فصل اول

آشنایی با سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مقدمه

واژه های سیگنال و سیستم از واژه های رایج در علوم مختلف مهندسی و غیر مهندسی است. در همهٔ این علوم، سیگنال بیان‌گر یک پدیدهٔ فیزیکی است که تابعی از یک متغیر مستقل می‌باشد، و سیستم مجموعهٔ منظمی است که ممکن است دارای یک یا چندین سیگنال ورودی و یک یا چندین سیگنال خروجی باشد. می‌توان سیگنال‌های ورودی به سیستم را بعنوان محرّک‌ها یا اثر محیط خارج بر سیستم، و سیگنال‌های خروجی را بعنوان واکنش یا رفتار سیستم نسبت به آن محرّک‌ها در نظر گرفت.

مهندسین و محققین تلاش می‌کنند تا نحوهٔ کار سیستم‌های مختلف را درک کنند تا بتوانند حداقل به یکی از اهداف زیر دست یابند:

۱- بتوانند سیستم مورد نظر را بر روی کامپیوتر شبیه‌سازی کرده و با اعمال سیگنال‌های ورودی متفاوت، سیگنالهای خروجی سیستم را بدست آورند، و به عبارت بهتر بتوانند سیستم را به نحو دقیق‌تری تجزیه و تحلیل کرده و عملکرد آن را بررسی کنند.

۲- بتوانند سیستمی مشابه سیستم اصلی طراحی و آن را تولید کنند.

۳- بتوانند با طراحی سیستمی جدید و با اتصال این سیستم به سیستم اصلی، باعث بهبود و یا تغییر رفتار سیستم اصلی شوند.

۴- بتوانند با داشتن سیگنال خروجی برای مدتی معلوم، به پیش‌بینی سیگنال خروجی در آینده بپردازند. به عنوان مثال در علوم و تکنولوژی: مخابرات، ماهواره، پزشکی، پردازش صوت و تصویر، کشاورزی، مکانیک، و حتی در اقتصاد نیز می‌توان کاربردهای مختلفی از مفاهیم سیگنال و سیستم را، برای دستیابی به اهداف فوق، یافت.

در علوم مختلف، معمولا طبیعت سیگنال‌ها و سیستم‌ها کاملاً متفاوت هستند. در مهندسی مکانیک، یک سیگنال می‌تواند نیروی مکانیکی وارد بر یک جسم، یا صوتِ (به مفهوم ارتعاشات مولکول‌های هوا) حاصل از حرکت یک اتومبیل در نظر گرفته شود. اگر نیروی مکانیکی به عنوان سیگنال ورودی یک سیستم مکانیکی (مثلاً فنر) در نظر گرفته شود، می‌توان سیگنال خروجی این سیستم را جابجایی یک نقطهٔ دلخواه از فنر نسبت به حالت عادی خود پنداشت. در مهندسی برق، ولتاژ و جریان دو سیگنال پُرکاربرد هستند، و هر مداری، متشکل از عناصر خطی مثل سلف، خازن و مقاومت و یا عناصر غیر خطی مثل دیود و ترانزیستور، را می‌توان یک سیستم پنداشت. ملاحظه می‌شود که ماهیت فیزیکی سیگنال‌ها و سیستم‌ها در رشته‌های مختلف کاملاً متفاوت می باشند.

معمولاً برای بررسی کامل و منطقی یک پدیدهٔ فیزیکی در جهان خارج باید سه مرحلهٔ زیر را طی کرد:

۱- ابتدا باید آن پدیده را شناخت و تفسیر کاملی از آن پدیده و اثرات متقابل آن پدیده و جهان خارج ارائه کرد.

۲- بر اساس تفسیر ارائه شده در قسمت ۱، و با استفاده از روابط فیزیکی حاکم بر آن پدیده، باید مدل مناسبی را برای آن پدیده ارائه نمود.

۳- در مرحله آخر با توجه به مدل در دسترس، آن پدیده بصورت یک سیستم با یک یا چند سیگنال ورودی و خروجی شبیه‌سازی شده و نکته ابهامی در مورد آن وجود نخواهد داشت. لذا می‌توان رفتار (سیگنال خروجی) آن را به یک محرک (سیگنال ورودی) پیش‌بینی نمود. در کلیه مراحل فوق، از اصول سیگنال و سیستم استفاده شایانی خواهد شد. در پایان مرحلهٔ دوم، پدیدهٔ مادّی یا فیزیکی ناشناخته به سیستمی با پارامترهای شناخته شده، تبدیل خواهد شد، که رفتار آن کاملاً (یا حداقل تا حد رضایت‌بخشی) قابل پیش‌بینی است.

گاهی نیز یک سیستم پیچیده و بزرگ را می‌توان به کمک ترکیب چند سیستم شناخته شدهٔ ساده شبیه‌سازی کرد. این نوع شبیه‌سازی می‌تواند در تفسیر عملکرد و پیش بینی رفتار این سیستم به سیگنالهای ورودی مختلف، کمک شایانی نموده و از هزینه آزمایشهای گران قیمت توسط سیستم اصلی بکاهد. به عنوان مثال برای بررسی اثر پدیده‌های مختلف جوی از قبیل گردباد و یا طوفان بر روی حرکت هواپیماهای غول پیکر مسافربری، انجام آزمایش عملی و مشاهده نتیجه، غیر قابل تصور است، چون اولاً ایجاد حالت مطلوب جوی در زمان آزمایش و در محل هواپیما امری غیر ممکن است و ثانیاً ممکن است نتایج آزمایش باعث هزینه‌های گزاف و ایجاد خسارت بر روی سیستم مورد آزمایش شود. پس بهتر است در این‌گونه موارد، هم سیستم هواپیما و هم سیگنالهای ورودی (عوامل جوی) را توسط کامپیوتر شبیه‌سازی نموده و سیگنالهای خروجی را مورد بررسی قرار داد. دیده می‌شود که اصول سیگنال و سیستم به عنوان ابزاری جهت تفسیر پدیده‌های جهان خارج و ایجاد یک بینش عمیق علمی از آنها، بسیار مورد استفاده دارند.

در این فصل، ابتدا تعریف اولیهٔ سیگنال ارائه شده و سپس سیگنال‌ها، با توجه به خواصشان، دسته‌بندی می‌شوند. بعد از آن سیگنال‌های مهم، به عنوان ابزار کار برای مطالعهٔ سیستم‌ها، معرفی می‌شوند. پس از معرفی و بررسی سیگنال‌ها، تعریف یک سیستم ارائه شده و خواص مختلف یک سیستم معرفی و بررسی می‌شود. از جمله خواص سیستم‌ها، دو خاصیت خطی و مستقل بودن از زمان هستند که در فصول بعدی این کتاب بیشتر مورد توجه قرار می گیرند. جهت آشنایی بیشتر دانشجویان به اصول و تعاریف مطرح شده در این فصل، در پایان به ارائه و بررسی چند مثال می‌پردازیم. پیش نیاز این فصل، ریاضیات مقدماتی و حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد.

۱-۱ تعریف سیگنال

سیگنال تابعی از یک متغیر مستقل است و حاوی اطلاعاتی درمورد حالت یا رفتار فیزیکی یک پدیده یا سیستم می باشد. به عبارت دیگر سیگنال نوعی خبر است که اطلاعاتی در مورد پدیدهٔ فیزیکی موردنظر به مخاطب ارائه می دهد. سیگنال‌ها از نظر ریاضی بصورت توابعی چند متغیره نمایش داده می‌شوند. سیگنال‌ها ممکن است جهت توصیف طیف وسیعی از پدیده‌های مادّی و فیزیکی بکار برده شوند.

روش ایجاد سیگنال بستگی به ماهیت آن دارد. به عنوان مثال، سیستم صوتی انسان می‌تواند نوعی اغتشاش کنترل شده در هوای اطراف دهان ایجاد نماید که آن را صوت می‌نامند. به عبارت بهتر، دهان و حنجره، با همکاری یکدیگر، می‌توانند باعث تغییر فشار هوا و ایجاد سیگنال صوتی شوند. این سیگنال مکانیکی نامیده می‌شود. البته سیگنال‌های مختلف با ماهیت‌های متفاوت، قابل تبدیل به یکدیگر هستند. به عنوان مثال سیگنالِ صوتیِ مکانیکی، به سادگی قابل تبدیل به سیگنال الکتریکی است. این عملِ تبدیل توسط حس‌گرها[1] انجام می‌شود. انواع مختلفی از حس‌گرها نیز جهت تبدیل سایر پارامترهای مکانیکی، از قبیل فشار و دما به سیگنال الکتریکی طراحی شده‌اند. یک سیگنال الکتریکی می‌تواند ولتاژ یا جریان باشد.

در تمامی مثال‌های فوق سیگنال مطرح شده یک تابع یک بعدی از زمان است. اما سیگنال می‌تواند تابعی از دو متغیر مستقل باشد. به عنوان مثال، نمودار روشنائی هر نقطه در یک تصویر، بیانگر یک سیگنال دو بعدی است. به این سیگنال، سیگنال تصویری می‌گویند. برای توصیف سیگنال دو بعدی، سه بعد مورد نیاز است. به ماهیت‌های متفاوت سیگنال صوتی و سیگنال تصویری توجه کنید که در اولی متغیر مستقل، زمان، و در دومی

---

[1] Sensors

متغیرهای مستقل، دو بعد از مکان هستند. از طرف دیگر، متغیر تابع در سیگنال صوتی، به میزان فشار هوا در محیط مربوط است. ولی در سیگنال تصویری، متغیر تابع میزان روشنائی یک مکان از تصویر می‌باشد. بنابراین سیگنال‌ها بسیار متنوع بوده و دارای ابعاد (دیمانسیون‌های) مختلف هستند.
در این کتاب، ما به بحث و بررسی سیگنال‌های متفاوت که بیانگر پدیده‌های مختلف فیزیکی می‌باشند خواهیم پرداخت. در بیشتر مباحث این کتاب می توانید برای راحتی، سیگنالها را بیانگر پدیده‌های الکتریکی در نظر بگیرید. یک سیگنال الکتریکی ممکن است، شکل موج ولتاژ یا جریان باشد اما از لحاظ بحث ما، این مطلب اصلاً اهمیتی ندارد و به همین دلیل، معمولاً در بیان سیگنال از واحد ولت یا آمپر یا واحد دیگری استفاده نخواهیم کرد مگر در موارد نادر که بیان واحد سیگنال باعث درک بهتر موضوع بشود.

۱-۲ انواع سیگنال‌ها

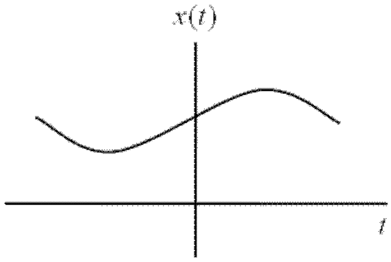
می‌توان سیگنال‌ها را با توجه به خواص متفاوتشان دسته‌بندی کرد. بعنوان مثال یک سیگنال می‌تواند تصادفی[1] یا معین[2] باشد. یک سیگنال معین بوسیلهٔ یک رابطهٔ ریاضی یا نمودار و یا بوسیلهٔ یک جدول مقادیر بیان می‌شود. بعنوان مثال رابطهٔ بین سیگنال f نیروی وارده بر یک جسم صُلب با جرم m و شتاب a را میتوان با رابطهٔ ریاضی $f=ma$ نمایش داد. همچنین ممکن است سیگنال نیروی مذکور بصورت یک منحنی بر حسب دو متغیر جرم و شتاب در یک دستگاه مختصات سه‌بعدی نمایش داده شده، و یا مقدار نیرو بر حسب دو متغیر دیگر بصورت یک جدول ارائه گردد. در حالی‌که برای بیان سیگنال‌های تصادفی از مدل‌های احتمال و روشهای آماری استفاده می‌شود. به عنوان مثال *نویز* در سیتم‌های مخابراتی یک سیگنال تصادفی است که نمی‌توان برای آن رابطهٔ ریاضی مشخصی *بر حسب* زمان ارائه کرد. بیان نویز بصورت یک منحنی مشخص و یا جدول مقادیر بر حسب زمان نیز ممکن نیست. به همین دلیل، یک سیگنال تصادفی معمولا با کمک یک تابع توزیع یا تابع چگالی احتمال و یا دیگر روشهای مبتنی بر آمار و احتمالات مهندسی بیان می‌شود. به عنوان مثال، نویز حرارتی که یکی از پُرکاربُردترین نویزها است با تابع چگالی احتمال گوسی (Gaussian Probabilty Density Function) که دارای دو پارامتر *مقدار متوسط و واریانس* است بیان می‌شود، و رفتار آن با کمک تئوری احتمالات مورد بررسی قرار می‌گیرد. تئوری تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌های تصادفی خارج از محدودهٔ این کتاب است. بنابراین، در این کتاب فقط با سیگنال‌های معین سروکار خواهیم داشت. مهمترین تقسیم بندی سیگنال‌ها، در این کتاب، از لحاظ پیوسته یا گسسته بودن متغیر مستقل سیگنال است. به طور کلی می‌توان سیگنال‌ها را به سه دسته: سیگنال پیوستهٔ زمانی، سیگنال گسستهٔ زمانی و سیگنال دیجیتال تقسیم کرد. در زیر هر یک از سه دسته سیگنال فوق معرفی می شوند.

۱ـ۲ـ۱ سیگنالِ پیوستهٔ زمانی

سیگنالِ پیوستهٔ زمانی سیگنالی است که متغیر مستقل آن، که معمولا زمان است، مقادیر پیوسته‌ای را اتخاذ می کند. نمونه‌ای از این سیگنال‌ها در شکل (۱ـ۱) رسم شده است. سیگنالِ پیوستهٔ زمانی را بصورت $x(t)$ نمایش می‌دهیم. متغیر مستقل گاهی می‌تواند مکان یا پارامتر فیزیکی دیگری باشد.

---

[1] random
[2] deterministic

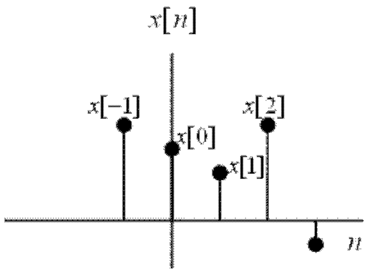


شکل (۱ـ۱): نمونه سیگنال پیوستهٔ زمانی

سیگنالِ صوتی بصورت تابعی از زمان، و سیگنالِ فشار اتمسفر بصورت تابعی از ارتفاع، نمونه‌هایی از سیگنال‌هایِ پیوستهٔ زمانی هستند. سیگنال‌هایِ مخابراتیِ مورد استفاده در سیستم‌های سخن پراکنی، اکثراً بصورت پیوستهٔ زمانی می‌باشند. پدیده‌های فیزیکی که بصورت سیگنال قابل بیان هستند، اکثراً پیوستهٔ زمانی هستند. البته شاید استفاده از لفظ پیوستهٔ زمانی کمی غلط‌انداز باشد. چون لازم نیست در بیان سیگنال، متغیر مستقل (محور افقی) حتماً زمان باشد. مثلاً در مورد سیگنالی که بیانگر تغییرات فشار بر حسب ارتفاع است، متغیر مستقل دارای بعد طول است. به‌هر حال، همانگونه که اشاره شد، در بیان سیگنال به ابعاد، علاقه‌ای نشان نخواهیم داد. لذا اگر فقط محور افقی در نمایش سیگنال به ازاء مقادیر پیوسته تعریف شده باشد، اصطلاحاً آن سیگنال را سیگنالِ پیوستهٔ زمانی می‌نامند، (بدون توجه به اینکه محور افقی واقعاً زمان باشد یا نه). اینگونه سیگنال‌ها جهت توصیف بسیاری از پدیده‌ها، مثل صوت و حرارت مورد استفاده قرار می‌گیرند. یادآوری می‌شود که جهت سهولت نوشتاری در بخش‌های بعدی این کتاب، عبارت ″سیگنالِ پیوستهٔ زمانی″ بدون علامت کسره در انتهای سیگنال و بدون علامت همزه در انتهای پیوسته یعنی بصورت ″سیگنال پیوسته زمانی″ ظاهر خواهد شد.

۱-۲-۲ سیگنالِ گسستهٔ زمانی

سیگنالِ گسستهٔ زمانی سیگنالی است که متغیر مستقل آن مقادیر گسسته‌ای را اتخاذ می کند و دامنهٔ آن می‌تواند مقادیر پیوسته و یا گسسته‌ای را اتخاذ نماید. یک نمونه از این سیگنال‌ها، در شکل (۱-۲) رسم شده است. سیگنالِ گسستهٔ زمانی را بصورت $x[n]$ نمایش می‌دهیم.

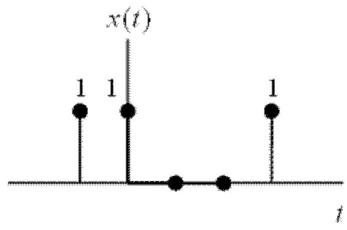


شکل (۱-۲): نمونه سیگنال گسسته زمان

قابل توجه است که سیگنالِ گسستهٔ زمانی تنها در لحظات گسسته از متغیر مستقل که معمولاً زمان می‌باشد، تعریف شده است و در سایر لحظات مقدار آن تعریف نشده است و نباید اشتباهاً مقدار آنرا صفر در نظر گرفت.

نمودار درآمد یک قهوه‌خانهٔ سنتی طی سالهای مختلف می‌تواند بصورت یک سیگنالِ گسستهٔ زمانی بیان گردد. در این صورت هر واحد از متغیر مستقل، مدت زمانی برابر یک سال را نشان می‌دهد.
همانگونه که در مورد سیگنال‌هایِ پیوستهٔ زمانی اشاره شد، در اینجا نیز لزومی ندارد که حتماً محور افقی بُعد زمان را داشته باشد. بلکه همین قدر که محور افقی، مقادیر گسسته را اتخاذ نماید به آن سیگنالِ گسستهٔ زمانی می‌گویند. سیگنالِ گسستهٔ زمانی یا دنباله را می‌توان بوسیلهٔ نمونه‌برداری از سیگنالِ پیوستهٔ زمانی و یا بوسیلهٔ برخی فرایندهای گسسته مستقیماً تولید کرد.
اصول تحلیل این سیگنال در بسیاری از جهات مشابه نوع پیوستهٔ زمانی آن است. ولی در این کتاب بخاطر برخی نقاط افتراق، مبحث سیگنال‌ها و سیستم‌های گسستهٔ زمانی جداگانه مورد بررسی قرار داده شده است. برای تمیز دادن سیگنال‌هایِ پیوستهٔ زمانی از سیگنال‌هایِ گسستهٔ زمانی، به ترتیب، از متغیر t درون پرانتز و از متغیر n درون براکت به عنوان متغیر مستقل استفاده می‌شود. اگر متغیر مستقل را زمان در نظر بگیریم، فاصلهٔ زمانی واقعی دو نمونهٔ متوالی از سیگنالِ گسستهٔ زمانی را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. تنها لازم است این فاصله برای هر دو نمونه متوالی در کل دنباله یکسان باشد. مثلاً اگرفاصله دو نمونه متوالی ۱/۰۱ نانو ثانیه باشد و نمونه اول در مبدأ زمان فرض شود، نمونهٔ دوم در زمان ۱/۰۱ نانو ثانیه بعد از آن رخ می‌دهد و نمونه سوم در زمان ۲/۰۲ نانو ثانیه رخ می‌دهد که بترتیب متناظر با $n=1$ و $n=2$ می‌باشند. یادآوری می‌شود که جهت سهولت نوشتاری در بخش‌های بعدی این کتاب، عبارت سیگنالِ گسستهٔ زمانی″ بدون علامت کسره در انتهای سیگنال و بدون علامت همزه در انتهای گسسته یعنی بصورت ″سیگنال گسسته زمانی″ ظاهر خواهد شد.

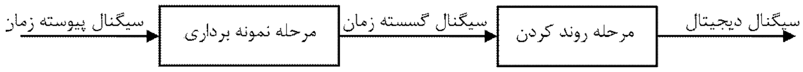
۱-۲-۳ سیگنال دیجیتال
سیگنال دیجیتال سیگنالی است که نه تنها متغیر آن، که دامنهٔ آن نیز مقادیر گسسته را اتخاذ می‌نماید. نمونه‌ای از این سیگنال‌ها در شکل (۱-۳) رسم شده است.



شکل (۱-۳): نمونهٔ یک سیگنال دیجیتال که فقط مقادیر ۰ و ۱ را اتخاذ می‌کند.

این سیگنال‌ها، اکثراً در کامپیوتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. درمورد این نوع سیگنال‌ها هیچ محدودیتی در مورد تعداد و مقدار سطوح دامنه‌های معتبر روی محور عمودی وجود ندارد، فقط کافی است تعداد این سطوح محدود باشند. به عنوان مثال این تعداد می‌توانند ۲، ۳ و یا درحالت کلی M باشد. به سیگنال دیجیتالی با دو و سه سطح دامنه معتبر به ترتیب سیگنال دوتائی (binary) و سه تائی (ternary) گفته می‌شود. در حالت کلی سیگنالی با M سطح معتبر را یک سیگنال Mتائی (M-ary) می‌گویند، این سیگنال‌ها در مخابرات دیجیتال کاربرد بسیار زیادی دارند، و روز به روز بر کاربردهای آنها افزوده می‌شود. اگر چه این سیگنال‌ها در حقیقت نوع

خاصی از سیگنال‌های گسستهٔ زمانی هستند، بدلیل اهمیت آن‌ها گاهی در برخی کتابها بطور جداگانه طبقه‌بندی می‌شوند. در حقیقت، این نوع سیگنال‌ها تنها وسیلهٔ ارتباطی انتقال اطلاعات میان کامپیوتر و خارج از آن می‌باشند. یک روش تولید این نوع سیگنال‌ها در شکل (۱-۴) نشان داده شده است.



شکل (۱-۴) روش ساخت سیگنال دیجیتال از روی سیگنال پیوستهٔ زمانی

مرحله گِرد یا روند کردن شامل تبدیل سطح هر نمونه به نزدیکترین سطح معتبر در سیگنال دیجیتال است. سیستم‌هایی که عملیات روند کردن را انجام می‌دهند به سیستم روند ساز معروف هستند. بدلیل اینکه این سیگنال‌ها در حقیقت یک زیر مجموعه از مجموعهٔ سیگنال‌های گسستهٔ زمانی هستند، از لحاظ تجزیه و تحلیل، تفاوتی با سیگنال‌های گسستهٔ زمانی ندارند و ما بخش خاصی را به بررسی این سیگنال‌ها اختصاص نخواهیم داد. ولی توجه دانشجویان را به این نکته جلب می‌کنیم که آنچه باعث مزیت و برتری تحلیل سیگنال‌های گسستهٔ زمانی بر پیوستهٔ زمانی شده است، سادگی تحلیل سیگنال‌های دیجیتال می‌باشد.

۱-۳ چند سیگنال پیوستهٔ زمانی مهم

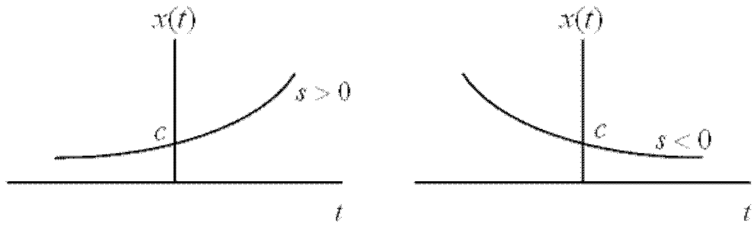
در این قسمت چند سیگنال پیوستهٔ زمانی، که معمولاً در کاربردهای مهندسی بسیار ظاهر می‌شوند، را معرفی می‌کنیم. ترکیب این سیگنال‌ها نیز گاهی در مسائل به چشم می‌خورد. البته لزوماً همه سیگنال‌های پیوستهٔ زمانی محدود به این سیگنال‌ها و ترکیب آنها نمی‌شوند.

۱ـ۳ـ۱ سیگنال نمائی مختلط

این سیگنال بصورت زیر بیان می‌شود:

$$x(t) = ce^{st}$$

که در آن c عدد ثابت حقیقی و s در حالت کلی یک عدد مختلط است. اگر s یک عدد حقیقی باشد، سیگنال فوق یک سیگنال نمائی حقیقی بوده، و به دو صورت نمائی افزاینده اگر $s > 0$ و نمائی کاهنده اگر $s < 0$ باشد، بیان می‌گردد.



شکل (۱-۵) سیگنال نمائی حقیقی کاهنده و افزاینده

یک نوع مهم از سیگنال‌های پیوستهٔ زمانی وقتی بدست می‌آید که s یک عدد موهومی باشد. به عنوان مثال اگر $s = j\omega_0$ باشد (به طوری که $\omega_0 = 2\pi/T_0$) یک سیگنال نمائی بصورت $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ حاصل می‌شود که دارای خاصیت تناوبی است. چون همانگونه که بعداً اشاره خواهد شد، $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T_0)}$، و از طرف دیگر داریم $e^{j\omega_0 T_0} = 1$، پس T_0 دوره تناوب اصلی این سیگنال است. دورهٔ تناوب اصلی همیشه به صورت عددی مثبت بیان می‌شود. بنابراین، دورهٔ تناوب اصلی این سیگنال وقتی $\omega_0 > 0$ یا $0 < \omega_0$ است، یکسان است و برابر است با $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ می‌باشد. خانوادهٔ توابع نمائی بصورت:

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \qquad (۲-۱)$$

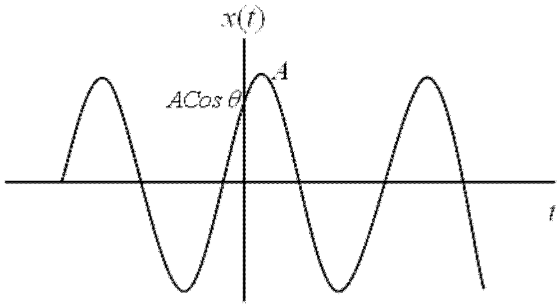
به ازاء مقادیر صحیح برای k، به عنوان سیگنال‌های پایه در بسط فوریه مورد استفاده قرار می‌گیرند. بدین ترتیب هر سیگنالی که دارای دوره تناوب T_0 باشد، توسط مجموعه‌ای از این سیگنال‌ها با ضرائب خاص قابل بسط و بیان است (جزئیات این مورد را در فصل ۳ مطالعه کنید).

