2 X_2) = 0$

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = -\dfrac{F_0}{K_2}$ حل استاتیکی

$\Rightarrow F_0 = -m_2\omega^2 X_2 \quad (\omega = \omega_{22}) \quad \left(\omega^2 = \dfrac{K_2}{m_2}\right)$ فقط دامنه را نوشتیم





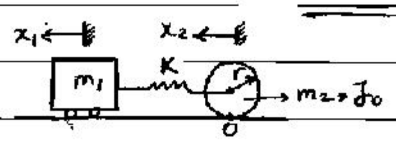


$\longrightarrow \Sigma F = m_2 \ddot{x}_2 \longrightarrow -K_2 X_2 = -m_2\omega^2 X_2 \longrightarrow -K_2 X_2 = -m_2 \dfrac{K_2}{m_2} X_2$ ✓

$(x_2 = X_2 \sin \omega t)$

مثال: $\longrightarrow F = F_0 \sin 100t$; $F_0 = 10N$; $X_2 < 0.01m$

$$\begin{cases} \dfrac{K_2}{m_2} = \omega^2 = 100 \\ X_2 = \dfrac{F_0}{K_2} \rightarrow \dfrac{F_0}{K_2} < 0.01 \rightarrow \dfrac{10}{K_2} = 0.01 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} K_2 = 1000\ \frac{N}{m} \\ m_2 = 10\,kg \end{matrix}$$

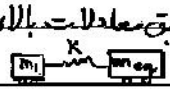


مثال: جرم معادل کنید: $T = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_2^2$

$\longrightarrow \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_2^2$

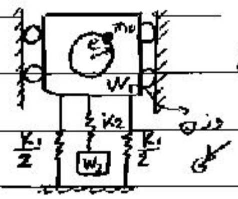
$\longrightarrow m_{eq} = m_2 + \dfrac{J_0}{r^2}$

طبق معادلات بالای صفحه



$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \sqrt{K\,\dfrac{m_1+m_2+\frac{J_0}{r^2}}{m_1\left(m_2+\frac{J_0}{r^2}\right)}} \end{cases}$$

مثال جاذب ارتعاشات



Rotating unbalanced → $m_0 e = 2$ lb.in

$W_1 = 200$ lb , $W_2 = 50$ lb

$\omega = 1800$ rpm

برای اینکه سیستم نیز بتواند به عنوان جاذب ارتعاشات عمل کند مقدار مناسب K_2 چیست و حداکثر جابجایی W_2 چه مقدار خواهد بود؟

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + K_2(x_1 - x_2) + K_1 x_1 = \overbrace{m_0 e \omega^2}^{F_0} \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + K_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

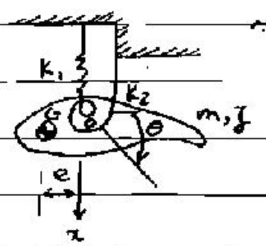
از طرفی $\rightarrow \dfrac{K_2}{m_2} = \omega^2 \rightarrow K_2 = \dfrac{50}{32.2}\left[1800 \dfrac{2\pi}{60}\right]^2 = 55172$ lb/ft

$K_2 X_2 = m_0 e \omega^2 \rightarrow X_2 = 0.10733''$

* به عنوان یک مسأله دیگر، اگر قید X_2 را کم گیریم و بخواهیم m_2 را محاسبه کنیم، آنگاه:

$$X_2 = \frac{m_0 e \omega^2}{K_2} = \frac{m_0 e \omega^2}{m_2 \omega^2} = \frac{m_0 e}{m_2} \rightarrow m_2 = \frac{m_0 e}{X_2}$$

مثال: معادلات حرکت را به کمک روش لاگرانژ بدست آورید (از اثر جاذبه صرفنظر می‌شود)



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$x_G = x - e \sin\theta \rightarrow \dot{x}_G = \dot{x} - e\dot{\theta}\cos\theta$$

$$q_1 \equiv x \quad , \quad q_2 \equiv \theta$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m(\dot{x} - e\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

