

بسمه تعالی

**جزوه**

انتقال حرارت ۱

**دانشگاه**

صنعتی امیر کبیر

**استاد**

دکتر بصیرت

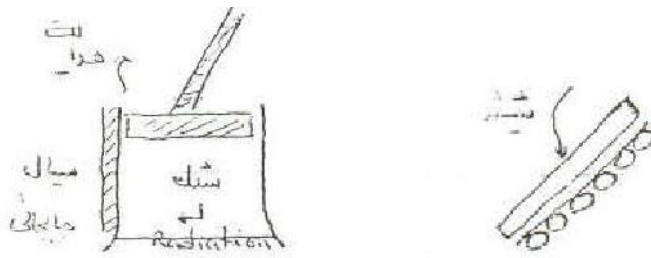
## انتقال حرارت-گرما

در سه شاخه بررسی می شود.

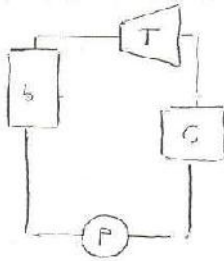
۱. هدایت conduction
۲. جابجایی-همرفتی convection
۳. تشعشعی radiation

هدایت درس کاملا ریاضی است. در مورد جابجایی نیاز به دانستن سیالات و آن هم مکانیک دینامیک سیالات هستیم. در مورد تشعشع نیز نیاز به دانستن فیزیک و موج هستیم.

در مورد موتور های احتراق داخلی و حتی کلکتورهای خورشیدی هر سه شاخه بررسی می شود.



در انتقال حرارت ما به rate توجه داریم. در سیستم انتقال حرارت به سیستم میکروسکوپی یک توجه باید داشت.



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_J = \dot{E}_{st}$$

تولید      ذخیره

انتقال حرارت از معادلات نیوتن =

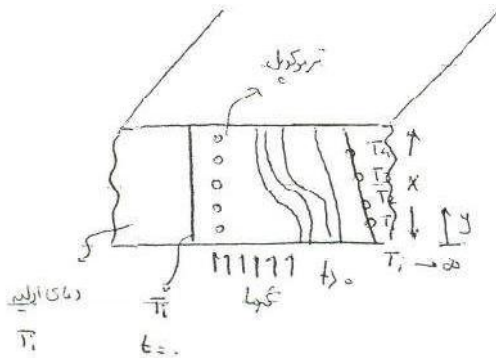
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{st}$$

یا flux law استفاده می کنند-

انتقال حرارت مسائل را معمولا به صورت خطی نگاه می کند اما این دید باعث به وجود آمدن خطا می شود.

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}$$

Biot با آزمایش هایی که انجام داد نشان داد:



شخص دیگری با استفاده از این نتایج و با استفاده

از قانون نیوتن یا flux law استفاده نمود که نیوتن این رابطه را از قانون هرک گرفته است.

فوریه از این رابطه استفاده نمود و شار حرارتی را تعریف کرد که برابر است با:

قانون فوریه

$$q = -k \frac{dT}{dy} = \frac{q_{\text{حرارتی}}}{A}$$

شار حرارتی / سطح مقطع

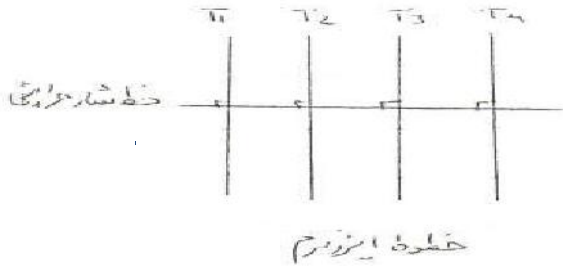
قانون فیک (fick)

$$J = -D \frac{dc}{dy}$$

انتقال جرم / Diffusion

قانون فیک مثلا در مورد خشک کردن انگوری کاربرد دارد با اعمال حرارت باعث انتقال رطوبت و در نهایت انتقال جرم می شود.

در رابطه فوریه مهم است که خطوط شار بر خطوط ایزوترم عمود باشد.



انتقال حرارت ← هدایت ← از مولکولی به مولکول دیگر ماده

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \text{و} \quad q'' = k \frac{\Delta T}{\Delta x} \rightarrow \text{flux}$$

$J_{TS} = W$        $k = \frac{W}{m \cdot ^\circ C}$

ضریب هدایتی خاصیت فیزیکی است که از جدول آخر کتاب به دست می آید.

موادی که دارای خاصیت رسانایی خوبی اند هدایت خوبی هم دارند.

انتقال حرارات در جهت های مختلف صورت می گیرد ولی برداری نیست چون انرژی است با هم جمع پذیرند.

$$k_{Cu} = 386 \quad W/m \cdot ^\circ C$$

$$k_{Al} = 210$$

$$k_{water} = 0.608$$

$$k_{سیمان} = 1.0$$

$$k_{\text{هوا}} = 0.02$$

$$k_{\text{پاروپان}} = 0.05$$

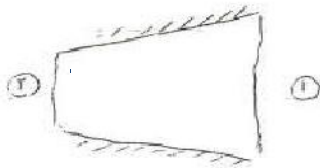
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{تولیدی} = \dot{E}_{زیر$$

بدن انسان را با خاصیت فیزیکی آب در نظر می گیریم. پرتقال و سیب زمینی و گوشت به همین صورت است.

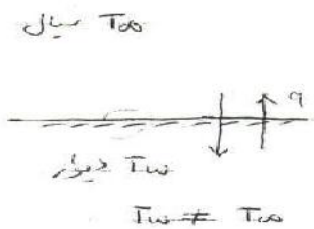
$$q = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{kA}} = \frac{\Delta T}{R} \quad \text{مقاومت حرارتی}$$

$$R = \frac{\Delta x}{kA}$$

انتقال حرارت تا زمانی که تولیدی و ذخیره نباشد خطی است.  $Q$  در دو سمت یکی است چون بقای انرژی موجود است. دور تا دور هم عایق است.



### انتقال حرارت ← جابجایی همرفتی



$$q = hA (T_{\infty} - T_w)$$

$$= -hA (T_w - T_{\infty})$$

$h = \frac{w}{m^2 \cdot C}$   
 ضریب جابجایی همرفتی  
 Convection

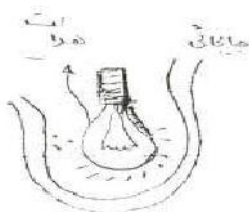
$H$  می تواند از عدد صفر شروع شود و تا حدود ۱۰۰۰ ادامه یابد این اندازه به هندسه، سرعت شکل مسئله و خیایی عوامل دیگر بستگی دارد.

جایی که سیال با نیرو توام است جابجایی از نوع اجباری ست در جایی که سیال با نیرو همراه نیست جابجایی طبیعی ست.

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{\Delta T}{R_h}$$

مقاومت جابجایی

بین دیوار و سیال انتقال حرارت از نوع جابجایی ست. لامپ هر دو نوع جابجایی را دارد.



## انتقال حرارت ← تشعشعی radiation

این نوع انتقال به صورت موجی است. امواج نورانی هم جزئی از این نوع انتقال حرارت هستند.

$$q_{1-2} = F_{1-2} F_{2-1} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

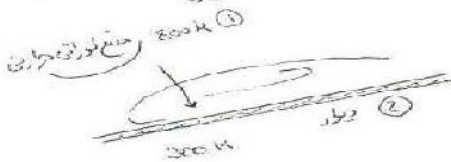
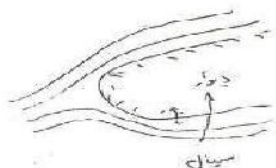
Notes:  $F_{1-2}$  (ظرفیت دید),  $F_{2-1}$  (ظرفیت دید),  $\sigma$  (ثابت استفان-بولتزمن  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ ),  $A$  (مساحت),  $T_1$  (دمای جسم 1),  $T_2$  (دمای جسم 2),  $K$  (ضریب انتقال حرارت).

برای یک جسم کوچک در مقابل یک جسم بزرگ (مثل پرتقال در یک مزرعه بزرگ) دماها بر حسب کلوین است.

$$q_{1-2} = \epsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

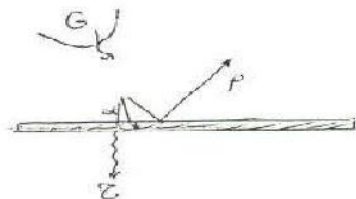
Note:  $\epsilon_1$  (ضریب تابش).

هر جسم کوچکی که توسط جسم بزرگ احاطه شده باشد...



$$q = \epsilon A \sigma T^4$$

Note:  $F(A, \epsilon, L, D, \Delta T, \dots)$



در مورد انرژی تشعشعی مقداری جذب مقداری منعکس و مقداری رد می شود، در کل حالت زیر برقرار است:

$$\alpha + \rho + \epsilon = 1.0$$

تا زمانی که درس تشعشع باشد<sup>۸</sup> را به ما می دهند...

$$\epsilon = 0.7 \text{ (چوب, ابرجنت)}$$

$$\epsilon_{\text{Al}} = 0.04 \text{ (آلومینوم)}$$

$$\epsilon_{\text{Steel}} = 0.9 \text{ (فولاد)}$$

$$\epsilon_{\text{Ice}} = 0.97$$

اگر جسم بخواهد انرژی خود را از دست بدهد به صورت  $\epsilon \sqrt{T^4}$  و اگر بخواهد جذب کند به صورت فرمول روبرو است.

در صورتی که جسم کوچک باشد:

$$q_{1-2} = \epsilon \sqrt{A_1} (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\epsilon \approx \lambda$$

$$\epsilon = 1.0 \text{ جسم سیاه}$$

$$q_{1-2} = \sqrt{A} (T_1 - T_2) \left( \frac{2T_1}{T_1 + T_2} \right) \left( \frac{2T_1^2}{T_1^2 + T_2^2} \right) \approx 4\sqrt{T_1^3} A \Delta T$$

$$q = 4\sqrt{T_1^3} A \Delta T \Rightarrow q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{4\sqrt{T_1^3} A}} = \left( \frac{1}{hr} \right) \text{ ضریب انتقالی}$$

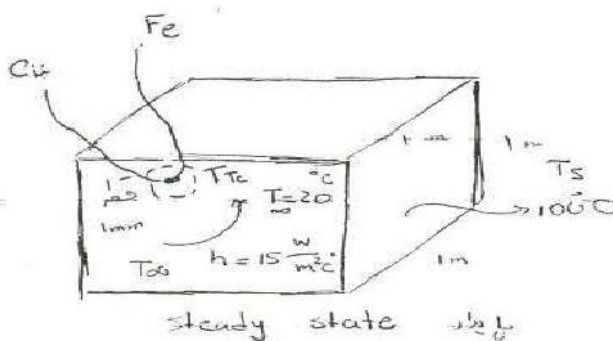
در بی نهایت میل به هم دما شدن دارند اما اختلاف را در نظر نمی گیریم، این ساده سازی برای این است که معادله ی ما خطی شود و این رابطه تنها برای جسم کوچک صادق است.

$$q_{1-2} = F_\epsilon F_G \sqrt{A} (T_1^4 - T_2^4)$$

$\leftarrow$  ضریب تابش استخوان برترین  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$   
 $\leftarrow$  ضریب مشاهده  
 $\leftarrow$  ضریب صدریایی گریه حرارتی

مثال: یک دماسنج ترموکوپل سیاه به قطر ۱ میلی متر برای اندازه گیری دمای کوره سیاهی به ابعاد  $1 \times 1 \times 1 \text{ m}$  به کار رفته است. اگر سطح کوره در درجه حرارت  $100^\circ\text{C}$  و هوای مجاور ترموکوپل  $20^\circ\text{C}$  با ضریب جابجایی  $15 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$  باشد ترموکوپل چه درجه حرارتی را نشان می دهد؟

انتظار می رود که دمای ترموکوپل  $20^\circ\text{C}$  درجه باشد ولی چنین نیست چون ترموکوپل دمای  $100^\circ\text{C}$  درجه را مشاهده می کند..



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{\text{radiation}} = \dot{E}_{\text{convection}}$$

ترموکوپل

$$\dot{E}_{in} = (5.667 \times 10^{-8}) A ((100 + 273)^4 - T_{TC}^4)$$

$$\dot{E}_{out} = h A (T_{CA} - (20 + 273))$$

مساحت ترموکوپل

ترموکوپل دمایی بالاتر از ۲۰ را نشان می دهد پس مقدار انرژی به دلیل همرفتی بین سیال و ترموکوپل است و مقدار ورودی همان تشعشع حاصل از دیواره است.

$$q_{1-2} = \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow 5.667 \times 10^{-8} [(100 + 273)^4 - T_{TC}^4] =$$

$$15 (T_{TC} - (20 + 273)) \Rightarrow T_{TC} = 51 \text{ } ^\circ\text{C}$$

با استفاده از فرض قبل:

$$q = 4 \sigma T_1^3 A \Delta T \Rightarrow 4 (5.667 \times 10^{-8}) (373)^3 (373 - T_{TC}) = 15 (T_{TC} - 293)$$

$$T_{TC} = 55 \text{ } ^\circ\text{C}$$

مثال: یک قالب یخ  $1 \times 1 \times 1 \text{ m}$  را در نظر می گیریم (بدون تغییر ابعاد)  $T_F = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$

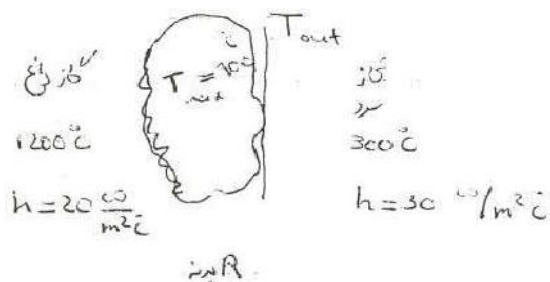
۱. یخ در معرض محیط با  $h = 15 \text{ W/m}^2\text{ } ^\circ\text{C}$  با  $T_\infty = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$  است و بدون تشعشع زمان آب شدن چقدر؟

۲. با فرض قسمت الف،  $T_{Si} = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$  به همراه تشعشع زمان آب شدن را بیابید.

۳. گونی به ضخامت  $1 \text{ mm}$  به دور یخ پیچیده شده است که در این حالت  $k = 0.06$  و دمای گونی  $10 \text{ } ^\circ\text{C}$  درجه است زمان آب شدن را بیابید، مساله را ۵ وجه در نظر بگیرید

مثال: برای طراحی یک مبدل ماکزیمم درجه حرارت پیش بینی شده  $100 \text{ } ^\circ\text{C}$  درجه است اگر در یک طرف مبدل گاز داغ  $1200 \text{ } ^\circ\text{C}$  با  $h = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{ } ^\circ\text{C}}$  و طرف دیگر گاز  $300 \text{ } ^\circ\text{C}$  درجه با

باشد ماکزیمم ضریب مقاومتی بدنه را بیابید  $h = 30 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{ } ^\circ\text{C}}$





$$A = 1 \text{ m}^2$$

$$\dot{E}_{in} = \dot{q}_{in} = 20 (1200 - 900) \Rightarrow T_{out} = 500^\circ\text{C}$$

$$\dot{E}_{out} = \dot{q}_{out} = 30 (T_{out} - 300)$$

حالت پایا است لذا ورودی با خروجی یکسان است.

