Engineering Mathemathis

Dr. Karimi - Nasir

Subject: Date:

«بسم الله الرحمن الرحیم»

«به نام خالق هستی»

«ریاضیات مهندسی»

«نام استاد: جناب آقای کریمی»

Pilavaran

ریاضیات مهندسی ←
- فوریه ** ←
  - سری فوریه *
  - انتگرال فوریه
  - تبدیل فوریه
- توابع مختلط ***
- معادلات با مشتقات جزئی *

فرمول سری فوریه

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\left(L = \frac{T}{2} \right)$$

خاصیت تعامد مثلثاتی

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$$ ← وقتی متعامد هستند

ضرب داخلی بردارها باید صفر باشد

$$\int_{(T)} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases}$$

Subject: Date:

$$\int_{(T)} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases}$$

$$\int_{(T)} \sin nx \cos mx \, dx = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\frac{\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \end{aligned}}$$

نکته) تابع فرد ← b_n داریم

تابع زوج ← b_n نداریم

Pilavaran

2

Subject: دوره تناوب ؟!؟ Date:

$y = \sin x \quad 0 \leq x \leq 2\pi$ نه زوج نه فرد

متناوب نیست

$y = x \quad 0 < x < 1$ X نه زوج نه فرد

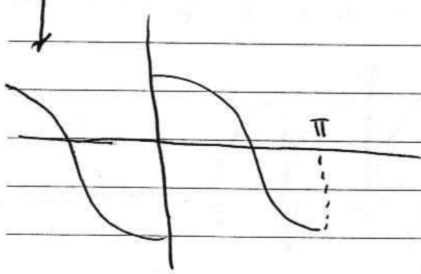
$$y = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$ فرد متناوب نیست

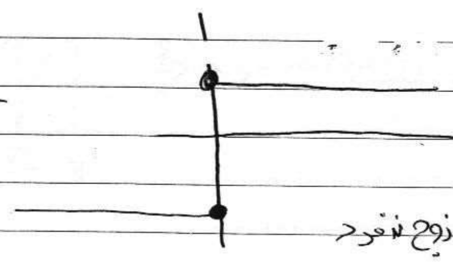
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$ نه زوج نه فرد

$f(x) = x - [x]$ $T=1$ نه زوج نه فرد

دوره تناوب

$f(x) = e^{-x}$ $x > 0$ نه زوج نه فرد متناوب نیست





نه زوج نه فرد

توابع به سه گروه کلی تقسیم می کنیم

۱- توابعی که ذاتاً متناوب هستند

$f(x) = \sin x$

$f(x) = \cos x$

$'' = \tan x$

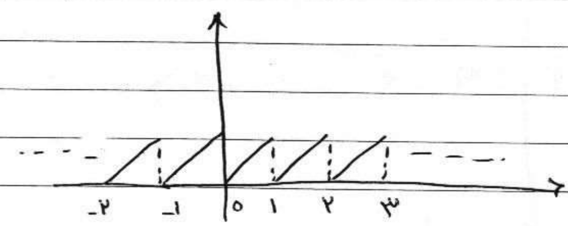
$'' = x - [x]$

⋮

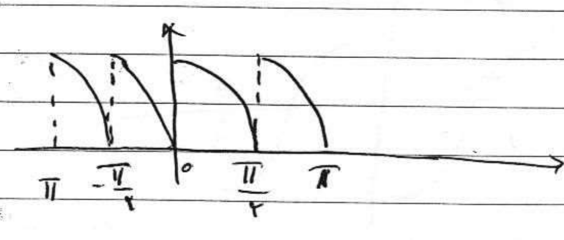
٪۹۹

۲) توابعی که ذاتاً متناوب نمی باشند اما می توان آنها را بصورت مصنوعی متناوب کرده

$y = x \quad 0 < x < 1$



$y = \cos x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$



هر تابعی که در بازه محدود $[a,b]$ تعریف شده باشد به صورت مصنوعی می توان آنرا متناوب کرد

۳) توابعی که ذاتاً متناوب نمی‌باشند و آن را بصورت تصنعی نمی‌توان متناوب کرد. (سری فوریه ندارند)

$y=e^{-x} \quad x>0$

$y=x$

$y=e^{x}$

$\vdots$

فرد $f(x) \Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\,dx=0$

زوج $f(x) \Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$

فرد $f(x) \Rightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_n=0 \\ b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

زوج $f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx \\ a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$

$b_n = 0 \Leftarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$

۱- تشخیص دوره تناوب (T)

۲- تشخیص بازه انتگرال سری

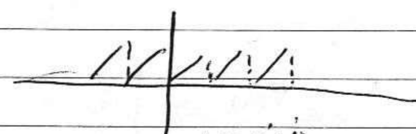
سری فوریه توابع زیر را بدست آورید.

