فصل اول
معرفي سيگنال هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

تعريف سيگنال : تابعي از يك يا چند متغير مستقل است نظير سيگنال صحبت خروجي يك ميكروفن .

تعريف سيستم : سيستم را مي توان به شكل دستگاهي در نظر گرفت كه سيگنال هاي ورودي را گرفته و براساس ساختار دستگاه يك سبگنال خروجي را مي دهد .

طبقه بندي سيگنال :

1 - **پيوسته :** اين سيگنال ها به صورت پيوسته در زمان بوده و با x(t) نشام داده مي شود .

2 - **گسسته :** سيگنالهاي گسسته به صورت گسسته در زمان بوده و با x[n] نشان داده مي شود . (اين سيگنال در حقيقت از سيگنال هاي پيوسته گرفته مي شود .)

نكته : سيگنال هاي فيزيكي طبيعي نظير سيگنال صحبت سيگنال هاي پيوسته مي باشند . براي پردازش بهتر اين سيگنال ها آنها را به حالت گسسته در مي آورند . براي اين منظور از سيگنال پيوسته نمونه برداري مي شود و ثابت مي شود اگر تعداد نمونه ها در واحد زمان از يك مقدار مشخص بيشتر باشد مي توان لز روي سيگنال گسسته مجددا سيگنال پيوسته را بازسازي نمود .

سيگنال هاي انرژي و توان :

1 - **انرژي :** سيگنال هاي محدود در زمان

2 - **توان :** سيگنال هاي نا محدود در زمان

نكته : معمولا سيگنال ها از جنس ولتاژ يا جريان هستند و مقدار توان دو ولتاژ يا جريان متناسب است . بر اين اساس انرژي كل يك سيگنال به صورت زير تعريف مي شود :

1 - **در حالت پيوسته :**

$$E = \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

2 - **در حالت گسسته :**

$$\boldsymbol{E} = \sum_{\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{N}} |\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]|^2$$

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2N+1}} \sum_{\mathbf{x}=-\mathbf{N}}^{\mathbf{N}} |\mathbf{x}[\mathbf{n}]|^2$$

نكته : سيگنال هايي كه محدود زمان باشند داراي انرژي محدود هستند و توان متوسط آنها صفر است . به اين سيگنال ها سيگنال انرژي گفته مي شود .
نكته : سيگنال هايي كه نا محدود زمان باشند داراي انرژي بي نهايت هستند و توان متوسط آنها محدود است . به اين سيگنال ها سيگنال توان گفته مي شود .

تبديلات سيگنال ها :

1 -شيفت زماني :

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t_0})$$
$$\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{x}[\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n_0}]$$

شيفت به راست : اگر t>0 باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت راست شيفت مي دهيم تا y(t) بدست آيد .
شيفت به چپ : اگر t<0 باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت چپ شيفت مي دهيم تا y(t) بدست آيد .

2 - معكوس شدن زمان :

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(-\boldsymbol{t})$$
$$\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{x}[-\boldsymbol{n}]$$

X(-t) يا x[-n] انعكاس x(t0 با x[n] نسبت به محور قائم هستند .

3 - فشرده شدن زمان :

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{at}) \qquad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{x}[\boldsymbol{an}] \qquad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$$

حالت پيوسته :
الف) اگر $|a| > 1$ باشد y(t) فشرده شده سيگنال x(t) خواهد بود .
ب) اگر $|a| > 1$ باشد y(t) باز شده سيگنال x(t) خواهد بود .
ج) اگر $a < 0$ باشد بايد بعد از تغيير مقياس ، وارون زماني انجام داد.

تذكر :اگر سيگنال زمان پيوسته و يا زمان گسسته متناوب باشند، در اثر تغيير مقياس زماني در اثر فشرده شدن، دوره تناوب سيگنال جديد كم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سيگنال جديد افزايش مي يابد.

تذكر : $y[n] = x[kn]$ نسبت به x[n] فشرده شده، كه برخي از مقادير را از دست مي دهد.

تذكر :در زمان پيوسته ماهيت سيگنال عوض نمي شود، اما در زمان گسسته ماهيت سيگنال تغيير مي كند و سيگنال جديدي بدست مي آيد .

تذكر : $y[n] = x[\frac{1}{k}n]$ نسبت به x[n] باز شده كه در نتيجه تعدادي صفر به y[n] اضافه خواهد شد .بدين ترتيب ماهيت سيگنال گسسته در اثر تغيير مقياس زماني تغيير مي كند.

نكته : x(at-B) : هميشه ابتدا شيفت به اندازه B انجام شده سپس به اندازه a فشرده مي شود .

سيگنال متناوب (پريوديك) :

سيگنال متناوب به سيگنالي گفته مي شود كه در بازه هاي زماني مشخص عينا تكرار شده باشد.

X(t) = x(t+T) پريوديك با دوره تناوب T

X[n] = x[n+N] پريوديك با دوره تناوب N

سيگنال هاي زوج و سيگنال هاي فرد :

1 - سيگنال زوج : $Even\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$

2 - سيگنال فرد : $Odd\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)\}$

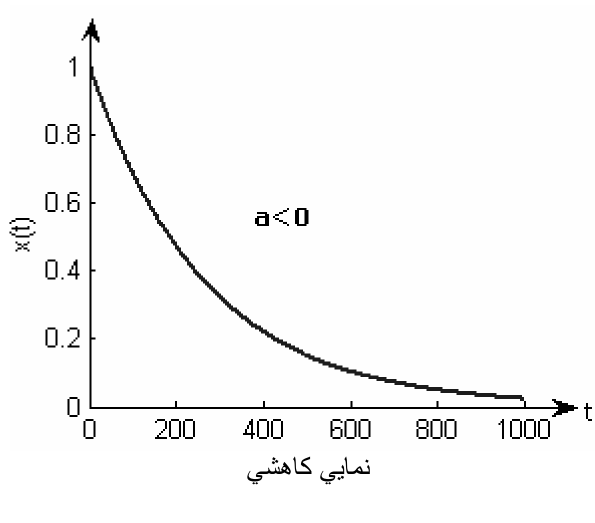
در نتيجه و با توجه به قسمت فرد و زوج سيگنال خواهيم داشت :

$$x(t) = Even\{x(t)\} + Odd\{x(t)\}$$

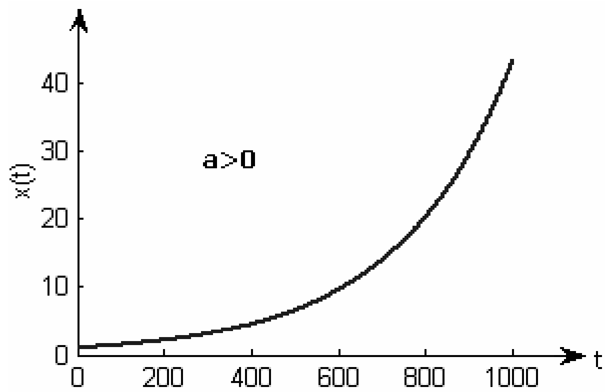
معرفي سيگنال هاي مهم :

1 - سيگنال نمايي حقيقي :

پيوسته $x(t) = Ce^{at}$



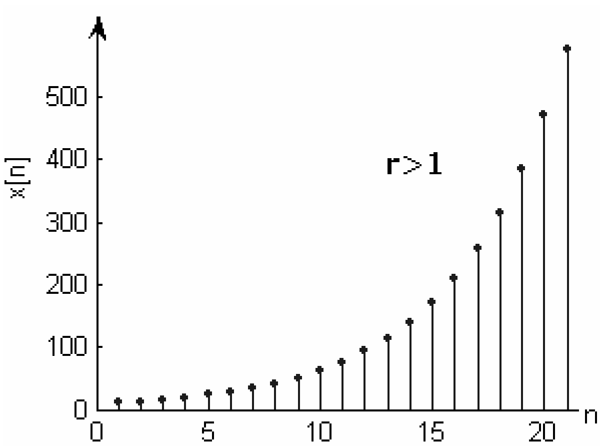
نمايي كاهشي



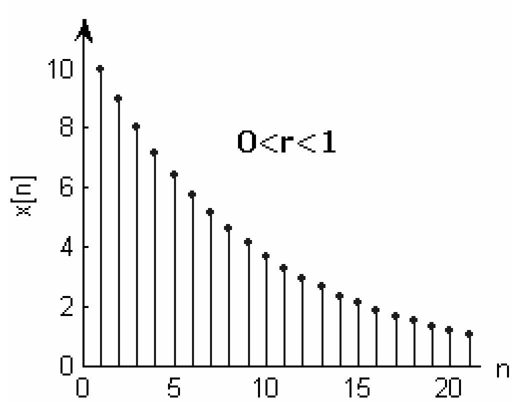
نمايي افزايشي

تذكر :چنانچه دامنه سيگنال خروجي سيستمي با افزايش زمان به طور نامحدود زياد شود، سيستم تحت بررسي به عنوان سيستم ناپايدار شناخته مي شود.