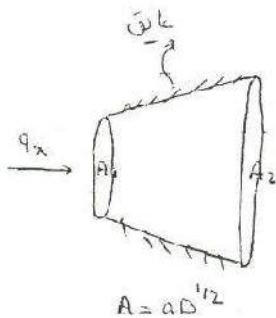
$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R} \Rightarrow 20 (1200 - 900) = \frac{(900 - T_{out})}{R} \Rightarrow R = 0.067$$

انرژی در هر مقطعی ثابت است.

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R}$$

$$R = \frac{L}{kA} \quad R = \frac{1}{hA}$$

$$R = \frac{1}{hrA}$$



$$q = kA \frac{dT}{dx}$$

$$\int_{A_1}^{A_2} q \frac{dx}{A} = -k \int_{T_1}^{T_2} dT$$

در اینجا تغییرات سطح جسم را داریم

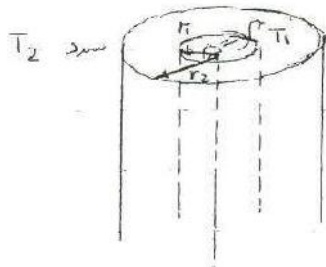
ظریب حرارتی بر حسب دما را هم

داریم.

$$k = f(T) = aT^2 + b \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} q \frac{dx}{A} = - \int_{T_1}^{T_2} k dT$$

در حالت های مقاومتی فقط مسائل را می توانیم یک بعدی حل کنیم.

می خواهیم فقط دما را در راستای  $x$  بررسی کنیم.



$$\int_{r_1}^{r_2} q \frac{dr}{2\pi r L} = -k \int_{T_1}^{T_2} dT$$

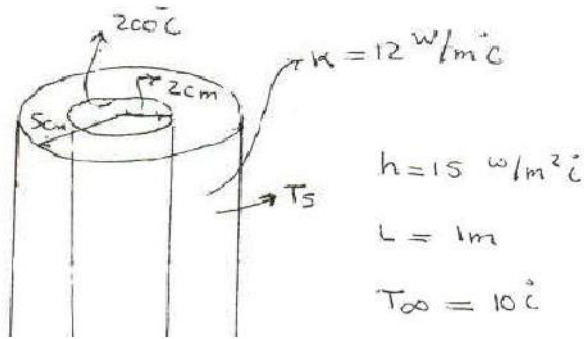
سطحی که شار بر آن عمود است که همان سطح جانبی است را در

نظر می گیریم:

$$\Rightarrow \frac{q}{2\pi L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -K \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow \frac{q \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi L} = K \Delta T$$

$$\Rightarrow q = \frac{\Delta T}{\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi K L}} \quad R \text{ حرارتی استوانه} = \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi K L} \quad R \text{ حرارتی کره} = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi K}$$

مثال: لوله ای را در نظر می گیریم:

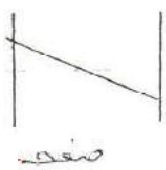


$$200^\circ\text{C} \xrightarrow{R \text{ استوانه}} \overset{? T_s}{\text{---}} \xrightarrow{R \text{ حرارتی}} T_\infty = 10^\circ\text{C} \quad q_1 = \frac{\Delta T}{\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi K L}} = \frac{200 - T_s}{\frac{\ln 2.5}{2\pi \times 12 \times 1}}$$

$$q_2 = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{T_s - 10}{\frac{1}{15 \times 2\pi \times 5 \times 10^{-2} \times 1}}$$

$$q_1 = q_2 \Rightarrow \frac{200 - T_s}{\frac{\ln 5/2}{2\pi \times 12}} = \frac{T_s - 10}{\frac{1}{15(2\pi)(0.05)}} \Rightarrow T_s = 189.7^\circ\text{C} \quad q = 846.8 \text{ W}$$

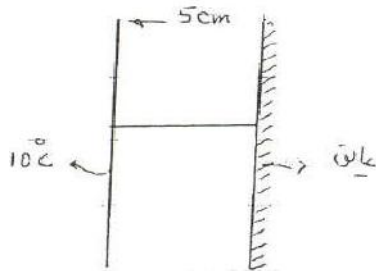
پروفیل دما در صفحه به صورت خطی و در استوانه و کره یک حالت سهمی گونه دارد.



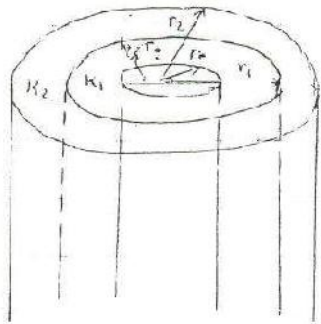
دما داریم

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R} \Rightarrow q = \frac{200 - 10}{\frac{1}{15 \times 200 \times \frac{0.05}{100}} + \frac{\ln \frac{5}{2}}{24 \times 12 \times 1}} = 846.8 \text{ W}$$

برای عایق  $\frac{dt}{dx}$  یا  $\frac{dt}{dr}$  صفر است در مس و آهن پس پروفیل دما خطی است.



در پایا چون در حالت عایق گرمای خروجی نداریم دمای همه ی نقاط به ۱۰ درجه می رسد و پروفیل دما خطی می شود.



$$h_2 > T_{\infty}$$

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R}$$

$$T_1 \xrightarrow{\text{کالری}} \xrightarrow{\frac{\ln r_1/r_0}{2\pi k_1 L}} \xrightarrow{\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi k L}} \xrightarrow{\text{کالری}} T_2$$

$h_2 T_2$        $h_1 T_1$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h_2 A_2} + \frac{\ln r_1/r_0}{2\pi k_1 L} + \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi k L} + \frac{1}{h_1 A_1}}$$

$$q = U_i A_i (T_1 - T_2)$$

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{r_0 \ln r_1/r_0}{k_1} + \frac{r_0 \ln r_2/r_1}{k_2} + \frac{r_0}{r_2} + \frac{1}{h_o}}$$

به  $U_i$  ضریب کلی حرارتی که واحد آن  $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$  گویند. ضریب حرارتی کلی از داخل

$$q = U_o A_o (T_1 - T_2) \quad U_o = \frac{1}{\frac{r_2}{r_0} \frac{1}{h_i} + \frac{r_2 \ln r_1/r_0}{k_1} + \frac{r_2 \ln r_2/r_1}{k_2} + \frac{1}{h_o}}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{ضریب حرارتی کلی از خارج} \\ \text{کلی} \end{array} \right\}$

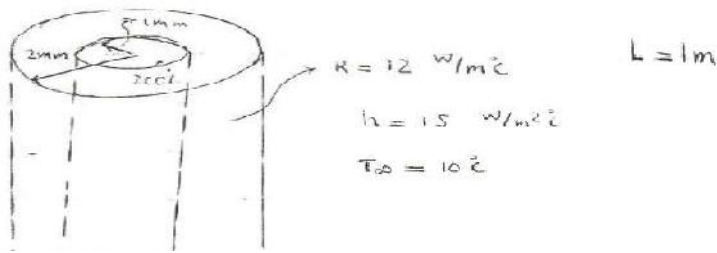
این رابطه ها فقط برای استوانه و لوله ها است.

برای کره هم همین ضرایب را داریم.

$T_\infty$  در سیال همان دمای متوسط در سیال است مانند سرعت در محاسبه ی عدد رینولدز

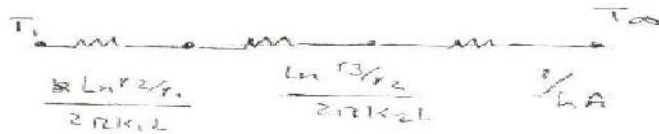
مساله: عایق چقدر باشد

$$\frac{dq}{dr} = 0 \Rightarrow r_{cr} = \frac{kz}{h_o} \begin{matrix} \rightarrow w/m^2 \cdot c \\ \leftarrow w/m^2 \cdot c \end{matrix}$$



مقاومت حرارتی

$\Delta r$	$q$	$T_s$
0.0		
0.01		
...		

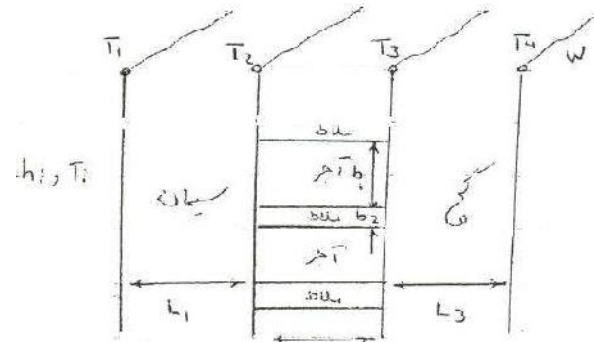


$k = 0.06$  پشم سنگ

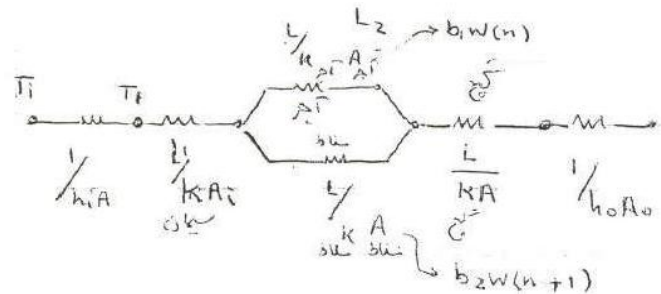
$$q = hA(T_s - T_\infty) \Rightarrow T_s = \frac{q}{hA} + T_\infty$$

شعاع بحرانی برای کره به صورت زیر است:

$$\frac{dq}{dr} = 0 \Rightarrow r_{cr} = \frac{2k}{h}$$

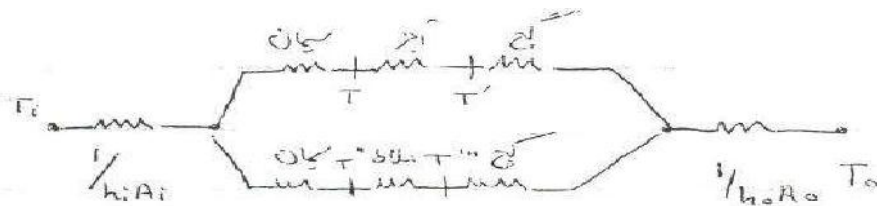


$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{conv}} + \frac{1}{R_{cond}}$$



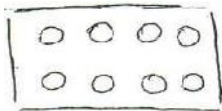
$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_i A_i} + \sum_j \frac{L_j}{k_j A_j} + \frac{R_{\text{عزل}}}{A} + \frac{R_{\text{تاب}}}{A} + \frac{1}{h_o A_o}}$$

$$q = U A \Delta T \Rightarrow U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \sum_j \frac{L_j}{k} + \frac{R_{\text{عزل}}}{A} + \frac{R_{\text{تاب}}}{A} + \frac{1}{h_o}}$$



بین ملات و اجر چون  $k$  تقریباً یکسانی دارد از مدار بالایی می توان استفاده کرد ولی اگر به جای اجر یک میله ی فلزی می گذاشتیم باید مدار پایین را در نظر می گرفتیم، هر کدام که مقاومت کمتری دارد حرارت را بیشتر انتقال می دهد.

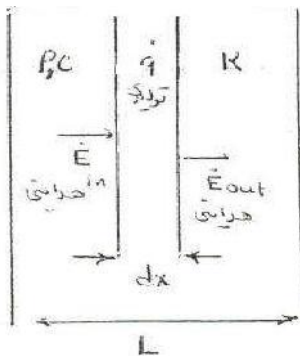
اجز های سوراخ دار با محاسبه ی مساحت های سوراخ و در نظر گرفتن مقاومت های موازی قابل حل است.



حالت دوم مقاومتی که رسم شد جریان شار ثابت و اولی جریان دما ثابت است.

### معادله ی کلی حرارت:

فعلاً معادلات را یک بعدی در نظر می گیریم.



$$\dot{E}_{in} = -kA \frac{dT}{dx}$$

شدنی

$$\dot{E}_{out} = -kA \frac{dT}{dx} + dx \frac{d(-kA \frac{dT}{dx})}{dx}$$

شدنی

$$f(x+dx) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \dots$$

توسعه تیلور

$$\dot{E}_{out} = \dot{q} A \cdot dx$$

$$\dot{E}_{in} = \frac{m c_p \Delta T}{\Delta t} = \frac{\rho A \cdot dx \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}}{\Delta t}$$

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{radiation} = \dot{E}_{ST} \quad \dot{q} = \dot{q}''' \text{ w/m}^2 \text{ منبع تابش انرژی}$$

$$\frac{\partial (hA \frac{dT}{dx})}{\partial x} + \dot{q}''' A = \rho A c \frac{\partial T}{\partial t}$$

اگر A ثابت و همچنین K ثابت نسبت به دما باشد:

$$+ KA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q}''' A = \rho A c \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 1-D \quad \alpha = \frac{K}{\rho c} \text{ ضریب نفوذ حرارتی یا}$$

$$\text{ضریب پخش حرارت} \quad \alpha = \frac{m^2}{s} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\text{حالت سه بعدی} \quad \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 3-D \quad \text{معادله کلی انتقال حرارت}$$

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{معادله}$$

$$n=0 \quad \text{slab صاف} \quad r \rightarrow x$$

$$n=1 \quad \text{استوانه} \quad r \rightarrow r$$

$$n=2 \quad \text{کره}$$

بیشتر معادلات را یک بعدی در نظر می گیرند چون در استوانه و کره معمولاً یک بعدی و انتقال حرارت در جهت r است. انتقال حرارت چشم متقارن نیست.

در حالت کامل حداقل به ۷ شرط لازم داریم تا معادلات را حل کنیم.

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{معادله لاپلاس} \quad \text{- منبع تولید انرژی ندارد}$$

- پایدار است

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{K} = 0 \quad \text{معادله پواسون} \quad \text{- پایدار}$$

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{معادله هرتز} \quad \text{- گذرا}$$

در مورد سیستم های یک بعدی اگر منبع تولید انرژی نداشته باشیم روش مقاومت هاست.