$y = \sin x \qquad 0 < x < 1$

$y = \sin x \qquad 0 < x < \pi$

$y = \sin x \qquad 0 < x < 2\pi$

الف) $T = 1 \rightarrow L = \frac{1}{2}$



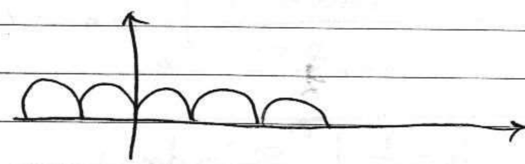
نه زوج نه فرد

$a_0 = \frac{1}{L} \int_{(T)} f(x)\,dx = 2\int_0^1 \sin x\,dx = 2(1-\cos 1)$

$a_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \sin x \cos 2n\pi x\,dx = \frac{1-\cos 1}{2n\pi+1} + \frac{1-\cos 1}{2n\pi-1}$

$$b_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \sin x \sin 2n\pi x \, dx = \frac{\sin 1}{2n\pi - 1} - \frac{\sin 1}{2n\pi + 1}$$

ب) $T = \pi$



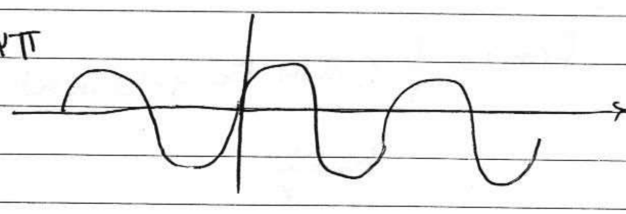
تابع زوج $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 4n\cancel{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi}$$

$$\left(\frac{1}{1+2\pi} + \frac{1}{1-2\pi} \right)$$

ج) $T = 2\pi$



فرد $\Leftarrow a_0 = a_n = 0$

Subject: Date:

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right.$$

$$\left.\frac{\sin(n+1)}{n+1}\right|_0^{\pi} = 0 \qquad n \neq 1$$

$$b_1 = \frac{۲}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^۲ x\, dx = 1 \qquad n = 1$$

$$\cancel{\frac{a_0}{۲}} + \sum a_n \cancel{\cos nx} + b_n \sin nx$$

$$= \sin x$$

$$f(x) = \cos x \sin ۲x \qquad 0 < x < ۲\pi$$

$$L = \pi \qquad a_n \cos nx$$

$$b_n \quad \sin nx$$

$$f(x) = \frac{1}{۲}(\sin ۳x + \sin x)$$

$$b_۳ = \frac{1}{۲}$$

$$b_1 = \frac{1}{۲}$$

سایر ضرایب $= 0$

Subject: Date:

$f(x) = \cos^2 x$

$T = 2\pi \quad f(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2}$

سایر ضرایب $= 0$

$T = 4\pi \Rightarrow f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\cos \frac{n\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} x$

$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \\ a_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$

سایر ضرایب $= 0$

اگر قرینه نیم پریود اول را نسبت به $\frac{a_0}{2}$ بدست آوریم و به اندازه نیم

پریود به سمت راست حرکت دهیم و بر نیم پریود دوم منطبق شود شرط

فرد، فقط شامل هارمونیکهای فرد است

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\text{جمع جبری مساحتها}}{\text{دوره تناوب}}$$

تعمیم دامنه:

