کنکور (۲)

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(\cancel{\ }ax)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x\,dx = \ldots$$

در بسط فوریه کسینوسی $0<x<\pi$, $f(x)=\sin x$ به صورت

$\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ کدام مورد

است؟

$$\cancel{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{a_0^2}{2}} + \sum a_n^2$$

$$\frac{8}{\pi^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{4}{\pi}$$

$$\sum a_n^2 = \frac{\pi^2-8}{\pi^2}$$

مثال ۸۶ سئوال (۲۳)

$$\frac{1}{1}\int_0^{2} t^4\,dt = \frac{32}{9} + \sum\left(\frac{16}{n^4\pi^4}+\frac{16}{n^2\pi^2}\right)$$

$$0 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}$$

$f(x) = x + \cos x \qquad -\pi < x < \pi$

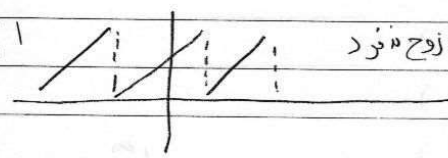
$f_1(x) = x \quad -\pi < x < \pi \rightarrow$ فرد $\rightarrow a_0 = 0$

$a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{1}^{\pi} x \sin x \, dx$

$f_2(x) = \cos x \quad -\pi < x < \pi = \cos x$

$f(x) = x + 1 \qquad -1 < x < 1$



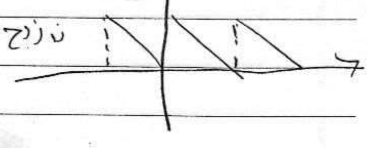
نه زوج نه فرد

$f(x) = x \qquad -1 < x < 1$ فرد $\rightarrow$

$F(x) = 1 \qquad -1 < x < 1 \Rightarrow$ برابر خودش است

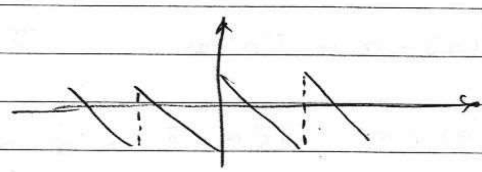
$f(x) = 1 - x \qquad 0 < x < 1$

نه زوج نه فرد



$\underbrace{F(x) - \frac{1}{2}}_{g(x)} = \frac{1}{2} - x \qquad 0 < x < 1$

فرد است



$a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\frac{1}{2}} x\right) dx =$$

سری فوریه مختلط مهم نیست.

انتگرال فوریه:

$$F(x) = \int_0^\infty \left(A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right) dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos wx \, dx$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin wx \, dx$$

[redacted]

$$\text{فرد } f(x) \Rightarrow \begin{cases} A(w)=0 \\ B(w) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw$$

$$\text{زوج } f(x) \Rightarrow \begin{cases} A(w) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx \Leftrightarrow \\ \end{cases}$$

$$f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw$$

$$B(w) = 0$$

مثال) انتگرال فوریه تابع زیر را بدست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 2 & -2 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-2} 0\cos wx\,dx + \int_{-2}^{0} 2\cos wx\,dx + \right.$$

$$\left. \int_0^1 x\cos wx\,dx + \int_1^2 \cos wx\,dx + \int_2^\infty 0\cos wx\,dx \right) =$$

$$\frac{2}{w}\left(-\sin(2w)\right) + \frac{\sin w}{w} - \frac{1-\cos w}{w^2} + \frac{\sin 2w - \sin w}{w} \Big)$$

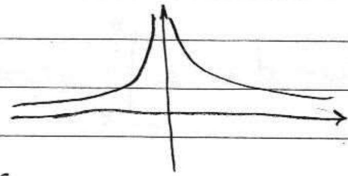
$$B(w) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-2}^{0} 2\sin wx\, dx + \int_{0}^{1} x \sin wx\, dx + \int_{1}^{2} \sin wx\, dx\right) = \dots$$

انتگرال فوریه را بدست آورید $\qquad f(x) = e^{-|x|}$

تابع زوج $\Rightarrow B(w) = 0$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos wx\, dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+w^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2}\, dw$$



بسط نیم دامنه

$y = f(x)$ $\quad 0 < x < \infty$

انتگرال فوریه سینوسی

$$\begin{cases} A(w) = 0 \\ B(w) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$f(x) = \int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw$$