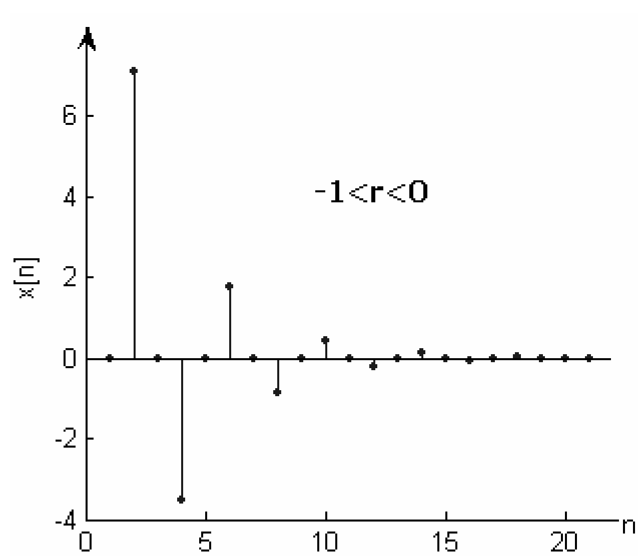
گسسته $\underline{x(t) = Cr^n}$



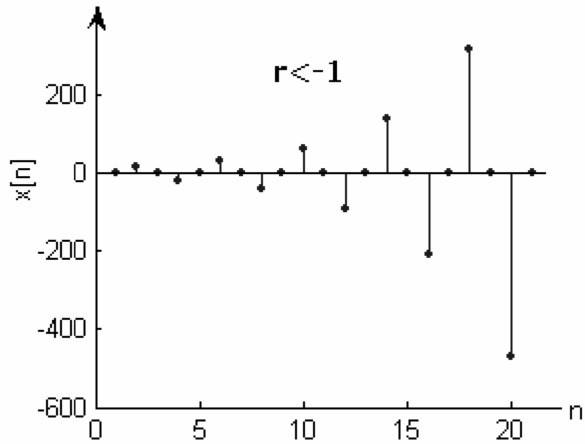
نمايي افزايشي



نمايي كاهشي



نوساني كاهشي



نوساني افزايشي

2 - سيگنال سينوسي :

پيوسته : $\underline{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$

تذكر :سيگنال سينوسي همواره متناوب و با دوره تناوب T است .

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

گسسته : $\underline{x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)}$

$$\omega_0 = 2\pi \frac{k}{N}$$

تذكر :سيگنال زمان گسسته سينوسي به شرطي متناوب است كه بتوان $N \in Z^+$ را بدست آورد به نحوي كه $x[n] = x[n+N]$ گردد . (اين سيگنال برخلاف سيگنال زمان پيوسته سينوسي بعضا متناوب نيست.)

3 - سيگنال نمايي مختلط :

پيوسته : $\underline{x(t) = Be^{-j\omega t}}$ يا $\underline{x(t) = Be^{j\omega t}}$

گسسته : $\underline{x[n] = e^{j\omega_0 n}}$

نكته : سيگنال هاي نمايي موهومي گسسته (نمايي مختلط) يا سيگنال هاي سينوسي گسسته زماني پريوديك است كه ω_0 به صورت ضريب گويايي از عدد π مي باشد .
براي بدست آوردن دوره تناوب ω_0 آنرا به صورت ضريب گويايي از 2π مي نويسيم و مخرج دوره تناوب سيگنال را نشان مي دهد .

مثال :

$$\cos\frac{\pi}{7}n \quad => \quad \omega_0 = 2\pi * \frac{1}{14} \quad => \quad N = 14$$

$$\cos\frac{3\pi}{7}n \quad => \quad \omega_0 = 2\pi * \frac{3}{14} \quad => \quad N = 14$$

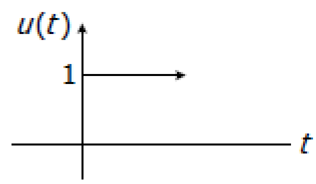
نکته : در عبارت گويايي که ضريب 2π است بيانگر اين است که پس از چند پوش سيگنال رشته N تکرار مي شود .

سيگنال هاي پايه :

1-1 - سيگنال پايه واحد :

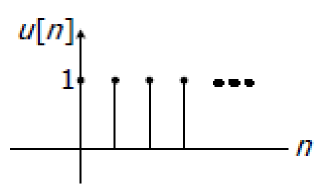
پيوسته :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



گسسته :

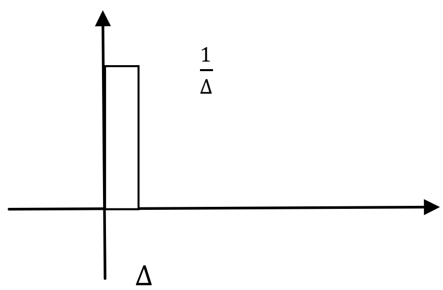
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n \leq -1 \end{cases}$$



تذکر :توابعي که فرم هندسي دارند را مي توان بر حسب تابع پله بيان کرد .

1-2 - تابع پالس : فقط در حوزه پیوسته مي باشد .

$$u_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \le t \le \Delta \\ 0 & \begin{cases} \Delta < t \\ \Delta < 0 \end{cases} \end{cases}$$

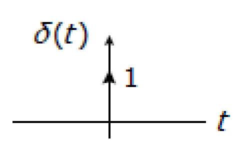


تابع پالس براساس سيگنال پله واحد :

$$u_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}u(t) - \frac{1}{\Delta}u(t-\Delta)$$

1-3 - تابع ضربه :

پيوسته :



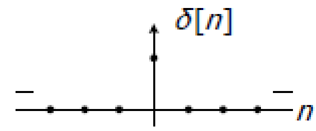
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{-1} \delta(t)dt = 0$$

$$\delta(t) = 0 \quad => \quad \begin{cases} t > 0 \\ t < 0 \end{cases}$$

رابطه بين تابع پله واحد و تابع ضربه واحد در حالت پيوسته :

$$\delta(t) = \frac{d_u(t)}{dt}$$

گسسته :



رابطه بين تابع پله واحد و تابع ضربه واحد در حالت گسسته :

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

نكته پيوسته :

$$y(t) = \frac{d_x(t)}{dt}$$

نكته گسسته :

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

نكته : تابع $y[n] = x[n] - x[n-1]$ معادل مشتق گيري از تابع $x[n]$ در حوزه پيوسته مي باشد .

نكته پيوسته :

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

نكته گسسته :

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

خواص تابع ضربه :

1 - خاصيت فشردگي :

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \quad , \quad \delta(t) = \delta(-t)$$

2 - خاصيت غربالي تابع ضربه :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,.\,\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$$

سيستم ها :

سيستم را مي توان به صورت دستگاهي در نظر گرفت كه بر روي سيگنال هاي ورودي اعمالي را انجام داده و خروجي بر اساس ساختار داخلي سيستم مي دهد . در حقيقت سيستم تابعي بر حسب سيگنال ورودي مي باشد (ساختاري كه روي سيگنال ها اعمالي را انجام مي دهد .)

خواص سيستم ها :

1 - **حافظه دار يا بدون حافظه بودن :** سيستمي بدون حافظه است كه خروجي آن در هر لحظه به ورودي در همان لحظه بستگي داشته باشد و به لحظات ديگر وابسته نباشد .

2 - **معكوس پذيري :** اگر بتوان از روي خروجي سيستم دوباره ورودي را بازسازي كرد سيستم معكوس پذير است .

3 - **عليت :** اگر ورودي سيستم صرفا به زمانهاي حال و گذشته بستگي داشته باشد سيستم علي است و اگر به آينده بستگي داشته باشد سيستم غير علي است .

4 - **پايداري به مفهوم *BIBO* :** سيستمي پايدار به مفهوم BIBO است كه به ازا ورودي محدود خروجي آن محدود است .

5 - **تغيير ناپذيري با زمان (*TI*) :** براي بررسي تغيير ناپذيري با زمان يكبار $x(t-t_0)$ را وارد سيستم مي كنيم خروجي را بدست مي آوريم و يكبار $\boldsymbol{y(t-t_0)}$ را تشكيل مي دهيم . اگر دو حالت برابر شود سيستم تغيير ناپذير با زمان است .

6 - **خطي بودن :** سيستم خطي به سيستمي گفته مي شود كه اصل جمع آثار براي آن صدق كند .

شرط خطي بودن :

همگن: $ax(t) \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow ay(t)$

جمع پذير: $x_1(t)+x_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$

نكته : فشرده سازي در سيستم هاي پيوسته معكوس پذير ولي در سيستم هاي گسسته معكوس ناپذير است .

خلاصه :

سيگنال تابعي است كه حاوي اطلاعاتي درباره رفتار فيزيكي يك سيستم است.

هر سيگنال دلخواه را مي توان به صورت مجموع دو سيگنال زوج و فرد نوشت.

در بسياري از مسائل با استفاده از شيفت زماني مي توان سيگنال را به صورت زوج يا فرد درآورد.

كوچكترين دوره تناوب سيگنال دوره تناوب اصلي است و فركانس متناسب با دوره تناوب اصلي فركانس اصلي است.

توابعي كه فرم هندسي دارند را مي توان بر حسب توابع ويژه بيان كرد.

توابع ضربه واحد، پله واحد و دوبلت واحد خواص منحصر به فردي دارند.

اگر سيستمي با ورودي محدود و خروجي نامحدود داشتيم اين سيستم ناپايدار است.

سيستم بدون حافظه مطمئنا علي است.

تمرينات آخر فصل :

1 - تعيين كنيد كدام يك از سيگنال هاي زير متناوبند ؟

الف: $x_2[n] = u[n] + u[-n]$

ب: $x_3[n] = \sum \delta[n-4k] - \delta[n-1-4k]$

ج: $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{-j\frac{2\pi}{7}n}$

2 - تعيين كنيد كدام يك از سيگنا ل هاي زير معكو س پذير است؟

الف: $y[n] = x[n]x[n-2]$

ب: $y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$

3 - آيا اين سيستم معكو س پذير است يا نه؟ اگر هست معكوس آن را به دست آوريد.