$y=f(x) \qquad 0<x<L$

بسط سینوسی

$$\begin{cases} a_0 = a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

بسط کسینوسی

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

$b_n = 0$

بسط سینوسی تابع $f(x)=\cos x$ ، $0<x<\pi$ را بدست آورید؟

$a_0 = a_n = 0$

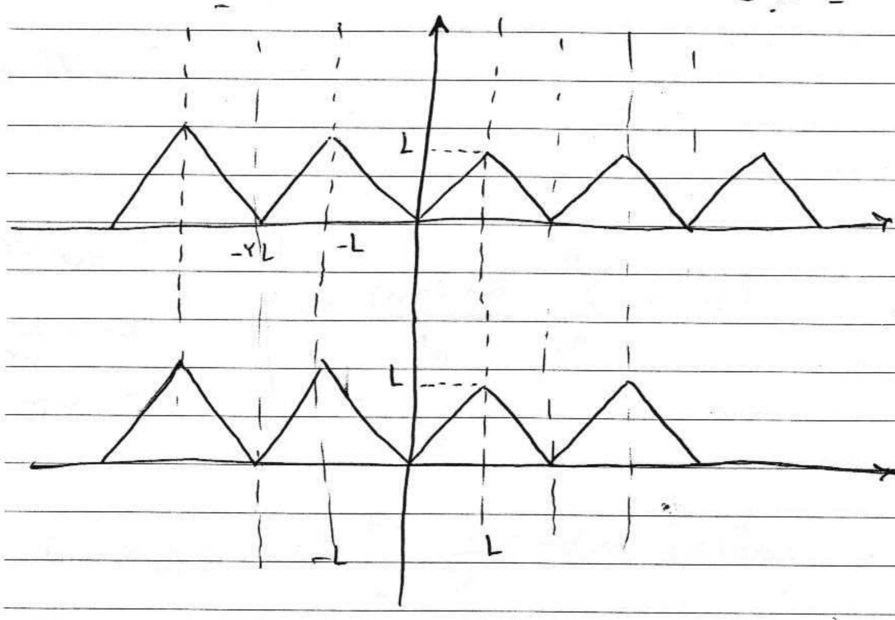
$L=\pi \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx\,dx$

Subject: Date:

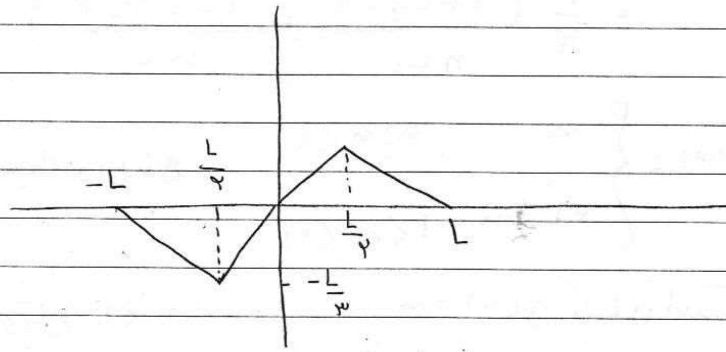
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos\pi}{n+1} + \frac{1+\cos\pi}{n-1}\right)$$

بررسی کنید بسط فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x & 0<x<L \\ 2L-x & L<x<2L \end{cases}$ با L

بسط کسینوسی تابع $0<x<2L$ با $g(x)=x$ یکسان است.



(برق ۸۴) ص ۹۸ کتاب



ص ۹۹ ← ۷۴

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \Rightarrow$$

۱- فرد $f(x)$

۲- $b_n = \frac{1}{n^2}$

۳- $T = 2\pi$

فرد $f(x) \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\sin x$$

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x)$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

$$I = \int_0^{\pi} f(x)\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)dx =$$

$$\frac{3}{4}\underbrace{\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx}_{\frac{\pi}{2}b_1 \to 1} - \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{\pi} f(x)\sin 3x\,dx}_{\frac{\pi}{2}b_3 \to \frac{1}{9}}$$

$$\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\times\frac{1}{9} = \frac{\pi}{8}\left(3 - \frac{1}{9}\right) = \frac{13\pi}{36}$$

$$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2$$ ص ۹۸ تست (۷۱)

ص ۹۹ تست ۷۳

$$H(f(x)) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$H(2-x) = \begin{cases} 1 & 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \\ 0 & 2-x < 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