معادله انرژی:  $1-D, q'' = 0$  مقاومت

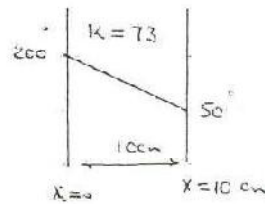
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T = ax + b$$

$x=0, T=200$  در صورت مثال:

$x=10, T=50$

$\Rightarrow 200 = 0 + b \Rightarrow b = 200$

$50 = 10/100 \times a + 200 \Rightarrow a = -1500$



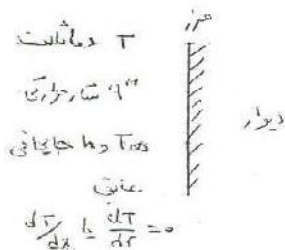
یک مرز می تواند شرایط مختلف داشته باشد:

۱-  $\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dr}$  در حالت

۱- در حالت ثابت

۲- در حالت حرارتی

۳- در حالت  $h$  و  $T_{\infty}$



در مسئله مثال اگر  $h_1 = 10 \text{ W/m}^2\text{C}$  و  $T_{\infty} = 50^\circ$  باشد

$$T = ax + b$$

$x=0, T=200 \Rightarrow b=200$

$x=10 \text{ cm}, q'' = h(T_s - T_{\infty})$

$= 10 ( a(\frac{10}{100}) + 200 - 50 )$

$q'' = -k \frac{dT}{dx} = -ka$

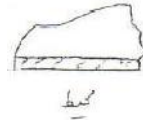
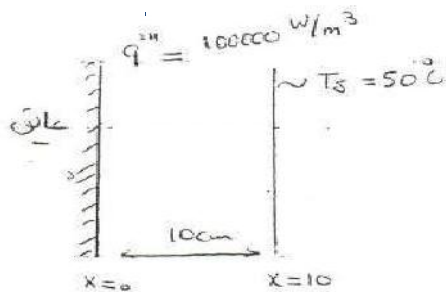
$-73a = a + 2000 - 500 \Rightarrow a = \frac{-1500}{74} = -20.3$

$\Rightarrow T = -20.3x + 200 \xrightarrow{x=10 \text{ cm}} T = 198$

دو طرف دایره را به عنوان شرایط مرزی نمی توان شار حرارتی و یا جابجایی باشد.

مثال: مساله پایدار و دارای منبع تولید انرژی به صورت  $q'''$  است. نمودار تغییرات دما به چه صورت

است؟



مثال اتو

S.S. پایدار

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{q'''}{k}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q'''}{k}x + C \Rightarrow T = \frac{-q'''x^2}{2k} + Cx + D$$

$$x=0 \text{ عایق} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q'''x}{k} + C \Rightarrow C=0$$

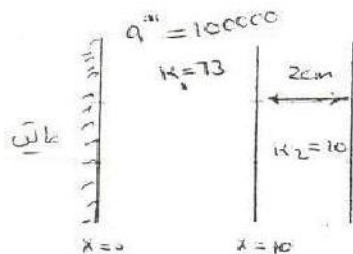
$$x=10 \text{ cm} \Rightarrow 50 = \frac{-10^5 \times 10^2}{2 \times 100^2 \times 73} + D \Rightarrow D = 56.8$$

$$T = \frac{-10^5 x^2}{2 \times 73} + 56.8$$

معادله تغییر دما

داخل جسم

مثال: مسئله پایدار است. شرط مرزی می خواهد.



$$h = 10 \text{ W/m}^2\text{C}$$

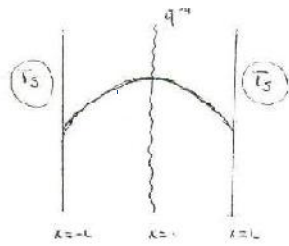
$$T_\infty = 20^\circ\text{C}$$

$$q'''L = q'' = h(T_{\text{out}} - T_\infty)$$

$$q'' = \frac{\Delta T}{L/k_1} = 10 \times \frac{10}{100} = \frac{T_1 - T_\infty}{0.02/10}$$



در مرکز کره و یا محور استوانه  $\frac{dT}{dr}$  تقریباً صفر است.



$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{-q'''x}{k} + C$$

$$T = -\frac{q'''x^2}{2k} + Cx + D$$

شرایط مرزی  $x=L$   $\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow C=0$

$x=0$   $T=T_s$

$$\Rightarrow T_s = -\frac{q'''L^2}{2k} + D \Rightarrow D = \frac{q'''L^2}{2k} + T_s$$

$$\Rightarrow T = -\frac{q'''x^2}{2k} + \frac{q'''L^2}{2k} + T_s$$

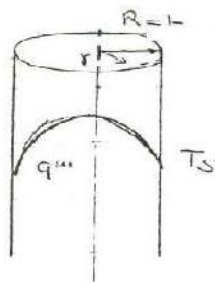
با ساده سازی داریم:

$$T - T_s = \frac{q'''L^2}{2k} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_s}{\left(\frac{q'''L^2}{2k}\right)} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \Rightarrow \bar{T} = 1 - \bar{x}^2$$

دامای بی‌بعد

اختلاف دمای max در صفحه است.  $\frac{q'''L^2}{2k}$



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q'''}{k} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{-q'''}{k}$$

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{q'''r^2}{2k} + C$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-q'''r}{2k} + \frac{C}{r}$$

$$\Rightarrow T = \frac{-q'''r^2}{4k} + C \ln r + D$$

شرایط مرزی  $\frac{dT}{dr} = 0 \Rightarrow C=0$

$r=R \Rightarrow T=T_s$

در استوانه  $\frac{q''' R^2}{4k}$  اختلاف دمای مرکز است.

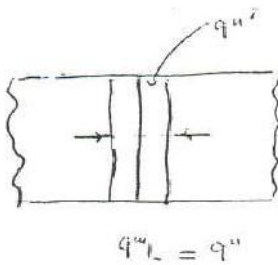
$$\frac{T - T_s}{\frac{q''' R^2}{4k}} = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

برای کره داریم:

$$\frac{T - T_s}{\frac{q''' R^2}{6k}} = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

کره > استوانه > صفحه

در قطعات جوشکاری مثل مثال عمل می کنیم...



$$q''' = q_0 (x - x_0) \pm q_0 \delta (x - x_0)$$

فین: دسته لیوان و یا قاشق را داخل لیوان به دلیل افزایش سطح انتقال حرارت را افزایش می دهد.



همه ی این اشکال با اضافه کردن سطح باعث انتقال حرارت بیشتر می شود.

مسائل فین یک بعدی باید در نظر گرفته شود

در حالت یک بعدی از روش های:

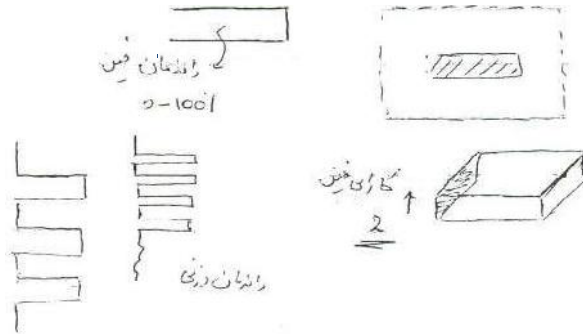


۱. مقاومت

۲. معادله کلی

۳. فین استفاده می شود

به صورت های استوانه یا دیسک هم وجود دارد  
در مورد استفاده از فین ها به موارد زیر باید توجه داشت



(۱) جنس

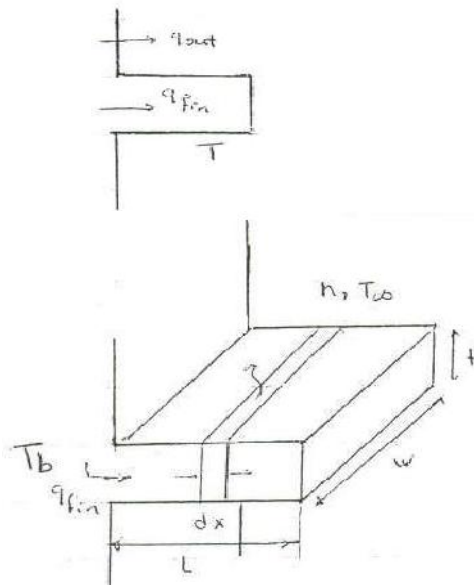
(۲) ابعاد

(۳) تعداد

در صورتی که پروفیل ها در فین شناخته شود تمامی مسائل حل شده است. چون با قانون بقا می توان راندمان را محاسبه کرد.

$$q_{fin} = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

نظری



از تشعشع صرف نظر می شود و خواص ثابت است

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{con} = \dot{E}_{st}$$

$$\dot{E}_{in} = -kA \frac{dT}{dx}$$

$$\dot{E}_{out} = -kA \frac{dT}{dx} + \left( \frac{d(-kA \frac{dT}{dx})}{dx} \right) dx$$

$$+ \underbrace{h P dx (T - T_{\infty})}_{\substack{\text{مابین خروبی} \\ \text{سطوح جانبی} \\ \{ 2w + 2t \}}}$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{KA} (T - T_{\infty}) = 0$$

$$m^2 = \frac{hP}{KA} = \frac{W/m^2 \cdot m}{W/m \cdot C \cdot m^2} = m^{-1}$$

به  $m^2$  ، NTU یا مقدار مشابه انتقال حرارت  
Number of Transport Unit است.

$$(mL)^2 = \frac{hPL^2}{KA} = \frac{\frac{L}{KA}}{\frac{1}{hPL}}$$

$$\Theta = T - T_{\infty}$$

$$\Theta'' - m^2 \Theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - m^2 \Theta = 0$$

شرط مقدار صاف است  
صورت استاندارد  
جابجایی همی

$$\Theta = c_1 e^{-mx} + c_2 e^{mx}$$

$$x=0 \quad \Theta_b = T_b - T_{\infty}$$

$$x=L \quad \Theta_{\infty i} =$$

$$\frac{d\Theta}{dx} = 0$$

$$L \rightarrow \infty \quad \Theta_{\infty} = 0$$

$$\frac{h_f T_{\infty c}}{L} \checkmark$$

اگر میانه به اندازه ی نی بلند باشد (چوب-شیشه) ، اگر طول را ندهند و یا طول بلند بگویند اگر مسی یا آهنی باشد از این شرط نمی شود.

شرط عایق به این صورت است که دما در نقطه نزدیک به هم در انتها تقریباً یکی است. بستگی به جنس

مواد دارد.

$$x=L \rightarrow \infty \quad \Theta_b = T_b - T_{\infty}$$

$$\Theta = 0$$

$$x=0$$

$$\theta = c_1 e^{+mx} + c_2 e^{-mx} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 & c_1 + c_2 = \theta_b \\ x=L \rightarrow \infty & c_1 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_b e^{-mx} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}$$

$$q_{fin} = kAm\theta_b$$

مقدار انرژی که وارد فین می شود

$$x=L \quad \frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$x=0 \Rightarrow \theta_b = T_b - T_{\infty}$$

$$x=0 \Rightarrow c_1 + c_2 = \theta_b$$

$$x=L \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = mc_1 e^{+mx} - mc_2 e^{-mx} /_{x=L} \Rightarrow mc_1 e^{mL} - mc_2 e^{-mL} = 0 \quad 22$$

$$\theta = \theta_b \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \Rightarrow q_{fin} = kAm\theta_b \tanh mL$$

$$x=L, \quad h_L, T_{\infty L} \quad 3) \quad \text{جایگانی}$$

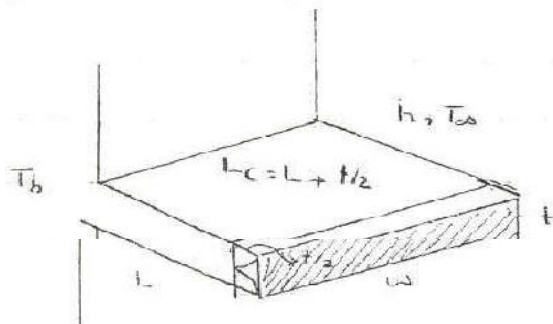
$$x=L, \quad \theta = \theta_L \quad 4)$$

با این چهار حالت بررسی می شود ولی واقعیت حالت سوم است. ولی شرط عایق مهم ترین است.

در حالت عایق L را تصحیح کرده و به جای آن  $L_c = L + \frac{t}{2}$  قرار می دهند.

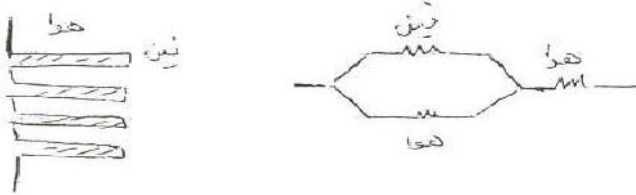
$$\theta = \theta_b \frac{\cosh m(L_c - x)}{\cosh mL_c}$$

$$\text{سزنی} = L_c = L + t/2$$



حال می خواهیم مساله را به روش مقاومتی حل کنیم:

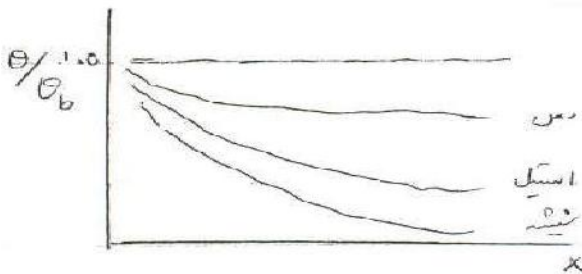
$$q_{fin} = \frac{\Delta T}{R} \Rightarrow R_{fin} = \frac{\theta_b}{kAm\theta_b \tanh mL_c} = \frac{1}{kAm \tanh mL_c}$$



راندمان فین به این صورت تعریف می شود:

$$\eta = \frac{q}{q_{max}} = \frac{kAm\theta_b}{hPL_c\theta_b} = \frac{1}{mL} = \sqrt{\frac{kA}{hPL^2}}$$

فین را با حالتی مقایسه می کنند که تمامی سطوح جانبی با دمای base حالت جابجایی دارد.



$$\eta = \frac{\tanh mL}{mL} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}$$

راندمان فین

کارایی فین:

$$\epsilon = \frac{q_{fin}}{q_{base}} = \frac{kAm\theta_b}{hA\theta_b} = \frac{km}{h} = \frac{k}{h} \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \sqrt{\frac{kP}{hA}}$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{kP}{hA}} \cdot \tanh mL$$

می خواهیم ببینیم در صورت بودن یا نبودن فین چقدر گرما منتقل می شود.

$$m = \sqrt{\frac{hp}{kA}} = \sqrt{\frac{h(2w+2t)}{kwt}} = \sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

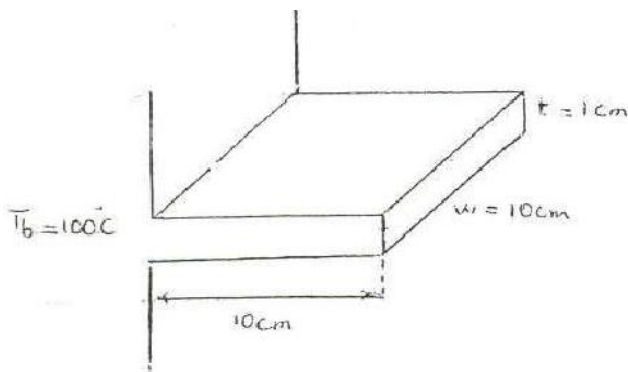
$$\eta = \sqrt{\frac{kwt}{h(2w+2t)L^2}} = \sqrt{\frac{kt}{2hL^2}} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{2k}{ht}} \cdot \tanh mL \quad (r)$$

برای انتخاب فین مناسب با کارایی و راندمان بالا کافی است K را بالا بگیریم ولی این حالت حدی دارد.