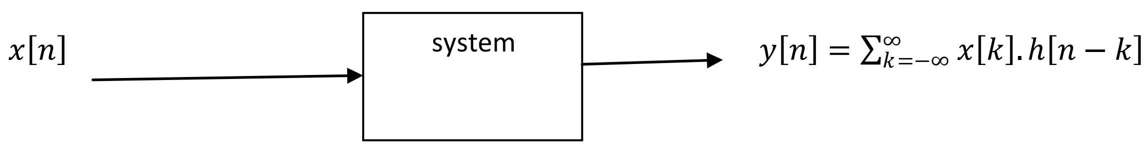
$$y[n] = \begin{cases} x[n-1] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$$

فصل دوم
سيستم هاي خطي و تغيير ناپذير با زمان (LTI)

سيستم هاي LTI داراي خصوصيت مهمي هستند كه اگر پاسخ سيستم به ورودي ضربه را داشته باشيم مي توان پاسخ را به هر ورودي ديگر بدست آوريم .

براساس خاصيت غربالي تابع ضربه مي توان هر سيگنالي را به صورت تركيب خطي از سيگنال هاي ضربه نوشت. بنابراين اگر پاسخ سيستم به تابع ضربه را داشته باشيم مي توان پاسخ سيستم را به هر ورودي ديگر بدست آوريم .

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].\,\delta[n-k]$$



كانولوشن گسسته :

$$\boldsymbol{x[n] * h[n] = h[n] * x[n] => \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].\,h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].\,x[n-k]}$$

در حالت گسسته به دو روش مي توان پاسخ يك سيستم را به يك سيگنال دلخواه بدست آورد :

<u>الف :</u> با استفاده از تعريف كانولوشن

<u>ب :</u> با توجه به پاسخ ضربات سيستم : اگر پاسخ سيستم را داشته باشيم از آنجاييكه سيگنال ورودي را مي توان به صورت مجموعي از توابع ضربه شيفت داده شده نوشت . بايد پاسخ سيستم را به هر كدام از مولفه هاي سيگنال ورودي (*x(t)*) بدست آورد و با هم جمع كرد .

نكته :

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha^k = \frac{\alpha^{m+1} - \alpha^n}{1-\alpha}$$

كانولوشن پيوسته :

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).x(t-\tau)\,d\tau$$

خواص سيستم هاي *LTI* بر اساس پاسخ ضربه :

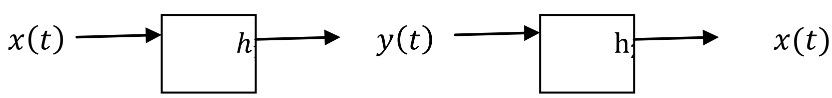
1 - خاصيت بدون حافظه بودن : اگر و فقط اگر $h(t) = k\delta(t)$, $h[n] = k\delta[n]$. اگر *h(t)* به صورت ثابتي از $\delta(t)$ باشد در اين صورت خروجي سيستم در هر لحظه به ورودي سيستم در همان لحظه بستگي خواهد داشت بنابراين سيستم بدون حافظه خواهد بود .

2 - خاصيت عليت : يك سيستم علي است اگر و فقط اگر در حالت پيوسته $t < 0$ $h(t) = 0$ و در حالت گسسته $n < 0$ $h[n] = 0$ باشد .

3 - خاصيت پايداري : يك سيستم پايدار است اگر پاسخ ضربه آن مطلقا انتگرال پذير يا جمع پذير باشد يعني براي حالت پيوسته $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$ و حالت گسسته $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$.

اگر *h(t)* مطلقا انتگرال پذير باشد و *x(t)* محدود باشد (يعني به سمت بي نهايت نرود) در اين صورت كانولوشن اين دو نيز مقدار محدودي خواهد بود و سيستم پايدار خواهد بود .

4 - خاصيت معكوس پذيري :



$$y = x(t) * h_1(t)\ ,\ \ x(t) = y(t) * h_2(t) \quad => \quad h_1(t) * h_2(t) = 1$$

اگر $h_1(t)$ پاسخ ضربه سيستمي باشد و بتوان $h_2(t)$ را به گونه اي پيدا كرد كه عبارت $h_1(t) * h_2(t) = 1$ برقرار باشد در آن صورت سيستم معكوس پذير است و معكوس آن داراي پاسخ ضربه $h_2(t)$ خواهد بود .

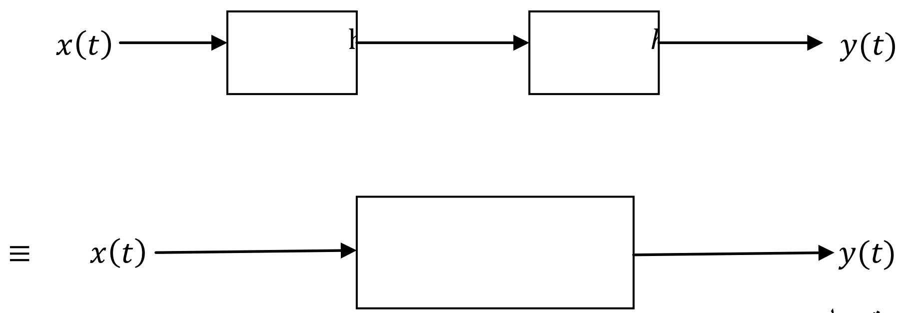
خواص در مرحله کانولوشن :

1 - خاصیت جابجایي : $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

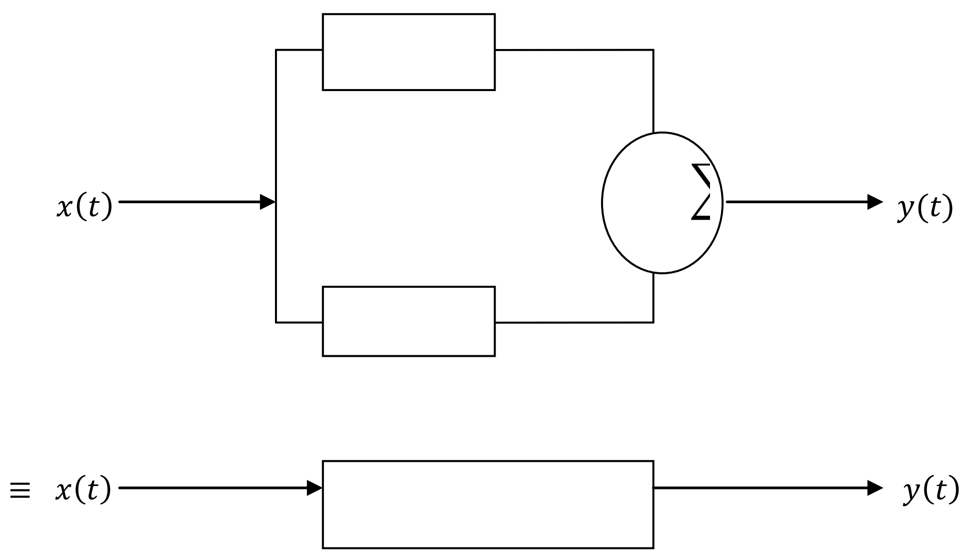
2 - خاصیت شرکت پذیري : $x_1(t) * \big(x_2(t) * x_3(t)\big) = \big(x_1(t) * x_2(t)\big) * x_3(t)$

3 - خاصیت توزیع پذیري : $x_1(t) * \big(x_2(t) + x_3(t)\big) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

الف : سري کردن سیستم ها



ب : موازي کردن سیستم ها



خلاصه :

با توجه به رابطه كانولوشن مي توان خواص جابه جايي پذيري، توزيع پذيري و شركت پذيري را براي سيستم هاي LTI تعريف كرد .

با معرفي تابع تبديل مي توان خواص جديدي براي سيستم هاي LTI بيان كرد .

كانولوشن به دو روش ترسيمي و فرمول قابل محاسبه است.

در معادلات ديفرانسيل، با حل معادله همگن و يافتن جواب خصوصي به ازاي ورودي خاص، جواب كلي سيستم از جمع پاسخ عمومي و پاسخ خصوصي بدست مي آيد.

براي بكارگيري شرايط سكون جهت تعيين پاسخ سيستم LTI به ورودي داده شده، عنوان علي بودن سيستم ضروري است.

با استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم هاي LTI و يا محاسبه پاسخ ضربه سيستم به طور مستقيم مي توان پاسخ به ورودي ضربه را يافت.

سيستم هاي LTI را با استفاده از بلوك دياگرام نيز مي توان نشان داد.

فصل سوم
سري فوريه سيستم هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

هنگامي كه سيگنال ها و سيستم ها در حوزه زمان مورد بررسي قرار مي گيرند براي بدست آوردن پاسخ از عمل كانولوشن استفاده مي شود كه نسبتا پيچيده است . براي تحليل ساده تر مي توان سيگنال ها و سيستم ها را در حوزه فركانس بررسي كرد و بدين ترتيب عمل كانولوشن ره عمل ضرب تبديل مي شود .

سري فوريه: گسسته، پيوسته ← صرفا براي سيگنال هاي متناوب است .

تبديل فوريه: گسسته، پيوسته ← براي همه سيگنال ها (متناوب و غير متناوب)

ثابت مي شود كه هر گاه سيگنال متناوب را مي توان به صورت مجموعي از سينوسي ها نوشت كه يكي از آنها داراي فركانس سيگنال اصلي است و بقيه هارموني هاي آن مي باشند و هر يك از سينوسي ها را در حوزه زمان به صورت يك تابع ضربه به صورت يك تابع ضربه در همان فركانس نمايش مي دهيم . علمي كه اين كار را انجام مي دهد سري فوريه است . در مورد سيگنال هاي غير متناوب مي توان آن را يك سيگنال متناوب در نظر گرفت كه دوره اش به سمت بي نهايت ميل مي كند . در اين صورت فركانس آنها و هارموني هايش به سمت صفر ميل خواهند كرد و يك شكل پيوسته ايجاد خواهد شد كه به آن طيف فركانسي گفته مي شود و با استفاده از تبديل فوريه بدست مي آيد .