از طرفی: $U = \frac{1}{2} K_1 x^2 + \frac{1}{2} K_2 \theta^2$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{x} - e\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K_1 x^2 - \frac{1}{2} K_2 \theta^2$$

$$i = 1: \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} - e\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = m(\ddot{x} - e\ddot{\theta}\cos\theta + e\dot{\theta}^2 \sin\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -K_1 x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \rightarrow m(\ddot{x} - e\ddot{\theta}\cos\theta + e\dot{\theta}^2\sin\theta) + K_1 x = 0$$

small vibration: $\sin\theta = \theta$; $\cos\theta = 1$; توان های بالای متغیرها صرفنظر شوند

$\Rightarrow m\ddot{x} - me\ddot{\theta} + k_1 x = 0$ (I)

$i = 2$: $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m(\dot{x} - e\dot{\theta}\cos\theta)(-e\cos\theta) + J\dot{\theta} = -me\dot{x}\cos\theta + me\dot{\theta}\cos^2\theta + J\dot{\theta}$

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = -me\ddot{x}\cos\theta + me\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + me\ddot{\theta}\cos^2\theta - 2me\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta + J\ddot{\theta}$

$\dfrac{\partial L}{\partial q_2} = m(\dot{x} - e\dot{\theta}\cos\theta)(e\dot{\theta}\sin\theta) - k_2\theta$

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \rightarrow J\ddot{\theta} - me\cos\theta\,\ddot{x} + me^2\cos^2\theta\,\ddot{\theta} - me^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + k_2\theta = 0$

small vibration: $\sin\theta = \theta$; $\cos\theta = 1$; صرف توان های بالا

$\Rightarrow (J + me^2)\ddot{\theta} - me\ddot{x} + k_2\theta = 0$ (II)

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} m & -me \\ -me & J+me^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فصل ۶ : ویژگی های سیستم های ارتعاشی

$$[M][\ddot{X}] + [K][X] = 0 \longrightarrow -\omega^2[M][X] + [K][X] = 0$$

$$\Rightarrow (-\omega^2[M] + [K])[X] = 0 \longrightarrow \left|-\omega^2[M] + [K]\right| = 0$$ معادله مشخصه

Flexibility influence Matrix $[a] = [K]^{-1}$

$$\xrightarrow{\times [a]} (-\omega^2[a][M] + [I])[X] = 0$$

$$[K] \longrightarrow [a]$$

مثال :

پاسخ $\longrightarrow$ $a = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2} & \frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2} & \frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\frac{1}{K_3} \end{bmatrix}$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \longrightarrow |[K]| = K_1K_2K_3$$

ماتریس کهادها

$$N = \begin{bmatrix} K_2K_3 & K_2K_3 & K_2K_3 \\ K_2K_3 & K_1K_3+K_2K_3 & K_1K_3+K_2K_3 \\ K_2K_3 & K_1K_3+K_2K_3 & K_1K_2+K_1K_3+K_2K_3 \end{bmatrix} \longrightarrow a = \frac{1}{|[K]|} N^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2} & \frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2} & \frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\frac{1}{K_3} \end{bmatrix}$$

Ortho gonality of Normal Modes

$$\omega^2[M][X] = [K][X] \Rightarrow \begin{cases} \omega_i^2 [M]\vec{X}^i = [K]\vec{X}^i \\ \omega_j^2 [M]\vec{X}^j = [K]\vec{X}^j \end{cases}$$

استفاده از خاصیت تقارن :

$$\begin{cases} \omega_i^2 \vec{X}^{jT}[M]\vec{X}^i = \vec{X}^{jT}[K]\vec{X}^i \overbrace{=}^{\text{تقارن } K} \vec{X}^{iT}[K]\vec{X}^j \\ \omega_j^2 \vec{X}^{iT}[M]\vec{X}^j = \vec{X}^{iT}[K]\vec{X}^j = \omega_j^2 \vec{X}^{jT}[M]\vec{X}^i \end{cases} \Rightarrow (\omega_i^2 - \omega_j^2)\vec{X}^{jT}[M]\vec{X}^i = 0$$

$$\Rightarrow i \neq j \longrightarrow \begin{cases} \vec{X}^{jT}[M]\vec{X}^i = 0 = M_{ij} \\ \vec{X}^{jT}[K]\vec{X}^i = 0 = K_{ij} \end{cases} \quad i = j \longrightarrow \begin{cases} \vec{X}^{jT}[M]\vec{X}^i = M_{ii} \\ \vec{X}^{jT}[K]\vec{X}^i = K_{ii} \end{cases}$$