یکی دیگر از راه ها کم کردن h است که با تغییر سیال یا هندسه جسم تغییر می دهند. روی ضخامت بتنی نمی توان کرد.

در نهایت k را باید زیاد و h را کاهش داد t, L, W با هم حجم را تشکیل می دهند و برای طراحی مهم است.

راندمان وزنی:



$$k = 210 \text{ W/m}\cdot\text{s}$$

$$h = 25 \text{ W/m}^2\cdot\text{C}$$

$$T_{\infty} = 20^\circ\text{C}$$

عین آلومینیم

$$A = 1\text{ m}^2$$

$$h = 20 \text{ W/m}^2\cdot\text{C}$$

فین از نوع حالت کوتاه است چون طول محدود است لذا تنها از فین در حالت عایق می توان استفاده نمود.

$$q_{fin} = KA m \theta_b \operatorname{Tanh} m l_c$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{q_{fin}}{q_{max}} = \frac{\operatorname{Tanh} m l_c}{m l_c}$$

$$q_{max} = h P L_c \theta_b$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{KA}} = \sqrt{\frac{h(2\omega + 2t)}{Kwt}} = \sqrt{\frac{2h}{Kt}} = \sqrt{\frac{2(25)}{210(1/100)}} = 4.88$$

$$L_c = L + t/2 = 10 + 1/2 = 10.5 \text{ cm}$$

$$q_{fin} = (210) \left(\frac{10}{100}\right) \left(\frac{1}{100}\right) (4.88) (100 - 20) \operatorname{Tanh} \left[4.88 \left(\frac{10.5}{100}\right)\right] = 38.7 \text{ W}$$

$$q_{max} = 25 \left(2\left(\frac{10}{100}\right) + 2\left(\frac{1}{100}\right)\right) \left(\frac{10}{100}\right) (100 - 20) = 44 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{38.7}{44} = 88 \%$$

$$\varepsilon = \frac{q_{fin}}{q_{base}} = \frac{38.7}{hA\theta_b} = \frac{38.7}{(25)\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right)(80)} = 19.35 \gg 2.0$$

حال تعداد فین ها را به ۲۰ افزایش می دهیم درصد افزایش در انتقال حرارت بیابید:



$$q_{\text{total}} = n q_{\text{fin}} + q_{\text{unfin}} =$$

$$q_{\text{unfin}} = h A_b \theta_b = 25(1)(100-20) = 2000 \text{ W} = 2 \text{ kW}$$



$$q_{\text{total}} = 20 \times 38.7 + h A_{\text{unfin}} \theta_b = 20 \times (38.7) + 25 \left[ 1 - n \left( \frac{10}{100} \right) \left( \frac{1}{100} \right) \right] (100-20)$$

$$q_{\text{total}} = 2.7 \text{ kW}$$

بالقرنين اثنين



$$\% \Delta q = \frac{2.7-2}{2} = 35\%$$

$$\eta = \frac{q_{\text{total}}}{q_{\text{max}}} = \frac{2.7 \times 10^3}{44 \times 20} = 3.07 \approx 300\% \quad \text{انها زائدة}$$

fin efficiency  $\eta_f$

Overall surface efficiency  $\Rightarrow \eta_o = \frac{q_T}{q_{\text{max}}} = \frac{q_T}{h A_t \theta_b}$

المساحة الكلية  $A_t$

$$q_{\text{max}} = h A_t \theta_b$$

$$\eta_f = \frac{q_{\text{fin}}}{q_{\text{max}}}$$

$$A_t = A_f + A_b$$

$$q_T = \frac{q_{\text{unfin}}}{h A_b \theta_b} + \frac{q_{\text{fin}}}{h A_f \eta_f \theta_b}$$

$$= h [A_b + \eta_f A_f] \theta_b$$

$$= h A_t \left[ 1 - \frac{A_f}{A_t} (1 - \eta_f) \right] \theta_b$$

$$\eta_o = \frac{h A_t \left[ 1 - \frac{A_f}{A_t} (1 - \eta_f) \right] \theta_b}{h A_t \theta_b} = \left[ 1 - \frac{A_f}{A_t} (1 - \eta_f) \right]$$

$$\eta_o = \left[ 1 - \frac{A_f \left( 20 \left( 2 \left( \frac{10}{100} \right) + 2 \left( \frac{1}{100} \right) \right) \left( \frac{10}{100} \right) + 20 \left( \frac{10}{100} \times \frac{1}{100} \right) \right)}{A_f + \left[ 1 - 20 \left( \frac{10}{100} \right) \left( \frac{1}{100} \right) \right]} \right] (1 - 0.88)$$

$$= 0.96 = 96\%$$

1-D, Unsteady state

دمای بدن انسان ۳۶ درجه است و برای سوختن نوع اول تا دمای ۶۰ درجه می توان تحمل کند.

$$k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \dot{q}''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{W/m \cdot C}{kg/m^3 \cdot J/kg \cdot C} = \frac{m^2}{s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

از سرعت ترمی نام

$$T^* = \frac{T}{T_i}$$

$T^*$  ادلی برتیر است

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$t^* = \frac{t}{t_0}$$

$t$  از ترمی ادلی است

$$\frac{\partial T^* T_i}{\partial t^* t_0} = \alpha \frac{\partial^2 (T^* T_i)}{\partial (x^* L)^2} \Rightarrow \frac{T_i}{t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \alpha \frac{T_i}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

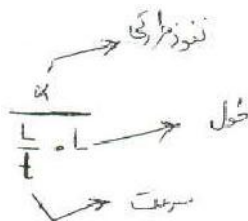
$$\Rightarrow \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{t_0 \cdot \alpha}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

تغییرات  $T^*$  همین صورت است

عدد فوریه بقدر

عدد فوریه گویند که سرعت پخش حرارتی را نشان می دهد. که این پخش در  $F_o = \frac{\alpha \cdot t_0}{L^2}$  به

واحد طول است.



$$q_{\text{cond}} = q_{\text{conv}} \Rightarrow -kA \frac{dT}{dx} = hA (T - T_{\infty})$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T - T_{\infty}} = \frac{hA \cdot \Delta x}{kA} \quad \text{یا} \quad \frac{hl}{k} = \frac{\frac{L}{kA}}{\frac{1}{hA}} = Bi \quad \text{عدد بیوت}$$

Biot nom

حال به معادله اولیه بر می گردیم و داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

روش حل سیستم ناپایدار

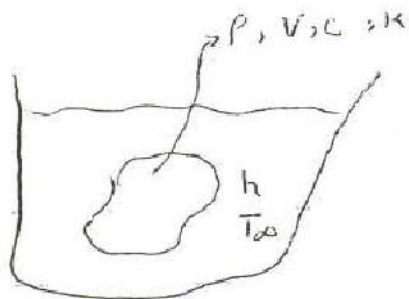
lumped method - جسم تک دما یا جسم فشرده

Heisler chart - روش نمودارها

۳ - روش جسم نیمه گذر

۴ - روش محوری

جسم تک ما می توان مسائل یک ناحیه بعدی را بررسی کند



$T_i$  - دمای اولیه

$T_{\infty}, h$

$T_{\infty} > T$

در جسم تک باید از قانون دما انرژی و شروع و استفاده نمود.

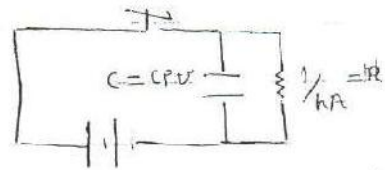
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gn} = \dot{E}_{st} \Rightarrow hA(T_{\infty} - T) = \rho CV \frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow hA(T - T_{\infty}) = -\rho CV \frac{dT}{dt} \Rightarrow \int_{T_i}^T \frac{dT}{T - T_{\infty}} = \int_0^t \frac{-hA}{\rho CV} dt$$

$$\Rightarrow \left( \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right) = e^{\frac{-hA}{\rho CV} t} = e^{(-B_i Fo)}$$

(تکامل بعد)

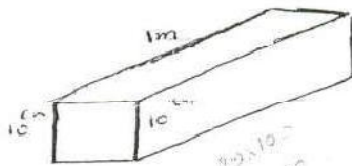
$$= e^{-\frac{t}{RC}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$$\frac{V}{A} = L \quad \frac{h}{\rho C L} \times \frac{L}{L} \times \frac{L}{L} = \frac{hL}{\rho C L}$$

در مثال تک دما باید جسم از لحاظ فیزیکی کوچک باشد یعنی  $B_i < 0.1$

اگر در مثال قبل فرض کنیم که  $T_i = 200^\circ C$  و جسم ما کره‌ی شکل با قطر ۱۲۰ سانتی متر و از جنس آلومینیوم  $k = 210 \frac{W}{m^2 C}$  با  $T_{\infty} = 20^\circ C$  و در محیطی با  $h = 10 \frac{W}{m^2 C}$  قرار داشته باشد، بعد از ۲ دقیقه می‌خواهیم دما را بیابیم:



$$h = 10 \frac{W}{m^2 C}$$

$$k = 75 \frac{W}{m C}$$

$$B_i = \frac{hL}{k}$$

$$L = \frac{V}{A_s} = \frac{10 \times 10 \times 100}{2(10 \times 10) + 4(10 \times 100)} = 2.38 \text{ cm}$$

$$B_i = \frac{10 \times 2.38 \times 10^{-2}}{75} = 3.17 \times 10^{-3} < 0.1$$

Max طول مشخص ۲.۵ است چون اگر طول ما نیز تا بی نهایت ادامه پیدا کند طول مشخصه نهایتاً تا این مقدار پیش می‌رود لذا فرض جسم تک دما برای ریل راه آهن مناسب است.

در مساله گذرا باید اول  $b_i$  چک شود اگر کوچکتر از ۰.۱ نشد باید از روش‌های دیگر به دست آورد.

$$B_i = \frac{hL}{k}$$

$$L = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{4 \pi r^2} = \frac{r}{3}$$

$$Bi = \frac{10 \times 60 \times 10^{-2}}{8 \times 213} = 9.52 \times 10^{-2} < 0.1$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-Bi \cdot Fo} \Rightarrow \frac{T - 20}{200 - 20} = e^{-(9.52 \times 10^{-2}) (Fo, 253)} \Rightarrow T = 199.6^\circ\text{C}$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{8.418 \times 10^{-5} \times 2 \times 60}{\left(\frac{60}{100 \times 2}\right)^2} = 6.253$$

ما در زمان صفر تا ده دقیقه می خواهیم بدانیم چقدر انرژی از دست داده است:

$$q = hA(T - T_{\infty}) = hA(199.6 - 20)$$

کدام

$$Q = \int_0^t q dt = \int_0^t hA(T - T_{\infty}) dt = \int_0^t hA(T - T_{\infty}) e^{-\frac{hAs}{\rho c V} t} dt$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\frac{hAs}{\rho c V} t}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{-hAs}{\left(\frac{hAs}{\rho c V}\right)} (T_i - T_{\infty}) \left[ e^{-\frac{hAs}{\rho c V} t} \right]_0^t = -\rho c V (T_i - T_{\infty}) (e^{-\frac{hAs}{\rho c V} t} - 1)$$

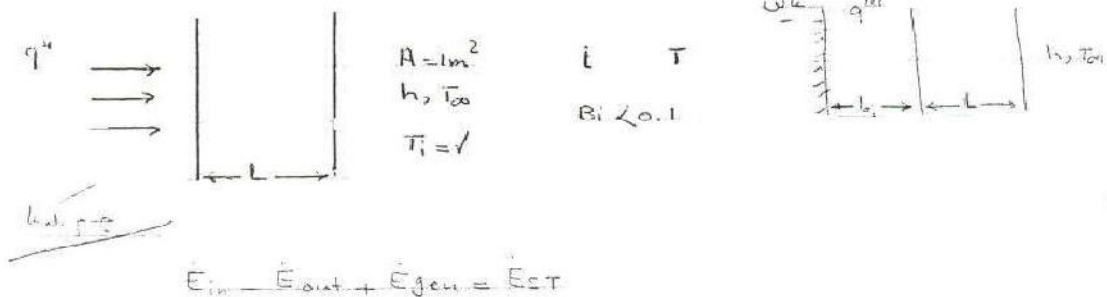
$$Q_{\max} = m c \Delta T$$

if  $t \rightarrow \infty$

$$Q = \frac{4}{3} \pi (60 \times 10^{-2})^3 \times (2707) (896) (1 - e^{-(9.52 \times 10^{-2}) (6.253)}) (180)$$

$$= 877.8 \text{ [K]}$$

انرژی



$$q'' A - hA(T - T_{\infty}) = \rho c V \frac{dT}{dt} \Rightarrow t \rightarrow T = T_i$$

$$\theta = T - T_{\infty} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} + m^2 \theta = 0$$

$$m^2 = \frac{h}{\rho c L} \quad Q = \frac{q'' A}{\rho c L} \rightarrow \theta = c e^{-mt} + (\theta_f) \frac{Q}{m}$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_i e^{-mt} + (1 - e^{-mt}) \frac{q''}{h}$$

بعد از گذشت زمان زیاد سیستم پایدار می شود در نتیجه:

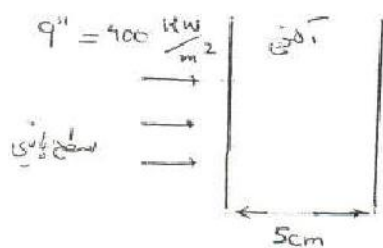
$$\theta = \frac{q''}{h}$$

$$q'' = h(T - T_{\infty}) \Rightarrow q = hA(T - T_{\infty})$$

مثال: تیغه آهنی به ضخامت 5 cm در دمای محیط بوده است ناگهان سطح پایین تیغه مذکور را در معرض

شار حرارتی به میزان  $q'' = 400 \frac{\text{kw}}{\text{m}^2}$  قرار می دهیم و اگر ضریب جابجایی سطح بالای تیغه

باشد زمان رسیدن تیغه به دمای 100 درجه را معلوم نمایید.  $h = 50 \frac{\text{w}}{\text{m}^2 \text{c}}$



$$T_i = 20^\circ \text{C}$$

$$h = 50 \text{ w/m}^2 \text{c}$$

$$T_{\infty} = 20^\circ \text{C}$$

$$Bi = \frac{hL}{k} = 0.034$$

$$m = \frac{h}{\rho c L} = 2.8 \times 10^{-4}$$

$$\rho = 7849 \quad c = 452 \quad k = 73$$

$$\theta = (1 - e^{-mt}) \frac{q''}{h} \Rightarrow (100 - 20) = \frac{400 \times 10^3}{50} (1 - e^{-2.8 \times 10^{-4} t})$$