انتگرال فوریه کسینوسی

$$\begin{cases} A(w) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx \\ \Longleftrightarrow f(x) = \displaystyle\int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw \end{cases}$$

$B(w) = 0$

۴ — ۱۲۵

گرایش ۲. ص ۷۹

$$A(w) = f(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos wx\,dx =$$

ص ۴ ← ۱۲۵

تابع زوج $\rightarrow \alpha = -\beta$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\beta C\cos wx\,dx = \frac{2C}{\pi}\,\frac{\sin \beta w}{w}$$

میشه $A(w) = \dfrac{\sin w}{w}$

$$\frac{2C}{\pi} = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = 1$$

Subject: Date:

۵ ← ۱۲۵

$$f(\omega)=A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\cos\omega x\, dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$\int_{-4}^{5}\left([x]+[-x]\right)dx=-9 \equiv \int_{-4}^{5} -1\, dx=-9$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 x\,dx=\frac{9}{2}$$

۸ ← ۱۲۶ ۸۱ گرایش برق

مهر ۸۱

$$f(\omega)=B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\sin\omega x\, dx$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)=\frac{2}{\pi}\,\frac{\omega+\sin\omega}{\omega^2}$$

۱۵ ← ۱۲۷

$$g(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^a \cos(tx)\,dx$$ ۸۴ مهر

$$g(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^a dx=\frac{2a}{\pi}$$

Subject: Date:

(9) ۱۳۴ [redacted] ص

ت۲. ۸۴

فرد $f(x) \Rightarrow B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$

$$\frac{dB(\omega)}{d\omega} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\cos\omega x\,dx$$

(1) $\frac{\pi}{2}B(\omega) + \frac{\pi}{2}\frac{dB(\omega)}{d\omega} = 0 \rightarrow \frac{dB(\omega)}{B(\omega)} = -d\omega$

$$\boxed{B(\omega) = Ce^{-\omega}}$$

$$f(x) = \int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\,d\omega = \int_0^\infty Ce^{-\omega}\sin\omega x\,d\omega$$

$$= \frac{Cx}{1+x^2} \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow C = 2$$

(2) $xf(x) = x$

۴ ← (۱۴۵)

ت۲. ۷۴

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$\boxed{-\frac{da(\omega)}{d\omega}} = +\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\sin\omega x\,dx$$

(2) $\rightarrow \boxed{A(\omega)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\sin\omega x\,dx$

Subject: Date:

۲۸ ← ۱۳۰

تابع زوج $\Rightarrow B(w)=0$

$$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin w}{w}$$

۲۷ ← ۱۳۵

$$f(w)=B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\,\sin wx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos w\pi}{w+1}+\frac{1+\cos w\pi}{w-1}\right)$$

محاسبه انتگرال‌های معین با استفاده از انتگرال فوریه:

رابطه پارسوال

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x))^2\,dx=\int_0^{\infty}\left(A(w)^2+(B(w))^2\right)dw$$

۱) انتگرال فوریه تابع مورد نظر را بدست می‌آوریم.

۲) عبارت مقابل انتگرال معین را با عبارت مقابل انتگرال فوریه مقایسه می‌کنیم و سپس در صورت مشابه بودن با عدد گذاری و ساده کردن و در غیر اینصورت از رابطه پارسوال و ساده کردن استفاده می‌کنیم.

مثال) با استفاده از انتگرال فوریه سینوسی تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید ؟

الف) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x} \sin x \, dx$

ب) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx$

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sin wx \, dx = \frac{2}{\pi} \, \frac{1-\cos aw}{w}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos aw}{w} \sin wx \, dw}$$

π طرفین + دو در راست تقسیم بر 2

الف) $x = a$ $\quad \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos aw}{w} \sin aw \, dw$

$$\xRightarrow{a=1} \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x} \sin x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

ب) $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a 1\,dx = \int_0^\infty \frac{4}{\pi^2}\frac{\overbrace{(1-\cos a\omega)^2}^{4\sin^2\frac{a\omega}{2}}}{\omega^2}\,d\omega =$$

$$\frac{2}{\pi}a = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{4\sin^4\frac{a\omega}{2}}{\omega^2}\,d\omega$$