۱-۳-۲ سیگنال سینوسی

این سیگنال بصورت کلی زیر است:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \qquad (۳-۱)$$

که در آن A، ω_0 و θ اعداد ثابت حقیقی بوده و، به ترتیب، دامنه، فرکانس زاویه‌ای و فاز سیگنال نامیده می‌شوند. این سیگنال متناوب بوده و دوره تناوب اصلی آن برابر $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ می‌باشد. شکل کلی این سیگنال بصورت زیراست



شکل (۱-۶): سیگنال سینوسی

طبق رابطهٔ اولر داریم

$$e^{j\omega_0 t} = Cos\omega_0 t + jSin\omega_0 t \qquad (۴-۱)$$

تمرین (۱ـ۱): رابطهٔ فوق را اثبات کنید.

بنابراین می‌توان $Cos\omega_0 t$ و $Sin\omega_0 t$ را بر حسب $e^{j\omega_0 t}$ بصورت زیر نوشت:

$$Cos\,\omega_0 t = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] \qquad (۵-۱)$$

$$Sin\omega_0 t = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right] \tag{۱-۶}$$

در حالت کلی تر داریم:

$$ACos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2}\left[e^{j\varphi}e^{j\omega_0 t} + e^{-j\varphi}e^{-j\omega_0 t}\right] \tag{۱-۷}$$

و یا

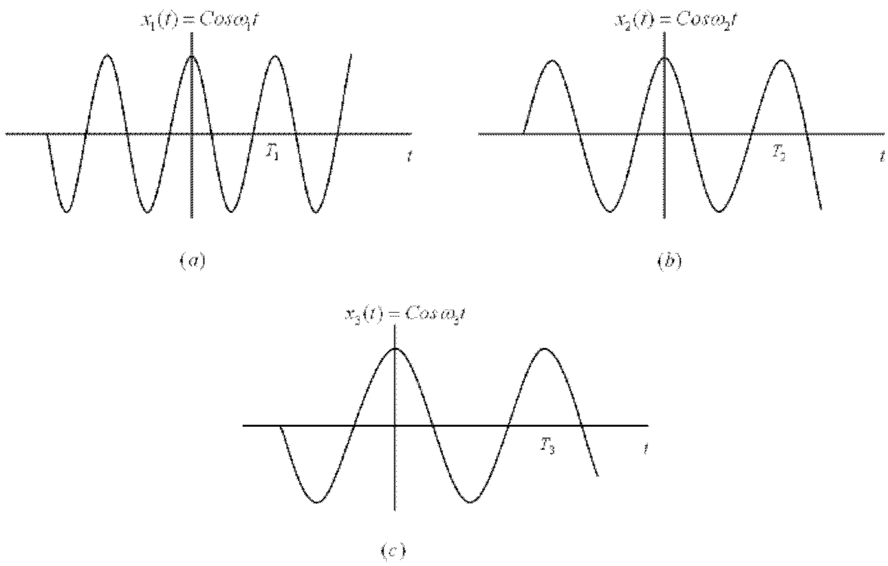
$$ACos(\omega_0 t + \varphi) = A\Re e\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi)}\right] \tag{۱-۸}$$

که در آن عملگر $\Re e[\ ]$ بیانگر قسمت حقیقی سیگنال داخل براکت است.

کلیهٔ روابط فوق در مورد تابع $Sin[\ ]$ نیز قابل تعمیم است. فقط کافی است توجه کنیم

$$ASin(\omega_0 t + \varphi) = ACos\left(\omega_0 t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \tag{۱-۹}$$

در سیگنال فوق، هر قدر T_0 یا دورهٔ تناوب اصلی بیشتر شود، فرکانس زاویه‌ای سیگنال کاهش می‌یابد. چند نمونه از سیگنال سینوسی به ازاء دوره تناوب‌های مختلف در شکل (۱-۷) رسم شده‌اند.



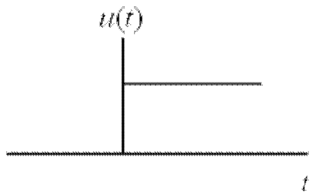
شکل (۱-۷): سیگنال سینوسی به ازاء فرکانسهای مختلف

۱-۳-۳ سیگنال پلهٔ واحد

رابطهٔ ریاضی این سیگنال بصورت زیر است:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{۱-۱۰}$$

از این به بعد سیگنال پلهٔ واحد را با تابع $u(t)$ نمایش می‌دهیم و شکل آن بصورت زیر است:



شکل (۱-۸): سیگنال پله واحد

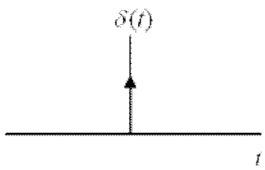
این سیگنال در ایجاد یک توصیف قابل قبول از سیگنال ضربه (که توضیح آن بعداً خواهد آمد) بسیار موفق عمل می‌کند و به کمک آن می‌توان برخی خواص سیستم‌ها را مورد بررسی قرار داد.

۱-۳-۴ سیگنال ضربهٔ واحد

این سیگنال بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{۱-۱۱}$$

و بصورت زیر نمایش داده می‌شود



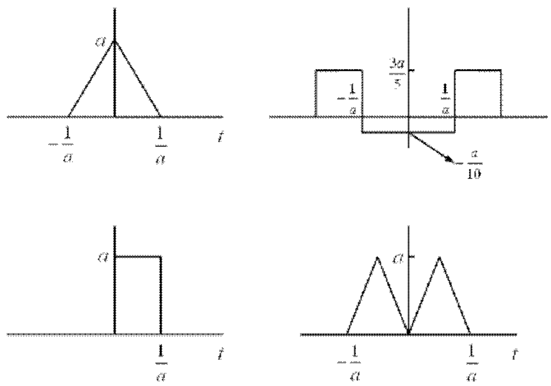
شکل (۱-۹): سیگنال ضربه واحد

با توجه به تعریف فوق می‌توان نوشت

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d(\tau) = 1 \tag{۱-۱۲}$$

تمرین (۱-۲): روابط (۱-۱۲) را با توجه به رابطهٔ (۱-۱۱) بدست آورید.

شیوه‌های مختلفی برای نمایش تابع ضربه وجود دارد. تمامی سیگنال‌های زیر در حد وقتی که $a \to \infty$، می‌توانند بیانگر یک سیگنال ضربه باشند.



شکل (۱-۱۰): چند تابع که در حالت حدی بیانگر تابع ضربه هستند.

دانشجویان بسادگی می‌توانند خواص تابع ضربه را با استفاده از سیگنال‌های فوق تحقیق نمایند. لازم به ذکر است که بعضی اوقات در این کتاب از مفهوم تابع و سیگنال بطور یکسان استفاده شده است.از دیگر خواص تابع ضربه می‌توان به دو خاصیت زیر اشاره کرد

$$\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) \qquad (۱۳-۱)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \qquad (۱۴-۱)$$

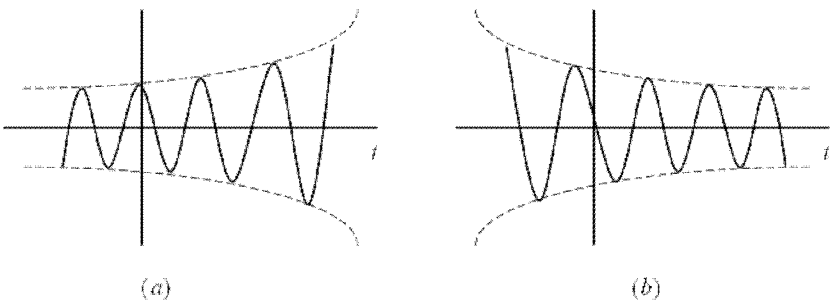
این خواص بسیار مهم هستند که تابع ضربه را به عنوان یک ابزار مهم در تحلیل نوع خاصی از سیستم‌ها مطرح می‌سازند. لازم به ذکر است توابعی مانند ضربهٔ واحد و مشتقات آن که معمولاً بنام توابع تکّین[1] معروف هستند، تحت یک شاخه از ریاضیات بنام تئوری توزیع مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این شاخه از ریاضیات به این توابع، توابع تعمیم یافته[2] می گویند. جهت کسب اطلاعات بیشتر، دانشجویان می‌توانند به کتابهای موجود در این زمینه مراجعه نمایند.

۱-۳-۵ سیگنال نمائی سینوسی

این سیگنال مرکّب از حاصلضرب دو تابع سینوسی و نمائی **بدست آمده** و بصورت زیر می‌باشد:

$$x(t) = ce^{rt}Cos(\omega_0 t + \theta) \qquad (۱۵-۱)$$

این سیگنال به ازاء $r > 0$ و $r < 0$ به ترتیب سینوسی افزاینده و سینوسی کاهنده نامیده می‌شود. و شکل آن بصورت زیر است



شکل (۱-۱۱): سینوسیهای افزاینده و کاهنده

این سیگنال‌ها درپاسخ مدارات RLC گاهی مشاهده می‌شوند. نوع دیگری از این سیگنال‌ها فقط به ازاء $t > 0$ تعریف می‌شوند.

$$z(t) = ce^{rt}Cos(\omega_0 t + \theta)u(t) \qquad (۱۶-۱)$$

این سیگنال‌ها به ازاء $r < 0$ در مسائل فیزیکی بسیار به چشم می‌خورند.

۱-۴ برخی سیگنال‌های گسستهٔ زمانی مهم

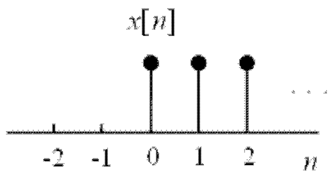
[1]singular functions
[2]generalized functions

اکنون به سیگنال‌های مهم گسستهٔ زمانی می‌پردازیم. در این قسمت به چهار سیگنال مهم اشاره می‌کنیم. اما لازم است تذکر داده شود که از این به بعد در این کتاب بجای استفاده از لفظ سیگنال در حالت گسستهٔ زمانی از لفظ دنباله استفاده می‌کنیم.

۱ـ۴ـ۱ دنباله پلهٔ واحد

دنباله پلهٔ واحد، معادل گسستهٔ زمانی سیگنال پلهٔ واحدِ پیوستهٔ زمانی است و بیان ریاضی آن بصورت زیر است:

$$u[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\geq 0\end{cases} \tag{۱۷-۱}$$

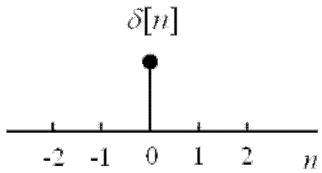


شکل (۱-۱۲): دنباله پلهٔ واحد

۱-۴-۲ دنباله ضربهٔ واحد

تعریف این تابع با آنچه که در مورد سیگنال ضربهٔ واحد انجام شد بسیار متفاوت است، چون این دنباله دارای دامنه واحد در مبدأزمان است و در سایر زمانها صفر است، یعنی:

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \tag{۱۸-۱}$$



شکل (۱-۱۳): دنباله ضربهٔ واحد

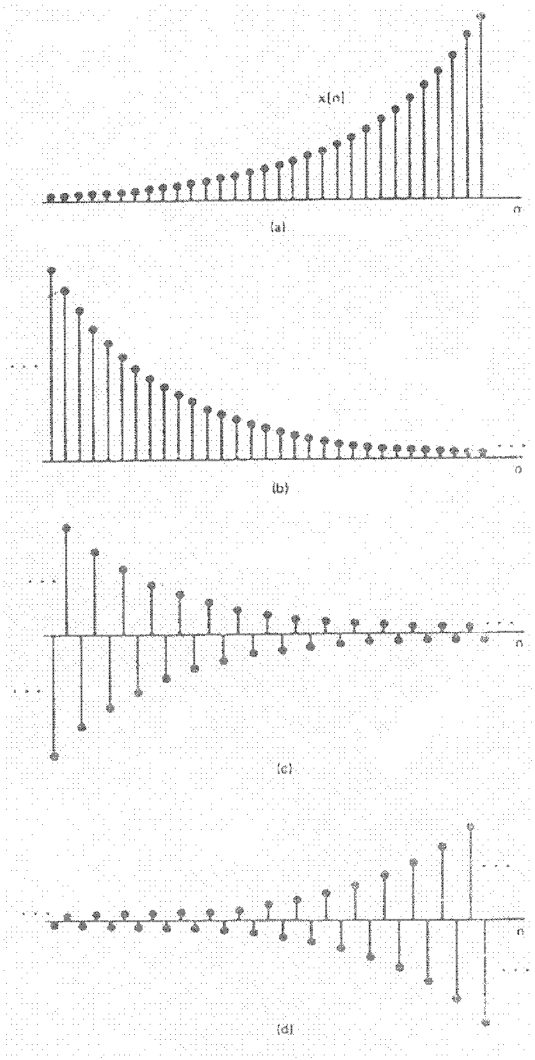
به‌سادگی می‌توان روابط زیر را در مورد دنباله‌های ضربه و پله نوشت:

$$\begin{aligned}&x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]\\ &\delta[n]=u[n]-u[n-1]\\ &u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]\\ &u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]\end{aligned} \tag{۱۹-۱}$$

تمرین (۱-۳): روابط فوق را ثابت کنید.

۱-۴-۳ دنبالهٔ نمائی مختلط

این دنباله در حالت کلی بصورت $x[n]=Az_0^n$ می‌باشد که در آن $z_0=r_0e^{j\Omega_0}$ یک عدد مختلط می‌باشد. اگر z_0 یک عدد حقیقی باشد در آن صورت به ازاء $|r_0|>1$ یک دنباله نمائی حقیقی افزاینده و به ازاء $0<|r_0|<1$ یک دنبالهٔ نمائی حقیقی کاهنده خواهیم داشت. البته به ازاء $-1<r_0<0$ و $r_0<-1$ سیگنال‌های نمائی تغییر علامت دهنده خواهیم داشت.



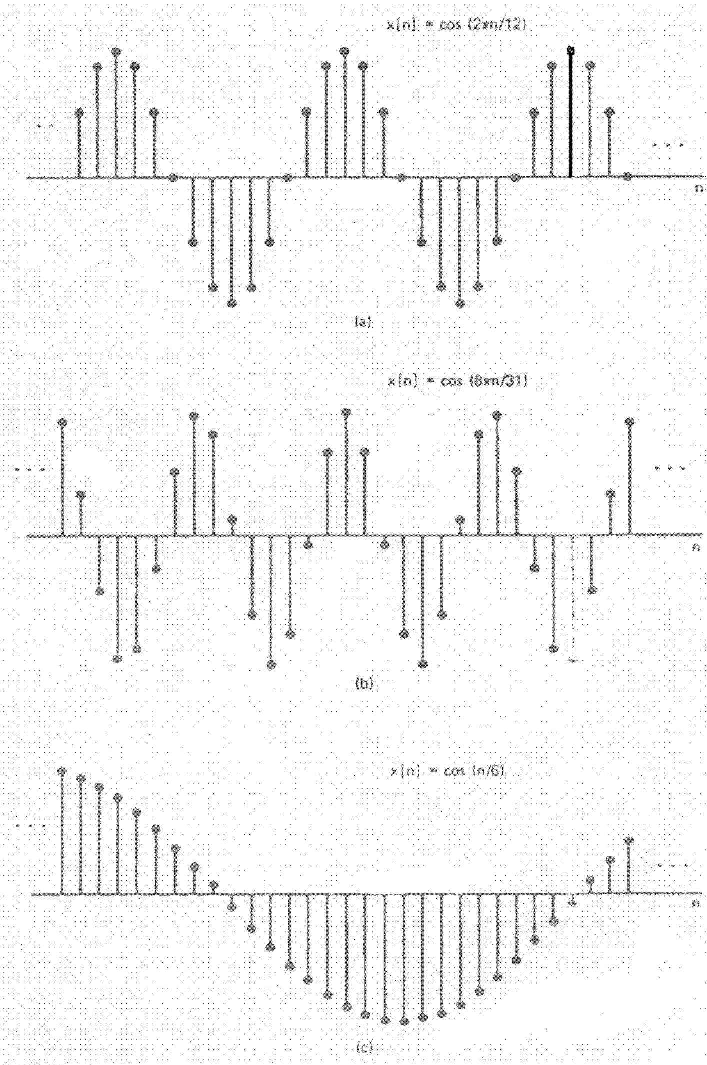
شکل (۱-۱۴): دنباله $x[n]=Az^n$ به ازاء مقادیر مختلف z_0

۱-۴-۴ دنبالهٔ سینوسی

این دنباله بصورت زیر بیان می‌شود:

$$x[n] = ACos[\Omega_0 n + \varphi] \quad (۲۰-۱)$$

که در آن φ, Ω_0, A به ترتیب دامنه، فرکانس زاویه‌ای و فاز دنباله نامیده شده و اعداد ثابتی هستند. نمونه‌هائی از این دنباله‌ها در شکل (۱-۱۵) رسم شده‌اند.



شکل (۱-۱۵): چند نمونه از دنباله‌های سینوسی

سه تفاوت مهم میان سیگنال‌های سینوسی پیوستهٔ زمانی و گسستهٔ زمانی وجود دارد که در اینجا به بحث در مورد هر یک می‌پردازیم.

الف) دنبالهٔ سینوسی و یا حالت عمومی‌تر، دنباله نمائی بصورت $e^{j\Omega_0 n}$ یک دنبالهٔ متناوب بر حسب Ω_0 با دورهٔ تناوب اصلی 2π است، چون

$$e^{j(\Omega_0+2\pi)n}=e^{j\Omega_0 n}e^{j2\pi n}=e^{j\Omega_0 n} \qquad (۲۱-۱)$$

اما در مورد سیگنال سینوسی پیوستهٔ زمانی چنین حالتی وجود ندارد. در حقیقت متناوب بودن دنباله سینوسی یا نمائی بر حسب Ω_0 (فرکانس زاویه‌ای) ناشی از طبیعت گسسته زمان بودن n است که فقط مقادیر صحیح را اتخاذ می‌کند. با افزایش Ω_0 (فرکانس زاویه‌ای) نوسانات دنباله افزایش می‌یابد. اما بخاطر متناوب بودن دنباله سینوسی بر حسب Ω_0 این افزایش فقط تا $\Omega_0=\pi$ مشاهده می‌شود و اگر فرکانس زاویه‌ای از $\Omega_0=\pi$ تا $\Omega_0=2\pi$ افزایش یابد، نوسانات کاهش می‌یابند، چون $\Omega_0=2\pi$ مشابه $\Omega_0=0$ است. این حقیقت در شکل (۱-۱۶) به نمایش گذاشته شده است. بنابراین دنباله‌های با نوسانات کم (تغییرات کم) دارای Ω_0 حول صفر یا 2π (مضارب زوج π) هستند و دنباله‌های با نوسانات زیاد دارای Ω_0 حول π یا مضارب فرد π هستند. از این خاصیت در فصل تبدیل فوریه گسستهٔ زمانی نهایت استفاده را خواهیم برد.

ب) هر سیگنال پیوستهٔ زمانی سینوسی یک سیگنال متناوب است. در حالیکه برای اینکه یک دنباله سینوسی یا نمائی گسستهٔ زمانی با دوره تناوب N متناوب باشد، لازم است:

$$e^{j\Omega_0(n+N)}=e^{j\Omega_0 n} \qquad (۲۲-۱)$$

و یا

$$e^{j\Omega_0 N}=1 \qquad (۲۳-۱)$$

برای اینکه رابطهٔ (۲۳ـ۱) صادق باشد، باید

$$\Omega_0 N=2\pi m \qquad (۲۴-۱)$$

که در آن m عددی صحیح می‌باشد. از (۲۴-۱) داریم

$$\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{m}{N} \qquad (۲۵-۱)$$

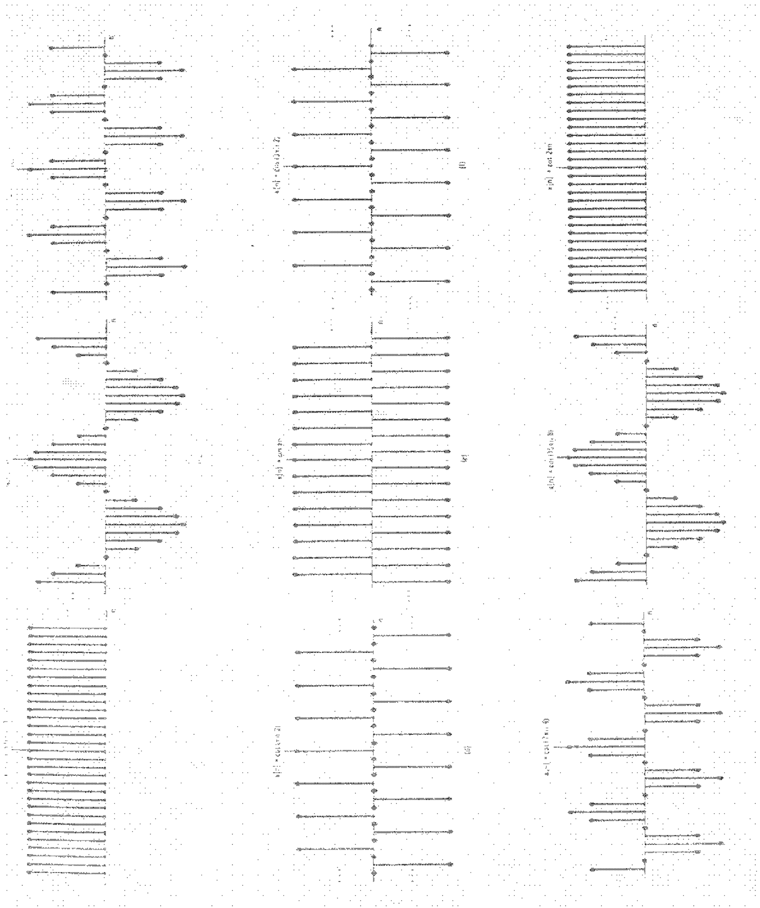
بنابراین یک دنبالهٔ سینوسی بصورت $e^{j\Omega_0 n}$ به ازاء مقادیر دلخواه Ω_0 متناوب نیست بلکه فقط در صورتی که نسبت $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ برابر کسر گویائی شود، این دنباله متناوب خواهد بود. به عنوان مثال اگر $\frac{\Omega_0}{2\pi}=\sqrt{2}$ باشد، در آن صورت دنباله سینوسی و یا نمائی متناوب نخواهد بود. دنبالهٔ رسم شده در شکل (۱-۱۶-a) با دوره تناوب $N=12$ متناوب است. در حالیکه دنبالهٔ رسم شده در شکل (۱-۱۶-b) اصلاً متناوب نیست.

ج) اکنون آماده‌ایم تا مفهومی از دورهٔ تناوب اصلی دنبالهٔ سینوسی ارائه نماییم. اگر $x[n]$ یک دنبالهٔ سینوسی متناوب با دورهٔ تناوب اصلی N باشد، فرکانس اصلی آن $\frac{2\pi}{N}$ خواهد شد. با توجه به رابطه (۱-۲۵) مشاهده می‌شود که فرکانس اصلی دنباله‌ای بصورت $e^{j\Omega_0 n}$ بصورت زیر است.

$$\frac{2\pi}{N}=\frac{\Omega_0}{m} \qquad (۲۶-۱)$$

بنابراین دورهٔ تناوب اصلی بصورت زیر قابل بیان است:

$$N=m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right) \qquad (۲۷-۱)$$



شکل (۱۶ـ۱): چند نمونه از دنباله‌های سینوسی فرکانسهای مختلف

مشاهده می‌شود این دو تعریف کاملاً با تعریف دورهٔ تناوب اصلی و فرکانس اصلی سیگنال سینوسی متفاوت هستند. و از همین‌جا می‌توان نتیجه گرفت که در مورد دنباله‌های سینوسی یک ارتباط ساده (معکوس یکدیگر بودن) بین دورهٔ تناوب اصلی و فرکانس ظاهری دنبالهٔ Ω_0 وجود ندارد. به عنوان مثال اگر $\Omega_0 = 2\pi\frac{6}{31}$ باشد. دوره تناوب اصلی دنباله $N = 31$ و $m = 6$ بدست می‌آید (با رابطهٔ (۱-۲۵) مقایسه کنید) ولی اگر اندکی فرکانس ظاهری افزایش یابد، یعنی $\Omega_0 = 2\pi\frac{6}{30}$ در آن‌صورت $\Omega_0 = 2\pi\frac{1}{5}$ شده و $N = 5$ و $m = 1$ بدست می‌آید. بنابراین مشاهده می‌شود با اندکی افزایش در فرکانس ظاهری دنباله، دورهٔ تناوب بشدت کاهش می‌یابد (از $N = 31$ به $N = 5$) در حالی‌که در مورد سیگنال‌های سینوسی پیوستهٔ زمانی با اندکی افزایش در فرکانس، دورهٔ تناوب فقط اندکی کاهش می‌یابد و بر عکس. به عنوان مثال، در مورد یک سیگنال سینوسی پیوسته زمانی اگر فرکانس از $\omega_0 = 2\pi\frac{6}{31}$ به $\omega_0 = 2\pi\frac{6}{30}$ افزایش یابد، دوره تناوب از $\frac{31}{6}$ به $\frac{30}{6}$ کاهش می‌یابد.