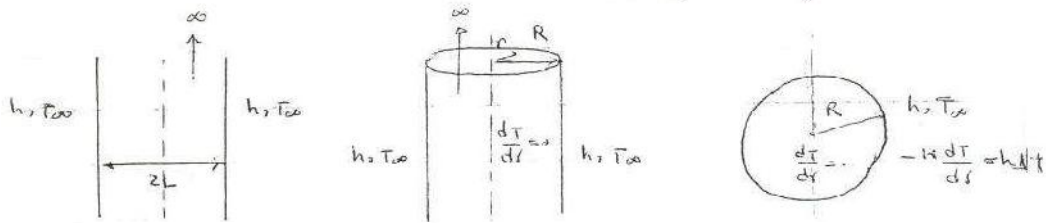
$$\Rightarrow t = 35.65 \text{ s}$$

روش نمودار های هیسلر

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

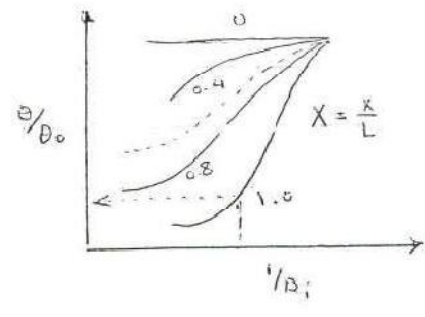
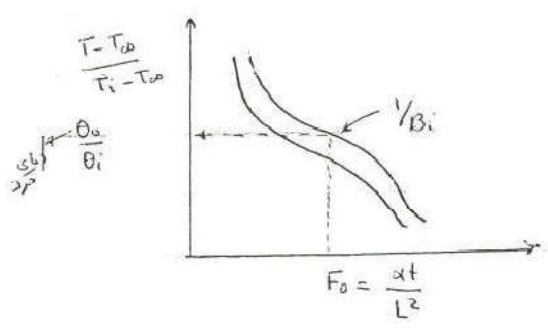
$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- $r=0$       صفت
- $r=1$       استوانه
- $r=2$       کره

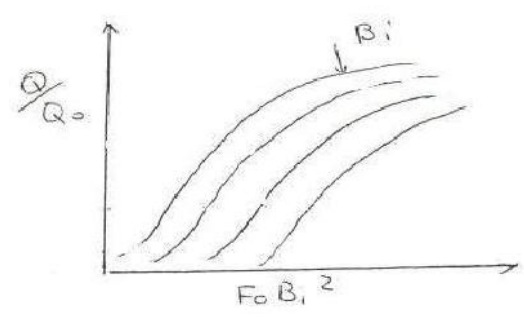


$x = -L, L$   
 $x = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = 0$  (شرایط عین)   
 $-k \frac{dT}{dx} = h \Delta T$

$$F_0 = \frac{\alpha t}{L^2 L R^2} \quad \boxed{B_i = \frac{hL}{K} \frac{L}{R}}$$



در این روش تا مرحله نهایی نباید از حالت بی بعدی خارج شد.

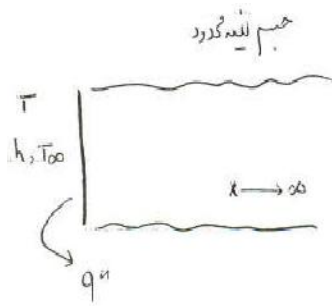


$$Q_0 = \rho c V (T_i - T_\infty)$$

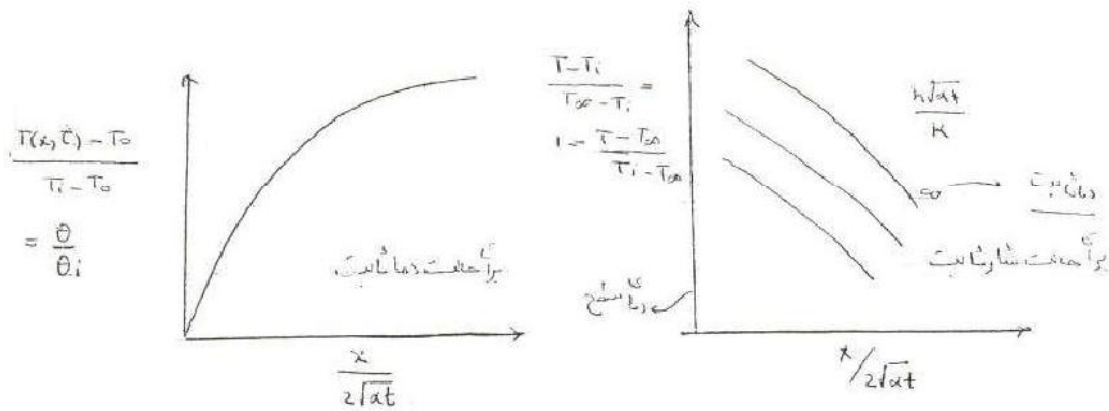
با استفاده از این نمونه ها دو شرط قابل حل است. یکی شرط جابجایی است و دیگری دمای ثابت

### جسم نیمه محدود:

در حالتی که صفحه ما بزرگ بود مثل دیوار اتاق یا کره ی ما شعاع بزرگی داشته باشد:

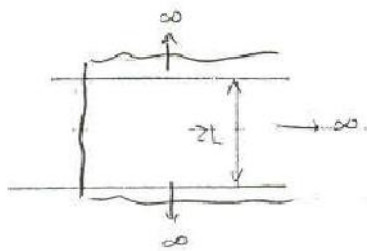


$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \text{روش لاپلاس}$$



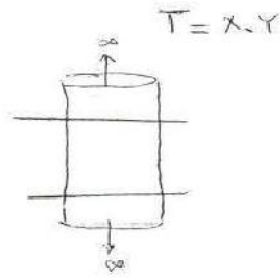
برای حالت سه بعدی کافی است از صفحات گذرنده از هم استفاده کنیم.

با یک صفحه قطع می دهیم.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$





مثلاً  $T = x, y$  است

برای کره داریم

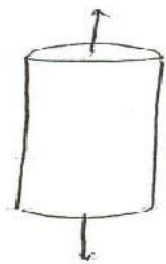
نمیکنیم یا یک طرف محدود

$$\text{نسبت } T - T_i = \frac{T - T_o}{T_i - T_o} = \int \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \rightarrow \text{جواب}$$

$$q_o = \frac{kA(T_o - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

$$T - T_i = \frac{2 q_o \sqrt{\alpha t / \pi}}{kA} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{q_o x}{kA} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

مثال: میله نا محدودی به قطر ۵ سانتی متر از جنس چوب در دمای اولیه ۱۰ درجه در معرض محیطی با شرایط جابجایی  $100 \frac{W}{m^2 C}$  و  $T_{\infty} = 40^{\circ}$  قرار گرفته، معلوم نمایید بعد از چند ساعت دمای سطح آن به  $30^{\circ}$  درجه می رسد.



$$\frac{1}{B_i} = 0.044$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{30 - 40}{10 - 40} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$F_o = 0.5 \rightarrow \frac{\alpha t}{R^2}$$

$$\frac{0.96 \times 10^{-7} \times t}{\left(\frac{2.5}{100}\right)^2} = 0.5 \Rightarrow t = 0.9 h$$

$$\alpha = 0.96 \times 10^{-7} \quad k = 0.11$$

$$L = \frac{V}{A} = \frac{\pi r^2 L}{2 \pi r L} = \frac{r}{2}$$

$$E_i = \frac{hL}{k} = \frac{100 \times 2.5 \times 10^{-2}}{2 \times 0.11} = 11.36 > 0.1$$

حجم ندرمانسیت

$$E_i = \frac{hR}{k} = \frac{100 \left(\frac{2.5}{100}\right)}{0.11} = 22.73$$

$$\frac{1}{B_i} = 0.044$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{\theta_s}{\theta_o} \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Rightarrow \frac{30 - 40}{10 - 40} = 0.05 \times \frac{\theta_o}{\theta_i}$$

4.17

$$B = \frac{k}{h} = 1.0 \text{ C.63}$$

$$k = 0.96 \times 10^{-7} \quad R = 0.11$$

$$L = \frac{V}{A} = \frac{r}{2} = \frac{50}{4} = 12.5 \Rightarrow Bi = \frac{hL}{k} = \frac{12.5 \times 10^{-2} \times 100}{0.11} = 113.63 > 0.1$$

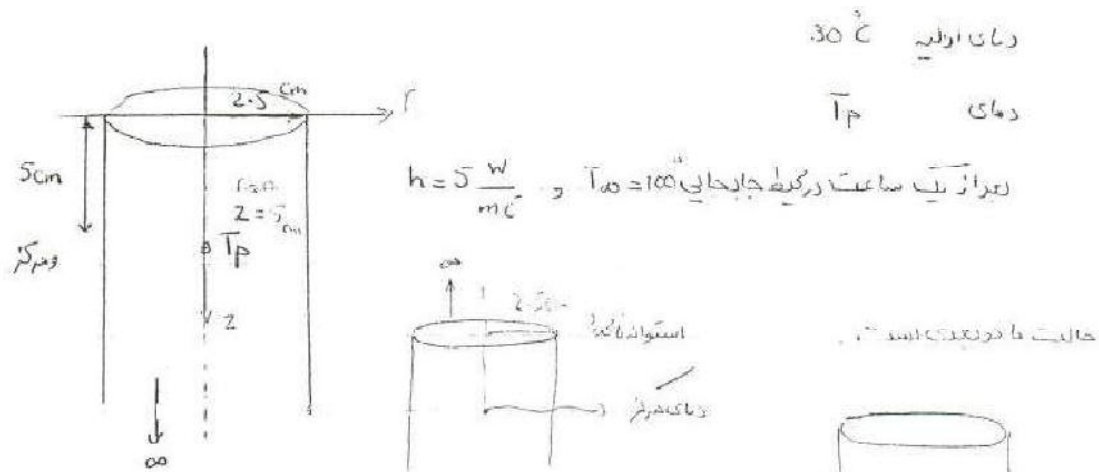
حجم تک‌مستطیک

$$Bi = \frac{hR}{k} = \frac{100 \times 25 \times 10^{-2}}{0.11} = 227.3 \Rightarrow \frac{1}{Bi} = 4.4 \times 10^{-3} \approx 0$$

$$\frac{\theta_s}{\theta_i} = \frac{\theta_s}{\theta_o} \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Rightarrow \frac{30-40}{10-40} = \frac{\theta_o}{\theta_i} \times$$

$$R = \frac{R}{R} = 1.0 \text{ دمای سطح} \Rightarrow \frac{\theta_o}{\theta_i} =$$

مثال: یک استوانه نیمه محدود را در نظر بگیرید از جنس گوشت (خواص فیزیکی آب)



$$\alpha = \frac{k}{\rho C} = \frac{0.604}{997(4174)} \text{ حجم نیمه محدود}$$

$$\alpha = 1.45 \times 10^{-7}$$

$$Bi = \frac{hR}{k} = \frac{5 \left( \frac{2.5}{100} \right)}{0.604} = 0.201$$

$$\frac{1}{Bi} = 4.93$$

$$F_c = \frac{\alpha L}{R^2} = \frac{1.45 \times 10^{-7} (2000)}{\left( \frac{2.5}{100} \right)^2} = 0.535 \Rightarrow - \frac{\theta_o}{\theta_i} = 0.7 = \frac{T_o - T_p}{T_i - T_{\infty}}$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{5 \times 10^{-2}}{2\sqrt{1.45 \times 10^{-7} \times 3600}} = 1.11$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = 1$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{5 \times \sqrt{1.45 \times 10^{-7} \times 3600}}{0.609} = 0.19$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_0}{\theta_i} = \left( \frac{\theta_0}{\theta_i} \right)_{\text{استر}} \times \left( \frac{\theta}{\theta_i} \right)_{\text{تغییر دورد}} = 0.7 \times 1 = 0.7 \Rightarrow T_f = 17^\circ\text{C}$$

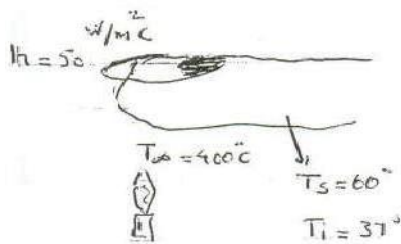
با تغییر  $z=5$  به  $z=1$  سانتی متر داریم:

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0.22$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = 0.85 \Rightarrow \left. \frac{\theta}{\theta_i} \right|_{T_f} = 0.7 \times 0.85 = 0.595$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = 0.19$$

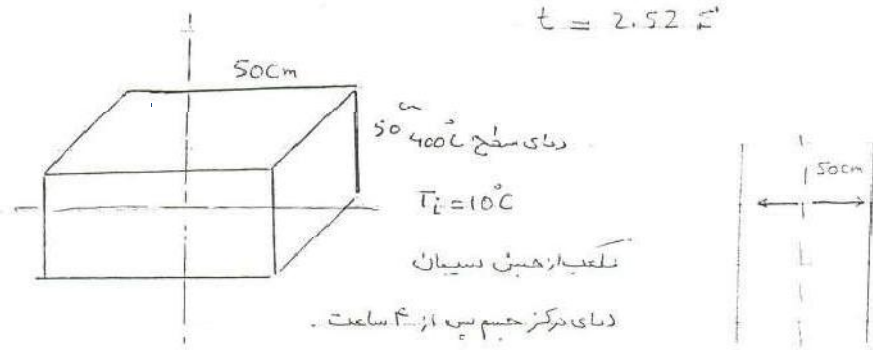
$$\frac{T_f - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.595 = \frac{T_f - 10}{20 - 10} \Rightarrow T_f = 15.9^\circ\text{C}$$



$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.0}{2\sqrt{1.45 \times 10^{-7} (t)}} = 0.0$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{60 - 400}{37 - 400} = 0.94$$

$$\Rightarrow \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{50 \cdot \sqrt{1.45 \times 10^{-7} (t)}}{0.609} = 0.05$$



$$\alpha = 6.8 \times 10^{-7}$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{6.8 \times 10^{-7} (4 \times 2500)}{\left(\frac{25}{100}\right)^2} = 0.157 \quad \frac{1}{Bi} = 0$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_x = 0.7 \quad \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_y = \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_z = 0.7 \Rightarrow \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_{T_p(x,y,z)} = 0.7^3 = 0.343$$

$$\frac{T_p - 400}{10 - 400} = 0.343 \Rightarrow T_p = 266.23^\circ\text{C}$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_{T_p(x,y,z)} = \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_x \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_y \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_z$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_x \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_y \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_z$$

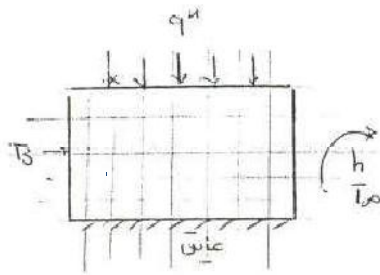
جسم گذرا:

- حل تحلیلی ← جداسازی توابع

جسم تکدمما ←  $Bi < 0.1$

- نمودار های هیسلر - نمودار جسم نیمه محدود

با استفاده از نمودار ها نمی توان منبع تولید انرژی به کاربرد برای این کار باید از انرژی های محاسباتی استفاده کرد.