سري فوريه : ثابت مي شود كه هر سيگنال $x(t)$ متناوب را مي توان به صورت تر كيبي خطي از سينوسي هاي هارمونيك نوشت .

نكته مهم :

سيگنال هايي كه به صورت $\cos k\omega_0 t$ و $\sin k\omega_0 t$ و $e^{jk\omega_0 t}$ و تركيب خطي از اينها باشند و در يك دوره تناوب از آنها انتگرال گيري كنيم مقدارش صفر مي شود .

سري فوريه هر سيگنالي از روابط زير حاصل مي شود :

$$\boldsymbol{x(t) = \sum_{k=-a}^{\infty} a_k \, . \; e^{jk\omega_0 t}}$$

$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{T}\int_{T} x(t) \, . \; e^{-j\omega_0 t} \, dt}$$

براي بدست آوردن سري فوريه اگر تابع داده شده به صورت تركيبي از سينوسي ها و كسينوسي ها باشد ساده ترين كار اين است كه آنها را به فرم $e^{jk\omega_0 t}$ بسط دهيم و مقادير هر يك از a_k ها را بدست آوريم و اگر به فرم شكل موج يا تابعي غير از سينوسي و كسينوسي باشد از روش اصلي انتگرال گيري مقادير را بدست مي آوريم .

چند فرمول رياضي پركاربرد :

$$cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$$

$$\sin c\, x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

شرايط دريكله : تابع متناوبي داراي سري فوريه است كه در شرايط دريكله صدق كند .

1 - تابع مورد نظر در هر دوره تناوب بايد مطلقا انتگرال پذير باشد .

$$\int_T |x(t)|\, dt < \infty$$

2 - سيگنال در هر پريود داراي تعداد محدودي ناپيوستگي باشد .

3 - سيگنال در هر پريود داراي تعداد محدودي مينيمم و ماكزيمم باشد .

نكته : جابجايي عمودي سيگنال فقط مقدار DC يعني a_0 را تغيير مي دهد .

نكته : ضرب كردن دامنه سيگنال در يك مقدار ثابت باعث مي شود كه ضرايب a_k نيز به همان نسبت افزايش يابد .

خواص سري فوريه :

1 - خطي بودن :

$$x(t) \longrightarrow a_k \quad , \quad y(t) \longrightarrow b_k$$

$$=> \quad Ax(t) + By(t) \longrightarrow Aa_k + Bb_k$$

2 - شيفت زماني :

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow a_k e^{-jk\,\omega_0 t_0}$$

شيفت در حوزه زمان باعث ايجاد اختلاف فاز در حوزه فركانس مي شود . به عنوان نمونه تاخير زماني به اندازه t_0 باعث ايجاد اختلاف فاز به اندازه $-k\omega_0 t_0$ مي شود .

3 - معكوس شدن زمان :

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$x(-t) \longrightarrow a_{-k}$$

در اين حالت ضريب a_k در *x(-t)* برابر $\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jk\omega_0 t}\,dt$ خواهد بود .

4 - فشردگي زمان :

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$x(bt) \longrightarrow a_k$$

$$x(t) = \sum a_k e^{jk\,\omega_0 t} \quad => \quad x(bt) = \sum a_k e^{jk\,\omega_0 (bt)} = \sum a_k e^{jk\,(b\omega_0)t}$$

√ : فركانس از ω_0 به $b\omega_0$ تغيير مي يابد .

√ : دامنه a_k ها تغيير نمي كند و فركانس 2 برابر مي شود .

√ : اگر در حوزه زمان سيگنال فشرده شود در حوزه فركانس فركانس ها زياد مي شود يا بازشدگي در حوزه فركانس رخ مي دهد و اگر سيگنال در حوزه زمان باز شود فركانس هارموني ها كم مي شود يا فشردگي در حوزه فركانس رخ مي دهد .

5 - مزدوج سیگنال : اگر ضرایب j در قسمت موهومي به j– تبدیل شود مزدوج سیگنال بدست مي آید .

$$\begin{cases} x(t) = a + jb \qquad => \qquad x(t) \longrightarrow a_k \\ x^*(t) = a - bj \qquad => \qquad x^*(t) \longrightarrow a^*_{-k} \end{cases}$$

√ : شرط حقیقي بودن سیگنال : $x(t) = x^*(t)$

√ : بنابراین در مورد سیگنال هاي حقیقي اگر اندازه ضرایب سري فوریه در نظر گرفته شود a_{k} ها با $a_{-\mathrm{k}}$ برابر هستند . بنابراین سري فوریه سیگنال هاي حقیقي نسبت به محور y متقارن است . در مورد طیف فرکانسي سیگنال هاي حقیقي که در ادامه گفته مي شود نیز این مسئله صادق است .

6 - قضیه پارسوال :

توان متوسط سیگنال : $P_{ave} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} {a_k}^2$

قضیه پارسوال نشان مي دهد که توان سیگنال در هارموني هاي مختلف آن تقسیم مي شود و هارموني هایي که داراي دامنه بزرگتري هستند انرژي بیشتري از سیگنال را در خود جاي داده اند . بر این اساس مي توان تشخیص داد که بیشترین انرژي سیگنال در چه فرکانسي هایي جمع شده است . مثلا در مورد صداي انسان در حدود *95 %* انرژي در بازي *300* تا *3.4kHz* قرار دارد .

√ : قسمت هاي تیز سیگنال ها بیانگر هارموني هاي بالاي فرکانس است و قسمت هاي هموار سیگنال بیانگر هارموني هاي پایین سیگنال است . اگر از یك فیلتر پایین گذر استفاده کنیم هارموني هاي بالا را حذف مي کند و تیزي هاي سیگنال را مي گیرد .

7 - مشتق گیري : مشتق گیر هارموني هاي بالاي سیگنال را تقویت کرده و هارموني هاي پایین را تضعیف مي کند و همانند یك فیلتر بالا گذر عمل مي کند . در فرکانس هاي بالا پایداري ایجاد مي کند .

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$\frac{d_x(t)}{dt} \longrightarrow jk\omega_0 a_k$$

8 - انتگرال گیر : انتگرال گیر هارموني هاي بالاي سیگنال را تضعیف مي کند و همانند فیلتر پایین گذر عمل مي کند و براي سیگنال هاي سریع نقش کند کنندگي دارد .

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longrightarrow \frac{a_k}{jk\,\omega_0}$$

9 - مقدار *DC* سیگنال :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt$$

10 - کانولوشن پریودیك :

$$x(t) \longrightarrow a_k \quad , \quad y(t) \longrightarrow b_k$$

$$x(t) \circledast y(t) \longrightarrow a_k b_k$$

11 - $x(t) \longrightarrow a_k \quad , \quad y(t) \longrightarrow b_k$

$$x(t)\,.\,y(t) \qquad\qquad \sum_{L=-\infty}^{\infty} a_L b_{L-k}$$

√ : ضریب سري فوریه قطار ضربه : $\mathrm{a_k} = \frac{1}{\mathrm{T}}$

√ : حاصل کانولوشن دو تابع مربعي تابع مثلثي مي شود .

√ : z(t) قطار ضربه (پریودیك $\delta(t)$ با دوره تناوب T)

خلاصه :

سري فوریه، تنها براي توابع متناوب بیان مي شود، توابعي که داراي دوره تناوب اصلي $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $x(t) = x(t+T)$ مي باشند .

در صورتي که بتوان سیگنال را به صورت مجموعه اي از هارموني ها بسط داد، مي توان به این سوال که در یك سیگنال چه فرکانس هایي و با چه قدرتي وجود دارند را پاسخ داد .

پاسخ سیستم *LTI* به نمایي مختلط $e^{\mathrm{jk\omega_0 t}}$ یا به طور کلي $e^{\mathrm{j\omega t}}$ به فرم بسیار ساد ه اي تعریف مي شود.

هرچه هارموني ها بالاتر باشد فرکانس ها بالاتر است و برعکس هر چه هارموني ها پایینتر باشد فرکانس ها پایین تر است.

اگر سیگنالي در هارموني هاي بالا ضرایب سري فوریه بزرگتري داشته باشد سیگنال فرکانس بالا است و برعکس اگر سیگنالي در هارموني هاي پایین ضرایب سري فوریه بزرگتري داشته باشد سیگنال فرکانس پایین است.

به شرط برقرار بودن شرایط دیریکله همگرایي سري فوریه قابل بررسي است.

مجوعه ضرايب a_k را ضرايب سري فوريه يا ضرايب طيفي $x(t)$ مي نامند . اين ضرايب در حالت كلي مختلط هستند و اندازه آنها نشا ندهنده قدرت سيگنال در هارموني متناظر است .ضريب a_0 مولفه DC يا ثابت سيگنال است .

با دانستن خواص سري فوريه، در برخي مسائل براي پيداكردن ضرايب سري فوريه لزومي به استفاده از تعريف گفته شده براي سري فوريه نيست.

اگر ورودي ضرايب فوريه a_k باشند، خروجي $b_k e^{jk\omega_0}$ مي باشد .مي توان تعدادي از ورود يها را از خروجي حذف كرد .

اگر سيستم ورودي سيستم LTI متناوب باشد، خروجي نيز با همان دوره تناوب متناوب خواهد بود.

با توجه به ورودي و خروجي سيستم مي توان نوع فيلتر و شكل آن را بدست آورد.

فصل چهارم
تبديل فوريه

سري فوريه براي سيگنال هاي متناوب است . اگر در نظر بگيريم دوره تناوب يك سيگنال به سمت بي نهايت ميل كند فركانس آن به سمت صفر ميل خواهد كرد . براي سيگنال هاي غير پريوديك مي توان آنها را سيگنال پريوديك با دوره در نظر گرفت بنابراين ضرايب $k\omega_0$ به هم چسبيده و تشكيل طيف فركانسي خواهد داد . ضرايب سري فوريه به ما مي گويد كه مقدار سيگنال در هر فركانس چه اندازه است .