$a_0 = 0$

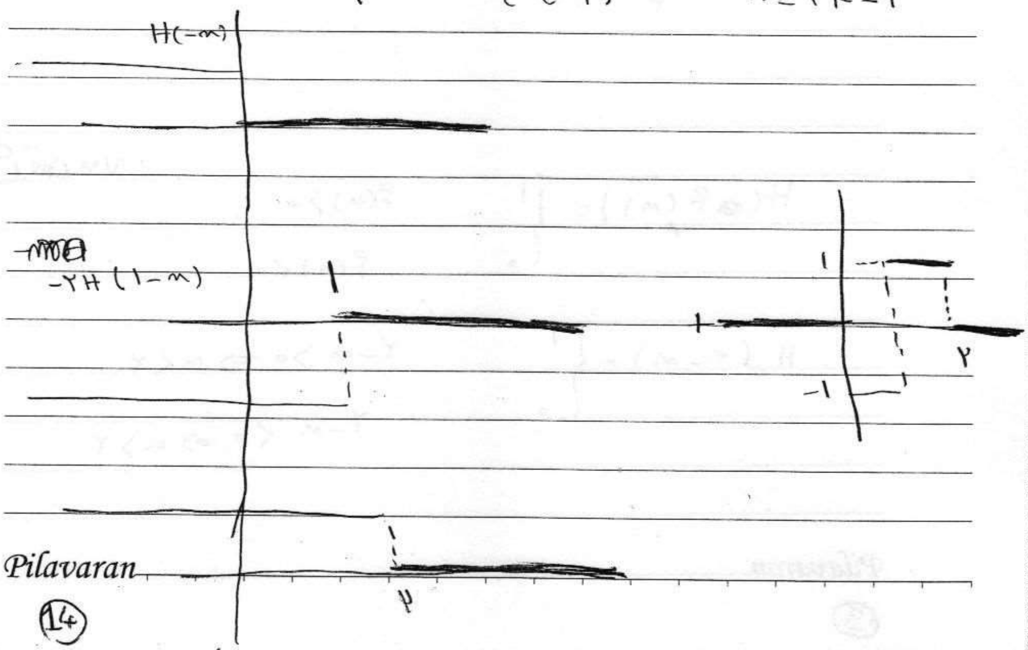
$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$a_n = \int_0^1 -\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

$$\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^{k+1} & n = 2k-1 \end{cases}$$



ص ۱۸ مکانیک ۷۵

۴۷۳ سؤال ۴

$$\int_{(T)} |f(x)|\,dx < M$$

تقریباً همه توابع متناوب همیشه سری فوریه دارند

$y = \tan x$

$$\int_0^{\pi} |\tan x|\,dx = \infty$$

ص ۸۳ ← سؤال ۱۱

برای محاسبه مقدار سری فوریه در یک نقطه نیازی به سری فوریه تابع نداریم بلکه مطابق زیر می‌توانیم عمل کرد:

۱- x_0 نقطه پیوستگی $f(x)$ باشد.

x_0 مقدار سری فوریه در $= f(x_0)$

۲- x_0 نقطه گسستگی $f(x)$ باشد

x_0 مقدار سری فوریه در $= \underset{x \to x_0^-}{\infty} f(x) + \underset{x \to x_0^+}{\infty} f(x)$

مثال) مقدار سری فوریه تابع x

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2 & 1<x<2 \\ -1 & 2<x<3 \end{cases}$$ ، با دوره تناوب ۳ داده شده

بدست آورید؟

$x=0$ ناپیوستگی $\Rightarrow \frac{-1+0}{2}=-\frac{1}{2}$

$x=1$ 〃 $\Rightarrow \frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

$x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{3}{2}$

$x=2$

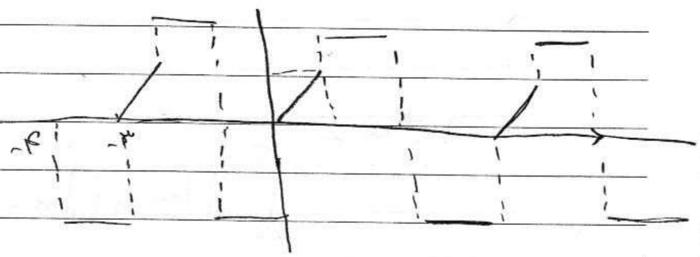
$x=3$

$x=5$

$x=117$

$x=-294{,}5$

$x=1397$



$x=\frac{1}{2}$ پیوستگی $\Rightarrow f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

$x=\frac{3}{2}$ 〃 $\Rightarrow f(\frac{3}{2})=2$

$x=2 \Rightarrow$ ناپیوستگی $\Rightarrow \frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$

$x=3 \Rightarrow$ 〃 $\Rightarrow \frac{-1+0}{2}=\frac{1}{2}$

$x=5 \equiv x=2$

$x=117 \equiv 0$ تمرین ۳

$x = -۲۹۶,۵ \equiv ۲,۵$

$x = ۱۳۹۷ \equiv ۲$

$-\pi < x < \pi$ ص ۸۲ تست ۸

$\frac{\pi^۲ + \cancel{\pi} + \pi^۲ - \cancel{\pi}}{۲} = \pi^۲$ $\pi^۲ \checkmark$