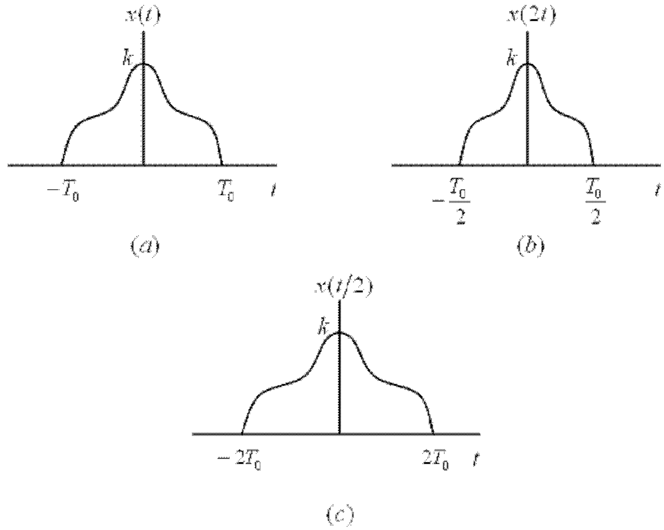
توجه به این سه تفاوت موجود میان دنباله و سیگنال سینوسی در بسیاری از مسائل می‌تواند راهگشا باشد.

۱-۵ تبدیل متغیر مستقل

در برخی کاربردها لازم است عملیاتی روی متغیر مستقل انجام گردد. در این قسمت به برخی از این عملیات اشاره می‌کنیم.

۱ـ۵ـ۱ مقیاس‌بندی[1]

اگر $x(t)$ بصورت شکل (a-۱۷-۱) باشد، در آن صورت $x(2t)$ و $x(\frac{t}{2})$ بصورت نمایش داده شده منقبض و منبسط می‌گردد. البته این امر که در حالت کلی $x(at)$ نسبت به $x(t)$ منقبض می‌شود اگر $|a|>1$ ، و منبسط می‌شود اگر $|a|<1$ ، فقط برای سیگنال‌های پیوستهٔ زمانی صحیح است. در مورد یک دنباله ممکن است بطور کلی شکل دنباله تغییر کند و اصولاً نیز محدودیت‌هایی برای مقیاس‌بندی یک دنباله وجود دارد. به عنوان مثال یک دنباله بصورت $x[\sqrt{2}n]$ هرگز قابل تعریف نیست، در حالیکه $x(\sqrt{2}t)$ قابل تعریف است، بنابراین برای مقیاس‌بندی دنباله‌های گسستهٔ زمانی باید توجه کرد که $x[an]$ وقتی قابل تعریف است که $\frac{1}{a}$ یک عدد صحیح باشد.

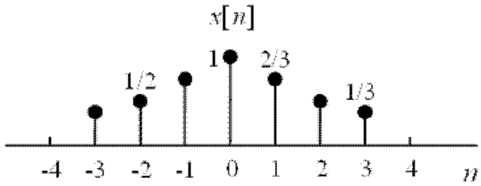


شکل (۱-۱۷): $x(t)$ و مقیاسهای آن

برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۱-۱): مطلوبست $x[2n]$ و $x\left[\frac{1}{2}n\right]$، اگر $x[n]$ بصورت شکل (۱-۱۸) باشد.

1-Scaling



شکل (۱-۱۸): $x[n]$ مربوط به مثال (۱-۱)

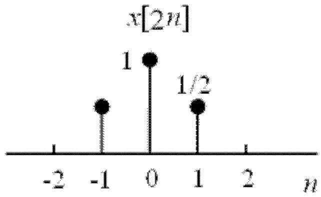
حل: تعریف می‌کنیم

$$y[n]=x[2n]$$

در اینصورت

$$y[-2]=x[-4]=0$$
$$y[-1]=x[-2]=\frac{1}{2}$$
$$y[0]=x[0]=1$$
$$y[1]=x[2]=\frac{1}{2}$$
$$y[2]=x[4]=0$$

بنابراین دنبالهٔ $y[n]=x[2n]$ بصورت شکل زیر است (دنباله‌های موجود در nهای فرد حذف می‌شوند).



شکل (۱-۱۹): $x[2n]$ مربوط به مثال (۱-۱)

برای قسمت بعد تعریف می‌کنیم

$$y[n]=x\left[\frac{1}{2}n\right]$$

بنابراین مشاهده می‌شود که به ازاء nهای فرد $y[n]$ تعریف نشده است و به ازاء nهای زوج داریم:

$$y[-8]=x[-4]=0$$
$$y[-6]=x[-3]=\frac{1}{3}$$
$$y[-4]=x[-2]=\frac{1}{2}$$
$$y[-2]=x[-1]=\frac{2}{3}$$
$$y[0]=x[0]=1$$
$$y[2]=x[1]=\frac{2}{3}$$

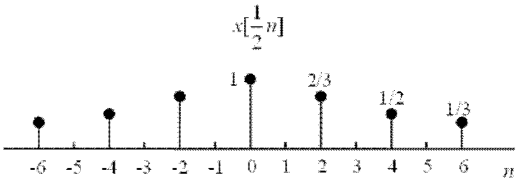
$$y[4]=x[2]=\frac{1}{2}$$
$$y[6]=x[3]=\frac{1}{3}$$
$$y[8]=x[4]=0$$

بنابراین شکل این دنباله مشابه شکل (۱-۱۹) خواهد شد با این تفاوت که مقادیر n باید هر یک دو برابر شوند و در نقاطی که در آنجا n فرد است دنباله تعریف نشده است.

دیده می‌شود که در اینجا دنباله $y[n]$ در برخی نقاط تعریف ندارد، و این ممکن است مشکلاتی را در بر داشته باشد. این ابهام در حالت کلی برای تعریف هر دنباله بصورت $y[n]=x[n/k]$ که k عدد صحیح است، ظاهر می‌شود. برای رفع این ابهام مناسب است، تعریف زیر را انجام دهیم

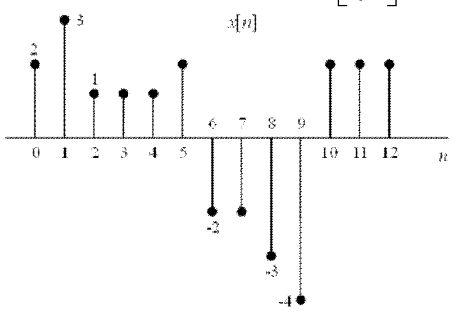
$$y[n]=\begin{cases} x[n/k] & \text{اگر } k \text{ مضرب صحیح از } n \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

با این تعریف می‌توان دنباله $x\left[\frac{1}{2}n\right]$، در مثال (۱-۱)، را بصورت زیر ترسیم نمود.



شکل (۱-۲۰): $x\left[\frac{1}{2}n\right]$ مربوط به مثال (۱-۱)

تمرین (۱-۴): مطلوبست $x[3n]$ و $x\left[\frac{1}{4}n\right]$، اگر $x[n]$ بصورت زیر باشد.

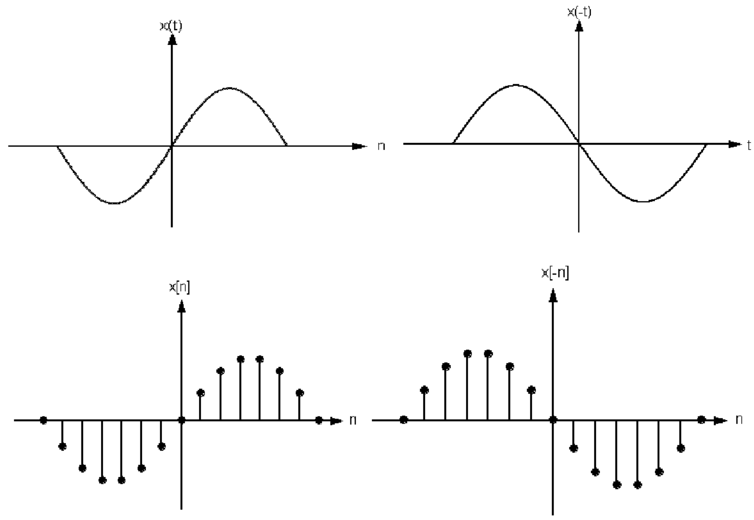


شکل (۱-۲۱): سیگنال $x[n]$ تمرین (۱-۴)

۱-۵-۲ انعکاس حول مبدأ[1]

یک سیگنال پیوستهٔ زمانی و یک دنبالهٔ گسستهٔ زمانی در شکل زیر ترسیم شده و حول صفر منعکس شده‌اند.

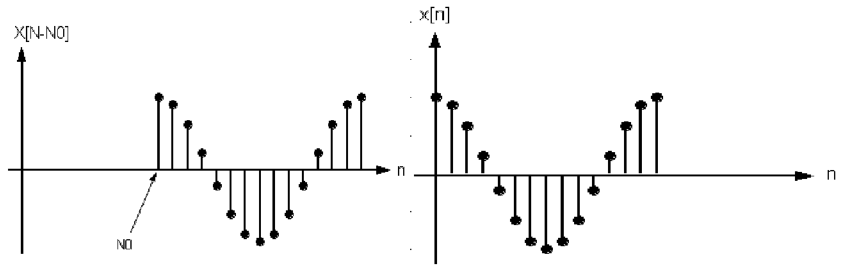
[1] Reflection



شکل (۱-۲۲): انعکاس در حوزهٔ پیوسته و گسسته زمان

۱-۵-۳ انتقال[1]

یک نمونه $x[n]$ و انتقال یافتهٔ آن در شکل (۱-۲۳) رسم شده‌اند.



شکل (۱-۲۳): یک دنباله گسسته زمان و انتقال یافته آن به سمت راست به اندازه N_0 نمونه

اگر N_0 مثبت باشد سیگنال به سمت راست و اگر N_0 منفی باشد سیگنال بسمت چپ منتقل می‌شود.

۱-۵-۴ تبدیل متغیر مستقل در حالت کلی

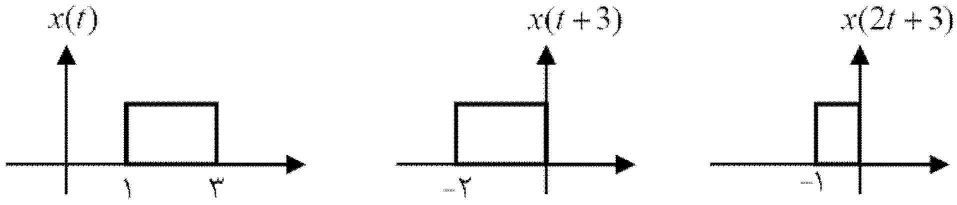
در حالت کلی ممکن است ترکیبی از تبدیلات فوق بر روی متغیر مستقل انجام گیرد، یعنی t به $(at+b)$ تبدیل شود که a و b مقدیر ثابت هستند. در این صورت یک روش برای تبدیل فوق این است. که، ابتدا سیگنال x(t) را به اندازهٔ b انتقال داده تا x(t+b) بدست آید و سپس این سیگنال انتقال داده شده را به اندازهٔ a مقیاس‌بندی می‌کنیم. یعنی بفرض اگر a مقداری مثبت و بزرگتر از یک بود، سیگنال x(t+b) را به اندازهٔ a واحد

---

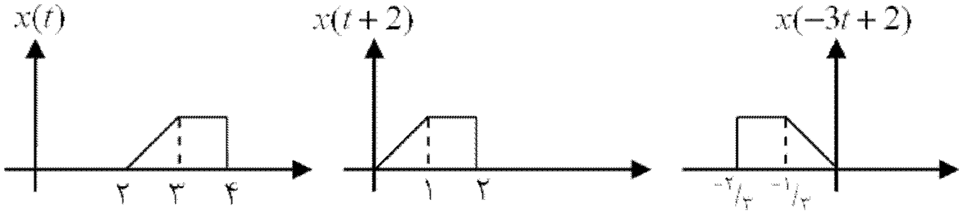
[1] Shift

فقط منقبض می‌کنیم. ولی اگر a مقداری منفی و بزرگتر از یک داشت، سیگنال x(t+b) را به اندازهٔ a واحد منقبض و سپس آن‌را منعکس می‌کنیم.

مثال:



مثال:



۱-۶ تعاریف مشترک در مورد سیگنال‌ها

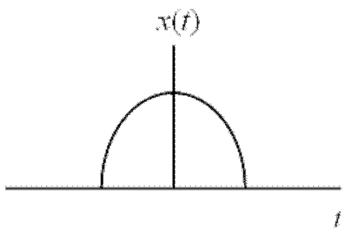
تعاریفی که در این قسمت انجام می‌شوند. در مورد سیگنال‌های پیوسته و گسسته زمان صادق می‌باشند. اما جهت جلوگیری از اطالهٔ کلام متناوباً هر تعریف را فقط روی یک دسته از سیگنال‌ها انجام می‌دهیم و تعمیم آن به نوع دیگر، کاری ساده و بدیهی می‌باشد.

۱ـ۶ـ۱ سیگنال زوج و فرد

سیگنال $x(t)$ را زوج گویند، اگر

$$x(t)=x(-t) \qquad (۱-۲۸)$$

به عنوان مثال سیگنال زیر یک سیگنال زوج است.

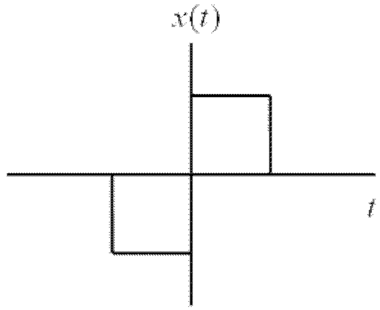


شکل (۱-۲۴): یک نمونه سیگنال زوج

سیگنال $x(t)$ را فرد گویند اگر

$$x(-t)=-x(t) \qquad (۱-۲۹)$$

یک نمونه سیگنال فرد بصورت زیر است.



سیگنال (۱-۲۵): یک نمونه سیگنال فرد

هر سیگنال دلخواه را می‌توان بصورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت، زیرا

قسمت زوج سیگنال

$$ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \tag{۱-۳۰}$$

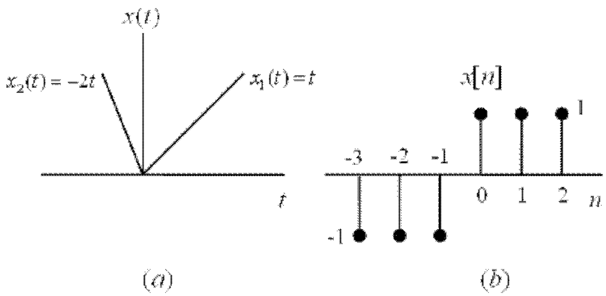
قسمت فرد سیگنال

$$od\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \tag{۱-۳۱}$$

از جمع دو تابع فوق داریم

$$x(t) = ev\{x(t)\} + od\{x(t)\} \tag{۱-۳۲}$$

مثال (۱-۲): قسمت‌های زوج و فرد سیگنال‌های زیر را پیدا کنید.



شکل (۱-۲۶): (a) سیگنال مثال (۲ـ۱) (b) دنباله مثال (۱-۲)

حل: گفتیم که هر تابع را می‌توان به مجموع دو تابع زوج وفرد تقسیم کرد. داریم

$$x(t) = -2tu(-t) + tu(t)$$
$$x(-t) = 2tu(t) - tu(-t)$$

با توجه به روابط (۱-۳۰) و (۱-۳۱) داریم

$x(t)$ قسمت زوج $= x_e(t) = ev\{x(t)\}$

$$=\frac{1}{2}\left[-2tu(-t)+tu(t)+2tu(t)-tu(-t)\right]$$

$$x_e(t)=\frac{1}{2}\left[-3tu(-t)+3tu(t)\right]=\frac{3}{2}t\left[u(t)-u(-t)\right]$$

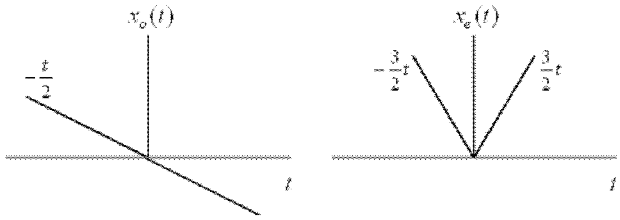
و اما برای قسمت فرد داریم

$$x_0(t)=\frac{1}{2}\left[-tu(t)-tu(-t)\right]=-\frac{t}{2}\left[u(t)+u(-t)\right]=-\frac{t}{2}$$

چون

$$u(t)+u(-t)=1$$

که شکل هردو قسمت در زیر رسم شده اند.



شکل (۱-۲۷): قسمتهای زوج و فرد سیگنال پیوسته زمان شکل (۱-۲۶-a)

و اما برای $x[n]$ داریم

$$x[n]=\{\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]\}-\{\delta[n+1]+\delta[n+2]+\delta[n+3]\}$$

بنابراین

$$x[-n]=\{\delta[-n]+\delta[-n-1]+\delta[-n-2]\}-\{\delta[-n+1]+\delta[-n+2]+\delta[-n+3]\}$$

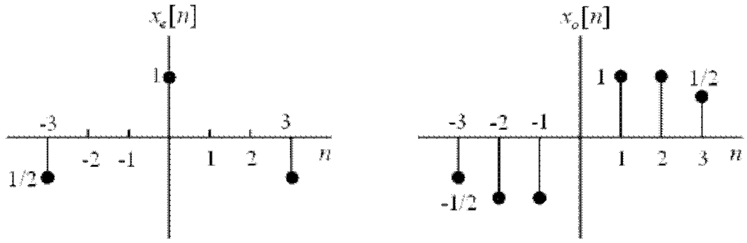
یا

$$x[-n]=\{\delta[n]+\delta[n+1]+\delta[n+2]\}-\{\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]\}$$

$$x_e[n]=\frac{1}{2}\{\delta[n-3]-\delta[-n-3]+2\delta[n]\}$$

و برای قسمت فرد هم داریم

$$x_0[n]=\{\delta[n-1]+\delta[n-2]+\frac{1}{2}\delta[n-3]\}-\{\delta[-n-1]+\delta[-n-2]+\frac{1}{2}\delta[-n-3]\}$$



شکل (۱-۲۸): قسمتهای زوج و فرد دنباله گسسته زمان شکل (۱-۲۶-b)

۱-۶-۲ سیگنال متناوب

سیگنالی را متناوب گویند که دارای خاصیت زیر باشد

$$x(t) = x(t + kT) \qquad (۱-۳۳)$$

که k هر عدد صحیحی میتواند باشد و T دورهٔ تناوب اصلی سیگنال است. باید توجه نمود که T کوچکترین عددی است که در حالت k=1 در رابطهٔ فوق صدق می‌کند. درمورد سیگنال‌های گسسته نیز همین تعریف برقرار است. سیگنال‌ها و دنباله‌های سینوسی یکی از مهمترین سیگنال‌های متناوب بشمار می‌روند.

مثال (۱-۳): دوره تناوب دنباله زیر را در صورت متناوب بودن بیابید.

$$x[n] = Cos(\Omega_0 n)\begin{cases}\Omega_0 = \pi / \sqrt{2} \\ \Omega_0 = \pi / 3\end{cases}$$

حل: ابتدا شرط متناوب بودن را تحقیق می‌کنیم

$$x[n+N] = Cos[\Omega_0(n+N)] = Cos(\Omega_0 n + \Omega_0 N)$$

برخلاف سیگنال پیوستهٔ زمانی که به ازاء هر مقدار ω_0 متناوب است، یک سیگنال گسستهٔ زمانی (دنباله) در صورتی متناوب است که $\Omega_0 N = 2K\pi$ شود. بنابراین، باید

$$\Omega_0 N = 2\pi F_0 N = 2K\pi \Rightarrow F_0 = \frac{K}{N}$$

یعنی فرکانس دنباله برابر کسر گویائی گردد. بنابراین در مورد اول داریم:

$$F_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

و سیگنال گسستهٔ زمانی (دنباله) فوق متناوب نخواهد بود. ولی درمورد (ب) داریم:

$$F_0 = \frac{1}{6}$$

و دنبالهٔ متناوب با دورهٔ تناوب $N = 6$ خواهد شد.

توجه شود که برای محاسبه N باید صورت و مخرج کسر، نسبت به هم اول باشند.

همانگونه که قبلاً تذکر داده شد، بر خلاف سیگنال‌های آنالوگ (پیوسته) در مورد سیگنال‌های گسسته تغییر کوچکی در فرکانس، می‌تواند سبب تغییرات بسیار بزرگی در دوره تناوب شود (در سیگنال‌های آنالوگ، تغییرات فرکانس و دوره تناوب متناظر می‌باشند).

۱-۷ اپراتور مقدار متوسط

بدلیل استفاده‌های بعدی از این اپراتور، فعلاً آن را بصورت یک عملگر ریاضی به صورت زیر برای دو نوع سیگنال متناوب و غیر متناوب تعریف می‌کنیم.

برای سیگنال غیر متناوب، مقدار متوسط سیگنال x(t) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$< x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt \qquad (۱-۳۴)$$

برای سیگنال متناوب، مقدار متوسط سیگنال عبارت است از:

$$< x(t) >= \int_{<T>} x(t)dt \qquad (۱-۳۵)$$

که انتگرال روی یک دوره تناوب گرفته می شود.

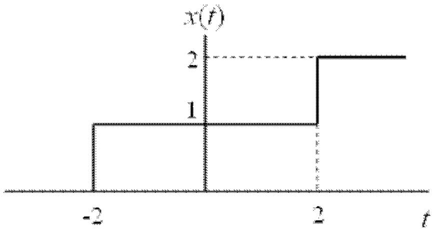
اگر چه تعریف فوق برای سیگنال‌های پیوسته انجام شده است، به سادگی با تبدیل انتگرال به مجموع می‌توان آنرا برای سیگنال‌های گسسته زمان نیز تعمیم داد. با این تعریف می‌توان مقدار مؤثر سیگنال $x(t)$ را بدین صورت تعریف کرد.

$$x_{rms} = \sqrt{< x^2(t) >} \qquad (۱-۳۶)$$

دراین قسمت برای آشنائی بیشترخوانندگان با مفاهیم مطرح شده قبلی به ارائه چندمثال حل شده می پردازیم.

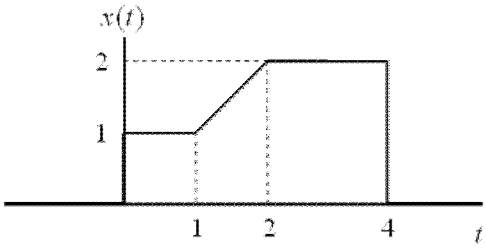
مثال (۱-۴): مطلوبست رسم سیگنال $x(t) = u(t+2) + u(t-2)$.

حل: با توجه به تابع پله واحد $u(t)$ سیگنال $x(t)$ بصورت شکل (۱-۲۹) است.



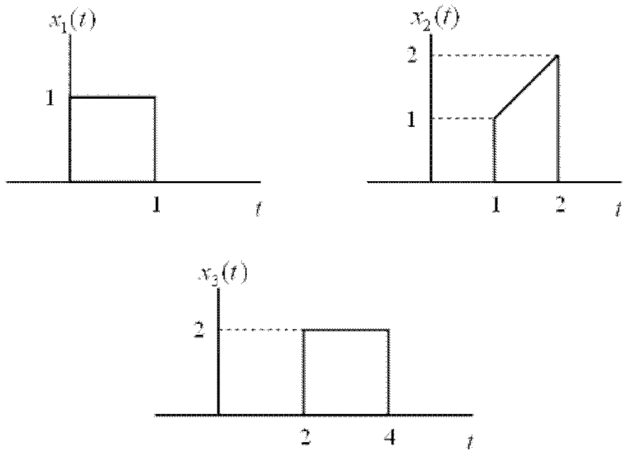
شکل (۱-۲۹): شکل $x(t)$ مثال(۱-۴)

مثال (۱-۵): مطلوبست ضابطهٔ سیگنال رسم شده در شکل زیر



شکل (۱-۳۰): شکل $x(t)$ مثال (۱-۵)

حل: این سیگنال را به سه جزء تقسیم می‌کنیم.



شکل (۱-۳۱): تفکیک سیگنال شکل (۱-۳۰) به چند سیگنال

بنابراین

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

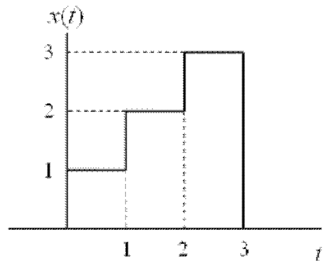
ولی

$$x_1(t) = u(t) - u(t-1)$$
$$x_2(t) = t[u(t-1) - u(t-2)]$$
$$x_3(t) = 2[u(t-2) - u(t-4)]$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$
$$+ t[u(t-1) - u(t-2)] + 2[u(t-2) - u(t-4)]$$

مثال (۱-۶): ضابطهٔ ریاضی سیگنال شکل زیر را بیابید.