- تفاضل مرکزی
- تفاضل پیشرو
- تفاضل عقبگرد
- تفاضل وسطی
- تفاضل مرکزی
- تفاضل پیشرو
- تفاضل عقبگرد
- تفاضل وسطی

از معادله اصلی داریم:

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \left[ \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \dots \right]$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{تفاضل پیشرو} \quad O(h)$$

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-f(x-h) + f(x)}{\Delta x} \quad \text{تفاضل عقبگرد} \quad O(h)$$

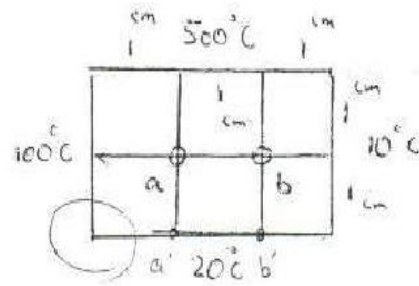
$$f(x+h) - f(x-h) = 2h \frac{df}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\Delta x} \quad \text{تفاضل مرکزی} \quad O(h^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x,t) - T(x)}{\Delta t} \quad \text{حال از رابطه اصلی داریم:}$$

برای زمان منفی از تفاضل پیشرو استفاده می‌شود.

$$f(x+h) + f(x-h) = \dots \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad \text{تفاضل مرکزی برای مشتق}$$

مسئله



حالت پایدار  
بیرون منبع انرژی  
 $T_a, T_b = ?$

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \xrightarrow{\text{با شرط همبندی یا همگرایی}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(x+h) - 2T(x) + T(x-h)}{\Delta x^2}$$

$$\left( T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j} \right) \frac{1}{h^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h^2}$$

اگر  $h=k$  باشد در بیشتر مواقع این گونه است.

از منبع انرژی داریم

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad \left( \frac{-q''' h^3}{k} \right)$$

a)  $T_b + 100 + 500 + 20 - 4T_a = 0$

b)  $T_a + 10 + 500 + 20 - 4T_b = 0$

حاصل این دستگاه خطی است:

$$\begin{cases} T_b - 4T_a = -620 \\ T_a - 4T_b = -530 \end{cases} \Rightarrow T_a = 200.66^\circ\text{C} \quad T_b = 182.46^\circ\text{C}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -620 \\ -530 \end{bmatrix}$$

حال اگر به جای دمای ۲۰ ما  $t^{\infty}$  را ۲۰ و  $h = 10$  و در این حالت  $k$  جسم نیز موجود باشد، داریم:

$$a) \quad T_b + 100 + 500 + T_a' - 4T_a = 0$$

$$b) \quad T_a + 10 + 500 + T_b' - 4T_b = 0$$

$$a') \quad -k \left( \frac{dT}{dx} \right) = h(T - T_{\infty}) \Rightarrow -12 \frac{T_a - T_a'}{0.01} = 10(T_a' - 20)$$

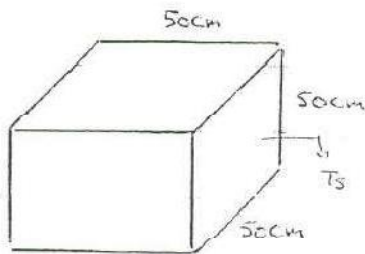
تغییر دما در واحد طول

$$\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$b') \quad -12 \frac{T_b - T_b'}{0.01} = 10(T_b' - 20)$$

در مرز ما دیگر منبع ذخیره انرژی و تولید وجود ندارد و فقط کافی است که از ارزش بالا استفاده کنیم.

پروژه: مکعب ۵ سانتی متر از سیمان با دمای اولیه ۱۰ درجه و دمای سطح ۴۰۰ درجه موجود است.



$$T_i = 10^{\circ}\text{C}$$

$$T_s = 400^{\circ}\text{C}$$

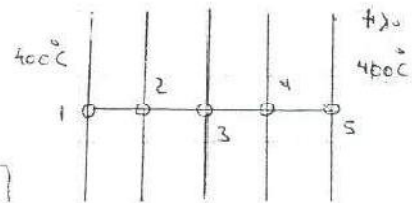
؟ دمای مرکز  $\rightarrow$  S.S

حال سوال تبدیل را در حالت پایا حل می‌کنیم:

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta t}$$

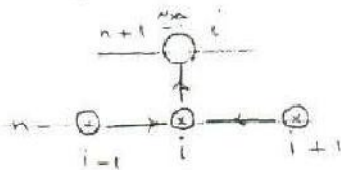
$l = \Delta t \times \alpha$



می توان دمای همه را به صورت دمای اولیه در نظر گرفت:

روش صریح  
explicit

$$\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$



$$\frac{\alpha \Delta t}{h^2} = r \rightarrow \text{فوریه}$$

$$r(T_{i+1}^n + T_{i-1}^n) + (1-2r)T_i^n = T_i^{n+1}$$

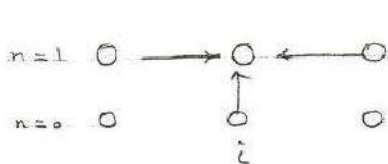
ماتریس

$$\begin{bmatrix} r & 1-2r & r & 0 & \dots \\ r & 1-2r & r & 0 & \dots \\ & & & 1-2r & r \\ & & & & 1-2r \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{i-1}^n \\ T_i^n \\ T_{i+1}^n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{i-1}^{n+1} \\ T_i^{n+1} \\ T_{i+1}^{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

برای سیستم یک بعدی باید حتماً  $1-2r > 0$  باشد لذا  $r < \frac{1}{2}$  باشد در غیر این صورت مساله واگرا می شود.

روش صریح

$$\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$



$$r(T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) + (1+2r)T_i^{n+1} = T_i^n$$

$$\begin{bmatrix} 1+2r & & & & \\ & 1+2r & & & \\ & & 1+2r & & \\ & & & 1+2r & \\ & & & & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

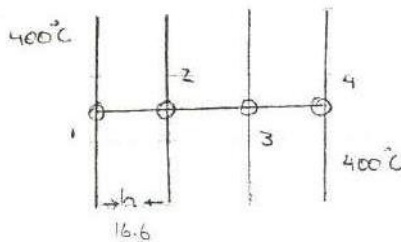
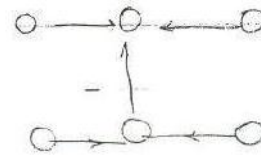


روش کراکول نیلسون

$$(1-\omega) \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \omega \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\omega = 1/2$$



$$(2) \frac{T_1^{(n)} - 2T_2^{(n)} + T_3^{(n)}}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_2^{(n+1)} - T_2^{(n)}}{\Delta t}$$

$$(3) \frac{T_2^{(n)} - 2T_3^{(n)} + T_4^{(n)}}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_3^{(n+1)} - T_3^{(n)}}{\Delta t}$$

$$Fo < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha \Delta t}{h^2} < 1/2 \Rightarrow \frac{6.8 \times 10^{-7} \Delta t}{\left(\frac{16.6}{100}\right)^2} < 1/2 \Rightarrow \Delta t < 20000 \text{ sec}$$

$$(2) \frac{400 - 2T_2^{(n)} + T_3^{(n)}}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_2^{(n+1)} - T_2^{(n)}}{\Delta t}$$

$$(3) \frac{T_2^{(n)} - 2T_3^{(n)} + 400}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_3^{(n+1)} - T_3^{(n)}}{\Delta t}$$

انتقال حرارت تشعشعی:

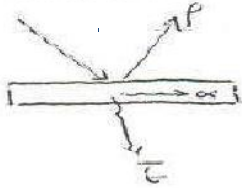
$$q_{1-2} = F_e \cdot F_{e-} \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$\sigma \rightarrow 5.667 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$

هر جسم غریب صدوری دارد که با دما و طول موج تغییر می کند که ما ثابت فرض می کنیم.

با ساده سازی داریم:

$$G = 200 \text{ W/m}^2$$



$$q_{1-2} = \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4) \\ = 4 \sigma A T_1^3 \Delta T$$

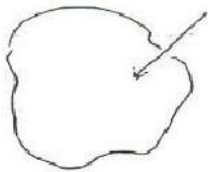
امواج نوری را نیز می توان از این نوع به حساب آورد. امواج تشعشعی طول موجی بین  $0.1 \text{ mm}$  تا  $100 \text{ mm}$  را دارند. امواج نوری جزئی از آن هاست. این امواج با سرعت نور حرکت می کنند.

جسم سیاه جسمی است که هر مقدار انرژی جذب می کند همان مقدار پخش می کند.

$$E_b = \sigma T^4 \rightarrow \text{W/m}^2$$

توان پخش جسم سیاه  
 ضرب استخوان برترین  
 black

یک جسم با روزه یک جسم سیاه حساب می شود.



هر جسم یک ضریب صدور یا پخش تشعشعی

$$\epsilon(\lambda, T)$$

$\alpha(\lambda, T)$	جذب	} $\alpha + \tau + \rho = 1$
$\tau(\lambda, T)$	عبوری	
$\rho(\lambda, T)$	انعکاس	

فرض بر این است که این ضرایب مستقل از  $\lambda$  است این ضرایب به نوع سطح ما بستگی دارد.

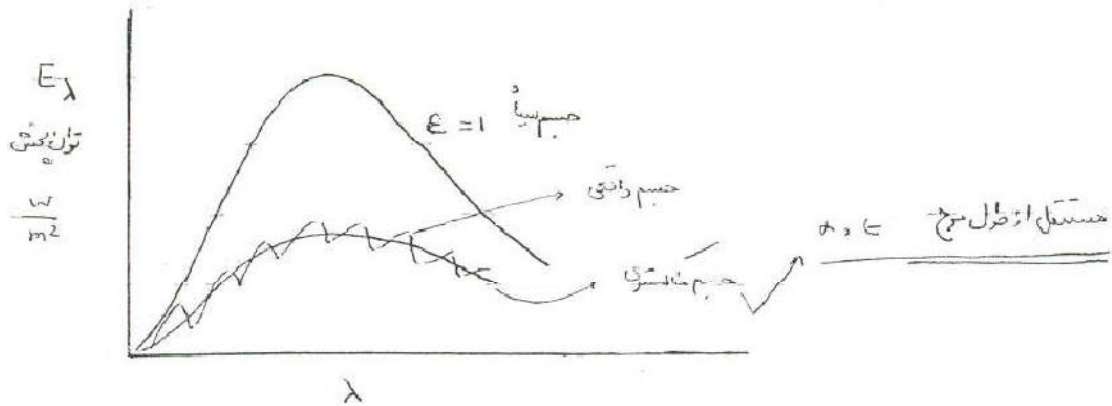
در انتقال ۱ فرضیات ما بر مبنای پخش آینه ای است.



کشیته



تینیک



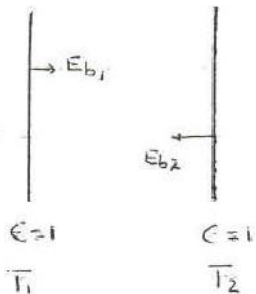
برای جس های که جسم سیاه محسوب نمی شود داریم:

$$E_{AI} = \epsilon \sigma T^4 = \epsilon E_b$$

$$\epsilon = 0.09$$

$$\rightarrow E_{AI} = 0.09 (5.669 \times 10^{-8}) (273 + 23)^4$$

مثال: دو صفحه سیاه موازی به سمت بی نهایت میل می کند طول در این حالت مهم نیست



$$q_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2}) A$$

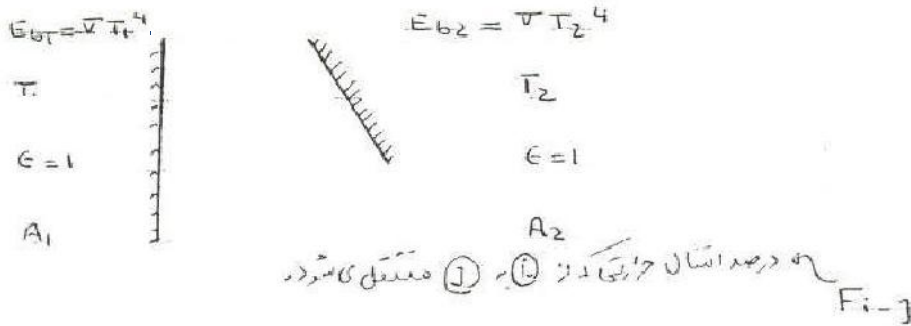
$$A = A_1 = A_2$$

$$q_{1-2} = E_{b1} A - E_{b2} A$$

$$\frac{q_{1-2}}{A} = \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

جسم ها هر دو بزرگ و موازی هم و هر دو سیاه هستند بنابراین نیاز به داشتن ضریب صدور و همنسه نیستیم.

در این حالت سطح ملایل تمامی سطح صفحه ی راست را نمی بیند بنابراین فاکتور دید مطرح می شود.



$$q_{1-2} = E_{b1} F_{1-2} A_1 - E_{b2} A_2 F_{2-1}$$

چون سطح ۱ می تواند تمام سطح ۲ را ببیند ولی لزومی ندارد که سطح ۲ تمام سطح ۱ را ببیند

$$q_{1-2} = \sigma A_1 \underline{F_{1-2}} T_1^4 - \sigma A_2 \underline{F_{2-1}} T_2^4$$

در بی نهایت دمای  $T_1$  و  $T_2$  به هم می رسد. فرضی است که برای فاکتور هندسی مطرح می شود چون در نهایت به تعادل ترمودینامیکی می رسد. در نهایت داریم:

خاصیت متقابل

$$\Rightarrow A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} \quad \text{①}$$

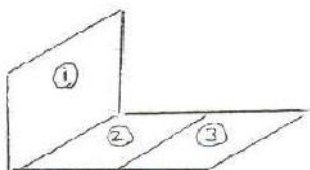
استان حرارت صفر می شود

$$\longrightarrow q_{1-2} = A_1 F_{1-2} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

خاصیت جمع پذیری

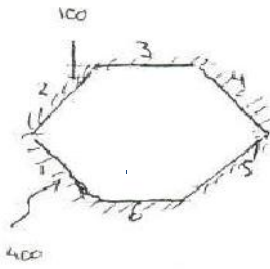
$$A_1 F_{1-2,3} = A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-3} \quad \text{②}$$

سطوح منحنی مقعر که خودشان را می بینند.