$a=2$

$$\frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty 4\,\frac{\sin^4\omega}{\omega^2}\,d\omega \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

---

16 ← 128

$x^2=t \rightarrow 2x\,dx=dt$

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x}\,\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{2}$$

تبدیل فوریه :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{+j\omega x}\, d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-j\omega x}\, dx$$

$F(\omega)$ را تبدیل فوریه $f(x)$ می‌نامند

مثال) تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_0^1 e^{-j\omega x}\, dx + \int_1^2 2e^{-j\omega x}\, dx = \frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega} + \frac{2}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - e^{-2j\omega}\right)$$

مثال) تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ را بدست آورید.

$$F(\omega)=\int_0^\infty e^{-ax}e^{-j\omega x}\,dx=\frac{1}{a+j\omega}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}\,dx$$

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx$$

شروط

(۱) a کوچکتر از صفر ← صفر

(۲) قدر مطلق ← محدود   انتگرال پذیری از منفی تا بی‌نهایت   زوج

$$e^{-ax}\xrightarrow{\alpha}\frac{1}{s+a}\qquad F(\omega)=\frac{1}{j\omega+a}$$

مثال) تبدیل فوریه تابع $f(x)=e^{-a|x|}$ را بدست آورید.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\underbrace{e^{-j\omega x}}_{\cos\omega x-j\sin\omega x}\,dx=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\cos\omega x\,dx-j\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\sin\omega x\,dx$$

$$=2\int_0^\infty e^{-ax}\cos\omega x\,dx=2\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

خواص تبدیل فوریه :

۱) تغییر مقیاس

$f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$

$f(ax) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

۲) انتقال

الف) $e^{ajx} f(x) \xrightarrow{F} F(\omega - a)$

ب) $f(x-a) \xrightarrow{F} e^{-ja\omega} F(\omega)$

۳) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim f''(x) = \dots = 0$

$f^{(n)}(x) \xrightarrow{F} (j\omega)^n F(\omega)$

۴) $x^n f(x) \xrightarrow{F} (j)^n F^{(n)}(\omega)$

۵) دوگان :

$f(x) \longrightarrow F(\omega)$

$F(x) \longrightarrow 2\pi f(-\omega)$

(۶) کانولوشن

$$f(x) * g(x) \xrightarrow{F} F(\omega)\, G(\omega)$$

$$f(x)\, g(x) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

$$\boxed{f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, g(\lambda - x)\, d\lambda}$$

ریاضیات مهندسی

$$f(x) * g(x) = \int_{0}^{x} f(x-\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda = \int_{0}^{x} f(x)\, g(x-\lambda)\, d\lambda$$

معادلات دیفرانسیل

(۷) رابطه پارسوال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

(۸) $f(x)$ زوج $\rightarrow$ $F(\omega)$ زوج و حقیقی

$f(x)$ فرد $\rightarrow$ $F(\omega)$ فرد و موهومی

مثال) با استفاده از تبدیل فوریه $f(x)=e^{-a|x|}$ تبدیل فوریه $\frac{1}{a^2+x^2}$ را بدست آورید.

$$e^{-a|x|} \xrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\frac{2a}{a^2+x^2} \xrightarrow{\text{دوگان}} 2\pi e^{-a|-\omega|} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a^2+x^2} \longrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$$

با استفاده از تبدیل فوریه $e^{-a|x|}$ حاصل $\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ را بدست آورید؟

$$e^{-a|x|} \longrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$2\int_0^\infty (e^{-ax})^2 dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^\infty \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2} d\omega \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2} d\omega$$

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3} \quad \text{یا} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}$$

مثال) تبدیل فوریه تابع $f(x)=e^{-x}$ را بدست آورید؟

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2x f(x)$$

$$(\cancel{j}\omega) F(\omega) = -2\cancel{j} F'(\omega)$$

$$\frac{dF(\omega)}{F(\omega)} = \frac{-\omega}{2} d\omega \longrightarrow F(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$$F(0) = C$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-j\omega x} dx \longrightarrow F(0) = C =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

مثال) تبدیل فوریه $f(x) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{2}$ را بدست آورید؟

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$j\omega F(\omega) = \pi e^{-|\omega|} \Rightarrow F(\omega) = \frac{\pi}{j\omega} e^{-|\omega|}$$

تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی :

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$F_c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$$

مکانیک ۸۲ (۴) ← ص ۱۵۵ حل (۱٤۸)

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x\,dx = \frac{1}{1+\omega^2}$$

برق ۸۷) تبدیل فوریه سینوسی $f(t) = \frac{e^{-at}}{t}$ برابر کدام است

$$F_s(\omega) = \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t}\sin\omega t\,dt$$

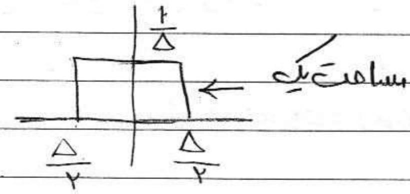
$$\frac{dF_s(\omega)}{d\omega} = \int_0^\infty e^{-at}\cos\omega t\,dt = \frac{a}{a^2+\omega^2} \rightarrow$$

$$F_s(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(جلسه جدید)

Subject: **Date:**

تعریف تابع دلتا یا ضربه



$\Delta \to 0$

خواص

① $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$

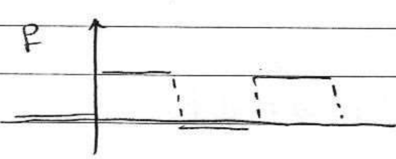
② $f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)$

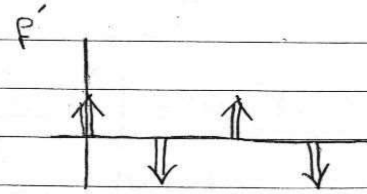
③ $f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$

④ $u'(x) = \delta(x)$

⑤ $F(\delta(x)) = 1$

⑥ $\delta(-x) = \delta(x)$ پرش با علامت فرق نمی‌کند ⇐ ضربه





مثال) سری فوریه تابع $f(x)=\delta(x)$ با دوره تناوب $T=2L$ بدست آورید.

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\delta(x)\,dx=\frac{1}{L}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\underbrace{\delta(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\delta(x)\cos(0)}dx=\frac{1}{L}$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\delta(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=0$$

$$f(x)=\frac{1}{2L}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

مثال) تبدیل فوریه e^{ajx} را بدست آورید.

$\delta(x)\longrightarrow 1$

دوگان $\Rightarrow 1\longrightarrow 2\pi\delta(w)$

انتقال $=\ e^{ajx}\longrightarrow 2\pi\delta(w-a)$

مثال: تبدیل فوریه $\sin ax$ را بدست آورید؟

$$\sin ax = \frac{e^{jax} - e^{jax}}{2j} \xrightarrow{F} \frac{2\pi}{2j}\left(\delta(w-a)-\delta(w+a)\right)$$

$\sin ax$ و $\cos ax$ تبدیل فوریه ندارند ولی تبدیل فوریه تعمیم یافته دارند.

گراس کامپیوتر ۸۲ (۱۵۵) ← ۳

$$F(w) = \int_{-2}^{2} e^{-jwx}\,dx = 2\int_{0}^{2} \cos wx\,dx = 2\,\frac{\sin 2w}{w}$$

گراس کامپیوتر ۷۸ (۱۵۶) ← ۹

$$jw\,Y(w) - 4Y(w) = \frac{1}{4+jw} \leftarrow \text{اولی}$$

$$Y(w) = \frac{1}{(4+jw)(jw-4)} = \frac{-1}{16+w^2}$$

سوال ۸۲ (۱۵۷) ← ۱۰

$$e^{jax} f(x) + e^{-jax} f(x)$$

$$F(w-a) + F(w+a)$$

تمرین ۸۲ (۱۵۵) ← ۱

$$f(t) = \underbrace{e^{-a(t)}}_{g(t)}$$

$$\frac{1}{2j}\left(e^{jbt} g(t) - e^{-jbt} g(t)\right) \xrightarrow{F} F(w) = \frac{1}{2j}\left(G(w-b) - G(w+b)\right)$$

$$g(t) = e^{-a(t)} \longrightarrow G(w) = \frac{2a}{a^2+w^2}$$

$$F(w) = \frac{2a}{2j}\left(\frac{1}{a^2+(w-b)^2} - \frac{1}{a^2+(w+b)^2}\right) =$$

$$a^2+w^2+b^2-2wb \qquad a^2+w^2+b^2+2wb$$

$$\frac{a}{j}\left(\frac{4wb}{(a^2+w^2+b^2)^2 - 4w^2b^2}\right) = \frac{-4jawa}{\text{مخرج}}$$