$\lim_{n \to \infty} a_n = ۰$

$\lim_{n \to \infty} b_n = ۰$

$۰ < x < \pi$

در بسط فوریه تابع $f(x) = \sin(e^{\cos x})$ | $\lim_{n \to \infty} a_n$ کدام است؟

۱) ۷۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۰- ۴) $\frac{1}{۲}$

حاصل ضرب مقادیر یک ضرایب $a_n b_n$ متناسب $\frac{e}{n}$ است

سری همگرا ن

$\frac{۳^{x} + ۲^{x+1} \ldots + x^{۹۹۹} \ldots + \cos x + ۵}{۲^{x} + ۹۹۹ \ldots + ۳^{x+۲} + x^{۱۰\ldots} + \sin x + ۱۰}$ به تعداد الکترونهای موجود در جهان هستی $= \frac{1}{۴}$

$n \to \infty$

هر عددی هرچند بزرگ در مقابل بی‌نهایت اپسیلون است.

$$\frac{3^{9}}{3^{9}+2}=\frac{1}{9}$$

$n \to \infty$

$$\frac{n^2+4n}{5n^3+4n}=\frac{\frac{1}{5}}{n}$$

$$\frac{n+2}{n^4+2n+} \sim \frac{1}{n^3}$$

تست ۱۳۸۸ ← (۷۸)

قضیه ص ۴۶

$f(x)$ حداقل یک نقطه ناپیوستگی در دامنه‌ی تعریف فرد دارد $\Leftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n}$ همگرا می‌شود

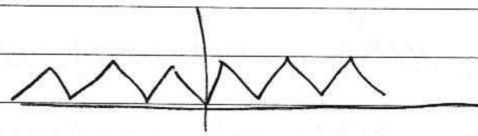
$f(x)$ پیوسته $f'(x)$ ناپیوسته $\Leftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^2}$ همگرا می‌شود ($\frac{c}{n^2}$ حداقل سرعت بین a_n و b_n است)

f, f' پیوسته f'' ناپیوسته

ص ۹۲ ← ۴۸

f پیوسته / f ناپیوسته $\Rightarrow a_n \sim \frac{c}{n^2}$

ص ۹۲ ← ۴۶



تابع زوج $\Leftarrow b_n = 0$

ص ۴۷

بدق ۷۴

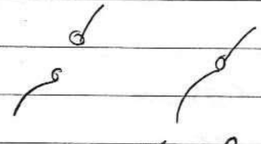
$$a_n = \frac{2(1-e^{-1})}{1+4\pi^2 n^2}, \quad n \neq 0 \qquad \frac{c}{n^2}$$

$$b_n = \frac{4n\pi(1-e^{-1})}{1+4\pi^2 n^2} \qquad \frac{c}{n}$$

انتگرال‌گیری از سری فوریه ص ۴۳

مشتق‌گیری از سری فوریه ص ۴۴

ناپیوستگی رفع‌شدنی



ناپیوستگی جهش دار داریم! نمی‌توان از سری فوریه مشتق بگیریم

* محاسبه سری ها با استفاده از سری فوریه :

① سری فوریه تابع مورد نظر را بدست می‌آوریم

② جمله عمومی سری مورد نظر را بدست می‌آوریم

③ جمله عمومی سری را با ضرایب فوریه مقایسه می‌کنیم در صورت مشابه بودن (یکسان بودن سری ها) با عددگذاری مناسب و ساده کردن مقدار سری را بدست می‌آوریم در غیر اینصورت سعی می‌کنیم با اعمال موارد زیر بر روی ضرایب فوریه آنها را شبیه جمله عمومی سری کنیم

انتگرال گیری

مشتق گیری → کاهش

سرعت را افزایش می‌دهد ← پارسوال

پارسوال ← فقط یکبار می‌توانیم استفاده کنیم

$\frac{1}{n^6}$

$f(x) = \sum \frac{A}{n} \cos nx$ $\frac{1}{n^2}$

دوبار انتگرال یکبار پارسوال

بعد

$f(x) = \sum \frac{A}{n^2} \sin nx$

یکبار پارسوال

$\frac{1}{n^3}$ یکبار انتگرال گیری

مثال ۵۲

با استفاده از بسط سینوسی $f(x)=\cos x \quad 0<x<\pi$ مقدار سری زیر را بدست آورید.