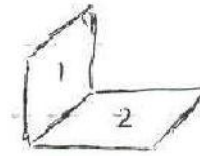
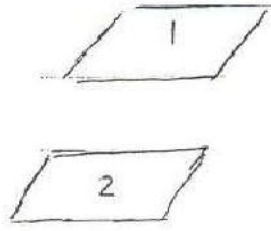
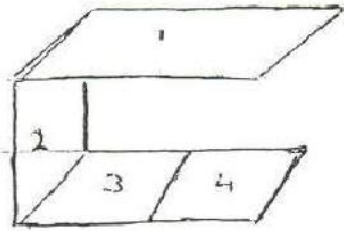


$$\sum_{j=1}^n F_{i,j} = 1, \text{ c.} \quad \text{③}$$

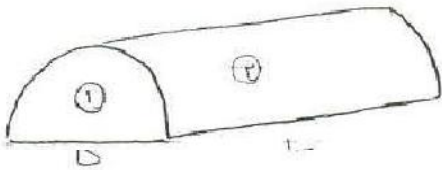
اجسامی که خودشان را نمی بینند.



$$F_{1-1} = F_{2-2} = F_{3-3} = 0$$



در این مدار برای محاسبه فاکتور دید باید از جدول های کتاب استفاده کرد.



$$F_{1-1} = 0.0$$

$$F_{2-2} = ? \text{ یا } F_{1-2} = ?$$

$$\text{یا } F_{2-1} = ?$$

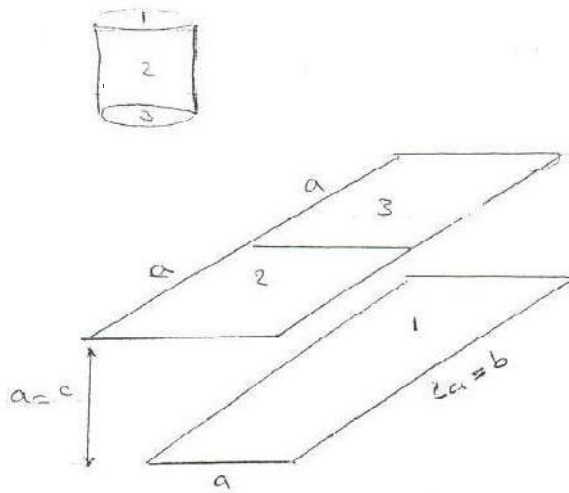
$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1}$$

$$\sum_{j=1}^n F_{i,j} = 1.0 \Rightarrow F_{1,1} + F_{1,2} = 1.0 \Rightarrow F_{1,2} = 1.0$$

$$DL(1.0) = \frac{\pi DL}{2} F_{2-1} \Rightarrow F_{2-1} = \frac{2}{\pi}$$

$$F_{2-1} + F_{2-2} = 1.0 \Rightarrow \frac{2}{\pi} + F_{2-2} = 1.0 \Rightarrow F_{2-2} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

مثال:



$$F_{1-2} = ?$$

$$A_2 = A_3 = \frac{1}{2} A_1$$

با استفاده از شکل

$$\beta = \frac{b}{c} = \frac{2a}{a} = 2 = \frac{Y}{D}$$

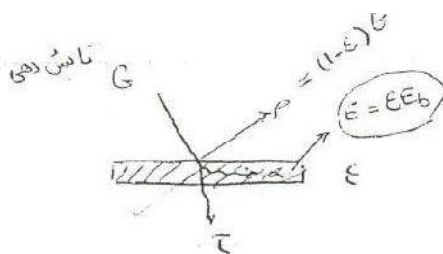
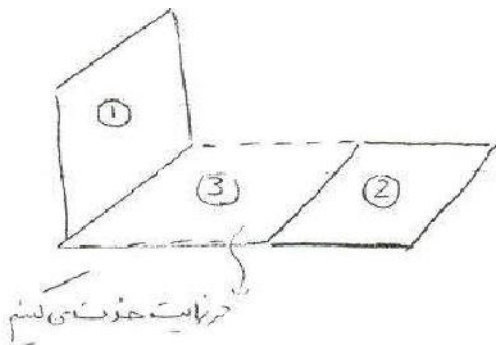
$$\gamma = \frac{a}{c} = \frac{a}{a} = 1 = \frac{X}{D}$$

$$F_{1-2,3} = 0.128 = F_{1-2} + F_{1-3}$$

$$F_{1-2,3} = 2 F_{1-2} \rightarrow F_{1-2} = \frac{0.128}{2} = 0.064$$

$$A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2} \rightarrow \frac{1}{2} A_1 F_{2-1} = A_1 F_{1-2} \Rightarrow F_{2-1} =$$

$$F_{1-2,3} = F_{1-2} + F_{1-3}$$



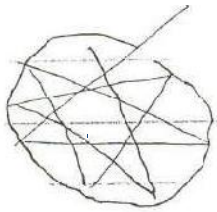
$$\alpha + \rho + \tau = 1.0$$

$$\alpha \approx \epsilon$$

$$\tau = 0.0$$

$$\alpha + \rho = 1.0 \Rightarrow \rho \approx 1 - \epsilon$$

مانند یک دیواره سیاه می شود.



$\epsilon = *$  (البته ای است)

$J$  radiosity

برابری:

کل مساحتی که یک سطح را ترک می‌کند اگر  $\tau = 0.0$

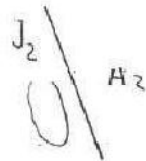
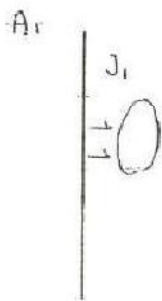
$$J = \epsilon E_b + (1 - \epsilon) G$$

رنگ انرژی که سطح می‌بازد و ترک می‌کند (فقط ناشی از تابش نیست)

$$\begin{aligned} \frac{q}{A} = J - G &= \epsilon E_b + (1 - \epsilon) G - G = \frac{\epsilon A}{1 - \epsilon} (E_b - J) \\ &= \frac{E_b - J}{\frac{1 - \epsilon}{\epsilon A}} \end{aligned}$$

تفاوت بین سطح مسطحی و درص است.

مانند معادله

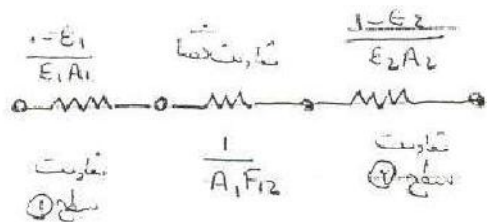
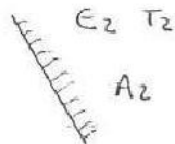


$$q_{1-2} = J_1 A_1 F_{1-2} = J_2 A_2 F_{2-1}$$

$$q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}}$$

معادله درص

برای یک شبکه کلی بین دو سطح:



$$\textcircled{1} \quad q = \frac{\Delta E}{\Sigma R} = \frac{E_{b1} - E_{b2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1-2}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}} = \frac{q_{1-2}}{A}$$

اگر دو سطح موازی باشند و تماما هم را ببینند:



$$A_1 = A_2 = A$$

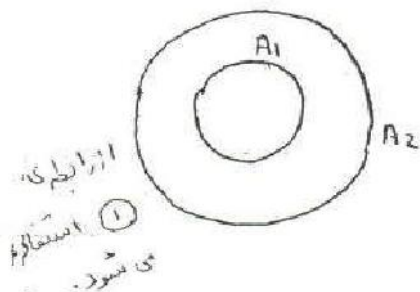
$$\Rightarrow F_{1-2} = 0 \textcircled{1}$$

$$q = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A} \left[ \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} + \frac{1}{F_{1-2}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \right]} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

دروستی برزای

برای لوله هم صادق است ولی رابطه ی قبل در دو صفحه ی موازی اگر یکی از اجسام ما سیاه باشد در

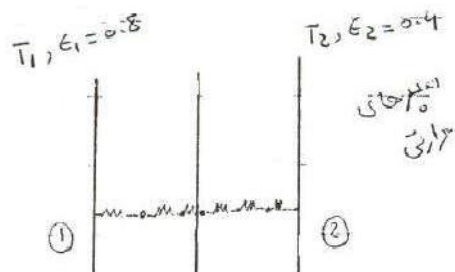
نتیجه:



$$\epsilon_2 = 1 \rightarrow q = \epsilon_1 A \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$\text{if } A_2 \rightarrow \infty \rightarrow q = \epsilon_1 A \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$\Rightarrow F_{1-2} = 1.0$$



$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.4} - 1}$$

$$= 0.3636 \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$



حال یک صفحه الومینیومی بین این دو صفحه قرار می دهیم:

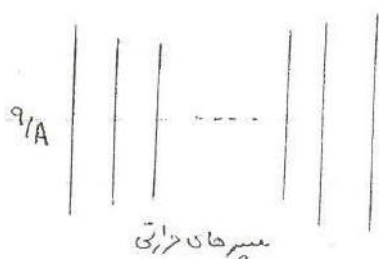
$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_{Al_1}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\epsilon_{Al_2}} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.05} - 1 + \frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.4} - 1}$$

$$= 0.0239 \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

از تشعشع این مقدار کاسته می شود.

از تشعشع این مقدار کاسته می شود:

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{0.3636 - 0.0239}{0.3636} = 93.4\%$$



$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بسیر}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بیزن}}$$

مثال: یک جسم خاکستری  $T_1 = S = C$  و  $\epsilon_1 = 0.35$  و  $A_1 = 4 \text{ cm}^2$  محصور شده

است با  $A_2 = 36 \text{ m}^2$  و  $T_2 = 100^\circ \text{C}$  و  $\epsilon_2 = 0.75$  در آن صورت  $Q_{1-2} = ?$

$$\frac{1}{\hat{F}_{1-2}} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right) \quad q_{1-2} = A_1 \hat{F}_{1-2} \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{1-3} = \left(\frac{q}{A}\right)_{3-2} = \frac{q}{A} \Rightarrow \frac{\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} = \frac{\sigma(T_3^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{q}{A}$$

if  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow \frac{q}{A} = \frac{1/2 \sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} = \frac{1/2 \sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$

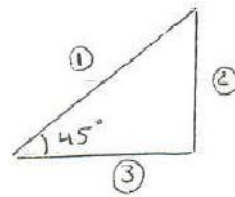
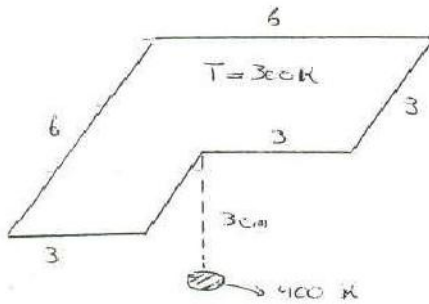
$$\Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بسیر}} = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بیزن}} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بیزن}} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بیزن}} = \frac{1}{1+1} \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بیزن}}$$

حال به حل مثال قبل می پردازیم:

$$\frac{1}{F_{1-2}} = \frac{1}{0.25} + \frac{4}{3.6} \left( \frac{1}{0.75} - 1 \right) \Rightarrow \tilde{F} = 0.3455$$

$$\Rightarrow q_{1-2} = 4 (0.3455) (5.67 \times 10^{-8}) (773^4 - 373^4) = 26.4 \text{ kW}$$

مثال: هر دو جسم را سیاه در نظر بگیرید:



$$F_{2-1} = ?$$

$$\sum F_{ij} = 0 \Rightarrow F_{1-1} + F_{1-2} + F_{1-3} = 0 \Rightarrow F_{1-2} + F_{1-3} = 0$$

$$F_{2-1} + F_{2-2} + F_{2-3} = 0 \Rightarrow F_{2-1} \checkmark \Rightarrow A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2} \checkmark$$

$$\Rightarrow F_{1-2} \checkmark \Rightarrow F_{1-3} \checkmark$$

$$\Rightarrow F_{3-1} \checkmark$$

### انتقال حرارت جابجایی: convection

جابجایی ← طبیعی-آزاد free convection (نیروی شناور)

← اجباری forced convection (اینرسی)

اجباری مانند کولر یا فن ها. انتقال حرارت در این جا بین سیال و دیواره است.

$$q = h A (T_s - T_\infty)$$

$$h \rightarrow 5 - 20 \quad \text{آزاد}$$

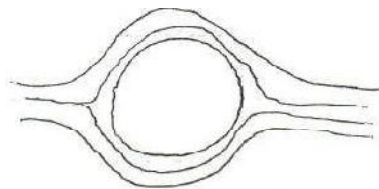
$$h \rightarrow 20 - 100000 \quad \text{اجباری}$$

برای لامپ هر دو نوع جابجایی وجود دارد برای بدن انسان در حالت نشستن یا راه رفتن مقاومت و قسمتی جابجایی اجباری و قسمتی طبیعی است.

سیال  $\rightarrow T_{\infty}$

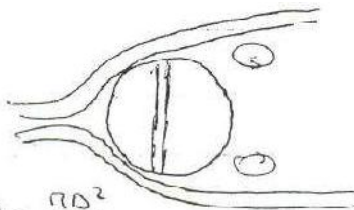
دیوار  $T_s$

جمع زدن  $h$  ها غیر قابل قبول است.



$$A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

$q_1$



$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

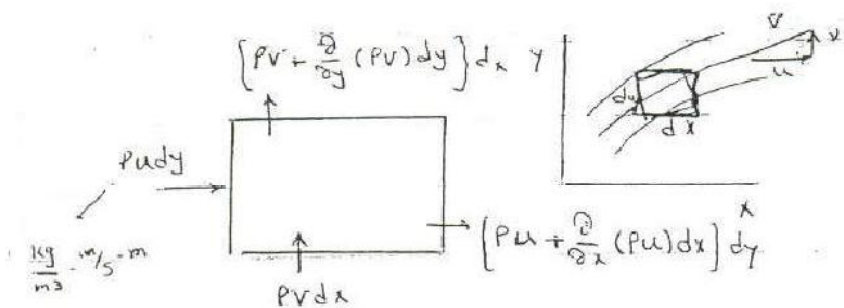
$q_2$

$$\Rightarrow q = q_1 + q_2$$

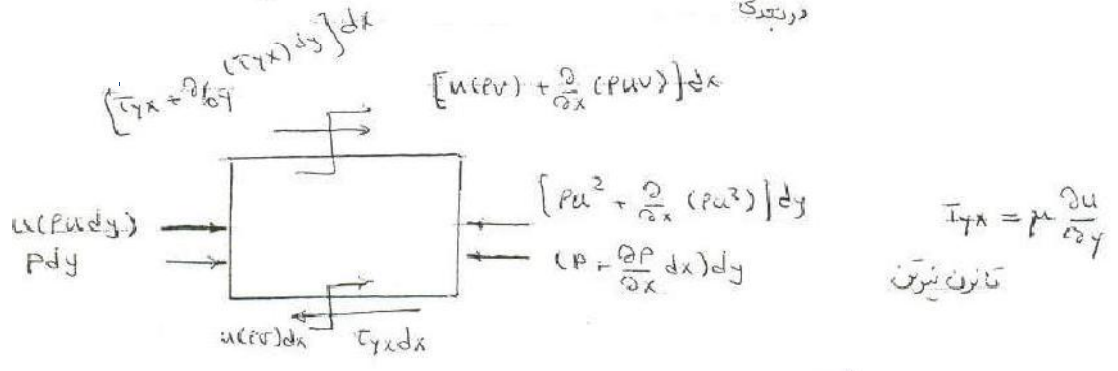
جابجایی

در لوله ها با وجود جریان اجباری یک جندایش رخ می دهد که باز هم نمی توان  $h$  ها را جمع کرد. در این جا  $h$  ها و هم مساحت ها تغییر کرده است. در  $h$  هندسه و اختلاف دما مهم است.