تبديل فوريه هر سيگنالي از روابط زير حاصل مي شود :

$$\boldsymbol{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \,.\, e^{-j\omega t}\, dt}$$

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \,.\, e^{j\omega t}\, dt}$$

براساس رابطه *x(t)* فوق مشخص مي شود كه در هر فركانسي چگالي فركانسي از رابطه $\int \frac{1}{2\pi}\ X(\omega)\, d\omega$ بدست مي آيد .

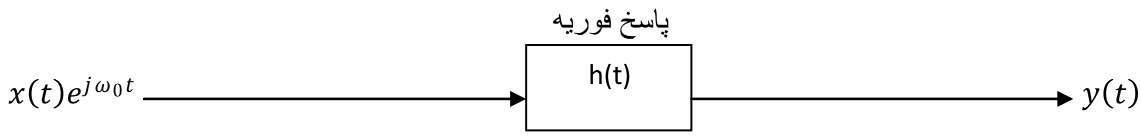
√ : تمام سيگنال ها چه پريوديك و چه غير پريوديك تبديل فوريه دارند .

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \,.\, e^{-j\omega t}\ dt \quad => \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \,.\, e^{-j2\pi f t}\ dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,.\, e^{j\omega t}\, d\omega \ , \qquad \omega = 2\pi f \ ,$$

$$d\omega = 2\pi df \quad => \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f)\,.\, e^{j2\pi ft}\, df$$

بدست آوردن پاسخ هر سیستمي به سیگنال پایه اي $e^{j\omega_0 t}$:



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,.\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,.\, h(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0(t-\tau)} h(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega_0 \tau} h(\tau)\, d\tau = e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 \tau} h(\tau)\, d\tau$$

$$=> \quad \boldsymbol{y(t) = e^{j\omega_0 t} H(\omega_0)}$$

براساس رابطه خروجي هر سیستمي به سیگنال پایه اي $e^{j\omega_0 t}$ برابر است با همان سیگنال ضربدر $H(\omega_0)$ است که $H(\omega_0)$ تبدیل فوریه پاسخ ضربه به ازا فرکانس ω_0 مي باشد . از آنجاییکه اکثر سیگنال ها را مي توان به صورت ترکیبي از سیگنال پایه اي نوشت بنابراین خروجي کل سیستم به راحتي قابل محاسبه خواهد بود .

شرایط دریکله براي تبدیلات فوریه :

1 - مطلقا انتگرال پذیر باشد : $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$
2 - در هر فاصله تعداد محدودي مینیمم و ماکزیمم داشته باشد .
3 - تعداد ناپیوستگي آن محدود باشد .

نکته : $\alpha > 0$ و $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + j\omega^2} \longleftrightarrow e^{-\alpha|t|}$

نکته : در سیستم هاي LTI پاسخ سیستم به ورودي $\cos\omega_0 t$ یا $\sin\omega_0 t$ و هر گونه ترکیب خطي آنها به فرم $H(\omega_0)\,.\,\cos\omega_0 t$ است .

نکته :

$$x(t) = s(t) \quad => \quad X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{0}\, dt = 1$$

خواص تبديل فوريه :

1 - خطي بودن :

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

2 - شيفت زماني :

$$if \quad x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow X_1(\omega) = e^{-j\omega t_0}\ X(\omega)$$

تاخير زماني به اندازه t_0 در حوزه زمان باعث ايجاد اختلاف فاز به اندازه $-\omega t_0$ در حوزه فركانس مي شود . (اگر يك سيگنال را در حوزه زمان جابجا كنيم در حوزه فركانس اختلاف فاز پيدا مي كند)

3 - مزدوج :

$$if \quad x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-\omega)$$

شرط حقيقي بودن سيگنال : قسمت موهومي صفر باشد . $x(t) = x^*(t)$

نكته : براساس خاصيت مزدوج اگر يك سيگنال حقيقي باشد روابط $X(\omega) = X^*(-\omega)$, $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$, $\measuredangle X(\omega) = -\measuredangle X(-\omega)$ برقرار خواهد بود بنابراين اندازه تبديل فوريه يك تابع زوج خواهد بود و فاز آن يك تابع فرد خواهد بود . از آنجاييكه تمام سيگنال هاي طبيعي حقيقي هستند بنابراين تبديل فوريه آنها يا طيف فركانسي آنها زوج خواهد بود .

4 - مشتق :

$$x(t) \longleftrightarrow x(f)$$

$$x'(t) \longleftrightarrow j\omega X(\omega)$$

با افزايش مقدار ω به دليل وجود ضريب $j\omega$ اندازه $X(\omega)$ بدست آمده زياد مي شود يعني مشتق گير همانند يك فيلتر بالاگذر عمل مي كند . سيگنال هايي كه تغييرات ناگهاني دارند نبايد وارد مشتق گير شوند زيرا تغييرات ناگهاني معادل فركانس هاي زياد است و در مشتق گير به شدت تقويت مي شود و خروجي بي نهايت يا اصطلاحا ناپايدار مي شود .

5 - انتگرال گير :

$$\int x(t)\,dt \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

تابع انتگرال گير فركانس هاي بالا را تضعيف و فركانس هاي پايين را تقئيت مي كند و در حقيقت يك فيلتر پايين گذر است .

6 - دوگاني :

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \quad , \quad X(\omega)=\int x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

مهم : $\begin{cases} \boldsymbol{f(t)} \qquad \boldsymbol{g(\omega)} \\ \\ \boldsymbol{g(\omega)} \qquad \boldsymbol{2\pi f(-\omega)} \end{cases}$

7 - شيفت فركانسي :

$$X(\omega) \xleftrightarrow{f^{-1}} x(t)$$

$$X(\omega-\omega_0) \xleftrightarrow{f^{-1}} e^{j\omega_0 t}x(t)$$

8 - مشتق فركانسي :

$$X(\omega) \xleftrightarrow{f^{-1}} x(t)$$

$$\frac{d_X(\omega)}{d\omega} \xleftrightarrow{f^{-1}} -jtx(t)$$

9 - انتگرال فركانسي :

$$X(\omega) \xleftrightarrow{f^{-1}} x(t)$$

$$\int X(\omega)\,d\omega \xleftrightarrow{f^{-1}} \frac{x(t)}{-jt}+\pi X(0)\delta(t)$$

10 - قضيه پارسوال :

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega$$

براساس قضيه پارسوال انرژي سيگنال در فركانس هاي مربوط به طيف فركانسي آن سيگنال پخش مي شود و فركانس هايي كه نقش بيشتري در طيف فركانسي دارند داراي انرژي بيشتري هستند .

كانولوشن :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{h(t)}} \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

$$X(\omega) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow Y(\omega)=X(\omega)\,.\,H(\omega)$$

اگر h(t) پاسخ ضربه کانال باشد به تبدیل فوریه آن یعني $H(\omega)$ <u>پاسخ فرکانسي</u> سیستم گفته مي شود .

$x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t)$

$X(\omega) \longrightarrow \boxed{j} \longrightarrow Y(\omega)$

پاسخ فرکانسي يك سیستم مشتق گیر برابر است با $j\omega$.

نکته : $\delta(t-t_0) \xleftrightarrow{f^{-1}} e^{-j\omega_0 t}$, $\delta(t) \xleftrightarrow{f^{-1}} 1$

$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{سیستم تاخیر}} \longrightarrow x(t-t_0)$

$X(\omega) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow X(\omega)e^{-j\omega_0 t_0}$

سیستم تاخیري :

$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta} \longrightarrow x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

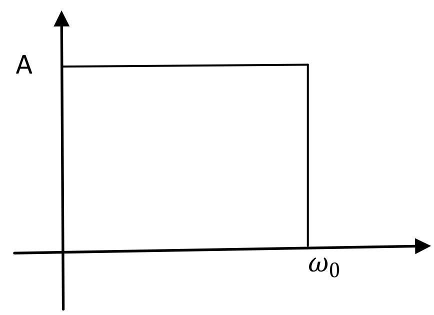
$X(\omega) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$

خاصیت مدولاسیون :

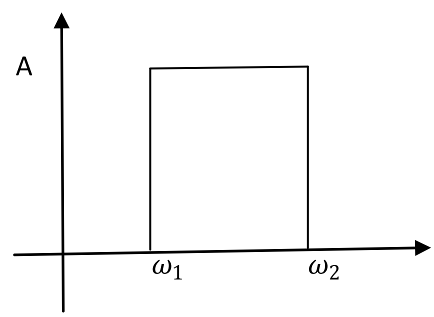
$$x_1(t)\,.\,x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

فيلتر ها : سيستم هايي هستند كه برخي از بازه هاي فركانسي سيگنال را حذف كرده و برخي از بازه ها را عبور مي دهد .

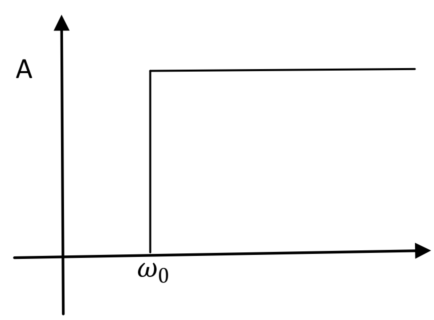
فيلتر پايين گذر (LPF) : اين فيلتر فركانس هاي كمتر از فركانس ω_0 را عبور داده و آنها را با بهره A تقويت مي كند و فركانس هاي بالاتر از ω_0 را حذف مي كند .



فيلتر ميانگذر (BPF) : فيلتر ميانگذر به فركانس هاي قرار گرفته در بازه ω_2 و ω_1 اجازه عبور مي دهد و بقيه فركانس ها را حذف مي كند و فركانس هاي موجود در بازه ω_2 و ω_1 با بهره A تقويت مي كند .



