مجموع حاصلضرب ۲ تا ۲ ریشه‌ها $= \dfrac{-a_{n-2}}{a_n}$

حاصلضرب کل ریشه‌ها $= (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

لگاریتم اعداد مختلط:

$Z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$

$\boxed{\operatorname{Ln} Z = \operatorname{Ln} r + i(\theta + 2k\pi)}$ جواب کلی

جواب اصلی $\Rightarrow \operatorname{Ln} Z = \operatorname{Ln} r + i\theta \quad -\pi < \theta \leq \pi$

$\operatorname{Ln}(-1) = \cancel{\operatorname{Ln} 1}^{0} + i\pi = i\pi$

$\operatorname{Ln}(i) = \cancel{\operatorname{Ln} 1}^{0} + i\dfrac{\pi}{2} = i\dfrac{\pi}{2}$

$\operatorname{Ln}(1+i) = \operatorname{Ln}\sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$

$W = i^i \Rightarrow \operatorname{Ln} W = i \operatorname{Ln} i = i\left(\dfrac{i\pi}{2}\right) = \underbrace{i^2}_{-1}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{-\pi}{2} \Rightarrow$

$W = e^{\frac{-\pi}{2}}$

$$W = (-1)^{i} \Rightarrow \operatorname{Ln} W = i \operatorname{Ln}(-1) = i(i\pi) = -\pi$$

$$W = e^{-\pi}$$

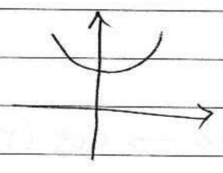
هر معادله مرتبه n دقیقاً n تا ریشه دارد.

اگر ضرایب حقیقی باشند اگر z ریشه باشد $\bar{z}$ هم ریشه آن معادله می‌باشد $\Leftarrow$

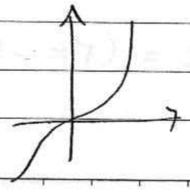
حتماً ریشه‌ها زوج هستند.

مقایسه توابع مثلثاتی با توابع هایپربولیک

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \end{cases}$$



$$\cos(ix) = \frac{e^{i^۲x} + e^{-i^۲x}}{۲} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{۲} = ch\,x$$

$$(***)\ (***)\begin{cases} \cos ix = ch\,x \ , \ ch(ix) = \cos x \\ \sin(ix) = i\,sh\,x \ , \ sh(ix) = i\sin x \\ tg\,(ix) = i\,tgh\,x \ , \ tgh(ix) = i\,tg\,x \end{cases}$$

$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) +$$

$$\cos x \sin(iy) = \sin x\, ch\,y + i\cos x\, sh\,y$$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\, ch\,y - i\sin x\, sh\,y$$

$$ch\,z = ch(x+iy) = ch\,x\cos y + i\,sh\,x\sin y$$

$$ch^۲ z + sh^۲ z = 0$$

$$\cos^۲(iz) - \sin^۲(iz) = 0 \longrightarrow \cos(۲iz) = 0$$

$$۲iz = (۲k-1)\frac{\pi}{۲} \longrightarrow z = (۲k-1)\frac{\pi}{۴i}$$

$$\sin z = ۲$$

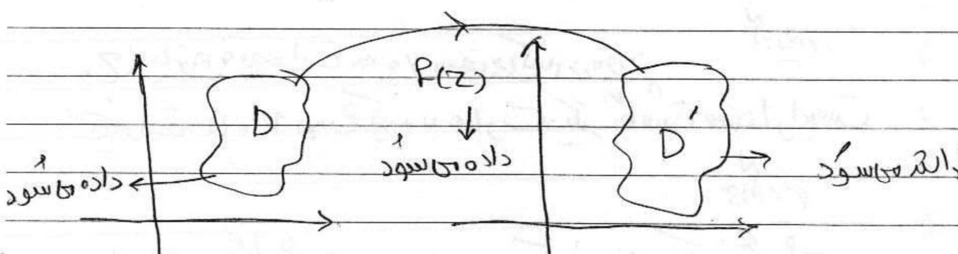
$\sin Z = ۲$

$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲i} = ۲ \rightarrow e^{۲iz} - ۴ie^{iz} - ۱ = ۰ \qquad e^{iz} = y$

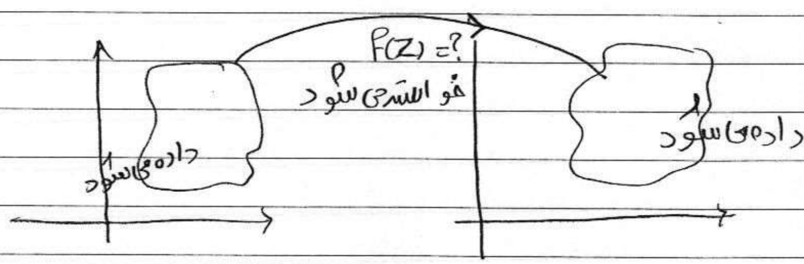
$y^۲ - ۴iy - ۱ = ۰$

توابع مختلط:

(۱) تصویر ناحیه D توسط $f(Z)$ را بدست آوریم؟



(۲) کدام تابع ناحیه D را به ناحیه D' تصویر (نگاشت) می‌کند



Subject: Date:

روش حل به نگاشت یک ناحیه توسط $w = f(z)$:

① بجای ناحیه ابتدا نگاشت مرزها را بدست می‌آوریم.