شکل (۱-۳۲): سیگنال مثال (۱-۶)

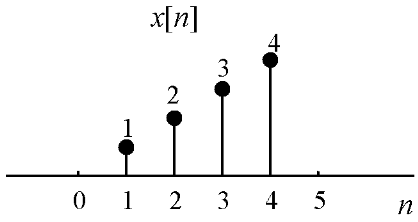
حل: با استفاده از تعریف تابع پله ضابطه سیگنال فوق را می‌توان بدینصورت نوشت:

$$x(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2) - 3u(t-3)$$

مثال (۱-۷): شکل دنباله زیر را رسم کنید.

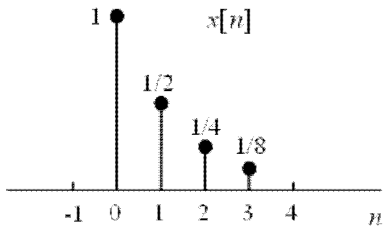
$$x[n]=n\{u[n]-u[n-5]\}$$

حل: این دنباله از $n=0$ شروع می‌شود. ولی بعلت ضرب شدن در n، این دنباله مقدارش در مبدا صفر است و تا $n=4$ ادامه پیدا می‌کند.



شکل (۱-۳۳): دنباله مثال (۱-۷)

مثال (۱-۸): ضابطه دنبالهٔ نشان داده شده در شکل زیر را بیابید.

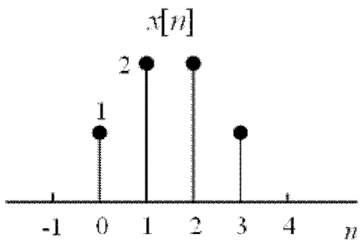


شکل (۱-۳۴): دنباله مربوط به مثال (۱-۸)

حل: مشاهده می‌شود که در فاصلهٔ $n=0$ تا $n=3$ هر مقدار دنباله، نصف مقدار دنباله در لحظهٔ قبلی است.

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\{u[n]-u[n-4]\}$$

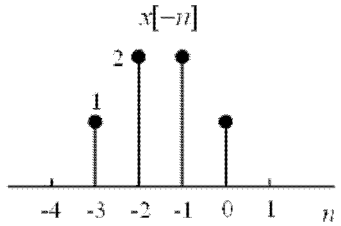
مثال (۱-۹): اگر $x[n]$ بصورت شکل زیر باشد، مطلوبست $x[1-n]$.



شکل (۱-۳۵): دنباله $x[n]$

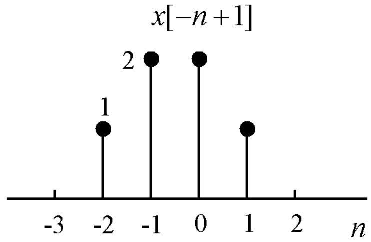
حل: مراحل تشکیل $x[1-n]$ از روی $x[n]$ بصورت زیر است.

الف) تشکیل $x[-n]$ از روی $x[n]$



شکل (۱-۳۶): دنباله $x[-n]$ ناشی از انعکاس $x[n]$

ب) انتقال دنبالهٔ $x[-n]$ به اندازه یک واحد به سمت راست، یعنی تشکیل $x[-(n-1)] = x[-n+1]$



شکل (۱-۳۷): انتقال شکل (۱-۳۶)

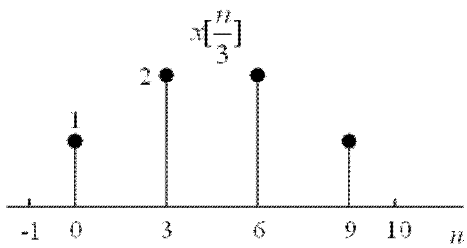
البته می‌توان ابتدا $x[n-1]$ را تولید کرده و سپس آن را حول مبدأ $n=0$ منعکس کرد. همانگونه که قبلاً اشاره شد، مقیاس‌بندی در مورد سیگنال‌های گسسته را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد.

$$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k] & n = mk, m \in Z \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن Z مجموعه اعدادصحیح است. مثلاً در مورد مثال فوق اگر $k=3$ باشد، داریم

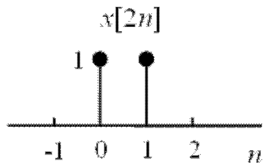
$$x_3[n] = \begin{cases} x[n/3] & n = 3m, m \in Z \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱-۳۷)$$

و شکل $x[\frac{n}{3}]$ به صورت زیر خواهد بود.



شکل (۱-۳۸): دنبالهٔ $x[\frac{n}{3}]$

واگر شکل $x[3n]$ را رسم کنیم داریم



شکل (۱-۳۹): دنبالهٔ $x[3n]$

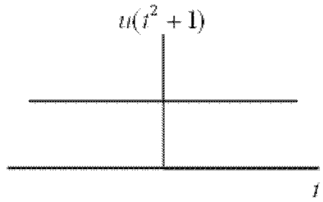
چون به ازاء $n = 0,1,2,...$ داریم :

$$y[n] = x[3n]$$
$$y[0] = x[0]$$
$$y[1] = x[3]$$
$$y[2] = x[6]$$

دیده می‌شود که این سیگنال هنچگونه شباهتی به سیگنال اصلی $x[n]$ ندارد.

مثال (۱-۱۰): مطلوبست رسم $u(t^2+1)$

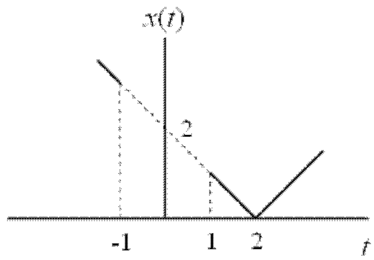
حل: چون t^2+1 همواره مثبت است پس $u(t^2+1)=1$ است.



شکل(۱-۴۰): شکل سیگنال $u(t^2+1)$

مثال (۱-۱۱): مطلوبست رسم $x(t)=|t-2|u(t^2-1)$

حل: ابتدا می‌بینیم $u(t^2-1)$ در فاصله $-1<t<1$ مساوی صفر است، چون آرگومانش منفی می‌شود. ولی در سایر فواصل مثبت است و مساوی واحد است. بنابراین شکل آن بصورت زیر است.

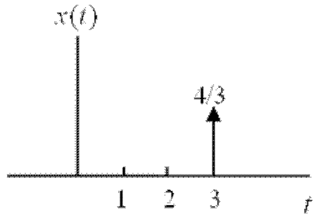


شکل (۱-۴۱): شکل سیگنال مثال (۱-۱۱)

مثال (۱-۱۲): مطلوبست رسم سیگنال $x(t)=4\delta(3t-9)$

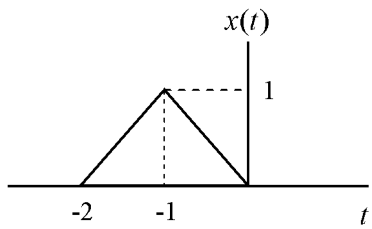
حل: با توجه به خواص تابع ضربه دانشجویان می‌توانند ثابت کنند که $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

بنابراین $x(t)=4\delta[3(t-3)]=\frac{4}{3}\delta(t-3)$



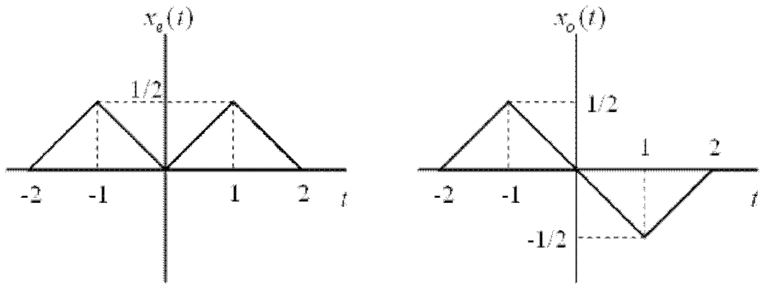
شکل (۱-۴۲): سیگنال مثال (۱-۱۲)

مثال (۱-۱۳): مطلوبست تعیین قسمتهای زوج و فرد سیگنال زیر



شکل (۱-۴۳): سیگنال مثال (۱-۱۳)

حل: بسادگی داریم



شکل (۱-۴۴): قسمتهای زوج و فرد سیگنال شکل (۱-۴۳)

مثال (۱-۱۴): رابطه‌ای برای انرژی سیگنال بر حسب انرژی‌های قسمت زوج و فرد آن بیابید. توجه کنید که تعریف انرژی سیگنال $x(t)$ بصورت انتگرال زیر است (اگر این انتگرال موجود باشد).

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt$$
$$x(t)=x_e(t)+x_0(t)$$

حل: قبلاً گفتیم که با بتوان رساندن و انتگرال‌گیری روی تمام حوزه t داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x_e{}^2(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}x_{\circ}^2(t)dt+2\int_{-\infty}^{\infty}x_o(t)x_e(t)dt$$

اما می‌دانیم که انتگرال سوم از طرف راست رابطهٔ فوق مساوی صفر است و دلیل آن هم اینست که تابع تحت انتگرال که حاصلضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد است، نهایتاً یک تابع فرد خواهد بودوسطح زیر منحنی یک تابع فرد صفراست. پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^{\,2}(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt$$
$$E_x = E_{xe} + E_{xo}$$

مثال (۱-۱۵): انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(t^2 + 3t - 1\right)\delta(t-1)dt$

حل: بدلیل خاصیت نمونه برداری تابع ضربه، بایدتابع زیر انتگرال را به ازای $t = 1$ حساب نمود. پس داریم

$$I = -3\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1)dt = -3$$

ب) $II = \int_{-2}^{2} t^2\left[\delta(t) + 2\delta(t+1) + \delta(t-4)\right]dt$

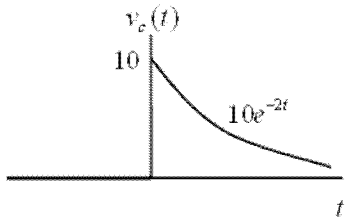
حل: ابتدا با استفاده از تفکیک انتگرال مجموع به مجموع انتگرال ها و سپس با استفاده از خاصیت نمونه برداری تابع ضربه داریم

$$II = \int_{-2}^{2} t^2\delta(t)dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} t^2\delta(t+1)dt + \int_{-2}^{2} t^2\delta(t-4)dt$$
$$= 0 + 2(-1)^2\int_{-2}^{2} \delta(t+1)dt + (4)^2\int_{-2}^{2} \delta(t-4)dt$$

اما آخرین انتگرال صفراست چون تابع ضربه در محدوده انتگرال قرارنمی گیرد. پس می‌توان نوشت

$$II = 0 + 2(-1)^2 + 0 = 2$$

مثال (۱۶ـ۱): سیگنال ولتاژ دو سر خازن با $C = 1mf$ بصورت زیر است. مطلوبست رسم منحنی سیگنال جریان آن

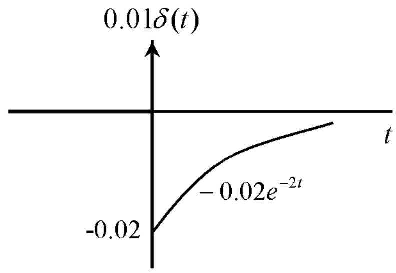


$$v_c(t) = 10\ e^{-2t}u(t)$$

شکل (۱-۴۵): سیگنال مثال (۱-۱۶) (ولتاژ دو سر خازن)

حل:

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} = 0.001 \times \left[(10)\times(-2)e^{-2t}u(t) + 10e^{-2t}\delta(t)\right]$$
$$= -0.02\,e^{-2t}u(t) + 0.01\delta(t)$$



شکل (۱-۴۶): منحنی جریان دو سر خازن مثال (۱-۱۶)

۱-۸ سیستم و تعریف آن

تاکنون با بخشی از ابزار کار در تجزیه و تحلیل سیستم‌ها، یعنی با سیگنال، آشنایی پیدا کردیم. اکنون برآنیم تا تعریف کامل و قابل قبولی از سیستم ارائه دهیم. اکثر دانشجویان کم و بیش در سایر درس‌ها و یا در برخی آزمایشگاه‌ها با مفهوم سیستم آشنا شده و می‌توانند برداشت خود را از این کلمه ارائه کنند. بنابراین به هیچ وجه کلمه سیستم مفهوم جدیدی را در ذهن تداعی نمی‌کند، و هر مهندسی با توجه به تخصص خود می‌تواند سیستمهای مختلفی را برشمارد. ممکن است از دید یک مهندس مخابرات، یک ماهوارهٔ مخابراتی و از دید یک مهندس الکترونیک، یک تلویزیون به عنوان سیستم معرفی شود.

البته، اگر چه همهٔ موارد مذکور در محدودهٔ سیستم و تعریف آن می‌گنجند، اما آیا واقعاً تعریف سیستم فقط شامل تکنولوژی پیچیده و پیشرفته است؟ بعبارت دیگر ملاک شناخت سیستم چیست؟

برای پاسخ اساسی به این سوال، ایجاد یک تعریف جامع ومانع برای سیستم لازم و ضروری بنظر می‌رسد. معمولاً در کتابها دو تعریف زیر را، به طور موازی و گاهی بصورت هم ارز یکدیگر، برای سیستم بیان می‌کنند:

۱ـ فرایندی را که سیگنال خروجی‌اش با انجام تغییر و تحولی در سیگنال ورودی حاصل می‌شود، سیستم می‌گویند.

۲ـ به مجموعه‌ای منظم از اجزائی که به کمک یکدیگر هدف مشخصی را برآورده می‌سازند سیستم می‌گویند.

مطابق تعریف اول، هر سیستم بصورت یک جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شود که دارای حداقل یک سیگنال ورودی و یک سیگنال خروجی است. مطابق تعریف فوق آنچه که باعث اطلاق کلمه سیستم به این جعبه سیاه می‌گردد، فقط ارتباط سیگنال‌های ورودی و خروجی آن است و اصلاً ارتباطی به مشخصات درونی جعبه ندارد. اما برداشت ما از تعریف دوم اینست که چون همهٔ اشیاء و موجودات، اعم از جاندار و بی جان، مخلوق خداوند متعال می‌باشند پس هر یک از آن‌ها طبق قاعدهٔ نظم الهی خلق شده‌اند و درحقیقت، هر موجودی یک نوع سیستم می‌باشد. به عنوان مثال طبق این تعریف، ساعت، انسان، گیاه، میز، کرهٔ ماه، یک رستوران مجهز، سینما و یک باغ وحش نیز سیستم هستند. چون هم مجموعه‌ای منظم بوده و هم هدف مشخصی را برآورده می‌سازند. اما آیا براستی کلمهٔ سیستم، در اصطلاح مهندسان، شامل همهٔ مخلوقات خداوند متعال می‌شود؟ بنظر می‌رسد تعاریف فوق اگر چه جامع هستند اما مانع نیستند. به‌عبارت دیگر، هر سیستم به منظوری که یک مهندس استفاده می کند درمحدودهٔ تعاریف فوق قابل گنجاندن است. اما برخی پدیده‌ها که معمولا از نظر یک مهندس، سیستم نیستند نیز جزء تعاریف فوق قرار می‌گیرند (مثل کره ماه). پس باید تعریف را کمی دقیقتر نمود. آنچه که مسلم است، *یک روش شناخت سیستم آن است که بتوان برای آن یک (یا درحالت کلی چند) سیگنال*

ورودی و یک (یا درحالت کلی چند) سیگنال خروجی تعریف کرد. البته نوع و ماهیت این سیگنال‌ها مهم نیست. مثلاً سیگنال ورودی می‌تواند مکانیکی و خروجی الکتریکی باشد (و یا بر عکس)، اما این همهٔ یک سیستم نیست. بلکه وقتی تعریف یک سیستم کامل می‌شود که علاوه بر تعریف سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستم، فیزیک حاکم بر درون جعبهٔ سیاه را نیز بشناسیم. بنابراین می‌توان گفت که سیستمْ یک جعبهٔ سیاه نیست، بلکه یک جعبهٔ معلوم است که شامل حداقل دو سیگنال بعنوان ورودی و خروجی می‌باشد. بنابراین دو موضوع در ایجاد یک سیستم یا برداشت سیستمی از یک پدیدهٔ فیزیکی دخالت دارند.

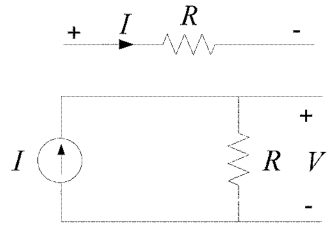
الف: فیزیک یا قانون تجربی که بر سیستم حاکم است مثل قانون اهم با معادلهٔ $V = RI$ یا قانون فارادی. در حالت کلی، قانون حاکم بر سیستم می‌تواند ترکیبی از قوانین تجربی مورد استفاده در علوم مختلف باشد.

ب: عوامل زیست محیطی که نوع سیگنال ورودی (سیستم) و خروجی آنرا تعیین می‌کنند. در حالت کلی، معادلهٔ قانون فیزیکی حاکم بر سیستم دارای چندین متغیر می‌باشد. نحوهٔ انتخاب ورودی(ها) و خروجی(ها) از میان این متغیرها بستگی به منظور طراح دارد که از دید این تعریف طراح یک عامل مهم زیست محیطی است. انتخاب سایر عوامل زیست محیطی (مثل نور، گرما، رطوبت، و ...) با تاثیر بیشتر و حذف عوامل زیست محیطی غیر مهم نیز به عهدهٔ طراح یا مدل‌ساز است.

در تشکیل یک سیستم هر دو عامل فوق موثر هستند. بنابراین قدم اول در شناخت سیستم، شناخت فیزیک حاکم بر سیستم و سپس تعریف سیگنالهای ورودی و خروجی و برقراری ارتباط منطقی بین آنها است. به عنوان مثال در مورد یک ساعت، می‌توان چندین تعریف متفاوت از سیستم ساعت در نظر گرفت. اگر ورودی انرژی الکتریکی و خروجی چرخش چرخ‌دنده‌ها در نظر گرفته شود، یک نوع سیستم بدست می‌آید و اگر ورودی، نیروی چرخ‌دنده‌ها و خروجی موقعیت عقربه‌ها روی صفحه ساعت باشد، نوع دیگری از سیستم حاصل می‌شود. بهر حال بطور خلاصه می‌توان گفت از ترکیب یک قانون تجربی با عوامل زیست محیطی به شکل خاص، سیستم پدید می‌آید.

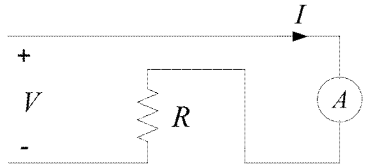
بنابراین امکان دارد که با یک قانون تجربی ولی با تغییر عوامل زیست محیطی، سیستم‌های مختلفی ساخت و یا بر عکس ممکن است که از چند قانون فیزیکی متفاوت یک سیستم مشخص بدست آورد. مثلاً یک مقاومت الکتریکی را که با قانون فیزیکی $V = RI$ مشخص می‌شود در نظر بگیرید. اگر سیستم را بصورتی تعریف کنیم که ورودی آن جریان و خروجی آن ولتاژ باشد، در آن صورت تابع انتقال سیستم (یعنی نسبت سیگنال خروجی به سیگنال ورودی) بصورت زیر خواهد شد.

$$V = RI \rightarrow T[x(t)] = R$$



شکل (۱-۴۷): یک نوع برداشت سیستمی از یک قانون فیزیکی (قانون اهم)

که در آن اپراتور $T[\ ]$ بیانگر فرایند انتقال یا تبدیل در سیستم می‌باشد و این سیستم در واقع یک ضرب‌کننده خواهد بود که ورودی را در عدد ثابتی ضرب کرده و به خروجی منتقل می‌کند. اما اگر همین مقاومت با همان قانون فیزیکی مشخص بصورت زیر بکار برده شود (ورودی آن ولتاژ و خروجی جریان در نظر گرفته شود)



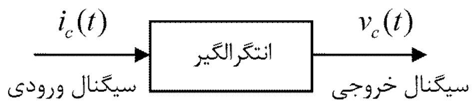
شکل (۱-۴۸): برداشت سیستمی متفاوت از قانون اهم

در آن صورت تابع انتقال (یا تابع تبدیل) سیستم می‌شود

$$T[x(t)] = \frac{1}{R} \qquad (۳۸-۱)$$

و این سیستم اکنون یک تقسیم‌کننده است که ورودی رابر عدد R تقسیم کرده و به خروجی منتقل می‌کند. این امر در مورد یک سلف یا خازن کمی جالبتر است، چون دریک حالت از یک خازن یا سلف می‌توان یک انتگرال‌گیر و یا مشتق‌گیر ساخت. یک خازن اگر ورودی آن جریان و خروجی آن ولتاژ در نظر گرفته شود، یک انتگرال‌گیر است، یعنی

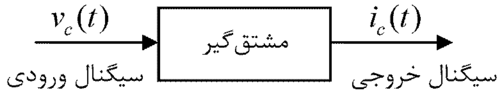
$$v_c(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} i_c(t)dt \qquad (b-۳۸-۱)$$



شکل (۱-۴۹): یک برداشت سیستمی بعنوان انتگرال‌گیر از قانون فیزیکی خازن

به عبارت دیگر این سیستم از وروردی انتگرال گرفته و نتیجه را در خروجی ظاهر می‌کند (فرض کنید $c = 1$).
از طرف دیگر همین خازن با همین قانون فیزیکی، اگر با ورودی ولتاژ و خروجی جریان در نظر گرفته شود یک مشتق‌گیر است، یعنی از ورودی مشتق گرفته و نتیجه مشتق را در خروجی ظاهر می‌کند.

$$i_c(t) = c\frac{dv_c(t)}{dt}$$



شکل (۱-۵۰): برداشت سیستمی مشتق‌گیر از قانون فیزیکی خازن

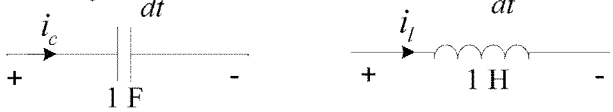
بنابراین تا اینجا اثر تعیین کننده عوامل زیست محیطی در تعریف سیستم را متوجه شدیم و دیدیم فقط با تغییر عوامل زیست محیطی می‌توان از یک قانون فیزیکی چندین سیستم، که این سیستم‌ها در مواردی کاملاً متفاوت هستند، ساخت.

اکنون این نکته را متذکر می‌شویم که برعکس حالت فوق، می‌توان از چندین قانون فیزیکی کاملاً مختلف (حتی با ماهیت‌های متفاوت)، یک تعبیر سیستمی ارائه کرد. به عنوان مثال در مکانیک ارتباط نیرو F (به عنوان ورودی) و جابجایی x (به عنوان خروجی) در یک فنر بصورت زیر است

$$x = \frac{1}{K} F$$

و این رابطه مبین یک سیستم تقسیم‌کننده است و اگر $K = R$ باشد، این سیستم معادل سیستم شکل (۱-۴۶) (سیستم تقسیم‌کننده حاصل از مقاومت) است. همچنین از دید سیستمی، دو سیستم زیر نیز با هم معادل‌اند و هر دو مشتق‌گیر می‌باشند (به شرط $L = C = 1$).

$$i_c = \frac{dv_c}{dt} \qquad v_l = \frac{di_l}{dt}$$



شکل (۱-۵۱): برداشت معادل سیستمی از دو قانون فیزیکی متفاوت.

در سیستم اول ورودی ولتاژ و خروجی (مشتق ورودی) جریان و در سیستم دوم ورودی جریان و خروجی (مشتق ورودی) ولتاژ می‌باشد. اما در مبحث تجزیه و تحلیل سیستم‌ها واقعاً ماهیت ایجادکننده ارتباط ورودی و خروجی مهم نیست (اگر چه در نحوه ارتباط و تعریف سیستم مهم است).

پس در مبحث سیستم‌ها، اتفاقاتی که طی مراحل مختلف و به شیوه‌های مختلف در درون سیستم رخ می‌دهند، برای تحلیل‌گر سیستم جالب نیست و آنچه که برای ما به عنوان تحلیل‌گر سیستم مهم است، نتیجه این اتفاقات یا به عبارت دیگر رابطه بین ورودی و خروجی می‌باشد. بنابراین از دید ما سیستم‌های مختلفی که دارای یک نوع رابطه ورودی و خروجی هستند، مثل سیستم فنر (مکانیکی) و مقاومت (الکتریکی)، یکسان هستند و دارای خواص یکسانی هستند.

این مطلب کاربرد علم سیستم‌ها را در رشته‌های مختلف مهندسی مانند مهندسی برق، مکانیک، شیمی، اقتصاد وغیره روز افزون کرده و آنرا به عنوان علم مشترک با قوانین تقریباً مشترک در همه رشته‌ها مطرح نموده است.

از این به بعد، رابطه ورودی و خروجی سیستم را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$y(t) = T[x(t)]$$

که در آن $x(t)$ ورودی سیستم و $y(t)$ خروجی سیستم است و T بیانگر تابع انتقال (یا نسبت سیگنال ورودی به خروجی) سیستم است.