$$\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\frac{1}{5^2\times 7^2}+\cdots=\frac{\pi^2-8}{16}$$

$a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n+1}+\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{2n}{n^2-1}(1+\cos n\pi)$$

$$\cos x=\frac{1}{\pi}\sum\frac{2n}{n^2-1}(1+\cos n\pi)\sin nx$$

$$1+\cos n\pi=\begin{cases}2 & n=2k\\ 0 & n=2k-1\end{cases}$$ مقادیر

$$\cos x=\frac{4}{\pi}\sum\frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx$$ زوج

سمت راست را انتگرال می‌گیریم

$$\text{جمله عمومی سری}:\ \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

Subject: Date:

$\frac{a_0}{2}$ ← انتگرال می‌گیریم زوج (اگر فرد بودن $a_0=0$ می‌شد)

انتگرال گیری ، $\sin x = \frac{4}{\pi} \sum \frac{-1}{4k^2-1} \cos 2kx + c$

ثابت فوریه

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$

$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\cos 2kx}{4k^2-1} \quad 0 < x < \pi$

پارسوال

پارسوال : $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum \frac{1}{(4k^2-1)^2}$

$\rightarrow \sum \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$

ص ۹۴ تست ۵۸

$x^2 + x = x + 4 \sum (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + c$

$x^2 = 4$

تذکر: اگر در بسط فوریه تابع $f(x)$ ، $\frac{a_0}{2}$ مخالف صفر باشد با انتگرال گیری

جمله‌ای از سری فوریه تابع $f(x)$ بطور دقیق انتگرال $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$

$\int f(x)\, dx$

Subject: Date: 80

با استفاده از این که سری فوریه

$\int f(x)\,dx - \frac{a_0}{2}x$ بدست می آید

تست ۹۵

$$\frac{2\pi+1 - 2\pi+1}{2} = 1$$

۳) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ جمله عمومی

$$2\times\frac{\pi}{2} = 1 - 4\sum(-1)^n \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}$$

عددگذاری

$$\sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n=2k \\ (-1)^{k+1} & n=2k-1 \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4} = \cancel{4}\sum \cancel{(-1)^{2k-1}} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

ص ۹۵ ← ۶۱

ص ۸۲ ← ۵

~~$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{2}x\right) - \frac{1}{3\pi}$~~

Subject: Date:

١٢ ← ٨٣

$$a_0 = \frac{٢}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^٢ - x^٢)\,dx$$

$$\frac{٢}{\pi}\left(\pi^٣ - \frac{١}{٣}\pi^٣\right) = ٤\frac{\pi^٢}{٣} \rightarrow$$

$$\frac{a_0}{٢} = ٢\frac{\pi^٢}{٣}$$

ص۹۵ ← ۵۹

ص۹۷ ← ۹۸

ص۱۰۵ ← ۹۵

ص۱۰۶ ← ۹۷

ص۱۰۵ ← ۹۶

$$k^٢ \frac{A_0}{٢} = \frac{a_0}{٢}$$

$$\rightarrow A_0 = \frac{a_0}{k^٢}$$

میانترم تکمیلی:

Subject: Date:

روش محاسبه ضرایب فوریه ← انتگرال گیری

محاسبه ضرایب فوریه بدون انتگرال گیری:

اگر تابع $f(x)$ در نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_n$ جهش‌هایی به طول $F_1, F_2, \ldots F_n$

داشته باشد $\boxed{F_i = \lim_{x \to x_i^+} f(x) - \lim_{x \to x_i^-} f(x)}$ صـ ۴۲ کتاب ۳ آنگاه ضرایب فوریه بصورت

(پرش در نقطه x_k از تک طول)

زیرا تا بی‌نهایت باید بسط داد؟

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{-L}{n\pi} b'_n - \dfrac{1}{n\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k \sin\left(\dfrac{n\pi}{L} x_k\right) \\ b_n = \dfrac{1}{n\pi} a'_n + \dfrac{1}{n\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k \cos\left(\dfrac{n\pi}{L} x_k\right) \end{cases}$$

ضریب تابع F'

a' و b' ضرایب فوریه تابع $f'(x)$ می‌باشد

$$a'_n = \frac{-L}{n\pi} b''_n - \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{n} F'_k \sin\left(\frac{n\pi}{L} x'_k\right)$$