↓

الف) معادله مرزها را می‌نویسیم

ب) از معادله $w = f(z)$ $(u + iv = f(x + iy))$

سعی می‌کنیم u و v را برحسب x و y یا x و y را برحسب

u و v بدست آوریم.

* در شرایط یکسان بهتر است x و y را برحسب u و v بدست

آوریم.

ج) با توجه به تغییرات x و y سعی می‌کنیم در مورد

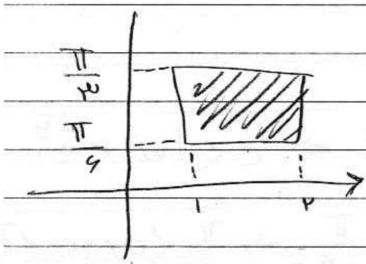
تغییرات u و v بحث کنیم به عبارت دیگر نگاشت مرزها را بدست

می‌آوریم

د) با توجه به نگاشت مرزها سعی می‌کنیم سعی می‌کنیم نگاشت

کل ناحیه را نیز بدست آوریم.

نمایش ناحیه هاشور خورده توسط $w = e^z$ بدست آورید؟



$$u + iv = e^{x+iy} = e^x(e^{iy}) = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

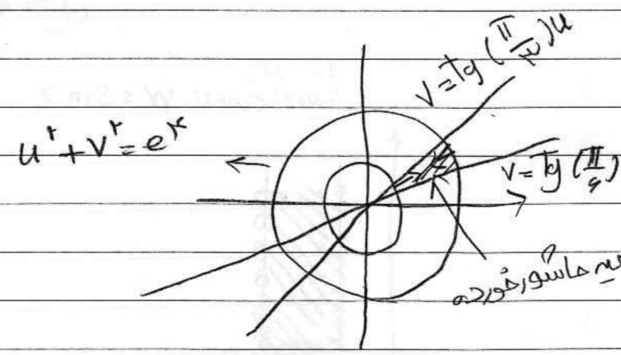
$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = e\cos y \\ v = e\sin y \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = e^2$$

$$x = 2 \longrightarrow u^2 + v^2 = e^4$$

$$y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} u = e^x \cos(\frac{\pi}{4}) \\ v = e^x \sin(\frac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow v = tg(\frac{\pi}{4})u$$

$$y = \frac{\pi}{3} \longrightarrow v = tg(\frac{\pi}{3})u$$

صفحه ۲۱۷ کتاب



$re^{i\theta}$

$|w| = e^{x}$ $\qquad e^{x} \times e^{iy}$

$\arg(w) = y$

$1 < x < ۲ \Rightarrow e < |w| < e^{۲}$

$\frac{\pi}{۶} < y < \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۶} < \arg w < \frac{\pi}{۳}$

$|w| = e$ دایره

$|z - z_0| = r$

معادله دایره به مرکز z_0 و شعاع r

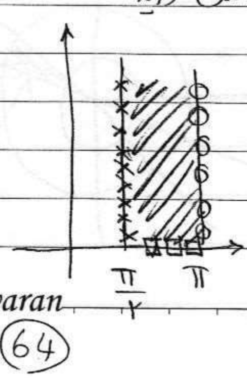
$|w - w_0| = r$

کامپیوتر ۸۲ $\qquad$ (۲۴۸) ← ۳۴

گزینه ۲ $\qquad$ موهومی ← Im

حقیقی ← Re

نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $w = \sin z$ بدست آورید.



$$u + iv = \sin(x + iy) = \sin x \,\mathrm{ch}\, y + i \cos x \,\mathrm{sh}\, y$$

$$\begin{cases} u = \underset{>0}{\sin x}\; \mathrm{ch}\, y > 0 \\ v = \underset{<0}{\cos x}\; \mathrm{sh}\, y > 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = \mathrm{ch}\, y \\ v = 0 \end{cases}$$

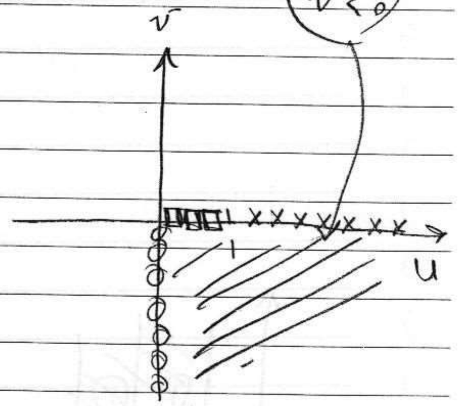
$$x = \pi \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = -\mathrm{sh}\, y \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \sin x \\ v = 0 \end{cases}$$