فيلتر بالا گذر (HPF) : فيلتر بالاگذر به فركانس هاي بالاتر از ω_0 اجازه عبور مي دهد و فركانس هاي پايينتر را قطع مي كند .



√ : براي داشتن يك فيلتر پايين گذر ايده آل در حوزه فركانس يك تابع پالسي شكل داشته باشيم بنابراين در حوزه زمان بايد h(t) يك تابع sinc به زمان هاي آينده بستگي دارد غير علي است و غير قابل ساخت مي باشد .

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad : \text{ضريب كيفيت}$$

√ : در حالت واقعي براي فيلتر ها فركانس قطع اگر بهره فيلتر پايين گذري در فركانس صفر (كمترين فركانس) كه حداقل فركانس است برابر A باشد با افزايش فركانس بهره كاهش مي يابد . جايي كه بهره $\frac{1}{\sqrt{2}}$ يا 0.7 مقدار ماكزيمم به عنوان فركانس قطع شناخته مي شود و اصطلاحا فركانس هاي بالاتر از آنرا حذف شده در نظر مي گيرد .

√ : جايي كه دامنه سيگنال كه معمولا ولتاژ و جريان $\frac{1}{\sqrt{2}}$ شود توان سيگنال نصف مي شود بنابراين به اين فركانس فركانس قطع نصف توان يا فركانس قطع $3dB$ گفته مي شود .

√ : اگر سيگنال x(t) حقيقي و زوج باشد تبديل فوريه آن حقيقي و زوج خواهد بود بنابراين فاز آن صفر خواهد بود .

خلاصه :

قبل از بدست آوردن تبديل فوريه بايد با استفاده از شرايط وجود تبديل فوريه (دريكله) را بررسي كرد.

در تبديل فوريه نيز با توجه به اندازه و فاز مي توان نوع فيلتر را تشخيص داد.

با دانستن خواص تبديل فوريه، برخي مسائل به روش ساده تري قابل حل است.

تابع $\cos\omega_0 t$ جزو توابعي است كه به‌كمك خواص، تبديل فوريه اش بدست مي آيد و با توجه به شكل حاصل، تبديل فوريه آن مطلقا حقيقي و زوج است .همچنين با توجه به شكل بدست آمده براي $\sin\omega_0 t$ ، تبديل فوريه آن مطلقا موهومي و فرد است .

اگر f(t) سيگنالي زوج و حقيقي باشد ، $F(j\omega)$ مطلقا حقيقي و زوج و همچنين اگر f(t) سيگنالي فرد و حقيقي باشد، $F(j\omega)$ مطلقا موهومي و فرد است.

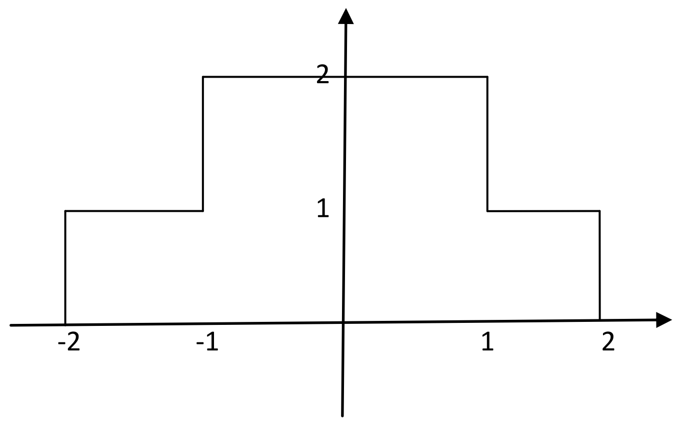
اگر سيگنالي متناوب باشد به اين معني است كه داراي سري فوريه است .تبديل فوريه سيگنال متناوب را به طور مستقيم محاسبه نمي كنيم .ابتدا سري فوريه تابع را به دست آورده، سپس از سري فوريه تبديل فوريه را به دست مي آوريم.

مهمترين سيگنال متناوبي كه مي شناسيم قطار ضربه است.

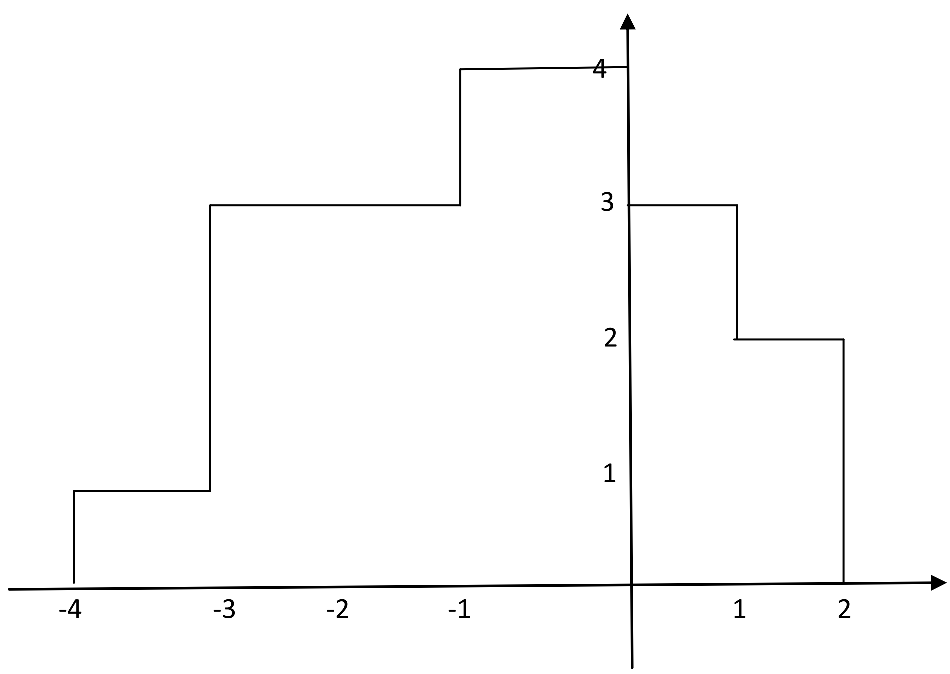
در نمونه برداري سيگنال، تابع x(t) در قطار ضربه ضرب مي شود .با توجه به خواص بيان شده براي تبديل فوريه، تبديل فوريه حاصلضرب دو تابع برابر با كانولوشن آنهاست.

تمرینات آخر فصل :

1 - تبدیل فوریه تابع زیر را بیابید ؟



2 - تبدیل فوریه تابع زیر را بیابید ؟



3 - تبدیل فوریه $\cos at$ و طیف فرکانسي $\cos \omega t$ را رسم کنید ؟

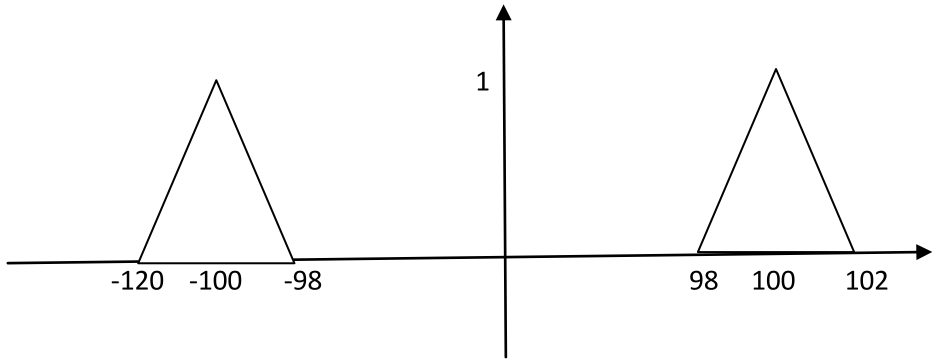
4 - تبدیل فوریه $\sin at$ و طیف فرکانسي $\sin \omega t$ را رسم کنید ؟