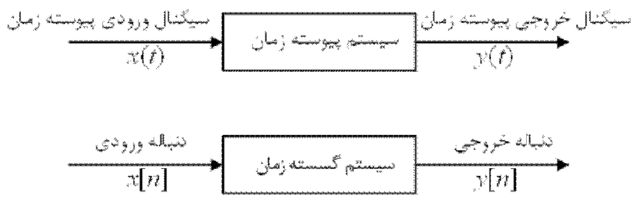
۱-۹ تقسیم‌بندی سیستم‌ها

می‌توان سیستم‌ها را از جهات مختلف دسته‌بندی کرد. یک دسته‌بندی از جهت رابطهٔ بین ورودی و خروجی سیستم‌ها است. اگر یک رابطهٔ معین و یقین‌آور بین سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستمی برقرار باشد، آن سیستم را یک *سیستم معین*[1] می‌گویند. این‌گونه سیستم‌ها می‌توانند دارای سیگنال‌های ورودی و خروجی معین یا سیگنال‌های تصادفی باشند، اما در هر دوصورت رابطهٔ بین ورودی و خروجی یک رابطهٔ معین و یقین‌آور

---

[1] deterministic systems

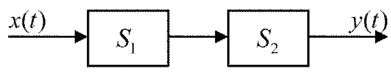
است. رابطهٔ بین سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستمی ممکن است یک رابطهٔ تصادفی باشد که در این صورت سیستم را تصادفی[1] می‌گویند. در حقیقت، همهٔ سیستم‌ها از نوع معین هستند، ولی چون هنوز یک رابطهٔ معین و یقین‌آور برای ارتباط دادن ورودی و خروجی بعضی سیستم‌ها بدست نیامده است، رابطهٔ ورودی و خروجی آن سیستم‌ها را به صورت مدل‌های آماری یا تصادفی بیان می‌کنند. در حال حاضر، اکثر سیستم‌های بیولوژیکی را به صورت مدلهای تصادفی یا سیستم‌های تصادفی بیان می‌کنند. مدل‌های مبتنی بر علم ژنتیک، یا مبتنی بر شبکه‌های عصبی از نوع مدل‌های تصادفی می‌باشند. در این کتاب، فقط سیستم‌های معیّنی که سیگنال‌های ورودی و خروجی‌اشان نیز معین می‌باشند مورد توجه قرار خواهد گرفت.
نوع دیگری از دسته بندی سیستم‌ها بر اساس پیوسته یا گسسته بودن زمانی سیگنالهای ورودی و خروجی سیستم می‌باشد. از این جهت، می‌توان سیستم‌ها را به دو دسته کلی پیوستهٔ زمانی و گسستهٔ زمانی تقسیم کرد:
۱ـ سیستم پیوستهٔ زمانی: سیستمی است که سیگنال‌های ورودی و خروجی آن پیوستهٔ زمانی می‌باشند.
۲ـ سیستم گسستهٔ زمانی: سیستمی است که سیگنال‌های ورودی و خروجی آن گسستهٔ زمانی می‌باشند.
البته انواع دیگری از سیستم‌ها نیز وجود دارد که ورودی آنها پیوسته و خروجی آنها گسستهٔ زمانی ویا خروجی آنها پیوسته و ورودی آنها گسستهٔ زمانی می‌باشند که درحقیقت از ترکیب چند سیستم پیوستهٔ زمانی و گسسته زمانی ساخته می‌شوند و در جای خود مورد بحث قرار می‌گیرند. بنابراین سیستم پیوستهٔ زمانی و سیستم گسستهٔ زمانی بصورت زیر رسم می‌شوند.



شکل(۱-۵۲): سیستم پیوسته و گسستهٔ زمانی

۱-۱۰ اتصالات سیستم‌ها

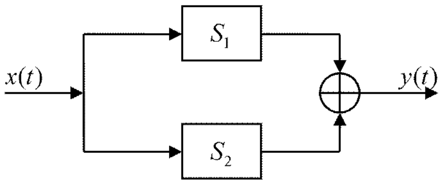
در این فصل، ارتباط بین سیستم‌ها، که از لحاظ تجزیه وتحلیل سیستم ها بسیار حائز اهمیت است، را بطور خلاصه مورد بررسی قرارمی دهیم. ما اتصالات را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم.
۱ـ اتصال سری یا Cascade



شکل (۱-۵۳): اتصال سری سیستم‌ها

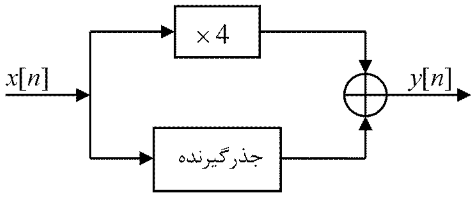
۲ـ اتصال موازی یا Parallel

---
[1] stochastical or random system



شکل (۱-۵۴): اتصال موازی سیستم‌ها

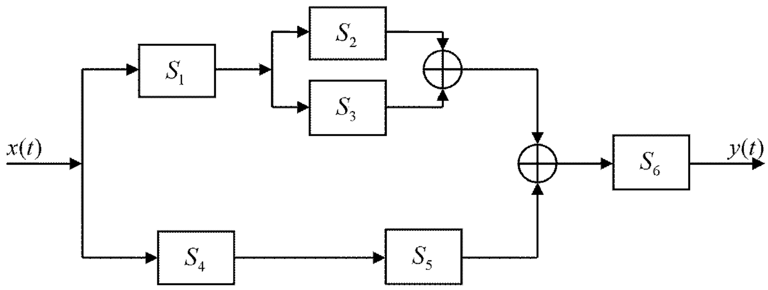
به عنوان مثال سیستم زیر مبین رابطه $y[n]=4x[n]+\sqrt{x[n]}$ می‌باشد.



شکل (۱-۵۵): سیستمی با ضابطه $y[n]=4x[n]+\sqrt{x[n]}$

۳ـ اتصال مرکب

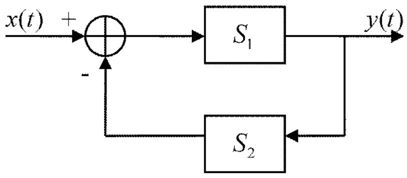
از ترکیب اتصالات سری و موازی بدست می‌آید. مثلاً یک نمونه از یک سیستم با اتصال مرکب سیستم‌های جزئی بصورت زیر است.



شکل (۱-۵۶): اتصال مرکب سیستم‌ها

۴ـ اتصال پس خور یا Feedback

در این نوع اتصال در خروجی یک نمونه از سیگنال برداشته شده و در ورودی تأثیر می‌گذارد. یک نمونه از سیستم‌های اتصال پس خور در زیر نمایش داده شده است.

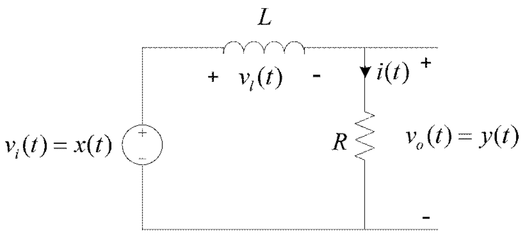


شکل (۱-۵۷): سیستم با اتصال پس خور

بعدها رابطه‌ای برای محاسبه خروجی بر حسب ورودی و ضابطهٔ تک تک سیستم‌ها بدست خواهیم آورد. توجه کنید که جهت پیکانها در نمایش صحیح و دقیق سیستم‌ها بسیار مهم است. لازم بذکر است که در این کتاب از علامتهای ساختاری بصورت شکل زیر به عنوان جمع کننده ویا ضرب کننده استفاده خواهیم کرد.

شکل (۱-۵۸): علامتهای ساختاری نشاندهنده ضرب و جمع سیگنالها

مثال (۱-۱۷): یک نمودار جعبه ای معادل برای مدار زیر بیابید.

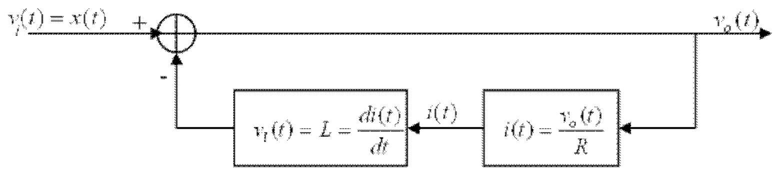


شکل (۱-۵۹): مدار مثال (۱-۱۷)

حل: باید از خروجی که $v_\circ(t)$ است ابتدا جریان $i(t)$ وسپس طی عملیات مشتق گیری $v_l(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$ را تولید کنیم. درنهایت ولتاژ سلف را در ورودی از ولتاژ ورودی کم کنیم وآن را به خروجی متصل کنیم. نتیجه این مراحل در شکل زیر نشان داده شده است.

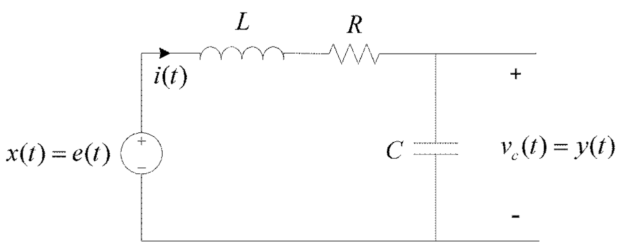
$$v_\circ(t) = v_i(t) - v_l(t)$$

$$v_l(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



شکل (۱-۶۰): سیستم متناظر با تعریف ورودی و خروجی در مدار مثال (۱-۱۷)

مثال (۱-۱۸): نمودار بلوکی مدار زیر را بیابید.

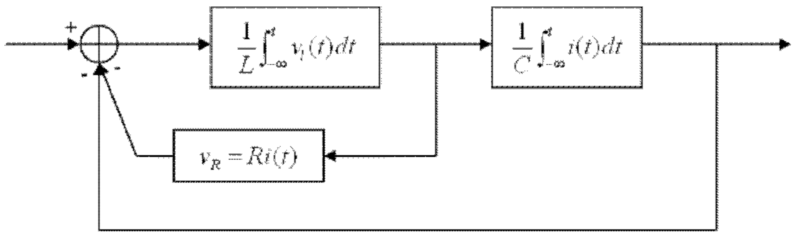


شکل (۱-۶۱): مدار شکل (۱-۱۸)

حل: ابتدا معادله دیفرانسیل مدار را داریم

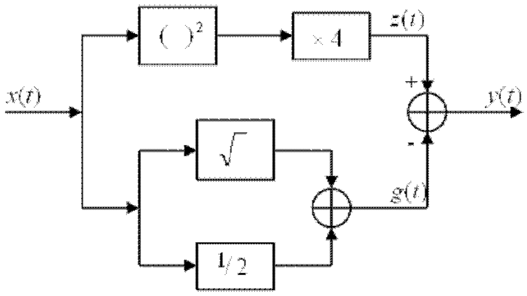
$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} i(t)dt$$

اگر ورودی ولتاژ منبع و خروجی ولتاژ خازن باشد، با انجام مراحی مشابه مثال قبلی، معادل سیستمی مدار فوق بصورت زیر بدست می آید.



شکل (۱-۶۲): سیستم متناظر با تعریف ورودی و خروجی درمدار مثال (۱-۱۸)

مثال (۱-۱۹): ضابطه سیستم زیر را تعیین کنید.



شکل (۱-۶۳): سیستم مثال (۱-۱۹)

حل: داریم

$$z(t) = 4x^2(t)$$

و

$$g(t) = \sqrt{x(t)} + \frac{1}{2}x(t)$$

بنابراین

$$y(t) = 4x^2(t) - \sqrt{x(t)} - \frac{1}{2}x(t)$$

با این مثال‌ها اهمیت تفکیک یک سیستم بزرگ به اجزاء آن بیان شده است. در این صورت می‌توان ابتدا به بررسی عملکرد هریک از اجزاء سیستم پرداخت، و سپس با اتصال اجزاء سیستم به یکدیگر به بررسی و درک عملکرد سیستم بزرگ پرداخت. این حقیقت یکی از روش‌های کارآمد در تجزیه و تحلیل سیستم‌های پیچیده و بزرگ می‌باشد. به عنوان مثال، تحلیل یک سیستم پیچیده مثل ماهواره یا تلویزیون بدون تفکیک این سیستم به

اجزاء آن تقریباً غیرممکن است. ولی با نظر به این سیستم‌ها بعنوان ترکیبی از چندین سیستم جزئی امکان تحلیل و تفسیر، و پیش‌بینی عملکرد آنها، بوجود می‌آید. تفکیک سیستم به اجزاء آن در فرایند شبیه‌سازی کاربرد فراوانی دارد.

۱-۱۱ خواص سیستم‌ها

در این قسمت برخی خواص اساسی سیستم‌های پیوسته و گسستهٔ زمانی را مرور خواهیم کرد. این خواص، هم تفسیر فیزیکی داشته و هم توسط روابط ریاضی قابل تحقیق هستند. و اکثر آنها از روی ضابطهٔ مرتبط دهندهٔ ورودی و خروجی سیستم قابل استخراج هستند.

۱ـ۱۱ـ۱ سیستم با و بدون حافظه[1]

سیستمی را بدون حافظه گویند که خروجی آن در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد (نه قبل و نه بعد). در غیر این صورت سیستم باحافظه است. مثلاً سیستمی با ضابطهٔ مرتبط‌دهندهٔ ورودی و خروجی بصورت زیر یک سیستم بی‌حافظه است.

$$y[n]=2\{x[n]+x^2[n]\} \qquad (۱-۴۱)$$

مقاومت که بیانگر قانون فیزیکی اهم است، نیز یک سیستم بدون حافظه است.

یک سیستم بی‌حافظه از سابقهٔ سیگنال ورودی در گذشته مطلع نیست، به عبارت دیگر سابقهٔ ورودی تأثیری در مقدار خروجی در حال حاضر ندارد. بنابراین خروجی در هر لحظه نباید به ورودی در لحظات قبل بستگی داشته باشد. اما اینکه در تعریف، لحظات قبل و بعد هر دو بطور یکسان آورده شده‌اند تنها یک تعریف و قرارداد است. به عنوان مثال دیگر یک سیستم تاخیری که رابطه ورودی و خروجی آن بصورت زیر است، یک سیستم باحافظه می‌باشد.

$$y(t) = x(t-1) \qquad (۱-۴۲)$$

چون خروجی در هر لحظه متاثر از ورودی دریک لحظه قبل است. سیستمی با ضابطهٔ

$$y(t) = x(t+1) \qquad (۱-۴۳)$$

نیز، طبق تعریف، یک سیستم با حافظه است. اگرچه خروجی در هر لحظه به ورودی در لحظات قبل بستگی ندارد. بلکه خروجی در هر لحظه به ورودی در یک لحظه بعد بستگی دارد. و این نوعی سیستم پیش‌بین است و ارتباطی به حافظه ندارد، اما همین که خروجی در یک لحظه خاص به ورودی درلحظات دیگر حالا چه بعد و چه قبل بستگی داشته باشد، کافی است تا سیستم را طبق تعریف باحافظه بنامند.

مثال (۱-۲۰): کدامیک از سیستم‌های زیر باحافظه و کدامیک بی‌حافظه هستند.

الف) $y(t)=x^2(t/2)$

ب) $y(t)=x(t)Cos^2(t-1)$

ج) $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$

د) $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

1- Systems With Memory and Memoryless Systems

حل: سیستم‌های (الف)، (ج) و (د) هر سه با حافظه هستند، چون

الف) در این سیستم مثلاً داریم $y(1) = x^2\left(\frac{1}{2}\right)$، پس خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی ندارد.

ب) در این سیستم، ارتباط ورودی و خروجی اگر چه توسط ضریب $Cos^2(t-1)$ تعیین می‌شود. ولی این ضریب مستقل از ورودی است. آنچه که مهم است ارتباط ورودی و خروجی است. بنابراین سیستم بی‌حافظه است.

ج) در این سیستم ، اگر بنویسیم

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta}$$

مشاهده می‌شود که سیستم باحافظه است.

د) واضح است که این سیستم نیز باحافظه است، زیرا خروجی در لحظهٔ n به تمام ورودی‌های قبلی تا لحظهٔ n بستگی دارد.

یکی از سیستم‌های معروف حافظه دار انسان است که تقریباً اکثر افعال و حرکات وی متاثر از برخوردهای گذشتهٔ او با کلیهٔ جهان خارج (به عنوان ورودی) می‌باشد. البته اگر چه انسان یک سیستم بسیار پیچیده و بزرگ است، اما می‌توان به خاصیت حافظه‌دار بودن او به عنوان یکی از موهبتهای الهی که باعث پیشرفت و عبرت گرفتن و ایجاد قدرت استنتاج در وی شده است، نام برد.

تمرین (۱-۵): آیا سیستمی با ضابطه $y(t) = x(|t|)$ با حافظه است؟

نمونه یک سیستم با حافظه خازن است، چون رابطه ورودی و خروجی آن اگر ورودی جریان و خروجی ولتاژ باشد، بصورت $y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ است.

۱-۱۱-۲ سیستم مستقل از زمان و تابع زمان[1]

سیستمی مستقل از زمان است که ماهیت وجودی آن با زمان تغییر نکند (نه ورودی یا خروجی آن). مثلاً اگر سیستمی بصورت $y(t) = Sin[x(t)]$ تعریف شود، ورودی و خروجی آن ممکن است هر تابع دلخواهی از زمان باشند، ولی ماهیت سیستم که در واقع سینوس گرفتن از ورودی می‌باشد، تابع زمان نیست. *به عبارت دیگر* ما هر لحظه که بخواهیم با این سیستم کار کنیم از ورودی سینوس می‌گیرد و در خروجی آن را ظاهر می‌کند. به عبارت دیگر، یک سیستم مستقل از زمان دچار پیری نمی‌شود. ولی سیستم‌های زیر ماهیتشان با زمان تغییر می‌کند و بنابراین تابع زمان می‌باشند.

$$y(t) = \sin(t)x(t) \quad , y(t) = tx(t) \qquad (۱-۴۴)$$

باز هم به عبارت دیگر گذشت زمان درکار سیستم مستقل از زمان تاثیری ندارد، پس اگر پاسخ به ورودی $x(t)$ را $y(t)$ بنامیم، پاسخ به ورودی $x(t-t_0)$ باید $y(t-t_0)$ بشود.

1-Time Invariant Systems and Time Dependent Systems

نمونه‌ای از سیستم وابسته به زمان سیستم زیر است.

$$y[n]=n^2x[n] \tag{۱-۴۵}$$

تحقیق این مطلب بسیار ساده است. اگر سیستم مستقل از زمان باشد، پاسخ به $x[n-n_0]$ باید برابر $y[n-n_0]$ گردد. به عبارت دیگر اگر

$$y[n]=T\{x[n]\} \tag{۱-۴۶}$$

در آن صورت باید

$$y[n-n_0]=T\{x[n-n_0]\} \tag{۱-۴۷}$$

اما در اینجا داریم

$$T\{x[n-n_0]\}=n^2x[n-n_0] \tag{۱-۴۸}$$

ولی

$$y[n-n_0]=(n-n_0)^2x[n-n_0] \tag{۱-۴۹}$$

پس در اینجا تساوی (۱-۴۷) برقرار نیست و سیستم متغیر بازمان خواهد شد.

تمرین (۱-۶): سیستمی با ضابطه $y(t)=e^{x(t)}$ را از لحاظ خاصیت مستقل از زمان بودن مورد بررسی قرار دهید.

۱-۱۱-۳ سیستم پایدار و نا پایدار[2]

سیستم پایدار سیستمی است که پاسخ آن به سیگنال ورودی با دامنهٔ محدود، یک خروجی با دامنهٔ محدود باشد در غیر این صورت سیستم ناپایدار است. نمونه‌ای از سیستم‌های ناپایدار، سیستم‌هایی با ضابطه‌ای بصورت $y(t)=e^{\alpha t}\,x(t)$ هستند که به ازاء $\alpha>0$ ناپایدارند، اما اگر $\alpha<0$ باشد پایدار هستند. به عنوان مثال دیگر، سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[n] \tag{۱-۵۰}$$

پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=u[n]$ (که مشخصاً دامنهٔ آن محدود است چون ماکزیمم آن واحد است) چنین محاسبه می‌شود

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}u[n]=(n+1)\;u[n]$$

در اینصورت $y[0]=1$ و $y[1]=2$ و $y[2]=3$ و به همین ترتیب با افزایش n، $y[n]$ بطور نامحدودی افزایش می‌یابد، بنابراین سیستم ناپایدار است. نمونهٔ دیگر از سیستم‌های ناپایدار، سیستم مشتق‌گیر است. چون، اگر ورودی بصورت $x(t)=u(t)$ باشد، خروجی ضربه می‌شود که از لحاظ دامنه در یک لحظه بسیار کوچک نامحدود است.

مثال (۱-۲۱): سیستم $y(t)=e^{x^2(t)}$ را از لحاظ پایداری بررسی کنید.

2-Stable and Unstable Systems

حل: طبق تعریف اگردامنهٔ ورودی محدود باشد.دامنهٔ خروجی یک سیستم پایدار باید محدود باشد در اینجا اگر ورودی $x(t) < B$ محدود باشد، در آن صورت خروجی نیز محدود است. چون بیشترین مقدار خروجی e^{B^2} می‌شود که محدود است، به عبارت دیگر $y(t) < e^{B^2}$ بنابراین، این سیستم پایدار است.

خاصیت پایداری سیستم، شرط اساسی در مراحل ساخت و تحقق عملی آنها می باشد و در بررسی عملکرد سیستم و پیش‌بینی پاسخ، بسیار مهم و اساسی است.

۱-۱۱-۴ سیستم خطی و غیر خطی[1]

سیستم خطی، سیستمی است که خاصیت جمع آثار[2] در آن صادق باشد، یعنی بطور خلاصه در دو شرط زیر صدق کند (پاسخ به $x_i[n]$ را $y_i[n]$ در نظر بگیرید)

الف: شرط جمع پذیری: پاسخ به $x_1[n]+x_2[n]$ می‌شود $y_1[n]+y_2[n]$

ب: شرط همگنی: پاسخ به $ax[n]$ می‌شود $ay[n]$، که a هر عدد مختلط ویا حقیقی (غیر از صفر) می‌تواند باشد. توجه داشته باشید که عیناً تعاریف زیر درمورد سیستم‌های پیوستهٔ زمانی خطی نیز وجود دارد.

در حالت کلی، اگر پاسخ به $x_k[n]$ را با $y_k[n]$ نمایش دهیم، در آن صورت پاسخ به $x[n]$ که مجموعهٔ وزن‌داری از $x_k[n]$ها می‌باشد. مجموع $y_k[n]$ ها می‌شود.

$$x[n]=\sum_k a_k x_k[n] \rightarrow y[n]=\sum_k a_k y_k[n] \qquad (۵۲-۱)$$

به عنوان یک مثال از سیستم غیر خطی می‌توان $y = x^2$ را نام برد. چون اگر دو ورودی ثابت ۲ و ۲- را در نظر بگیریم پاسخ سیستم به هر دو ورودی ۴ است. ولی پاسخ سیستم به مجموع دو ورودی مساوی صفر است.

$$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 4$$
$$x_2 = -2 \rightarrow y_2 = 4$$
$$F(x_1 + x_2) = F(0) = 0 \neq y_1 + y_2$$

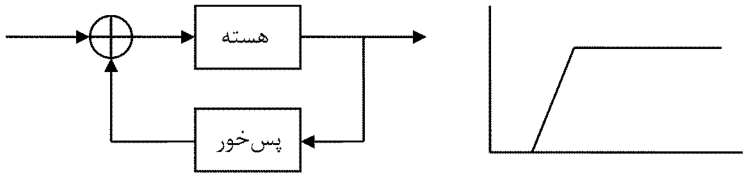
تمرین(۱-۷): ثابت کنید اگر ورودی سیستم خطی برابر صفر باشد، خروجی آن نیز لزوماً برابر صفر است.

انواع سیستم‌های غیر خطی

۱ـ بدون هیسترزیس یا تک مقداری[3]: به ازاء هر x یک y و بازاء هر y یک x بدست می‌آید.

۲ـ با هیسترزیس یا چند مقداره: پدیده هیسترزیس در مغناطیس و الکتروستاتیک هم دیده می‌شود. اصولاً تمام سیستم‌هایی که هیسترزیس دارند، با حافظه‌اند. معمولاً پدیده هیسترزیس از مجموع حالت اشباع و پس خور مثبت بوجود می‌آید. بدین مفهوم که مثلاً دریک هسته مغناطیسی با اعمال میدان مغناطیسی H تمام اتم‌ها در جهت میدان قرار می‌گیرند و ایجاد یک میدان مغناطیسی می‌کنند که با میدان اولیه هم جهت است و آن را تقویت می‌کند. بنابراین یک پس خور مثبت بوجود می‌آید که پس از مدتی باعث به اشباع رفتن هسته خواهد شد.

1-Linear and Nonlinear Systems
2 superposition
3 One to One Correspondence



شکل (۱-۶۴): سیستم هیسترزیس و نمودار اشباع

به عنوان مثال دیگری از سیستم غیر خطی می‌توان سیستمی با ضابطهٔ $y = x + k = f(x)$ را در نظر گرفت که در آن k مقدار ثابت حقیقی است. در این صورت اگر دو ورودی به سیستم را بصورت $x_1 = 2$ و $x_2 = -2$ را در نظر بگیریم خروجی‌ها بصورت زیر محاسبه می‌شوند

$$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 2 + k = f(x_1)$$
$$x_2 = -2 \rightarrow y_2 = -2 + k = f(x_2)$$
$$f(x_1 + x_2) = f(0) = k \neq f(x_1) + f(x_2) = 2k$$

سیستم های خطی تکه‌ای[1] نوع دیگری از سیستم‌های غیر خطی هستند که شباهت زیادی به سیستم‌های خطی دارند. به همین منظور، نام سیستم خطی تکه‌ای روی آنها نهاده شده است.