کامپیوتر ۸۳ ۱۵۵ ← ۴

$$\pi (jw)^2 y(w) - \pi y(w) = -\pi e^{-(w)} \Rightarrow$$

$$y(w) = \frac{e^{-(w)}}{w^2+1} \qquad e^{-a|x|} \longrightarrow \frac{2a}{a^2+w^2} \longrightarrow$$

$$\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \pi e^{-|w|}$$ دوگان

گرایش برق ۷۴ ۱۵۷ ← ۱۲ ۱۶۱ ← ۳۳

$f(t)$ فرد بنابراین $F(w)$ هم باید فرد و موهومی باشد

گزینه ۳

برق ۸۶ ۱۶۰ ← ۲۶

$$F(x) = \begin{cases} a & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases} \longrightarrow F(w) = 2a\,\frac{\sin w}{w}$$

$$F(w) = \int_{-1}^{1} a e^{-jwx}\,dx = 2\int_{0}^{1} a \cos wx \, dx$$

$$\frac{2a \sin x}{x} \longrightarrow 2\pi \begin{cases} a & |-\omega|<1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{x} \longrightarrow \begin{cases} \pi & |\omega|<1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$$

کامپیوتر ۷۴ (۱۵۷) ← ۱۱۴

$$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega x}\, dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos \omega x\, dx = 2\,\frac{\sin \omega\pi}{\omega}$$

گزینه ۱

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega x}\, d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-j\omega x}\, dx$$

برق سال ۸۷ (۱۶۱) ← ۳۱

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2x f(x)$$

$$j\omega F(\omega) = -2 j F'(\omega)$$

گزینه ۳

۲۱ ⇐ ۱۵۰۹

$$F(w) = \int_{-\pi}^{\pi} -\sin t\, e^{-jwt}\, dt \xrightarrow{u=t+\pi}$$

$$F(\omega) = \int_{0}^{2\pi} \sin u\, e^{-jw(u+\pi)}\, du =$$

$$e^{-jw\pi} \int_{0}^{2\pi} \sin u\, e^{-jwu}\, du =$$

$\sin u = t$

$e^{-jwu}\, d = dv$

$$F(w) = e^{-jw} \left[\sin u \times \frac{e^{-jwu}}{-jw} \Big|_{0}^{2\pi} + \int_{0} \frac{\cos e^{-jwu}}{jw} du \right)$$

$$F(w) = \frac{e^{-jw}}{jw} \int_{0}^{2\pi} \cos u\, e^{-jwu}\, du \xrightarrow{u=\frac{t}{2}}$$

$$F(w) = \frac{e^{-jw}}{2jw} \int_{0}^{4\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{-jw\frac{t}{2}}\, dt$$

$$2jw\, F(w)\, e^{jw} = \int_{0}^{4\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j\frac{w}{2}t}\, dt$$

$$4j\omega F(2\omega)\, e^{2j\omega} = \underbrace{\int_0^{4\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j\omega t}\, dt}_{G(\omega)}$$

گزینه ۴

توابع مختلط :

$\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$

$\sqrt[3]{8} \neq \sqrt[5]{32}$ ✓

$\ln(-1) = ?$ $\quad i\pi$

$\sin z = 2$ ✓

$ch^2 z + sh^2 z = 0 \Rightarrow z = ?$ $\quad (2k-1)\frac{\pi}{4} j$

آیا توابع $ch\,z$, $sh\,z$ متناوب است؟

متناوب است

$$\overbrace{Z = x + iy}^{\text{فرم دکارتی}} = \overbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}^{\text{فرم قطبی (مثلثاتی)}} = \overbrace{re^{i\theta}}^{\text{فرم نمایی}}$$

x قسمت حقیقی

قسمت موهومی Z

اندازه یا مدول Z

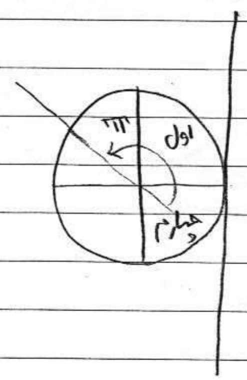
$r = |z|$

فاز یا آرگومان Z

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$Z = x + iy \Rightarrow \theta = \begin{cases} tg^{-1}\dfrac{y}{x} & \text{نقطه در ربع اول یا چهارم باشد} \\ \pi + tg^{-1}\dfrac{y}{x} & \text{〃 دوم یا سوم} \end{cases}$$