ماتریس جرم مودال

$$\Rightarrow [\underline{M}] = \begin{bmatrix} M_{11} & & & 0 \\ & M_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_{nn} \end{bmatrix} = [X]^T [M] [X]$$

$$[X] = [\vec{X}^1 \ \vec{X}^2 \ \dots \ \vec{X}^n]$$

ماتریس مودال — شکل مودها

ماتریس سختی مودال — سختی مودال 1

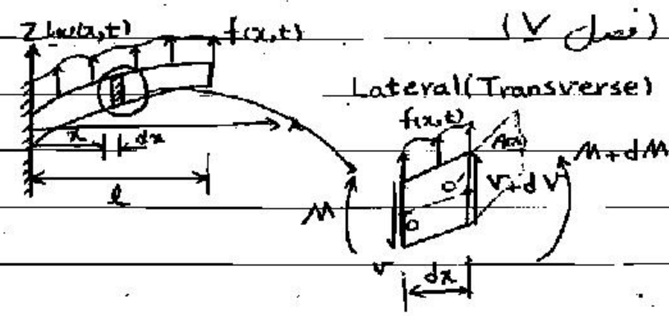
$$[\underline{K}] = [X]^T [K] [X] = \begin{bmatrix} K_{11} & & & 0 \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{nn} \end{bmatrix}$$

در بسیاری از موارد شکل مودها به گونه ای Normalize می شوند که :

$$[\underline{M}] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & 1 \end{bmatrix} \qquad [\underline{K}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

ارتعاشات سیستم های پیوسته (فصل ۷)

Lateral (Transverse) Vibration of Beams _1



$\rho =$ (چگالی) جرم واحد حجم

$$\Sigma F = ma \rightarrow (V + dV) - V + f dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \rightarrow dV + f dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(تیر اویلر - برنولی (صرف نظر از پیچش)

$$\Sigma M_o = I\alpha = 0 \rightarrow (M + dM) - M + (V + dV) dx + (f dx) \frac{dx}{2} = 0$$

از طرفی : $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx$ ، $dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} + f = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M}{\partial x} + V = 0 \rightarrow V = -\frac{\partial M}{\partial x} \end{cases} \rightarrow -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

از مقاومت مصالح $\rightarrow M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \xrightarrow[\text{ثابت}]{EI \text{ نسبت به } x} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f$$

$$\Rightarrow EI w^{(IV)} + \rho A \ddot{w} = f$$ معادله ارتعاشاتی عرضی تیر اویلر برنولی

$$\Rightarrow \boxed{w^{(IV)} + \frac{\rho A}{EI}\ddot{w} = \frac{f}{EI}}$$

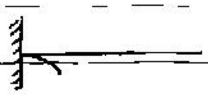
ارتعاشات آزاد $\longrightarrow \boxed{c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0}^{*}$, $c = \sqrt{\frac{EI}{A\rho}} \longrightarrow$ 4 شرط مرزی - 2 شرط اولیه

$$W(x,t) = w(x)\,T(t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^4 w}{dx^4} - \beta^4 w = 0 \quad \left(\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI}\right) \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \end{cases}$$

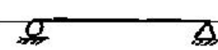
شکل مودها — قابل حل با 4 شرط مرزی ⊛

$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \longrightarrow$ فرکانس طبیعی

$$\frac{c^2}{w}\frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{1}{T}\frac{d^2 T}{dt^2} = a = \omega^2$$

⊛ 

$w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$ $(V = 0)$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ $(M = 0)$

* تیر دو سر لولا : 

$$\sin \beta_n \lambda = 0 \longrightarrow \begin{cases} \beta_1 l = \pi \longrightarrow \omega_1 \\ \beta_2 l = 2\pi \longrightarrow \omega_2 \\ \beta_3 l = 3\pi \longrightarrow \omega_3 \end{cases}$$

معادله مشخصه