سیستم خطی تکه‌ای سیستمی است که تفاضل پاسخها به دو ورودی دلخواه تابعی از تفاضل آن دو ورودی باشد. به عنوان مثال اگر $x_1[n]$ و $x_2[n]$ دو ورودی به سیستم $y[n] = ax[n] + k$ باشند، داریم

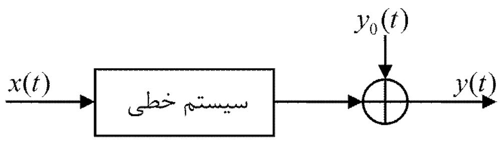
$$y_1[n] = ax_1[n] + k \qquad (۵۳-۱)$$

$$y_2[n] = ax_2[n] + k \qquad (۵۴-۱)$$

و از تفاضل دو معادله فوق داریم

$$y_1[n] - y_2[n] = ax_1[n] + k - ax_2[n] - k = a\{x_1[n] - x_2[n]\} \qquad (۵۵-۱)$$

دیده می‌شود که تفاضل پاسخها فقط بستگی به تفاضل ورودی‌ها دارد. هر سیستم خطی تکه‌ای را می‌توان بصورت شکل زیر نشان داد (در حالت پیوستهٔ زمانی)



شکل (۱-۶۵): سیستم خطی تکه‌ای

توجه شود که $y_0(t)$ تابعی از ورودی نیست، اما می‌تواند هر تابعی از زمان باشد. مثلاً $y(t) = ax(t) + \sin(t)$ لازم به تذکر است که $y_0(t)$ پاسخ ورودی صفر سیستم است، چون به ازاء ورودی صفر خروجی سیستم خطی صفر است. بنابراین اگر بر سیستم شکل (۱-۶۵) ضابطه زیر حاکم باشد

$$y(t) = T[x(t)] + y_0(t) \qquad (۵۶-۱)$$

---

[1] piecewise linear

که در آن عملگر $T[\ ]$ یک عملگر خطی است. در آن صورت اگر $x(t)=0$ باشد. خواهیم داشت

$$T[x(t)]=0 \qquad (۱-۵۷)$$

و بنابراین

$$y(t)=y_0(t) \qquad (۱-۵۸)$$

پس $y_0(t)$ پاسخ ورودی صفر است.

این‌گونه سیستم‌ها درمهندسی برق و مدارهای الکتریکی بسیار زیاد مشاهده می‌شوند. اگر چه این سیستم‌ها در تعریف کلی ما از سیستم‌های خطی نمی گنجند ولی در بسیاری از موارد، اکثر عناصر تشکیل دهنده این سیستم ها در اصل خطی هستند.

مثال (۱-۲۲): سیستم مشتق‌گیر را از لحاظ خطی بودن بررسی کنید.

حل: فرض می‌کنیم پاسخ سیستم به ورودی $x_i(t)$ برابر $y_i(t)$ باشد، به ازاء i عدد صحیح

$$y_i(t)=\frac{dx_i(t)}{dt} \qquad (۱-۵۹)$$

اکنون یک ورودی بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x(t)=\sum a_i x_i(t) \qquad (۱-۶۰)$$

با اعمال این ورودی به سیستم فوق، خروجی را بصورت زیر داریم

$$y(t)=\frac{d}{dt}[\sum a_i x_i(t)] \qquad (۱-۶۱)$$

و چون عملیات مشتق‌گیری و مجموع قابل جابجائی است، پس

$$y(t)=\sum a_i \frac{d}{dt} x_i(t) \qquad (۱-۶۲)$$

و با توجه به (۱-۵۹) داریم

$$y(t)=\sum a_i y_i(t) \qquad (۱-۶۳)$$

پس سیستم مشتق‌گیر خطی است.

تمرین(۱-۸): آیا سیستم انتگرال‌گیر خطی است؟

مثال (۱-۲۳): سیستم $y(t)=Cos[x(t)]$ را از لحاظ خطی بودن بررسی کنید.

حل: پاسخ سیستم به دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را $y_1(t)$ و $y_2(t)$ می‌نامیم. و یک ورودی بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x(t)=ax_1(t)+bx_2(t) \qquad (۱-۶۴)$$

اکنون پاسخ به این ورودی برابر است با

$$y(t)=Cos[ax_i(t)+bx_2(t)] \qquad (۱-۶۵)$$

واضح است که این خروجی با مقدار زیر برابر نیست. بنابراین سیستم غیر خطی است.

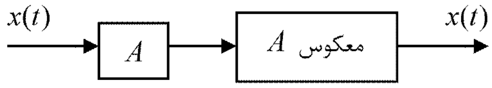
$$ay_1(t)+by_2(t)=aCos[x_1(t)]+Cos[x_2(t) \qquad (۱-۶۶)$$

توجه به این نکته ضروری است که در اثبات یک خاصیت برای یک سیستم باید حالت کلی را در نظر گرفت، ولی برای نفی یک خاصیت کافی است یک حالت خاص را مورد بررسی قرار داد. به عنوان مثال برای نفی خاصیت

پایداری از سیستم مشتق‌گیر، استناد به این حقیقت که خروجی سیستم به ازاء ورودی پله، نامحدود است، کفایت می‌کند. ولی برای اثبات خاصیت خطی بودن آن لازم است، حالت کلی مانند آنچه در مثال (۱-۲۲) دیدید، مورد بررسی قرار گیرد.

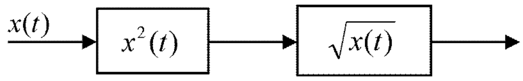
۱-۱۱-۵ عکس پذیری و سیستم معکوس یا وارون[1]

سیستم عکس‌پذیر، سیستمی است که به ازاء هر ورودی خاص و مجزا، پاسخ خاص و مجزا بدهد. در این صورت می‌توان سیستمی بنام سیستم معکوس (یا وارون) را آن‌گونه طراحی کرد که اگر ورودی آن سیستم معکوس به خروجی سیستم اصلی متصل شود، در آن‌صورت خروجی سیستم معکوس همان ورودی سیستم اصلی شود.



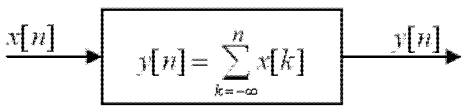
شکل (۱-۶۶): سیستم و معکوس آن

به عنوان مثال، سیستم دوبرابرکننده، معکوس‌پذیر است و معکوس آن سیستمی است که بر دو تقسیم می‌کند. ولی سیستم به توان دو رساننده معکوس‌پذیر نیست، چون پاسخ آن به دو ورودی ۲ و ۲- مساوی ۴ است. و اگر تصور شود که سیستم جذرگیرنده معکوس سیستم به توان دو رساننده است، می‌توان با اتصال متوالی (سری) آنها به هم و اعمال دو ورودی متمایز ۲ و ۲- مشاهده کرد که در حالتی که ورودی ۲- است، هنوز خروجی ۲ است و چون خروجی با ورودی مساوی نیست، پس سیستم جذر گیرنده، معکوس سیستم به توان دو رساننده نیست. ممکن است بنظر برسد، اگر ورودی محدود به مقادیر مثبت باشد این دو سیستم معکوس یکدیگر شوند. اما باید توجه کرد که خاصیت معکوس پذیری و اصولاً کلیه خواص سیستم مستقل از نوع ورودی و فقط تابع مشخصات درونی و فیزیک سیستم هستند.



شکل (۱-۶۷): سیستم به توان دو رساننده و اتصال متوالی آن با سیتم جذر گیرنده

تمرین (۱-۸): معکوس سیستم زیر را بیابید.



شکل (۱-۶۸): سیستم تمرین (۱-۸)

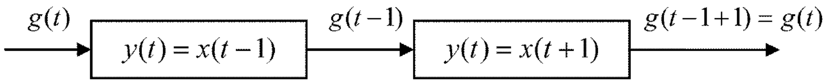
مثال (۱-۲۴): معکوس سیستم زیر را بیابید (سیستم تاخیردهنده)

$$y(t) = x(t-1)$$

چون سیستم تاخیردهنده است، بنابراین سیستم جلوانداز، معکوس آن است برای تحقیق این مطلب کافیست، این دو سیستم را بطور متوالی پشت سر هم وصل کنیم و مشاهده کنیم که خروجی سیستم معکوس در همهٔ حالات و به ازاء هر ورودی مساوی ورودی سیستم اصلی است.

1-Invertible Systems

البته این روش حدسی جهت یافتن سیستم معکوس احتمالاً فقط در برخی حالت‌های خاص به جواب منطقی و ساده‌ای منجر می‌شود و در حالت کلی در آینده روشهای ریاضی دقیقی جهت یافتن سیستم معکوس برای یک دستهٔ خاص از سیستم‌ها ارائه خواهیم کرد.



شکل (۱-۶۹): سیستم تاخیر دهنده و معکوس آن مربوط به مثال (۱-۲۴)

تمرین (۱-۹): آیا سیستم تشکیل شده از اتصال متوالی چند سیستم معکوس‌پذیر، نیز معکوس‌پذیر است؟

۱-۱۱-۶ علیت و سیستم علی[1]

سیستمی علّی است که خروجی در هر لحظه به مقادیر ورودی در آن لحظه و لحظات قبل از آن بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر، سیستم علّی از آینده خبر ندارد و به عبارت فلسفی، سیستم علّی از قانون علّت و معلول تبعیت می‌کند. یعنی هرگز قبل از ایجاد علت (ورودی)، معلول (خروجی) بوجود نمی‌آید. بنابراین اگر دو ورودی به یک سیستم علی به ازاء $t<t_0$ یکسان باشند در آن‌صورت خروجی سیستم به ازاء $t<t_0$ برای دو ورودی باید یکسان باشد، یعنی

$$x_1(t<t_0)=x_2(t<t_0)\rightarrow y_1(t<t_0)=y_2(t<t_0) \qquad (۱-۶۷)$$

به عنوان مثال، سیستم زیر علی است.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] \qquad (۱-۶۸)$$

ولی سیستم زیر علی نمی‌باشد.

$$y(t)=x(t+1) \qquad (۱-۶۹)$$

چون خروجی در هر لحظه به ورودی در لحظات آینده بستگی دارد و این سیستم در حقیقت نوعی سیستم پیشگو برای مقادیر ورودی است، یعنی مقادیر ورودی را قبل از اعمال به سیستم، پیشگویی می‌کند.

۱-۱۲ چندمثال حل شده

مثال (۱-۲۵): سیستم‌های داده شده را از لحاظ خواص مطرح شده در این فصل بررسی کنید.

الف) $y(t)=e^{x(t)}$

ب) $y[n]=x[n]x[n-1]$

حل: الف)

$$y(t)=e^{x(t)}=f[x(t)]$$

۱ـ برای بررسی خطی بودن باید $f(a_1x_1+a_1x_2)$ را تشکیل دهیم و ببینیم با $a_1f[x_1(t)]+a_2f[x_2(t)]$ برابر است یا نه.

1-Causality and causal systems

$$f[ax_1(t)+a_2x_2(t)]=e^{a_1x_1}e^{a_2x_2(t)}\neq a_1f[x_1(t)]+a_2f[x_2(t)]$$

پس سیستم غیر خطی است.

۲ـ برای سیستم غیر متغیر با زمان باید تساوی $y(t+\tau)=f[x(t+\tau)]$ را تحقیق کنیم.

$$y(t+\tau)=e^{x(t+\tau)}=f[x(t+\tau)]$$

پس سیستم غیر متغیر با زمان است.

۳ـ اما از لحاظ پایداری از شکل ضابطهٔ سیستم می‌فهمیم که تا هنگامی که ورودی محدود است، خرجی نمی‌تواند بطور نامحدود بزرگ شود، پس سیستم پایدار است.

۴ـ سیستم بدون حافظه است، چون مقدار خروجی به مقدار ورودی در همان لحظه بستگی دارد.

۵ـ سیستم علی است، چون هرگز خروجی قبل از اعمال ورودی نمی‌تواند وجود داشته باشد.

ب)

$$y[n]=x[n]x[n-1]=f\{x[n]\}$$

۱ـ بررسی خطی بودن

$$f\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}\{a_1x_1[n-1]+a_2x_2[n-1]\}$$
$$=a_1^2(x_1[n]x_1[n-1])+a_2^2(x_2[n]x_2[n-1]+a_1a_2(x_1[n]x_2[n-1])+a_1a_2(x_2[n]x_1[n-1]$$

اما می‌دانیم که شرط خطی بودن عبارتست از اینکه عبارت فوق باید مساوی عبارت زیر شود

$$a_1f\{x_1[n]\}+a_2f\{x_2[n]\}=a_1(x_1[n]x_1[n-1])+a_2(x_2[n]x_2[n-1])$$

پس این سیستم خطی نیست.

۲ـ بررسی غیر متغیر بودن با زمان

باید نشان دهیم که اگر

$$y[n]=f\{x[n]\}=x[n]x[n-1]$$

در آنصورت

$$y[n-\tau]=f\{x[n-\tau]\}=x[n-\tau]x[n-\tau-1]$$

اما چون

$$y[n-\tau]=x[n-\tau]x[n-\tau-1]=f\{x[n-\tau]\}$$

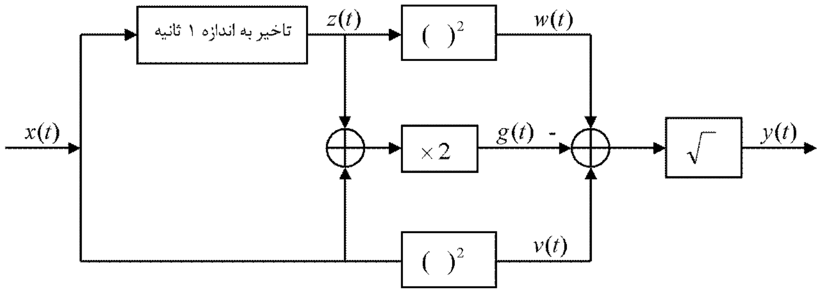
پس سیستم غیر متغیر با زمان است.

۳ـ سیستم به همان دلیلی که در قسمت (الف) گفتیم، پایدار است.

۴ـ سیستم دارای حافظه است، زیرا خروجی در هر لحظه حاوی اطلاعاتی از ورودی لحظهٔ قبل است.

۵ـ سیستم علی است، چون قبل از اعمال ورودی، خروجی نمی‌تواند ظاهر شود.

مثال (۱-۲۶): رابطهٔ ورودی و خروجی سیستم زیر را بیابید. آیا این سیستم خطی است.



شکل (۱-۷۰): سیستم مثال (۱-۲۶)

حل: $z(t) = x(t-1) \qquad w(t) = z^2(\tau) = x^2(t-1) \qquad , v(t) = x^2(t)$

$$g(t) = [z(t) + x(t)] \times 2 = [x(t) + x(t-1)] \times 2$$

$$r(t) = w(t) + v(t) - g(t) = x^2(t) + x^2(t-1) - 2[x(t) + x(t-1)] = [x(t) - x(t-1)]^2$$

$$y(t) = \sqrt{[x(t) - x(t-1)]^2} = | x(t) - x(t-1) |$$

جهت بررسی خطی بودن باید شرط جمع آثار و همگنی را تحقیق کنیم

$$T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \left| \ [\alpha(x_1(t) - x_1(t-1)) + \beta(x_2(t) - x_2(t-1))] \right|$$

$$\neq \alpha \,|\, x_1(t) - x(t-1) \,|\, + \beta \,|\, x_2(t) - x_2(t-1)]$$

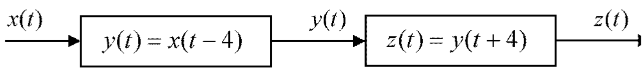
پس سیستم غیر خطی است.

مثال (۱-۲۷): معکوس سیستم زیر را بیابید.

$$y(t) = x(t-4)$$

حل: همان‌گونه که گفتیم، معکوس یک سیستم تاخیرانداز، یک سیستم جلوانداز است، پس

$$z(t) = y(t+4) = x(t-4+4) = x(t)$$



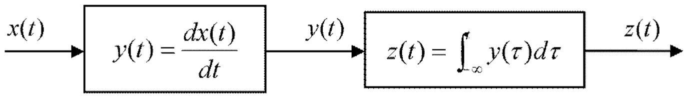
شکل (۱-۷۱): سیستم مثال (۱-۲۷) و معکوس آن

مثال (۱-۲۸): معکوس سیستم زیر را با فرض اینکه ورودی مقدارثابت مستقل از زمان(مقدار DC) نداشته باشد بیابید.

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

حل: واضح است که معکوس سیستم مشتق‌گیر باید یک سیستم انتگرال‌گیر باشد. اکنون این حدس را تحقیق می‌کنیم.

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau = x(t)$$



شکل (۱-۷۲): سیستم مثال (۱-۲۸) و معکوس آن

مثال (۱-۲۹): ثابت کنید

الف) $$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\begin{cases}N & ,\alpha=1\\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & ,\alpha\neq 1\end{cases}$$

حل: برای $\alpha=1$، اثبات واضح است. اما برای $\alpha\neq 1$ داریم

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{N-2}+\alpha^{N-1}$$
$$(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{N-1})=1-\alpha+\alpha-\alpha^2+\alpha^2-\alpha^3+\ldots$$
$$-\alpha^{N-1}+\alpha^{N-1}-\alpha^N=1-\alpha^N\rightarrow\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

و اگر $|\alpha|<1$ باشدو $N\rightarrow\infty$ در آنصورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{1-\alpha^\infty}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$$

ب) ثابت کنید اگر $|\alpha|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

حل:
$$\sum_{n=0}^{N}n\alpha^n=0+\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+\ldots+(N-1)\alpha^{N-1}+N\alpha^N$$
$$(1+\alpha^2-2\alpha)(\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+4\alpha^4+5\alpha^5+\ldots)$$
$$=(\alpha+\alpha^3-2\alpha^2+2\alpha^2+2\alpha^4-4\alpha^3+3\alpha^3$$
$$+3\alpha^5-6\alpha^4+4\alpha^4+4\alpha^6-8\alpha^5+5\alpha^5+5\alpha^7-10\alpha^6+\ldots)$$

می‌بینیم که تمام جملات همدیگر را حذف می‌کنند، مگر چندجمله‌ای که توان آنها در حدود N و اگر $N\rightarrow\infty$ و به شرط $|\alpha|<1$ می‌توان از همهٔ آنها صرفنظر کرد، بنابراین فقط جملهٔ اول باقی می‌ماند

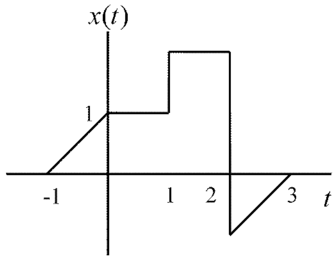
$$\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\alpha+2\alpha^2+\ldots+N\alpha^N+\ldots=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

د) مطلوبست محاسبه $\sum_{n=k}^{\infty}\alpha^n$

حل:
$$\sum_{n=k}^{\infty}\alpha^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n-\sum_{n=0}^{k}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1-\alpha^{k+1}}{1-\alpha}=\frac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$$

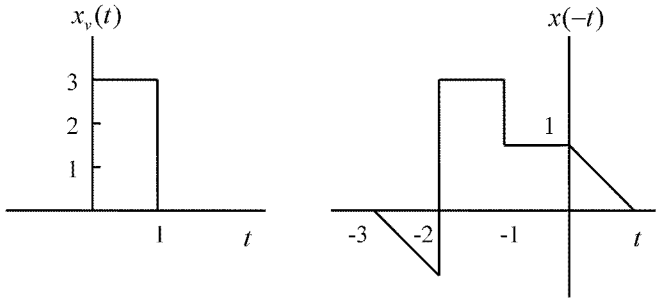
مثال (۱-۳۰): مطلوبست رسم $x_v(t)$، اگر $x(t)$ بصورت زیر رسم شده باشد.

$$x_v(t)=[x(t)+x(2-t)]u(1-t)$$



شکل (۱-۷۳): سیگنال $x(t)$ مربوط به مثال (۱-۳۰)

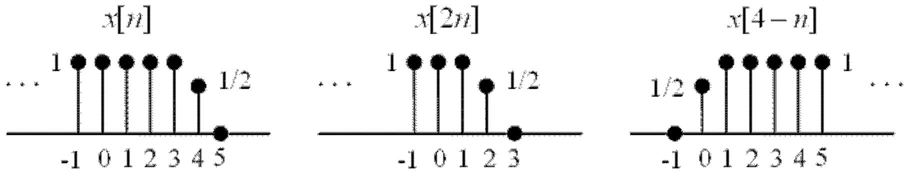
حل: با رسم $x(-t)$ و انتقال آن به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست و جمع آنها به ازاء $t \le 1$ شکل $x_v(t)$ را بصورت زیر بدست می‌آوریم.



شکل (۱-۷۴): سیگنال $x(-t)$ و $x_v(t)$ مربوط به مثال (۱-۳۰)

مثال (۱-۳۱): مطلوبست $x[4-n]$ و $x[2n]$ اگر $x[n]$ بصورت شکل (۱-۷۵) رسم شده باشد.

حل: با مقیاس کردن $x[n]$، $x[2n]$ بدست می‌آید و با قرینه‌سازی آن نسبت به محور $n=0$ و انتقال به اندازهٔ ۴ واحد به سمت چپ می‌توان $x[4-n]$ را بدست آورد.



شکل (۱-۷۵): درباره $x[n]$ و $x[2n]$ و $x[4-n]$ مربوط به مثال (۱-۳۱)

مثال (۱-۳۲): تبدیل ناحیهٔ $d(x,y)$ که در شکل (۱-۷۶) مشخص شده است را بیابید.

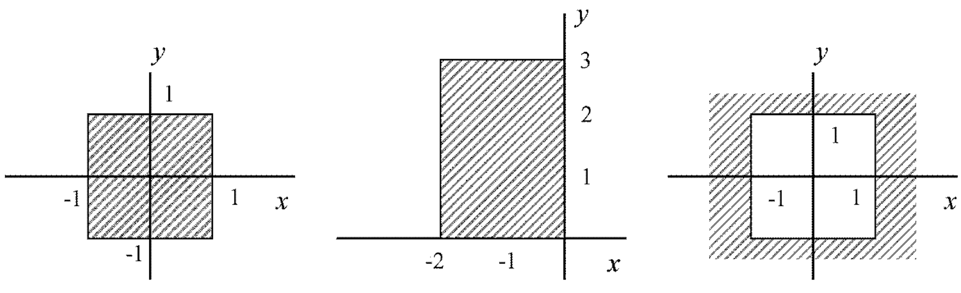
حل:

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & \begin{array}{l}-1<x<1\\ -1<y<1\end{array}\\ 0 & \text{بقیه‌جاها}\end{cases}$$

$$d(x+1,y-2)\begin{cases}1 & \begin{array}{l}-1<x+1<1\\ -1<y-2<1\end{array}\\ 0 & \text{بقیه‌جاها}\end{cases}=\begin{cases}1 & \begin{array}{l}-2<x<0\\ 1<y<3\end{array}\\ 0 & \text{بقیه‌جاها}\end{cases}$$

$$d(\frac{1}{x},\frac{1}{y})=\begin{cases}1 & \begin{matrix}-1<\frac{1}{x}<1\\ -1<\frac{1}{y}<1\end{matrix}\\ 0 & \text{بقیه‌جاها}\end{cases}=\begin{cases}1 & \begin{matrix}|x|>1\\ |y|>1\end{matrix}\\ 0 & \text{بقیه‌جاها}\end{cases}$$

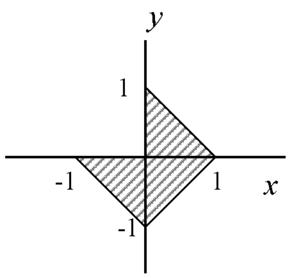
$$d(\frac{1}{x},\frac{1}{y})=\begin{cases}0 & \begin{matrix}1<x<1\\ -1<y<1\end{matrix}\\ 1 & \text{بقیه‌جاها}\end{cases}$$



(الف) (ب) (ج)

شکل (۱-۷۶): نمایش نواحی (الف) $d(x,y)$، (ب) $d(x+1,y-2)$ و (ج) $d(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$

ب) اگر $f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{درون مناطق سایه دار}\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ مطلوبست محاسبهٔ $f(x-3,y+2)$.



شکل (۱-۷۷): ناحیهٔ $f(x,y)$ مربوط به قسمت (ب) از مثال (۱-۳۲)

حل: باید ابتدا ناحیهٔ هاشور خورده را مشخص کنیم

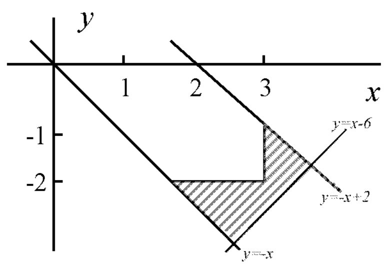
$$\begin{Bmatrix}-1<x<0 & ,-x-1<y<0\\ 0<x<1 & ,x-1<y<1-x\end{Bmatrix}$$

اکنون باید x را به x-3 و y را به y+2 تبدیل کنیم.

$$\begin{cases} -1 < x-3 < 0 & ,-x-2 < y+2 < 0 \\ 0 < x-3 < 1 & ,x-4 < y+2 < -x+4 \end{cases}$$

ویا

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 & ,-x < y < -2 \\ 3 < x < 4 & ,x-6 < y < -x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x-3,y-2)=1 & \text{در ناحیهٔ هاشور خورده} \\ f(x-3,y-2)=0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$



شکل (۱-۷۸): ناحیهٔ $f(x-3,y+2)$ مربوط به قسمت (ب) از مثال (۱-۳۲)

ج) مطلوبست محاسبهٔ ناحیهٔ $f(-\frac{1}{2}y,2x)$

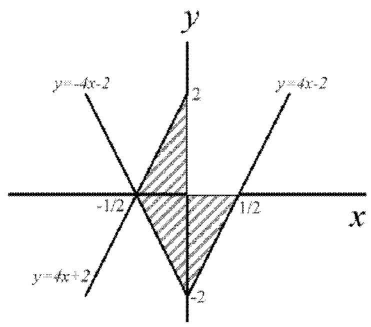
حل:همانند حالت قبل کافی است در ناحیه

$$\begin{cases} -1 < x < 0 & ,-x-1 < y < 0 \\ 0 < x < 1 & ,x-1 < y < 1-x \end{cases}$$

x را به $-\frac{1}{2}y$، و y را به $2x$ تبدیل کنیم.