$Z_1 = 1 + j \to r = \sqrt{2} \to \Theta = tg^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \to (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

$Z_2 = -1 + j \to r = \sqrt{2} \to \Theta = \pi + tg^{-1}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \to$

$(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$

$$F(Z) = Re(F(Z)) + i\,Im(F(Z)) \Rightarrow \begin{cases} r = (F(Z)) = \sqrt{(Re(F(Z)))^2 + (Im(F(Z)))^2} \\ \Theta = \tan^{-1}\left(\frac{Im(F(Z))}{Re(F(Z))}\right) \end{cases}$$

$$r, \Theta \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\Theta \\ y = r\sin\Theta \end{cases}$$

تبدیل قطبی به دکارتی — قضیه اول

قضیه موآور:

توان n رسانی و ریشه n بهترین قضیه، قضیه موآور

$$Z = x + iy \xrightarrow[\text{فرم قطبی}]{\text{تبدیل به}} Z = r\,cis\,\Theta \to Z^n = r^n cis(n\Theta)$$

$$(Z)^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}} cis\left(\frac{2k\pi + \Theta}{n}\right)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

مثال) ریشه‌های چهارم ۱- را بدست آورید.

$$-1 = 1\,\mathrm{cis}\,\pi \rightarrow (-1)^{\frac{1}{4}} = (1)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{cis}\,\frac{2k\pi+\pi}{4}$$

$k=0 \quad \mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$k=1 \quad \mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

$k=2 \quad \mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-i-i)$

$k=3 \quad \mathrm{cis}\,\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

ریشه‌های پنجم عدد ۱ را بدست آورید.

$$1 = 1\,\mathrm{cis}\,0 \Rightarrow (1)^{\frac{1}{5}} = \underbrace{(1)^{\frac{1}{5}}}_{1}\,\mathrm{cis}\,\frac{2k\pi+0}{5}$$

$1+0i$

$\mathrm{cis}\,0$

$\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{5}$

$\mathrm{cis}\,\frac{4\pi}{5}$

$\mathrm{cis}\,\frac{6\pi}{5}$

$\mathrm{cis}\,\frac{8\pi}{5}$

$$\sqrt[3]{8} \neq \sqrt[5]{32}$$

در اعداد حقیقی برقرار است ولی در اعداد مختلط برقرار نیست.

$Z^{11} = 11 \Rightarrow Z^{11} - 11 = 0$

مجموع ریشه‌ها $= 0$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $= (-1)^{11} \times (-11) = 11$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$

$x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a}$

$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$x_1x_2 = \frac{c}{a}$

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$a_nZ^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + a_1Z + a_0 = 0$

مجموع ریشه‌ها $= -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

مجموع حاصلضرب ۲ به ۲ ریشه‌ها $= \frac{a_{n-2}}{a_n}$

مجموع حاصلضرب ۲ تا ۲ تای ریشه‌ها $= \frac{-a_{n-3}}{a_n}$

حاصلضرب کل ریشه‌ها $= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

لگاریتم اعداد مختلط:

$$Z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$$

$$\boxed{\operatorname{Ln} Z = \operatorname{Ln} r + i(\theta + 2k\pi)}$$ جواب کلی

جواب اصلی $\Rightarrow \operatorname{Ln} Z = \operatorname{Ln} r + i\theta \quad -\pi < \theta \leq \pi$

$$\operatorname{Ln}(-1) = \cancel{\operatorname{Ln} 1}_{0} + i\pi = i\pi$$

$$\operatorname{Ln}(i) = \cancel{\operatorname{Ln} 1}_{0} + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \operatorname{Ln}\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

$$w = i^i \Rightarrow \operatorname{Ln} w = i \operatorname{Ln} i = i\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \underbrace{i^2}_{-1}\frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} \rightarrow$$

$$w = e^{\frac{-\pi}{2}}$$