$b'_n = \ldots$

صـ ۱۵ صـ ۴۶

[redacted] ۲۷ ص

فرد $\Rightarrow a_0 = a_n = 0$

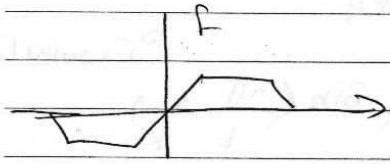
$$b_n = +\frac{3}{n\pi} a'_n + \frac{1}{n\pi}(0)$$

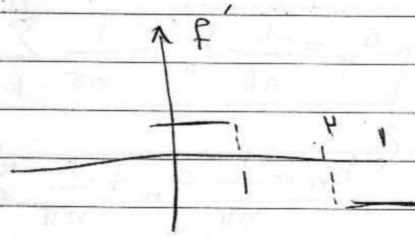
Subject: Date:

$$a'_n = \frac{-3}{n\pi} \cancel{b''_n} - \frac{2}{n\pi}\left((-1)\sin\left(\frac{n\pi}{3}(1)\right) + (-1)\sin\left(\frac{n\pi}{3}(2)\right)\right)$$

$$b_n = \frac{+6}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{3} + \underline{\sin\frac{2n\pi}{3}}\right) =$$

$$\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{3}\right)$$





$$\begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{12}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & n = 2k-1 \end{cases}$$

صفحه ← ۸۸

کنکور (۸۶) گزینه (۲) صحیح

$$a_n = \frac{-L}{n\pi} b'_n \frac{2}{n\pi}\left(f(c^+) - f(c^-)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}c\right)$$

$$b'_n = \frac{L}{n\pi} \cancel{a''_n} + \frac{2}{n\pi}\left(f'(c^+) - f'(c^-)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}c\right)$$

$f'' = 0$

Pilavaran

نکته: تابع زوج یا فرد بود ← نصف دامنه × ۲

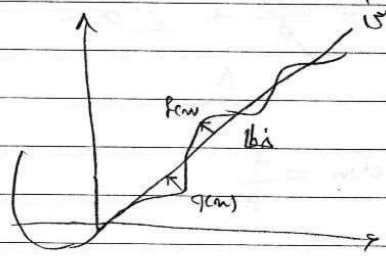
Subject: Date:

$$a_n = \frac{-2L}{n^2\pi^2}\left(f'(c^+) - f'(c^-)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}c\right)$$

$$-\frac{2}{n\pi}\left(f(c^+) - f(c^-)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}c\right)$$

تعریف: اگر بخواهیم تابع $f(x)$ را توسط مجموعه‌ای از توابع sin و cos، عدد ثابت [illegible] دهیم که خطای مربعات Minimum شود کافی است ضرایب sinها و cosها و عدد ثابت را همان ضرایب فوریه در نظر بگیریم

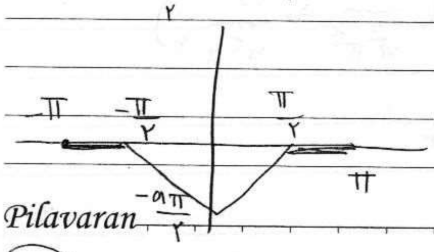
از p.12



تمرین سال (۷۹) ۹۷ ← ۴۹

$$\{\alpha + \beta\cos x + \gamma\sin x,\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in R\}$$

$\frac{a_0}{2}$ $\quad a_1 \quad b_1$



تابع زوج $\rightarrow b_1 = 0$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\frac{a\pi^2}{4}}{2\pi} = -\frac{a\pi}{8}$$

کوییز (۲)

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x\,dx =$$ [redacted] ---

در بسط فوریه کسینوسی $f(x)=\sin x$ ، $0<x<\pi$ به صورت $\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ کدام مورد است؟

$$\cancel{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{a_1^2}{2}} + \sum a_n^2$$

$$\frac{8}{\pi^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{4}{\pi}$$

$$\sum a_n^2 = \frac{\pi^2-8}{\pi^2}$$

تست ۸۶ سؤال (۲۳)

$$\frac{1}{1}\int_0^2 t^4\,dt = \frac{32}{5} + \sum\left(\frac{16}{n^4\pi^4}+\frac{16}{n^2\pi^2}\right)$$

$$0 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}$$