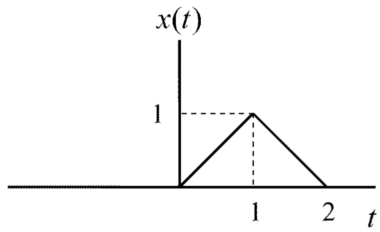
$$\begin{cases} -1 < -\frac{1}{2}y < 0 & ,\frac{1}{2}y-1 < 2x < 0 \\ 0 < -\frac{1}{2}y < 1 & ,-\frac{1}{2}y-1 < 2x < \frac{1}{2}y+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < y < 2 & ,\frac{1}{4}y-\frac{1}{2} < x < 0 \\ -2 < y < 0 & ,-\frac{1}{4}y-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}+\frac{1}{4}y \end{cases}$$



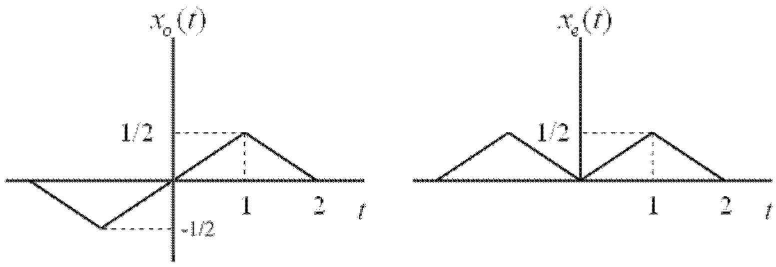
شکل (۱-۷۹): ناحیهٔ $f(\frac{-1}{2}y,2x)$ مربوط به قسمت (ج) از مثال (۱-۳۲)

مثال (۱-۳۳): قسمتهای زوج و فرد توابع زیر را مشخص کنید.



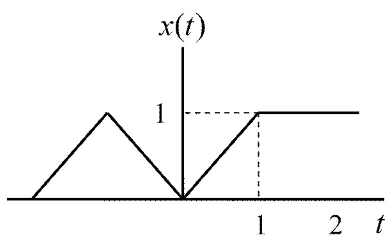
شکل (۱-۸۰): سیگنال مثال (۱-۳۳)

حل: به سادگی از روابط (۱-۳۰) و (۱-۳۱) می‌توان قسمتهای زوج و فرد این سیگنال را یافت.



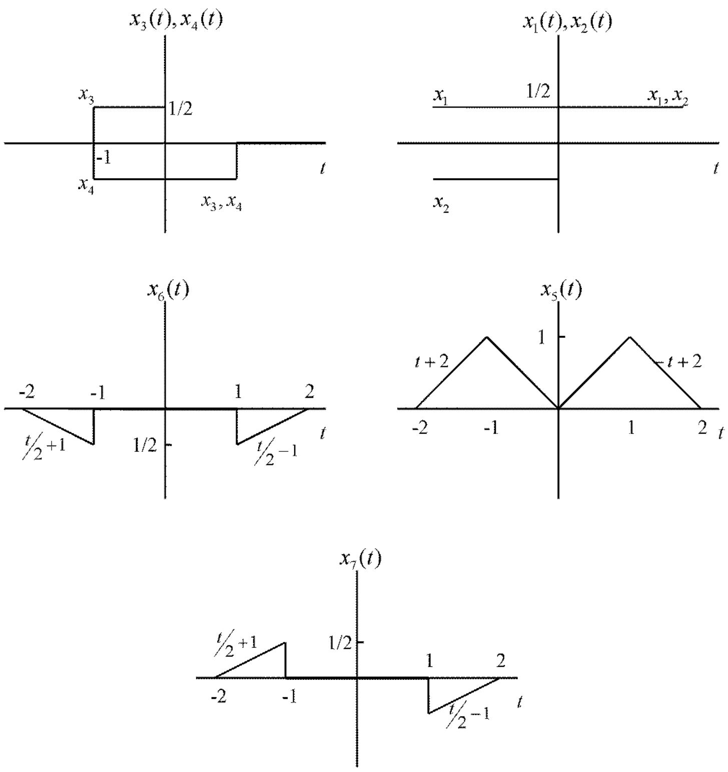
شکل (۱-۸۱): قسمتهای زوج و فرد سیگنال شکل (۱-۸۰)

مثال (۱-۳۴): قسمتهای زوج و فرد سیگنال $x(t)$ را بیابید.



شکل (۱-۸۲): سیگنال مثال (۱-۳۴)

حل: ابتدا سیگنال $x(t)$ را به اجزاء آن تفکیک می‌کنیم. این کار با تعریف توابع $x_1(t)$ الی $x_7(t)$ به صورت نشان داده شده ممکن است.



شکل (۱-۸۳): شکل سیگنال‌های $x_1(t)$ الی $x_7(t)$ که نشان‌دهندهٔ قسمت‌های زوج و فرد سیگنال $x(t)$ هستند.

بنابراین چون

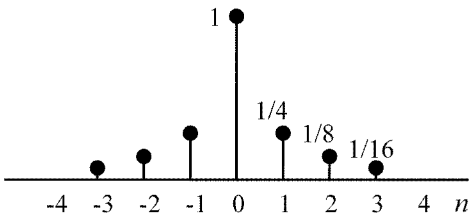
$$x(t)=\sum_{k=1}^{7} x_k(t)$$

داریم

$$x_e(t)=x_1(t)+x_4(t)+x_5(t)+x_6(t)$$

$$x_e(t)=x_2(t)+x_3(t)+x_7(t)$$

مثال(۱-۳۵): قسمت زوج یک دنباله در شکل نمایش داده شده است. مطلوبست رسم دقیق دنباله اگر $x[n<0]=0$ باشد.



شکل (۱-۸۴): قسمت زوج دنبالهٔ مثال (۱-۳۵)

حل: می‌دانیم $x_e[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[-n]\}$. ابتدا از مقدار تابع در صفر شروع می‌کنیم. می‌دانیم که $x[0]=x_e[0]$ چون

$$x_e[0]=\frac{1}{2}\{x[0]+x[0]\}=x[0]=1$$

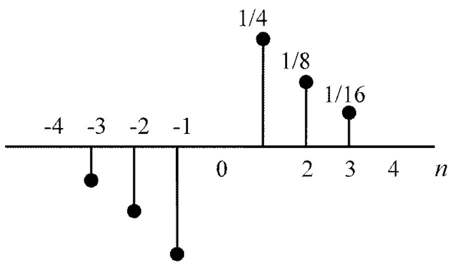
$$x_o[0]=\frac{1}{2}\{x[0]-x[0]\}=0$$

$$x[n]=x_o[n]+x_e[n]=0$$

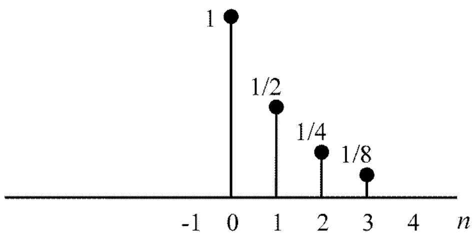
پس

$$x_o[n]=-x_e[n] \qquad ,n<0$$

$$x_o[n]=x_e[n], \qquad n>0$$



شکل (۱-۸۵): قسمت فرد دنبالهٔ مثال (۱-۳۵)



شکل (۱-۸۶): دنبالهٔ مثال (۱-۳۵)

بنابراین ازمجموع قسمت های زوج وفرد‌داریم

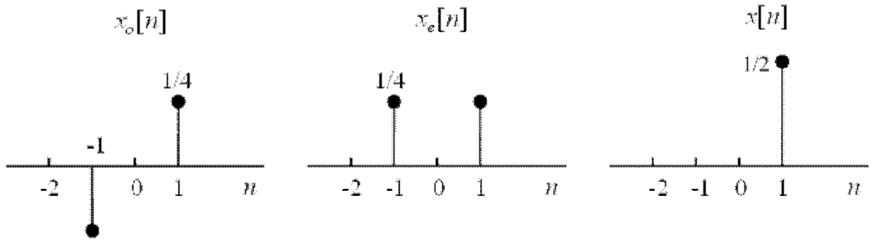
$$x[n]=0; n\le -1 \qquad ,x[0]=1$$

$$x[n]=\{x_e[n]+x_o[n]\}$$

که این مجموع در شکل ۱-۸۶ نشان داده شده است.

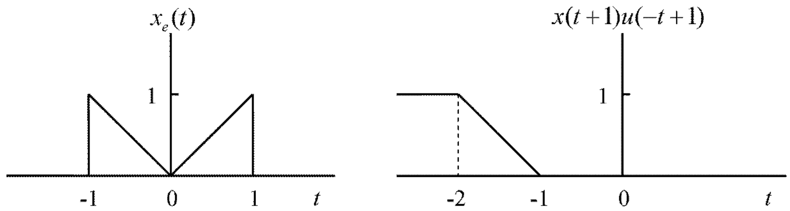
مثال (۱-۳۶): قسمت فرد یک دنباله در شکل زیر رسم شده است. با فرض $x[n \le 0] = 0$ مطلوبست رسم $x[n]$

حل: مشابه حل مثال (۱-۳۵) است. البته باید توجه کنیم که قسمت فرد یک سیگنال درمورد مقدار سیگنال در نقطه صفر اطلاعاتی به ما نمی دهد.



شکل (۱-۸۷): قسمتهای فرد و زوج و دنبالهٔ اصلی مربوط به مثال (۱-۳۶)

مثال (۱-۳۷): دو سیگنال زیر مربوط به قسمت زوج و شیفت یافته یک سیگنال مجهول $x(t)$ هستند. بدقت $x(t)$ و قسمت فرد آنرا بیابید.



شکل (۱-۸۸): قسمتهای زوج و انتقال یافته (محدوده شده) سیگنال مثال (۱-۳۷)

حل: ابتدا اطلاعات موجود در سیگنال‌ها را مرتب می‌کنیم. از شکل (۱-۸۸) می‌توان $x(t)$ را برای $-1 < t < 0$ یافت. چون

$$-2 < t < -1 \qquad , x(t+1) = -(t+1) \rightarrow -1 < t < 0 \qquad x(t) = -t$$

همچنین برای $t < -1$ نیز می‌توان $x(t)$ را یافت.

$$t < -1 \qquad , x(t) = 1$$

با توجه به اطلاعات قسمت زوج سیگنال نیز می‌توان این مقادیر را تحقیق کرد.

$$-1 < t < 0 \qquad xe(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \rightarrow -t = \frac{1}{2}[-t + x(-t)]$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$x(-t) = -t \qquad , -1 < t < 0$$

و یا

$$x(t) = t \qquad , 0 < t < 1$$

از همین حقیقت برای یافتن $x(t)$ در $t > 1$ استفاده می‌کنیم.

$$t < -1 \quad , x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \rightarrow 0 = \frac{1}{2}[1 + x(-t)]$$

پس

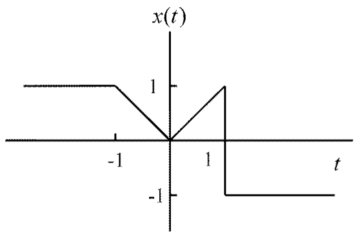
$t < -1 \quad , x(-t) = -1$

بنابراین می‌توان نوشت

$t > 1, x(t) = -1$

پس اکنون بطور کامل می‌توان شکل $x(t)$ را بدست آورد.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t < -1 \\ -t & -1 < t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ -1 & t > 1 \end{cases}$$



شکل (۱-۸۹): سیگنال $x(t)$ مجهول در مثال (۱-۳۷)

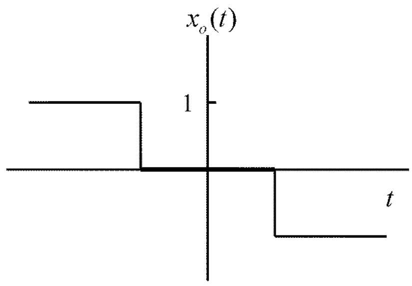
و بسادگی با استفاده از $x(t)$ می‌توان $x_o(t)$ را یافت.

$t > 1 \qquad , x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = \frac{1}{2}[-1 - (+1)] = -1$

$0 < t < 1 \qquad , x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = \frac{1}{2}[t - (+t)] = 0$

$-1 < t < 0 \qquad , x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = \frac{1}{2}[-t - (-t)] = 0$

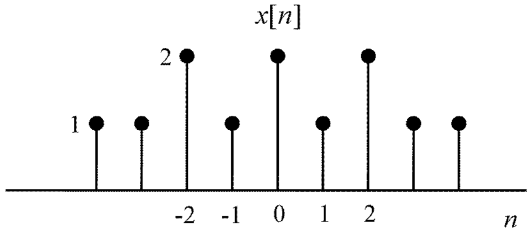
$t < -1 \qquad , x_o(t) = -x_o(-t)$ یا $x_o(t) = \frac{1}{2}[1 + 1] = 1$



شکل (۱-۹۰): قسمت فرد سیگنال شکل (۱-۸۱)

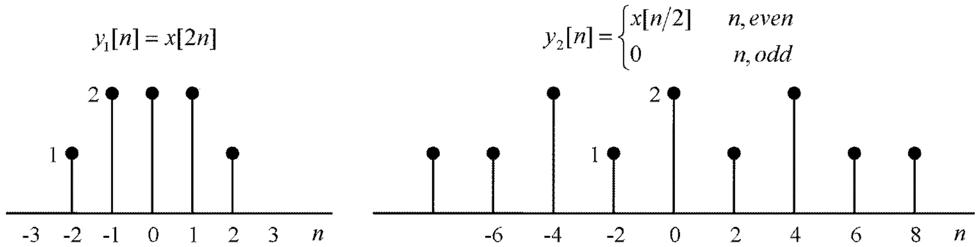
مثال (۱-۳۸) برای دنباله رسم شده در شکل زیرمطلوبست

$$y_2[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n,even \\ 0 & n,odd \end{cases} \quad , y_1[n]=x[2n]$$



شکل (۱-۹۱): دنباله مثال (۱-۳۸)

حل: به سادگی و با استفاده از تعریف داریم:



شکل (۱-۹۲): دنباله‌های $y_1[n]$ و $y_2[n]$ مربوط به مثال (۱-۳۸)

مثال (۱-۳۹): اولاً تعیین کنید کدامیک از دنباله‌های داده شده در بندهای (الف) تا (د) متناوب هستند و اگر متناوب هستند دوره تناوب آنها را بیابید.

الف) $x[n]=\cos\left(\frac{8\pi n}{7}+2\right)$

حل: شرط اینکه N دوره تناوب باشد، اینست که

$$x[n+N]=x[n]\to\cos\left(\frac{8\pi(n+N)}{7}+2\right)=\cos\left(\frac{8\pi n}{7}2\right)$$

$$\to\frac{8\pi}{7}(n+N)+2=2k\pi+\frac{8\pi n}{7}+2\to 8\pi n+8\pi N+14=14k\pi+8\pi n+14$$

کوچکترین دوره تناوب

$$\to 8\pi N=14k\pi\to N=\frac{14k}{8}=\frac{7k}{4}\xrightarrow{(k=4)}N=7$$

ب) $x[n]=Cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$

حل: مانند حالت قبل عمل می‌کنیم

$$\cos\left(\frac{\pi(n+N)^2}{8}\right)=\cos\frac{\pi n^2}{8}$$

$$\rightarrow \frac{\pi(n+N)^2}{8} = 2k\pi + \frac{\pi n^2}{8} \rightarrow \frac{\pi N^2}{8} + \frac{2\pi n N}{8} = 2k\pi$$

به ازای nهای متفاوت N متفاوت بدست می‌آید. پس $x[n]$ متناوب نیست.

ج) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3m] - \delta[n-1-3m]\}$

حل: باز هم داریم

$$x[n+N] = x[n]$$

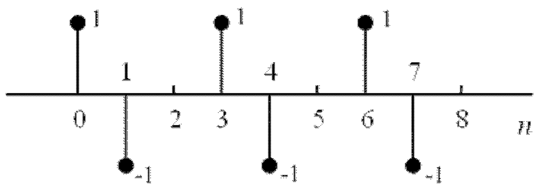
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\delta[n+N-3m] - \delta[n+N-1-3m]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3k] - \delta[n-1-3k]\}$$

بنابراین

$$n+N-3m = n-3\left(m-\frac{N}{3}\right) = n-3k$$

$$n+N-3m-1 = n-1-3\left(m-\frac{N}{3}\right) = n-1-3k$$

به ازاء $N=3$ و $k=m-1$ حداقل دوره تناوب را داریم



شکل (۱-۹۳): دنباله متناوب مربوط به قسمت (ج) مثال (۱-۳۹)

د) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2}$

حل: این سیگنال متناوب نیست چون:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-9n^2} e^{6nt} = e^{-t^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-9n^2} e^{6nt}$$

$$x(t+T) = e^{-(t+T)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-9n^2} e^{6n(t+T)} \neq e^{-t^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-9n^2} e^{6nt}$$

مثال (۱-۴۰): ثابت کنید $\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$.

حل: می‌دانیم اگر

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

در آنصورت داریم:

$$g(kt) = \frac{1}{k} \cdot \frac{df(kt)}{dt} = \frac{df(kt)}{d(kt)}$$

بنابراین

$$\delta(kt)=\frac{1}{k}\frac{du(kt)}{dt}$$

از طرفی می‌دانیم اگر k مثبت باشد

$$u(kt)=u(t)$$
$$\rightarrow \frac{du(kt)}{dt}=\frac{du(t)}{dt}\rightarrow \delta(kt)=\frac{1}{k}\delta(t)$$

واگر k منفی باشد داریم

$$\delta(kt)=\frac{1}{|k|}\delta(t)$$

مثال (۱-۴۱): سیستم‌های مشخص شده را از لحاظ خواص خطی بودن، متغیر با زمان بودن، پایداری، حافظه دار بودن و نیز علیت مورد بررسی قرار دهید.

الف) $y(t)=e^{x(t)}=F(x)$

بررسی خطی بودن:

$$f(a_1x_1+a_2x_2)=e^{a_1x_1(t)}+e^{a_2x_2(t)}\neq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)$$

پس خطی نیست.

بررسی تغییرناپذیری با زمان:

$$y(t+T)=e^{x(t+T)}=F[x(t+T)]$$

پس تغییرناپذیر با زمان است.

بررسی پایداری:

$y=e^x$ پایدار است چون تا وقتی که x محدود است، y هم محدود می‌ماند.

بررسی حافظه‌دار بودن:

تابع فوق دارای حافظه نیست، چون مقدار y فقط بستگی به مقدار فعلی x دارد.

ب) $y[n]=x[n].x[n-1]=f(x)$

حل: بررسی خطی بودن:

$$f(a_1x_1[n]+a_2x_2[n])=\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}\times\{a_1x_1[n-1]+a_2x_2[n-1]\}$$
$$\neq f(a_1x_1[n])+f(a_2x_2[n])=a_1x_1[n].x_1[n-1]+a_2x_2[n].x_2[n-1]$$

پس خطی نمی‌باشد.

بررسی تغییرناپذیری بازمان:

باید

$$y[n]=f(x[n])\rightarrow y[n-\tau]=f(x[n-\tau])$$
$$y[n-\tau]=x[n-\tau].x[n-\tau-1]=f(x[n-\tau])$$

پس تغییرناپذیر بازمان است.

واضح است که این سیستم دارای حافظه است، چون مقدار خروجی در هر لحظه به ورودی در یک لحظه قبل بستگی دارد.

این سیستم پایدار است.

ج) $y(t) = (\sin 6t).x(t) = F(x)$

بررسی خطی بودن:

$$F(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) = (\sin 6t).(a_1x_1(t) + a_2x_2(t))$$
$$= a_1 \sin 6t.x_1(t) + a_2 \sin 6t.x_2(t) = a_1F(x_1(t)) + a_2F(x_2(t))$$

پس خطی است.

بررسی تغییرپذیری بازمان:

$$y(t-\tau) = \sin 6(t-\tau).x(t-\tau) \neq F[x(t-\tau)] = \sin 6t.x(t-\tau)$$

پس تغییرپذیر بازمان می‌باشد.

دارای حافظه نمی‌باشد و پایدار است.

د) $y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k] = f[x[n]]$

بررسی خطی بودن:

$$f(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) = \sum_{k=n-2}^{n+4} (a_1x_1[k] + a_2x_2[k])$$
$$= a_1 \sum_{k=n-2}^{n+4} x_1[k] + a_2 \sum_{k=n-2}^{n+4} x_2[k] = a_1 f(x_1[n]) + a_2 f(x_2[n])$$

لذا خطی است.

بررسی تغییرناپذیری بازمان:

$$y[n-N] = \sum_{k=n-N-2}^{n-N+4} x[k] = x[n-N-2] + x[n-N-1]$$
$$+ \ldots x[n-N+3] + x[n-N+4]$$
$$f(x[n-N]) = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k-N] = x[n-2-N] + x[n-1-N] + \ldots + x[n-N+4]$$
$$\rightarrow y[n-N] = f(x[n-N])$$

و لذا غیر متغیر بازمان است. دارای حافظه است و پایدار نیز می‌باشد.

مثال (۱-۴۲): فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال متناوب با پریودهای T_1 و $T_2 \leq T_1$ باشند. تحت چه شرایطی مجموع این دو سیگنال نیز خود یک سیگنال متناوب خواهد شد و پریود آن را حساب کنید.

حل: شرط اینکه $f(t) = x(t) + y(t)$ نیز متناوب باشد اینست که

$$\begin{cases} x(t+T_1) = x(t) \\ y(t+T_2) = y(t) \end{cases} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{r} \quad :(p, r \in Z)$$

وZ مجموعه اعدادصحیح است. بنابراین اگر p وr برهم بخش پذیر نباشند، داریم:

$$f(t + pT_2) = x(t + pT_2) + y(t + pT_2)$$

$$= x(t + rT_1) + y(t) = x(t) + y(t) \to f(t + pT_2) = f(t)$$

و دوره تناوب f برابر است با

$$T = pT_2 = rT_1$$

مثال (۱-۴۳): خواص سیستمی که رابطه ورودی و خروجی آن بصورت زیر است را بررسی کنید.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = f(x)$$

حل: بعدها خواهیم دید که این سیستم یک سیستم نمونه برداری است. شرط خطی بودن

$$y = f(x) \to f(a_1x_1 + a_2x) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$$

$$a_1x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_1x_1(t)\delta(t - nT) = a_1\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t)\delta(t - nT) = a_1f(x_1)$$

$$a_2y_2(t) = a_2f(x_2)$$

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$$

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_1x_1 + a_2x_2)\delta(t - nT)$$

$$= a_1\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1\delta(t - nT) + a_2\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2\delta(t - nT)$$

پس نتیجه می‌گیریم خطی است.

بررسی غیر متغیر بازمان بودن:

$$f(x(t - \tau)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - \tau)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT - \tau)\delta(t - nT)$$

$$y(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - \tau)\delta(t - \tau - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - \tau - nT)$$

پس این سیستم درحالت کلی متغیر با زمان است.

مثال (۱-۴۴): تابع همبستگی میان دو سیگنال بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x(\tau)d\tau$$

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)y(\tau)d\tau$$

مطلوبست رابطه $\phi_{yx}(t)$ با $\phi_{xy}(t)$ و همچنین محاسبه قسمت فرد $\phi_{xx}(t)$ و $\phi_{yx}(t)$، اگر $y(t) = x(t + T)$ باشد.

حل: با توجه به روابط داده شده، می‌توان $\phi_{yx}(t)$ را بدست آورد.

$$\phi_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t + \tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(u)x(u - t)du = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(\tau - t)d\tau = \phi_{xy}(-t)$$

بنابراین $\phi_{yx}(t)$ و $\phi_{xy}(t)$ با هم برابرند، یعنی

$$\phi_{yx}(t) = \phi_{xy}(-t)$$

واین نتیجه مستقل از ارتباط $x(t)$ و $y(t)$ است.

اکنون محاسبه قسمت فرد $\phi_{xx}(t)$:

$$odd[\phi_{xx}(t)] = \frac{1}{2}[\phi_{xx}(t) - \phi_{xx}(-t)]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} x(-t+\tau)x(\tau)d\tau\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} [x(\tau+t) - x(\tau-t)]x(\tau)d\tau\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\frac{1}{2}[x(t+\tau) - x(-t+\tau)]\right]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \ odd[x(t+\tau)]\ d\tau = \varphi_{xx_0}(t)$$

که در آن

$$x_o(t) = od[x(t)] = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

اکنون محاسبه $\phi_{yx}(t)$، با فرض $y(t) = x(t+T)$ رابطه همبستگی بصورت زیر در می‌آید

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau+T)d\tau$$

نتیجه می‌گیریم

$$\phi_{xy}(t+T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau+T)x(\tau+T)\ d\tau$$

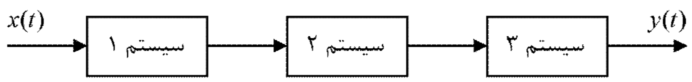
و چون

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau$$

و یا

$$\phi_{xy}(t+T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+u).x(u)du\ = \phi_{xx}(t)$$

مثال (۱-۴۵): آیا سیستمی متشکل از سه سیستم خطی و غیر متغیر بازمان که بصورت سری به هم متصل شده‌اند یک سیستم خطی و غیر متغیر بازمان می‌باشد.