### پیوستگی جرم - مومنتوم - انرژی



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{بافتن به یکدیگر - شرایط نرمال - تراکم درستی}$$



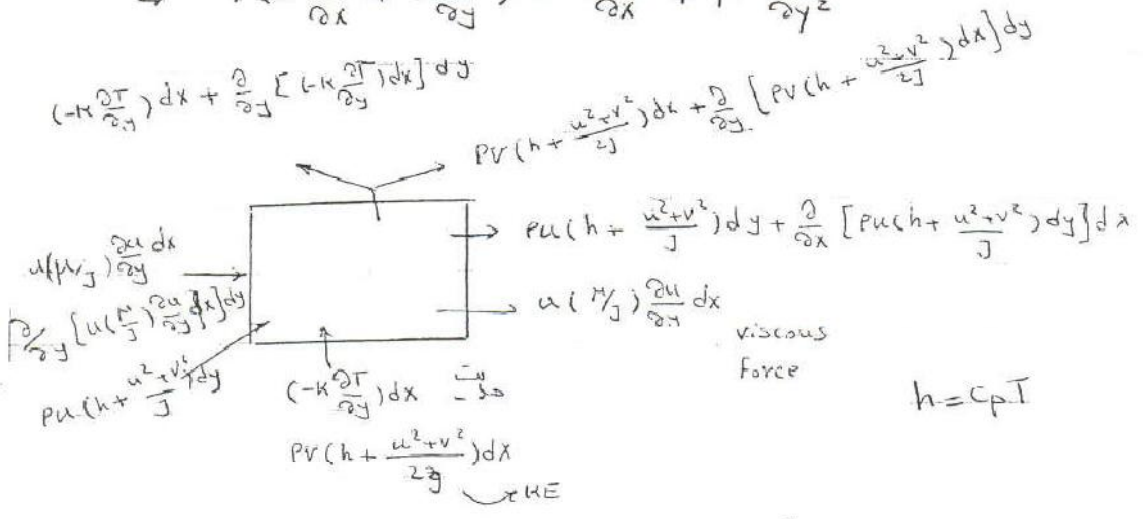
$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) dx dy + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) dy dx = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



Convective term

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

هدایت      ↓      Viscous dissipation  
انرژی از دست رفته

حال می خواهیم معادلات را بی بعد کنیم:

$$u^* = \frac{u}{u_0} \rightarrow v^* = \frac{v}{u_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}$$

$$y^* = \frac{y}{L}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\rho (u^* u_0 \frac{\partial u^* u_0}{\partial x^* L} + v^* u_0 \frac{\partial u^* u_0}{\partial y^* L}) = \mu \frac{\partial^2 u^* u_0}{\partial (y^* L)^2} \quad \frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \left( \frac{\mu}{\rho u_0 L} \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \rightarrow \frac{1}{Re}$$

$$u \sim u_0$$

$$y \sim \delta$$

در برینگی  $\frac{u_\infty}{x} + \frac{v}{\delta} \Rightarrow u \sim \frac{u_\infty \delta}{x}$

now mom. Eq  $\Rightarrow u_\infty \frac{u_\infty}{x} + \frac{u_\infty \delta}{x} \cdot \frac{u_\infty}{\delta} \sim \frac{\nu u_\infty}{\delta^2}$

$$\Rightarrow \delta^2 \sim \frac{\nu x}{u_\infty} \Rightarrow \delta \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\tau_p = \mu \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = C_x \rho \frac{u_\infty^2}{2} \Rightarrow C_x = \frac{2\nu}{u_\infty} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\Rightarrow C_m, F = Bl - C_m \frac{\rho u_\infty^2}{2}$$

میزان معنی  
تولید معنی

friction coefficient

$$C_m = \frac{1}{L} \int_0^L c_x dx$$

حال می خواهیم برای انتقال حرارت این رابطه را به دست آوریم.

صافیت رسانایی

$$\frac{KA}{F} \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} = hA(T_w - T_\infty) \Rightarrow h = \frac{-k_F \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_w - T_\infty}$$

مربوط به رسانایی است

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

فقط صورت نظر شود

2-D, incompressible, S.S, غیر چرخی

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

حالت

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

انرژی

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

موردی برای شما باشد می توان از آن صرف نظر کرد

نیروی کششی، کشش برقی، ضریب اصطکاک

$$\delta \sim 1 Re^{-1/2} \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad C_f \Rightarrow \bar{C}_f, F$$

پهنای باری

از بی بعد سازی معادله داریم:

$$\frac{\tau^*}{T_\infty} = \frac{T}{T_\infty}$$

$$\begin{aligned}
 \rho C_p (u^* u_{\infty} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* u_{\infty} \frac{\partial T^*}{\partial y^*}) &= k \frac{\partial^2 T^*}{\partial (y^* L)^2} \\
 u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} &= \frac{k}{\rho C_p u_{\infty} L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \\
 \frac{k}{\rho C_p} &= \alpha \quad \frac{k \nu}{\rho C_p u_{\infty} L} = \frac{\alpha}{\nu} \cdot \frac{1}{Re} \quad \frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr}
 \end{aligned}$$

پراش برای مایعات بالاست و برای گازها تقریباً ۱ یا ۰.۶ است برای مایعات فازی کوچک است.

چون سرعت سیال نزدیک به این نقطه ثابت است

$$h = \frac{-k_f \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0}}{\Delta T} = Nu = \frac{hL}{k_f} \quad \text{نوسلت} \quad \text{Nusselt}$$

تغییرات در سیال در برهه

$$h = \frac{-k_s \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0}}{\Delta T} = Bi = \frac{hL}{k_s} \quad \text{برای} \quad \text{solid}$$

$$T = f(Re, Pr) \quad h = f(Re, Pr) \Rightarrow Nu = f(Re, Pr)$$

این فرض برای جریان اجباری است.

در جایجایی های اجباری عدد Nu معمولاً به این شکل است.

$$Nu = C Re^m Pr^n$$

در همه حالات می توان h را به  $C_f = C_F$  ضرایب به دست آورد.

$$h \rightarrow \delta, C_f, F$$

می توان ضخامت لایه مرزی حرارتی  $\delta_T$  را از روی معادله ی انرژی به دست آورد.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \sim \frac{\delta}{\delta_T} \longrightarrow Pr \approx 1 \Rightarrow \delta \approx \delta_T$$

دو پروفیل مثل ہم حرکت می کنند.

پارشیال  
 $\frac{\partial c}{\partial t}$   $\rightarrow$   $\frac{\Delta c}{\Delta t}$  partial Time derivative

کلی  
 $\frac{dc}{dt}$  Total Time derivative

کلی  
 $\frac{Dc}{Dt}$  Substantial Time derivative

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

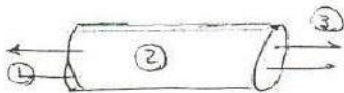
$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} + u_z \frac{\partial c}{\partial z}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \underbrace{u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} + u_z \frac{\partial c}{\partial z}}_{\vec{v} \cdot \nabla c} = \frac{Dc}{Dt} + \vec{v} \cdot \nabla c$$

$$\vec{v} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \, dV + \int_{cs} \rho \, v \cdot dA$$

$$\rho = 1 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \, dV + \int_{cs} \rho \, v \cdot dA = 0 \Rightarrow \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$$



$$-\rho u_1 A_1 + 0 + \rho u_2 A_2 = 0$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \phi = S \quad \text{Source Term}$$

$$\phi = p, \quad S = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p = 0$$



2-D, incompressible, S.S, newtonian

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \rightarrow \rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



S برای حالت جریان است.

حال در مورد سرعت داریم:

$$\rho = \rho_0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u \mathbf{v} = S \rightarrow \rho, \tau \text{ و } F_B, F_G$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v \mathbf{v} = S$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \omega \mathbf{v} = S$$

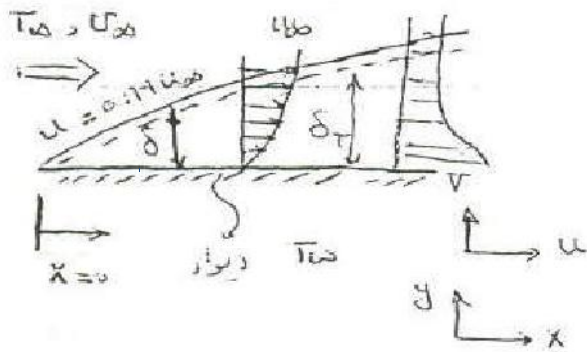
$$\rho = \text{const}, \text{ S.S}, \mu = \text{const}$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot u \mathbf{v} \right) = - \underbrace{\nabla p}_{\text{فشار}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{شیب لزجت}} + \underbrace{\rho_0 \mathbf{g}}_{\text{شیب دبی}}$$

از روی واحد این عبارات اعمال می شود.

2-D, incompressible, newtonian, S.S.

$$\text{no pressure gradient} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$



no-slip condition

$$u_w = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{1}{Re} \Rightarrow \delta \quad Nu = \frac{hL}{k_f} \quad Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{1}{Re \cdot Pr} \Rightarrow \delta_t \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

اگر  $\nu = \alpha \Rightarrow \delta = \delta_t$

$$Pr \left( u_\infty \frac{T_\infty}{x} + \frac{u_\infty \delta_t}{x} \frac{T_\infty}{\delta_t} \right) = \frac{k T_\infty}{\delta_t^2} \Rightarrow \delta_t^2 = \frac{k \nu}{Re u_\infty x Pr} = \frac{5x}{Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}$$

$$Pr \approx 1.0 \rightarrow 0.7$$

$Pr \gg 1.0$  مایعات روغن آب

$Pr \ll 1.0$  مایعات فلزی

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \approx \frac{\delta}{\delta_t}$$

$$\Rightarrow \delta \rightarrow \tau_w = \mu \frac{du}{dy} = C_f \frac{\rho V^2}{2} \Rightarrow \frac{0.664}{Re^{1/2}} = C_f \Rightarrow \bar{C}_f = \frac{1.332}{Re^{1/2}} \quad 5.6$$

$$\delta_t = \frac{5x}{Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}$$

معماریت همایونی سیال به معماریت جابجایی سیال

$$T = f(Re, Pr)$$

$$h = f(Re, Pr)$$

$$Nu = f(Re, Pr)$$

$$\Rightarrow Nu = 0.332 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$h_x = \frac{k}{x} (0.332) Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

این روابط برای عدد رینولدز درست است.

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \Rightarrow Nu = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

خواص فیزیکی ما در دمای FILM محاسبه می شود.

$$\frac{T_w + T_\infty}{2} = T_f$$

H باید حساب شود چون معمولاً نقطه ای نمی توان استفاده کرد. در جدول کتاب فشار اتمسفر است ولی اگر بخواهیم فشار عوض شود باید P را قانون گازهای کامل استفاده کرد فقط P هست که عوض می شود و بقیه عوض نمی شود.

اعداد NU و IRE و PR را داریم:

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

رابطه، ارتباط اصطحکاک با ضریب جابجایی ←

$$\tau = c_x \frac{\rho u^2}{2} \Rightarrow \frac{c_x}{2} = 0.332 Re_x^{-1/2}$$

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

عدد استانتون

$$\Rightarrow St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}$$

نسبت همرفتی به جذب و ذخیره انرژی

$$St = \frac{hL/k}{\frac{\rho V L}{\mu} \cdot \frac{V}{L}} = \frac{h ADT}{\underbrace{\rho C u_\infty}_{\dot{m}} ADT}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = h/\rho c \\ \nu = \mu/\rho \end{array} \right. \quad St_x = Pr^{2/3} = \frac{c_x}{2}$$

این معادله به نام رینولدز کولبورن معروف است که با اندازه گیری کشش سطحی می توان ضریب جابجایی را مشخص کرد.

$$Nu = \frac{hL}{k_f} \quad 1Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad St = \frac{Nu}{1Re \cdot Pr}$$

تولید  
 $Pc = 1Re \cdot Pr$

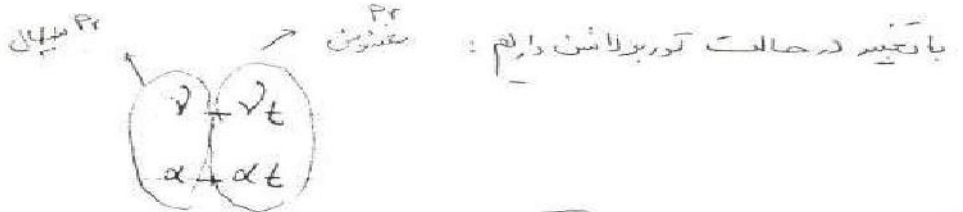
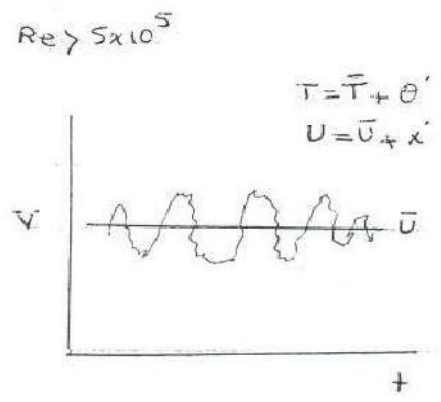
تمامی روابط بالا در جابجایی اجباری است.

حال می خواهیم در مورد جریان مغشوش بحث کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$



کار خاص هندی پرست می آید.

توربولانس

$$Nu = 0.0296 Re_x^{1/5} Pr^{1/3}$$

توربولانس

$$\overline{Nu} \approx Nu_x$$

Turb

در سیستم برج های خنک کن قطرات آب پایین می ریزد و جریان هوا داریم که با هم انتقال حرارت دارند.

$$St = \frac{Cf/2}{1 + 2.1 Re^{-0.1} (Pr - 1)}$$

$$St Pr^{2/3} = \frac{Cf}{8}$$

برای جریان دوگانه دوار