5 - تبدیل فوریه و طیف توابع زیر را بیابید و به قسمتهاي زیر پاسخ دهید ؟

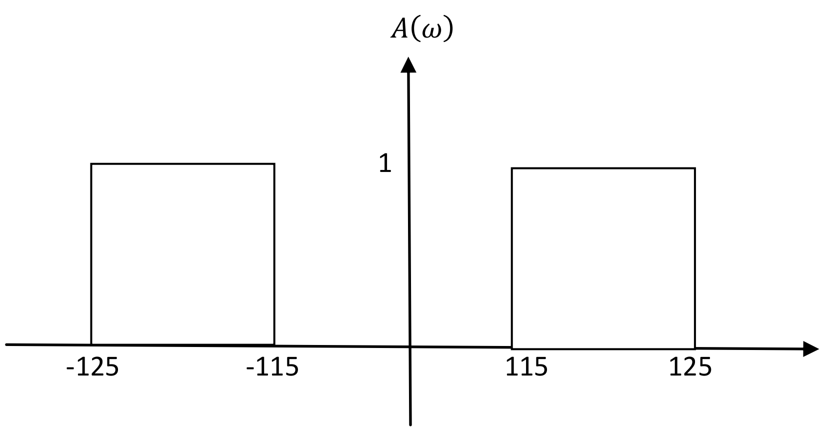
الف : $\cos 100t$

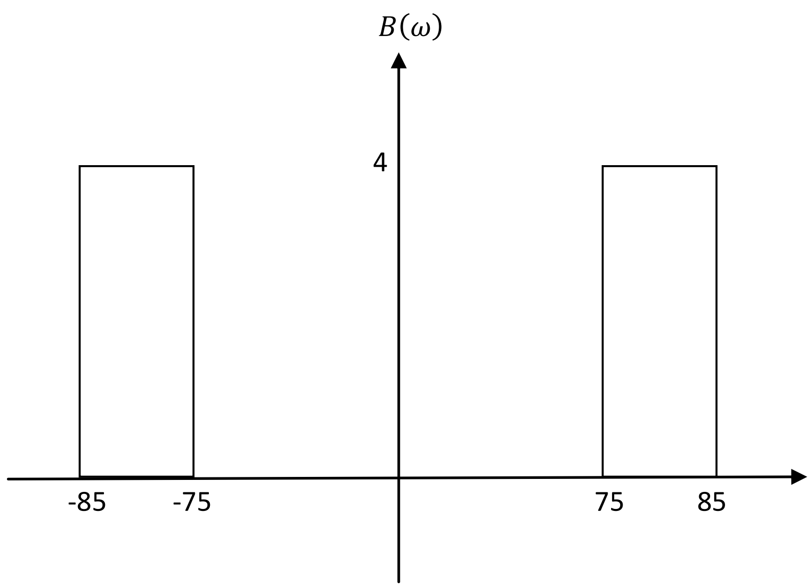
ب : $y(t) = \cos 100t \,.\, \cos 20t$

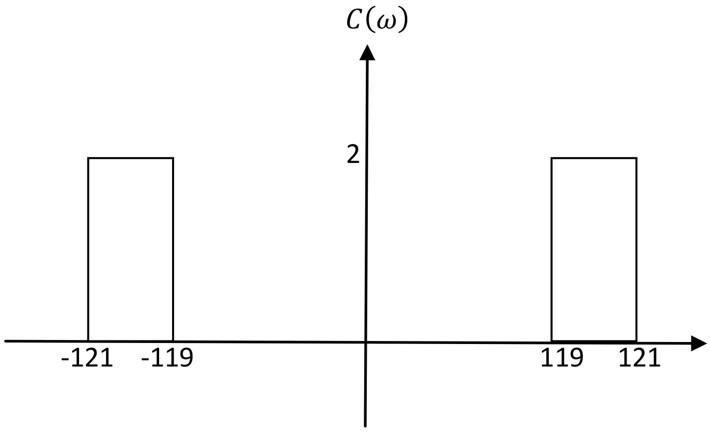
ج : $z(t) = h(t)\cos 20t$ و $H(\omega)$ به فرم زیر است . $z(\omega)$ را بیابید ؟



د : اگر سیگنال z(t) از فیلتر هاي A , B , C عبور کند خروجي آن چگونه است ؟

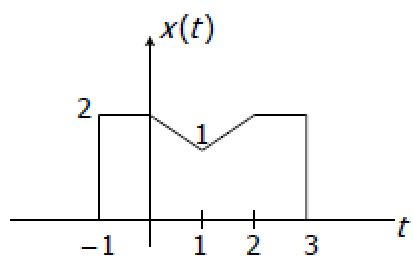






6 - اگر $g(t) = f(t)\cos 20t$ و $F(\omega) = \frac{\omega^2}{3+j\omega}$ باشد $G(\omega)$ را بیابید ؟

7 - سیگنال x(t) به فرم زیر است بدون بدست آوردن $X(\omega)$ به سؤالات زیر پاسخ دهید ؟



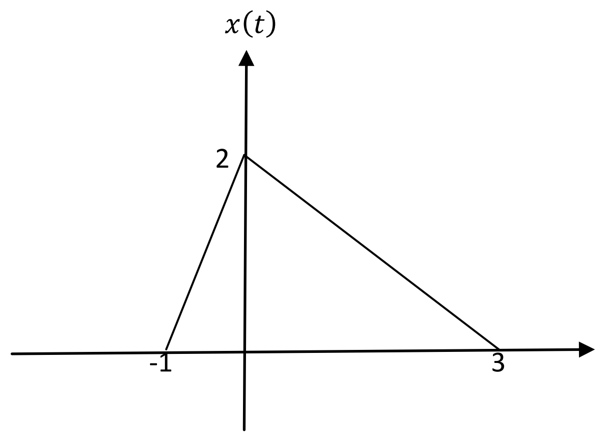
الف : مقدار $X(0)$ را بدست آورید ؟

ب : $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, d\omega$ ؟

ج : فاز $X(\omega)$ را بدست آورید ($\measuredangle X(\omega)$) ؟

تمرينات كلي سيگنال و سيستم

1 - اگر سيگنال x(t) به فرم روبرو باشد سيگنال هاي زير را بيابيد ؟

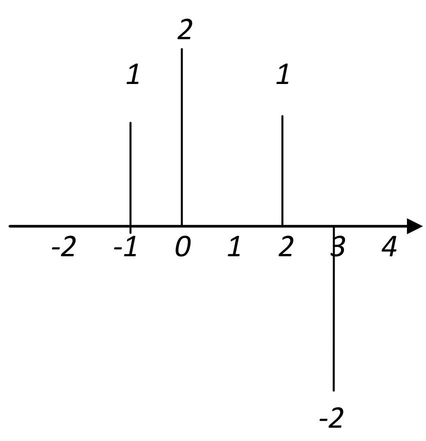


الف : $\frac{1}{2}x(\frac{t}{2}+5)$

ب : $\frac{3}{4}x(\frac{t+5}{2})$

ج : $x(t-1)u(t)$

2 - اگر سيگنال *x[n]* به فرم روبرو باشد سيگنال هاي زير را بيابيد ؟



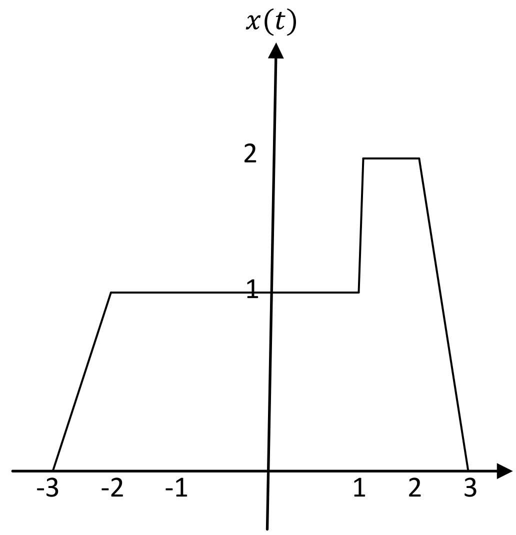
الف : $x[-n]u[n]$

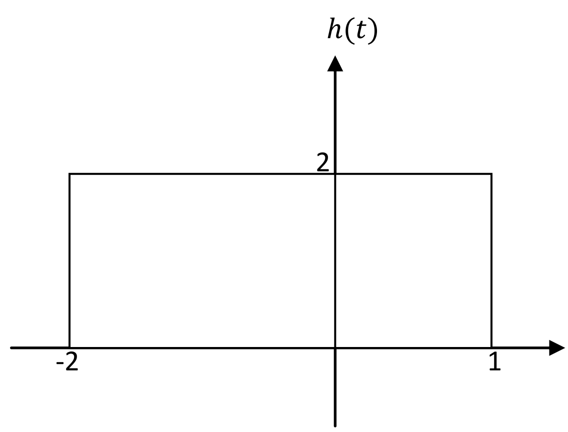
ب : $x[-n+3]$

ج : $3x\left[\frac{n+3}{2}\right]$

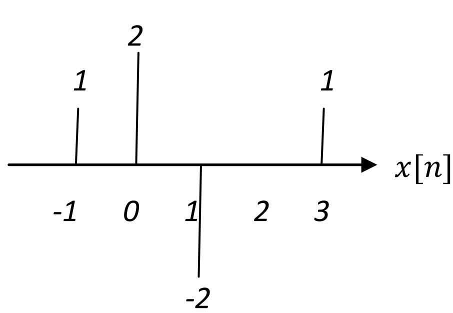
د : $x\left[\frac{n+5}{3}\right]u[-n]$

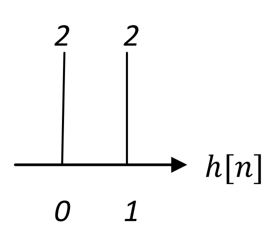
3 - اگر سيگنال $x(t)$ و پاسخ ضربه كانالي به فرم روبرو باشد مقدار $y(t)$ را در لحظه $t=2$ بدست آوريد ؟





4 - اگر سيگنال $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ به فرم زير باشد خروجي $y[n]$ را بيابيد ؟





5 - در سيستم زير a , b , c جه شرايطي بايد داشته باشد تا :

الف : علي باشد ؟

ب : معكوس پذير باشد ؟

ج : خطي باشد ؟

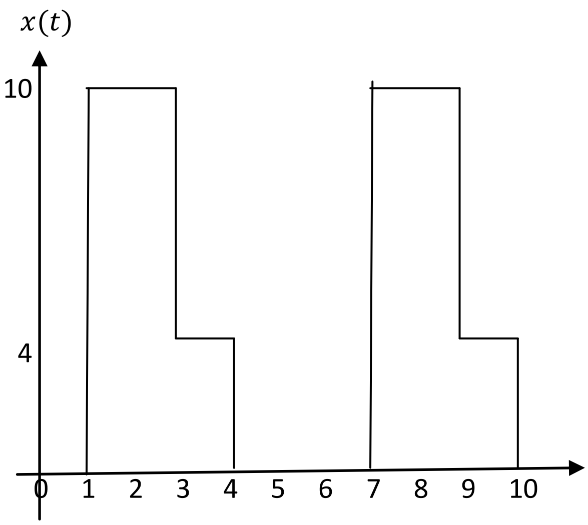
$$y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cx[n+1]$$