شکل (۱-۹۴): ترکیب متوالی سه سیستم مربوط به مثال (۱-۴۵)

حل: ضابطه سیستم اول و دوم و سوم را بترتیب زیر در نظر می‌گیریم.

سیستم سوم $y = h(x)$، سیستم دوم $y = g(x)$ و سیستم اول $y = f(x)$.

خروجی سیستم کلی به ازای ورودی x_1

$$y_1 = h\{g[f(x_1)]\}$$

خروجی سیستم کلی به ازای ورودی x_2

$$y_2 = h\{g[f(x_2)]\}$$

خروجی سیستم کلی به ازای ورودی $ax_1 + ax_2$

$$y_3 = h\{g[f(ax_1 + bx_2)]\}$$

اما چون f خطی است

$$f(ax_1+bx_2)=af(x_1)+bf(x_2)$$

نتیجتاً داریم

$$y_3=h\{g[af(x_1)+bf(x_2)]\}$$

هم چنین چون g نیز خطی است، داریم

$$y_3=h\{ag[f(x_1)]\}+bg[f(x_2)]$$

و نهایتاً چون h نیز خطی است، داریم

$$y_3=ah\{g[f(x_1)]\}+bh\{g[f(x_2)]\}$$

که این برابر است با

$$y_3=ay_1+by_2$$

پس سیستم خطی است. این مطلب را می‌توان برای N ورودی نیز تحقیق کرد. همچنین به سادگی می توان تحقیق کرد که سیستم متشکل از تعدادی سیستم غیر متغیر بازمان خود نیز غیرمتغیر بازمان است.

مثال (۱-۴۶): اگر سیستمی فقط دارای خاصیت جمع‌پذیری باشد. آنرا سیستم جمع‌پذیر گویند و خروجی آن به ورودی x_1+x_2 مساوی مجموع تک تک پاسخ‌ها است و اگر سیستمی فقط دارای خاصیت همگنی باشد، آنرا سیستم همگن گویند و خروجی آن به ورودی ax مساوی ay می‌باشد. در این مثال، چهار سیگنال زیر را از لحاظ همگنی یا جمع‌پذیر بودن بررسی کنید.

الف) $y[n]=\Re e\{x[n]\}$

ب) $y(t)=\dfrac{1}{x(t)}\left[\dfrac{dx(t)}{dt}\right]^2$

ج) $y[n]=\begin{cases}\dfrac{x[n].x[n-2]}{x[n-1]} & ,x[n-1]\neq 0\\ 0 & ,x[n-1]=0\end{cases}$

حل: الف) واضح است که درحالت کلی که a یا b مختلط باشند سیستم همگن نیست. اما اگر a و b حقیقی باشند داریم:

$$\begin{aligned}f(ax_1+bx_2)&=\Re e\{ax_1[n]+bx_2[n]\}\\&=a\Re e\{x_1[n]\}+b\Re e\{x_2[n]\}\\&=af[x_1]+bf[x_2]\end{aligned}$$

بنابراین، در حالت فرض سیستم نهایتاً خطی می‌شود (هم همگن و هم جمع‌پذیر). در غیر این صورت سیستم فقط جمع‌پذیر است.

ب)

$$y(t)=\frac{1}{x(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2=f(x)$$

$$f(ax_1+bx_2)=\frac{1}{ax_1+bx_2}\left[\frac{ad(ax_1+bx_2)}{dt}\right]^2=\frac{1}{ax_1+bx_2}\left[a\frac{dx_1}{dt}+b\frac{dx_2}{dt}\right]^2$$

سیستم غیر خطی، ولی همگن است. زیرا

$$f(ax)=\frac{1}{ax}\left[\frac{d(ax)}{dt}\right]^2=\frac{1}{ax}a^2\left[\frac{dx}{dt}\right]^2$$
$$=a\times\frac{1}{x}\left[\frac{dx}{dt}\right]^2=af(x)$$

ج)

$$y[n]=\begin{cases}\dfrac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]} & x[n-1]\neq 0\\ 0 & x[n-1]=0\end{cases}$$

شرط خطی بودن را تحقیق می‌کنیم

$$f[ax_1+bx_2]=\frac{(ax_1[n]+bx_2[n])(ax_1[n-2]+bx_2[n-2])}{ax_1[n-1]+bx_2[n-1]}$$

دیده می‌شود سیستم خطی نیست ولی همگن است، چون

$$f(ax_1)=\frac{ax_1[n].ax_1[n-2]}{ax_1[n-1]}=\frac{ax_1[n].x_1[n-2]}{ax_1[n-1]}=af(x_1)$$

۱-۱۳ خلاصه

در این فصل، علاوه بر معرفی سیگنال به عنوان ابزار تحلیل سیستم و معرفی و بررسی برخی سیگنال‌های مهم، به برخی خواص مهم سیستم‌ها که از لحاظ تحلیل عملکرد سیستم حائز اهمیت هستند، اشاره شد. خواص مطرح شده در این فصل به هر دو دسته سیستم‌های پیوسته و گسستهٔ زمانی قابل تعمیم هستند (اگر چه ما در هر حالت، خاصیت مورد نظر را فقط برای یک دسته بررسی کردیم).

خواصی که در اینجا برای سیستم‌ها ارائه کردیم، برای هر سیستم قابل اثبات یا نفی است. به عبارت دیگر کلیهٔ سیستم‌ها یا این خواص را دارند و یا ندارند و هرگز نمی‌توان سیستمی یافت که در مورد نفی یا اثبات خواص فوق، در مورد آن نتوان نظر داد. البته در حالت کلی ایجاد یک تحلیل ریاضی دقیق برای کلیه سیستم‌ها بسیار مشکل و گاهی غیرممکن است. به همین دلیل، در این کتاب به عنوان اولین قدم در تحلیل سیستم‌ها، فقط به تحلیل سیستم‌های خطی و نا متغیر با زمان می‌پردازیم و فقط در چند مورد به سیستم‌های غیر خطی یا متغیر با زمان اشاره خواهیم کرد و عملکرد آنها را بررسی خواهیم کرد. در اینجا لازم به ذکر است که به طور کلی منظور از تحلیل سیستم، یافتن خواص آن و بررسی پاسخ سیستم به یک ورودی معلوم می‌باشد.

۱-۱۴ مسائل

۱-۱ برای دنباله نمایش داده شده، مطلوبست رسم دنباله‌های زیر

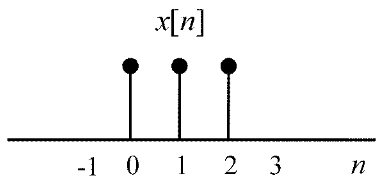
الف) $x[n-2]$

ب) $x[4-n]$

ج) $x[2n]$

د) $x[n^2]$

هـ) $\frac{1}{2}x[n]+\frac{1}{2}(-1)^n x[n]$



شکل (۱-۹۵): شکل مربوط به تمرین ۱-۱

۱-۲ برای سیگنال رسم شده مطلوبست رسم سیگنال‌های زیر

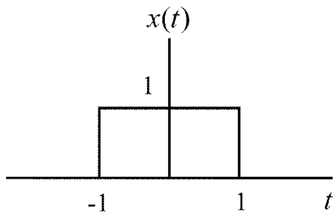
الف) $x(2t-4)$

ب) $x(1-t)$

ج) $x^2(t)$

د) $x(t^2)$

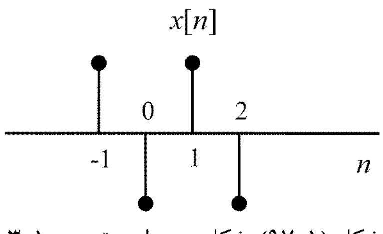
هـ) $tx(t^2)$



شکل (۱-۹۶): شکل مربوط به تمرین ۱-۲

۱-۳ حاصلضرب دنباله‌های زیر را بیابید. $(x[n],h[n])$

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta[n-k]$$



شکل (۱-۹۷): شکل مربوط به تمرین ۱-۳

۱-۴ دوره تناوب سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف) $Cos\omega_0 t + Cos\omega_1 t$

ب) $e^{\sin \omega_0 t}$

ج) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k]$

د) $e^{jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$

۱-۵ آیا حاصلضرب دو سیگنال متناوب در حالت کلی متناوب است؟ این مطلب در مورد دنباله‌ها چگونه است؟

۱-۶ قسمتهای زوج و فرد دنباله‌های زیر را بیابید.

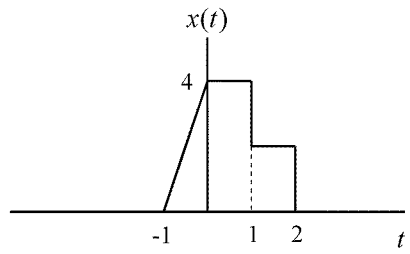
$$x[n] = (-1)^n \{u[n+4] - u[n-4]\}$$
$$x[n] = \cos \Omega_0 n \{u[n] - u[n-4]\}$$

۱-۷ قسمت‌های زوج و فرد سیگنال‌های زیر را بیابید.

$$x(t) = e^t Cos(t)\{u(t) - u(t-3)\}$$
$$x(t) = Ln(t)\{u(t) - u(t-T)\} \quad , \qquad T \text{ : عدد ثابت}$$
$$x(t) = \begin{cases} Ln\left(t^2 Cost\right) & , -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

۱-۸ آیا با دانستن فقط قسمت زوج و یا فقط قسمت فرد یک سیگنال یا دنباله می‌توان سیگنال یا دنباله را بازسازی کرد؟ اگر می‌شود در چه حالت؟

۱-۹ ضابطهٔ سیگنال زیر را یافته و قسمتهای زوج و فرد آنرا مشخص کنید.



شکل (۱-۹۸): شکل مربوط به تمرین ۱-۹

۱-۱۰ اگر سیگنال مسئله (۱-۹) به سیستمی با ضابطه زیر اعمال شود خروجی سیستم را بیابید.

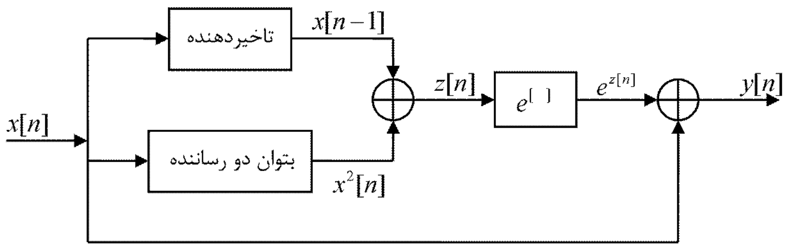
$$y(t) = e^{x(t)}x(t)$$

۱-۱۱ توضیح دهید آیا با انجام یک آزمایش یعنی اعمال یک ورودی خاص به یک سیستم و مشاهده خروجی می‌توان بطور یکتا ضابطه سیستم را بدست آورد؟ در صورت منفی بودن پاسخ آیا افزایش تعداد آزمایشات کمکی می‌کند؟

۱-۱۲ برای شناخت ضابطه یک سیستم خطی غیر متغیر با زمان انجام حداقل چند آزمایش ضروری است؟

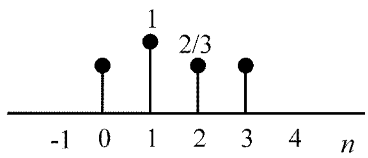
۱-۱۳ آیا معکوس یک سیستم علی و پایدار لزوماً و علی و پایدار است؟

۱-۱۴ سیستمی شامل چند جزء بصورت زیر در دسترس است



شکل (۱-۹۹): شکل مربوط به تمرین ۱-۱۴

مطلوبست $y[n]$. اگر $x[n]$ بصورت زیر باشد



شکل (۱-۱۰۰): شکل مربوط به تمرین ۱-۱۴

۱-۱۵ یک سیستم خطی دارای این خاصیت است که پاسخ آن به ورودی بصورت t^k برابر $Cos\ (kt)$ است، یعنی:

$$T\left[t^k\right] = Coskt$$

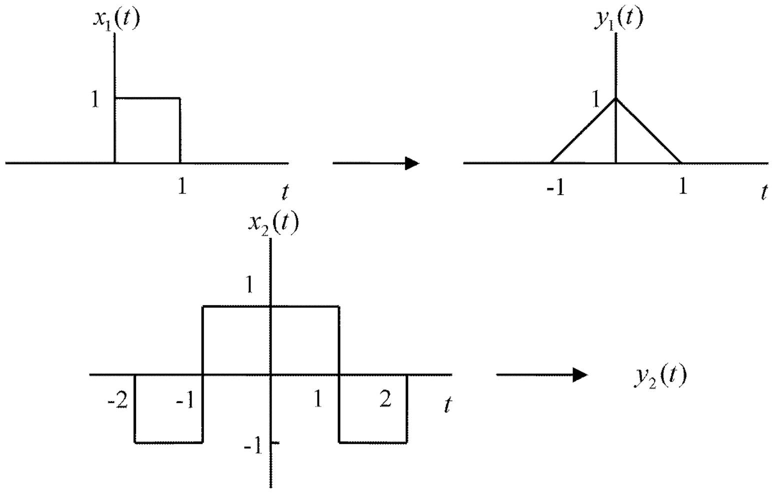
مطلوبست محاسبه پاسخ این سیستم به ورودی‌های زیر

$$x_1(t) = \sqrt{5} + 2t^2 + t^5$$

$$x_2(t) = e^{2t}$$

$x_3(t) = Cos\,4t$

۱-۱۶ بر روی یک سیستم خطی و غیر متغیر بازمان، یک آزمایش انجام گرفته و مشاهده شده است که اگر ورودی این سیستم $x_1(t)$ باشد، خروجی $y_1(t)$ است (به شکل‌ها توجه کنید) مطلوبست پاسخ سیستم به ورودی $x_2(2)$.



شکل (۱-۱۰۱): شکل مربوط به تمرین ۱-۱۶

۱-۱۷ کدامیک از سیستم‌های زیر معکوس‌پذیرند سایر خواص این سیستم‌ها را مورد بررسی قرار دهید.

الف) $y(t) = x(t-4)$

ب) $y(t) = Cos[x(t)]$

ج) $y(t) = tx(t)$

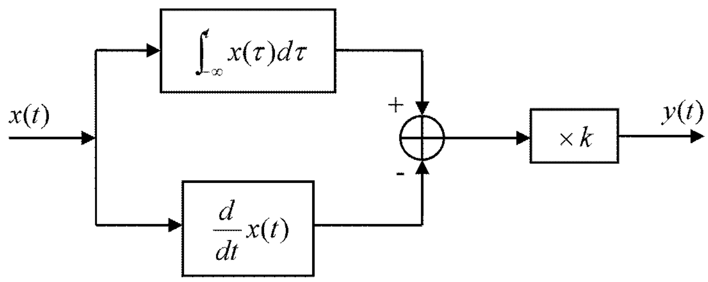
د) $y[n] = x[2n]$

هـ) $y[n] = \begin{cases} x[n+1] & , \quad n \geq 0 \\ x[n] & , \quad \leq -1 \end{cases}$

و) $y[n] = x[n].x[n-1]$

ز) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}.x(\tau)d\tau$

۱-۱۸ خروجی سیستم زیر را بر حسب ورودی بنویسید و خواص آن را بررسی کنید.



شکل (۱-۱۰۲): شکل مربوط به تمرین ۱-۱۸

۱-۱۹ کدامیک از سیستم‌های زیر خطی‌اند؟ سایر خواص این سیستم‌ها را مورد بررسی قرار دهید که در آن a و b اعداد ثابتی هستند.

الف) $\frac{dy(t)}{dt} = a_1\frac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t)$

ب) $y(t) = x(t) + \int_{-\infty}^{t} x^2(t)dt$

ج) $e^{y(t)} = Cos[x(t)]$

۱-۲۰ خواص سیستم‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $Ln(x(t)) = \frac{dy(t)}{dt}$

ب) $x^2(t) = y(t-1)$

ج) $y[n] = y[n-1] + \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

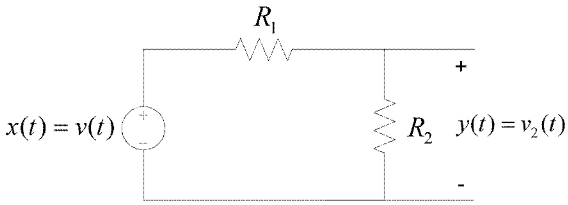
۱-۲۱ آیا معکوس یک سیستم خطی و علی یک سیستم خطی و علی می‌باشد؟

۱-۲۲ ثابت کنید در یک سیستم خطی، اگر ورودی متحد با صفر باشد، خروجی نیز متحد با صفر است.

۱-۲۳ آیا خاصیت مطرح شده در مسئله (۱-۲۲) برای سیستم‌های خطی تکه‌ای نیز صادق است؟

۱-۲۴ آیا معکوس یک سیستم پایدار، در حالت کلی یک سیستم پایدار است؟

۱-۲۵ یک نمودار بلوکی برای مدار زیر رسم کنید ورودی ولتاژ منبع و خروجی ولتاژ مقاومت R_2 است.



شکل (۱-۱۰۳): شکل مربوط به تمرین ۱-۲۵

۱-۲۶ آیا سیستم زیر معکوس‌پذیر است؟

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[n-k]$$

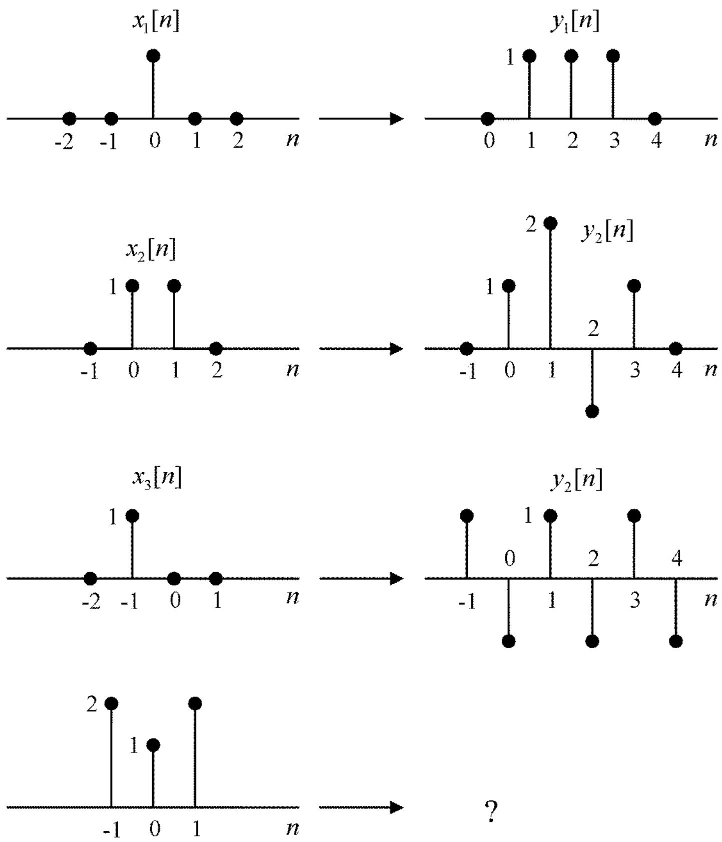
۱-۲۷ خواص سیستم زیر را بررسی کنید.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT)$$

۱-۲۸ ثابت کنید که خاصیت علیت برای یک سیستم پیوسته زمان معادل است با عبارت زیر
به ازاء هر ورودی دلخواه $x(t)$، اگر $x(t<t_0)=0$ باشد، درآن صورت $y(t<t_0)=0$ است.
در جمله فوق $x(t)$ ورودی سیستم، t_0 یک زمان دلخواه و $y(t)$ پاسخ به ورودی $x(t)$ است. جمله فوق بطور یکسان برای سیستم گسسته زمان نیز مطرح است.

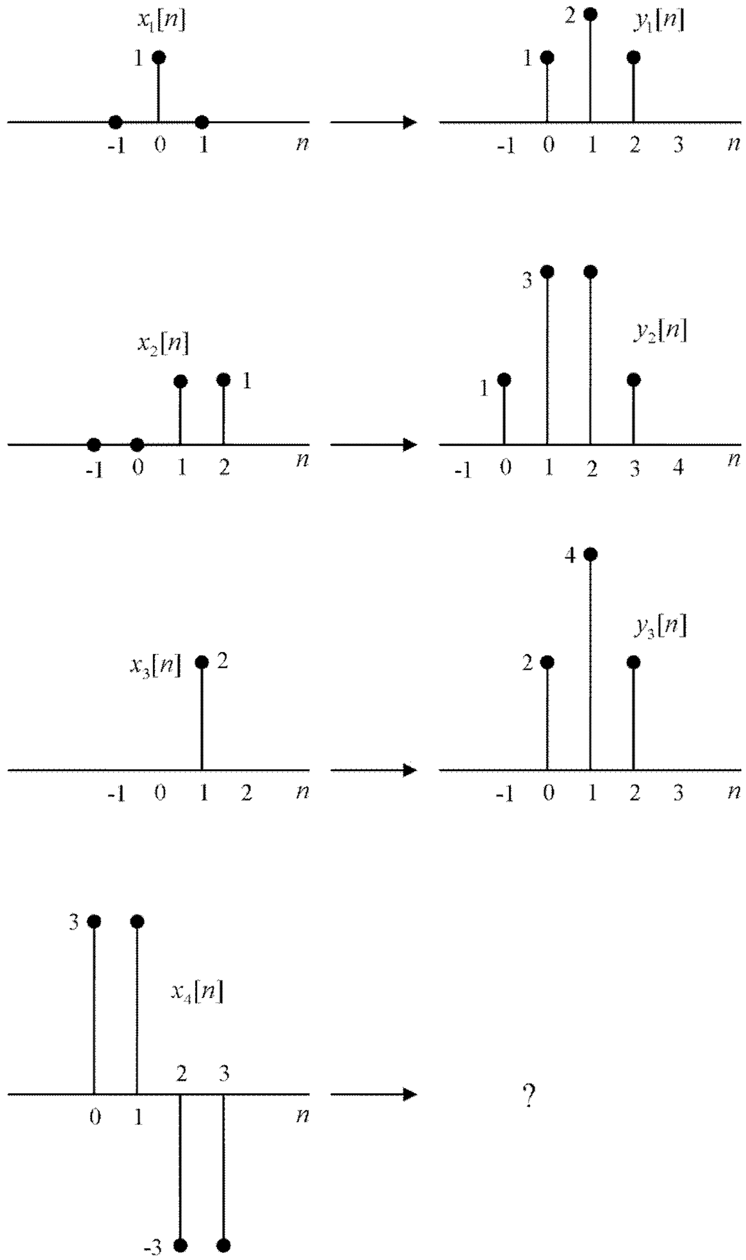
۱-۲۹ آیا عبارت مطرح شده در مسئله (۱-۲۸) برای سیستم‌های غیرخطی نیز صادق است؟ (یک مثال نقض بیاورید)

۱-۳۰ برای شناسائی یک سیستم گسسته زمان خطی (ولی احتمالاً متغیر با زمان) سه آزمایش بصورت زیر انجام شده است. یعنی سه ورودی به سیستم اعمال شده وخروجی آن مشاهده شده است. آیا این سیستم مستقل از زمان است؟ اگر ورودی بصورت $x[n]$ (نمایش داده شده) باشد، مطلوبست محاسبه خروجی.



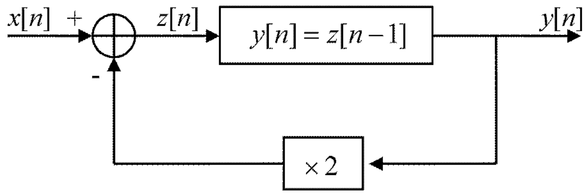
شکل (۱-۱۰۴): شکل مربوط به تمرین ۱-۳۰

۱-۳۱ برای شناسایی یک سیستم گسسته زمان مستقل از زمان (ولی احتمالاً غیرخطی) سه آزمایش بصورت زیر انجام شده است. یعنی سه ورودی به سیستم اعمال شده وخروجی آن مشاهده شده است. آیا این سیستم خطی است؟ اگر ورودی بصورت نمایش داده شده در شکل زیر باشد، مطلوبست محاسبه خروجی.



شکل (۱-۱۰۵): شکل مربوط به تمرین ۱-۳۱

۱-۳۲ یک سیستم پس‌خور بصورت زیر در دسترس است. فرض کنید $y[n]=0 \quad , n<0$



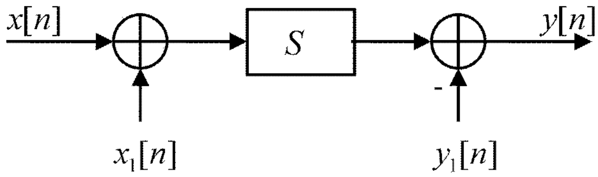
شکل (۱-۱۰۶): شکل مربوط به تمرین ۱-۳۲

الف) مطلوبست پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=\delta[n]$

ب) مطلوبست پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=u[n]$

ج) آیا سیستم کلی خطی است؟

۱-۳۳اگر S خطی تکه‌ای باشد، ثابت کنید سیستم زیر خطی است، با فرض اینکه $y_1[n]$ پاسخ سیستم خطی S است به ورودی $x_1[n]$.



شکل (۱-۱۰۷): شکل مربوط به تمرین ۱-۳۳