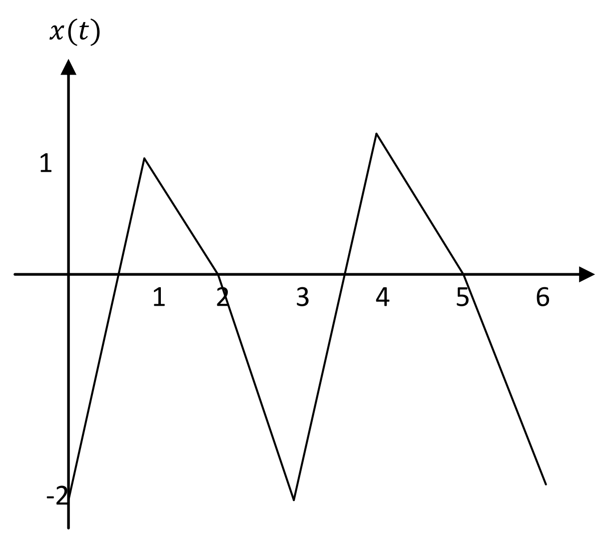
6 - سري فوريه توابع زير را بدست آوريد ؟

الف : $\cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 6\omega_0 t + 3cos^2 \omega_0 t$

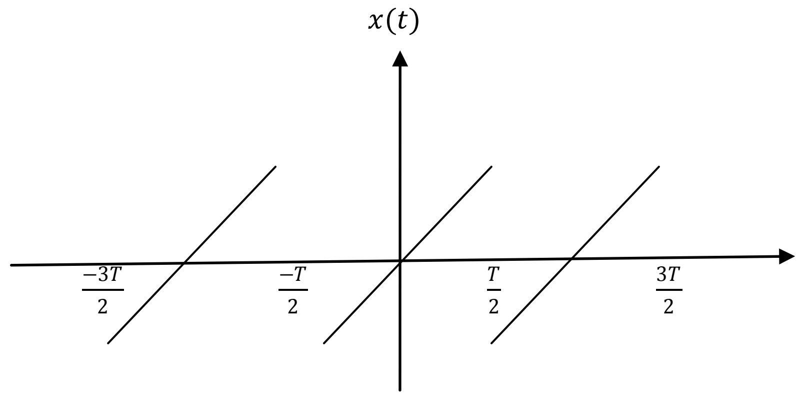
ب : $\cos 2\omega_0 t \ . \ \sin 5\omega_0 t$

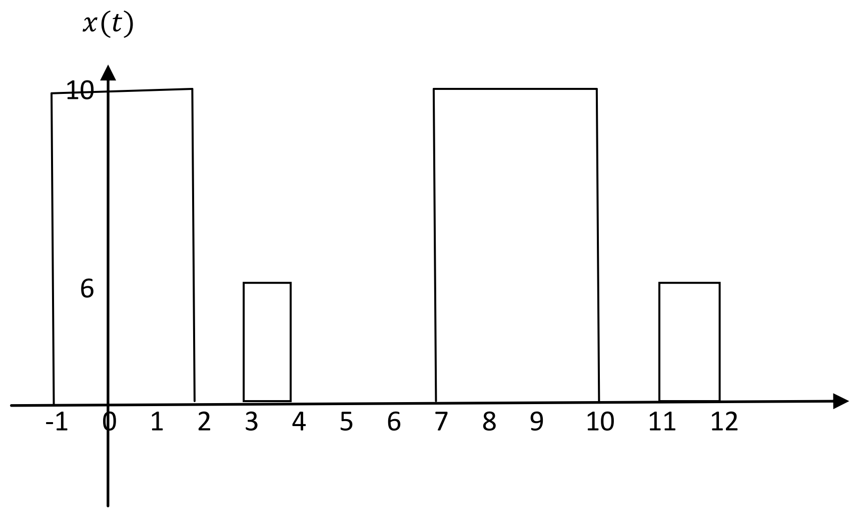
7 - ضرايب سري فوريه تابع روبرو را بيابيد ؟





8 - هارموني سوم سيگنال هاي زير را بيابيد ؟





9 - يك سيگنال داراي ضرايب سري فوريه $a_0 = \frac{1}{4}$ و $a_{-2} = \frac{1}{2j}$ و $a_2 = \frac{1}{2j}$ و $a_4 = \frac{1}{\sqrt{3}\ j}$ و $a_{-4} = \frac{1}{\sqrt{3}\ j}$

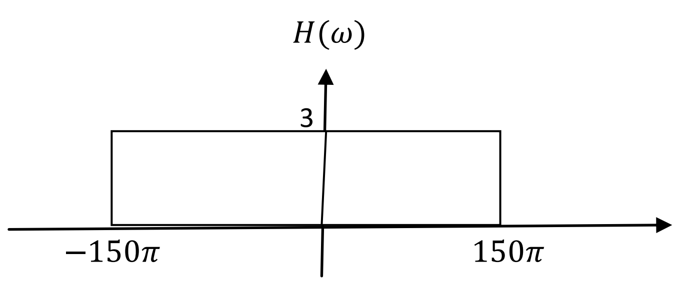
است و بقيه a_k ها صفر است .

الف : مقدار متوسط سيگنال چقدر است ؟

ب : توان متوسط سيگنال چقدر است ؟

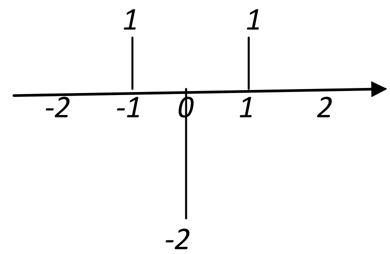
10 - سيگنال به فرم $x(t) = \cos 100\pi\, t + \cos 400\pi\, t + cos^2 100\pi t$ از فيلتر زير عبور مي كند

خروجي چه خواهد شد ؟

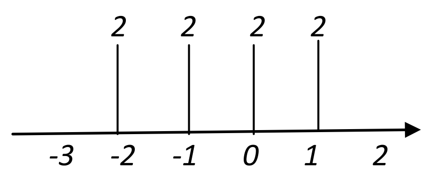


11- الف : سيستم $\mathrm{h}_2[n]$ به فرم زير است . اين سيستم را از لحاظ خطي بودن – پايداري – معكوس پذيري و علي بودن چگونه است با ذكر دليل توضيح دهيد ؟

$h_2[n]$



ب : اگر ورودي اين سيستم به فرم زير باشد اندازه نمونه هاي 1 و 1- خروجي يعني *y[1]* و *y[-1]* را بدست آوريد ؟

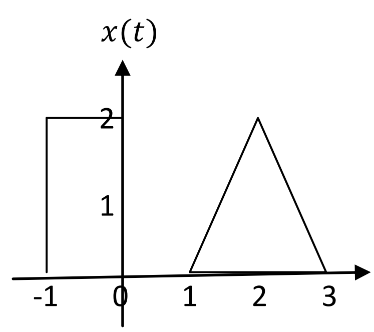


12- اگر *x(t)* به فرم روبرو باشد شكل موج هاي زير را رسم كنيد ؟

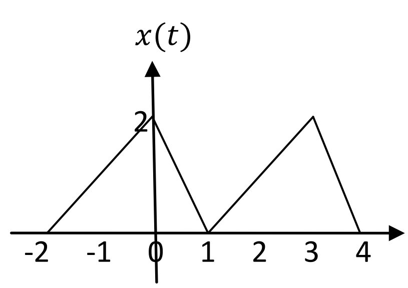
الف : $x(\frac{t-3}{2})$

ب : $2x(\frac{t}{2}-3)$

ج : قسمت زوج سيگنال *x(t)* را رسم كنيد .



13- ضرايب سري فوريه a_{k} را براي شكل زير بدست آوريد ؟

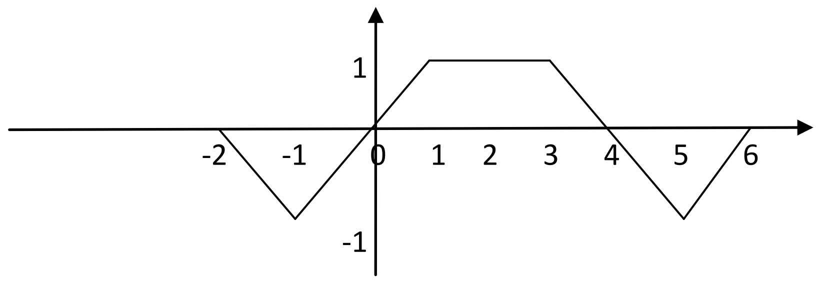


14- بدون بدست آوردن تبدیل فوریه شکل x(t) روبرو مقادیر زیر را بدست آورید :

الف : فاز $X(j\omega)$

ب : $X(0)$

ج : $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x(t)\,dt}$



15- الف : تبدیل فوریه تابع $x(t) = 2e^{-3t}u(t) + e^{-4t}u(t)$ را بیابید ؟

ب : با در نظر گرفتن x(t) تبدیل فوریه $y(t) = \frac{d_x t}{dt}$ را بیابید ؟

ج : بر اساس x(t) تبدیل فوریه $z(t) = x(t)[\sin 2t]$ را بیابید ؟

16- طیف فرکانسي $V(j\omega)$ را در نظر بگیرید :

الف : اگر سیگنال v(t) از فیلتر پایین گذر با پهناي باند 5w عبور کند خروجي آنرا $R(j\omega)$ نامیده و طیف آنرا رسم کنید ؟

ب : در نظر بگیرید سیگنال r(t) که عکس تبدیل فوریه $R(j\omega)$ است وارد يك میکسر شده که خروجي آن به فرم $h(t) = r(t)\cos 3wt$ است شده است طیف $H(j\omega)$ را رسم کنید ؟

ج : مجددا سیگنال h(t) وارد يك فیلتر پایین گذر با پهناي باند 2w شده است خروجي آنرا y(t) در نظر گرفته و $Y(j\omega)$ را رسم کنید ؟