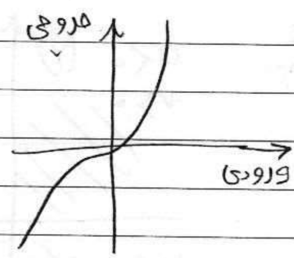
ربع چهارم

$u > 0$

$v < 0$



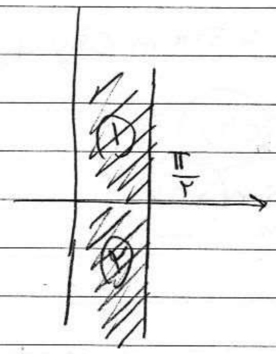
(یادآوری)



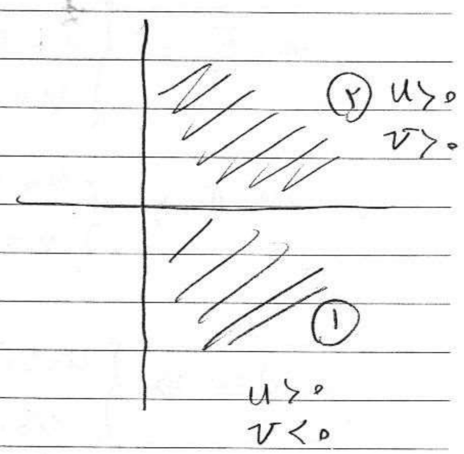
$\mathrm{Sh}\, x$

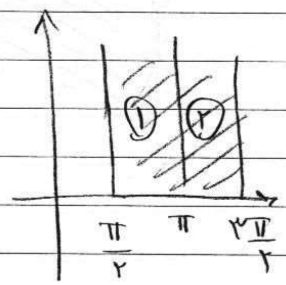
نیم نوارهای موازی محور yها که عرض شان یک ربع دایره مثلثاتی

ثابت chy همیشه مثبت shy به ۲ ناحیه تقسیم کنیم.

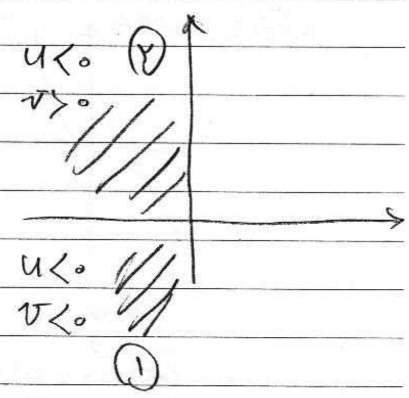


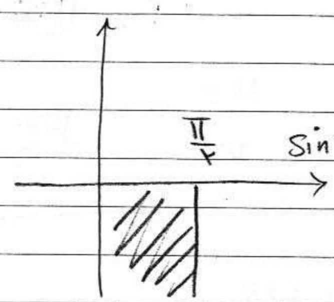
$$\cos z \quad \begin{cases} u = \cos x \, chy > 0 \\ v = -\sin x \, shy < 0 \end{cases}$$



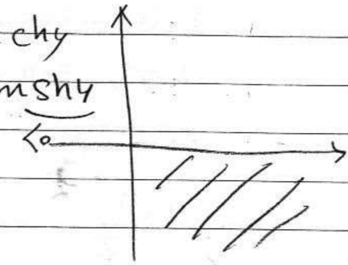


$\xrightarrow{\cos z}$





$$\sin z = \begin{cases} u = \sin x \, ch\, y \\ v = \cos x \, \underbrace{sh\, y}_{<0} \end{cases}$$



$u > 0$

$v < 0$

« جلسه جدید

$۲۱ \leftarrow ۲۳۴$

$$u + iv = ch(x+iy) = ch\, x \cos y + i\, sh\, x \sin y$$

$$\begin{cases} u = ch\, x \cos y \\ v = sh\, x \sin y \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} u = ch\, x \,\frac{\sqrt{2}}{2} \\ v = sh\, x \,\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

گزینه ۳

$$2u^2 - 2v^2 = 1$$

(۴۲۱) → (11)

$$\begin{cases} u = -\overset{<0}{\cos x}\,\overset{>0}{ch\, y} & u > 0 \\ v = \sin x\; sh\, y > 0 & v > 0 \end{cases}$$

ربع اول

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{w} \to x + iy = \frac{1}{u+iv} = \frac{u-iv}{u-iv}$$

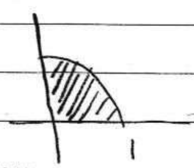
$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$$y = x^2 + 5x + 1 \to \boxed{\frac{-v}{u^2+v^2} = \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{5u}{u^2+v^2} + 1}$$

$$y = \sin x \Rightarrow \boxed{\frac{-v}{u^2+v^2} = \sin \frac{u}{u^2+v^2}}$$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, cis(-\theta)$$

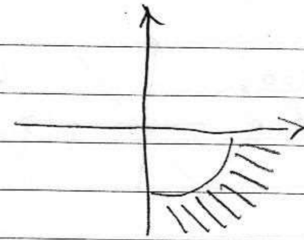
نکته: $\frac{1}{z}$ اندازه‌ها را وارون و فازها را قرینه می‌کند.



$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow$$

$|w| > 1$

$-\frac{\pi}{2} < \arg w < 0$

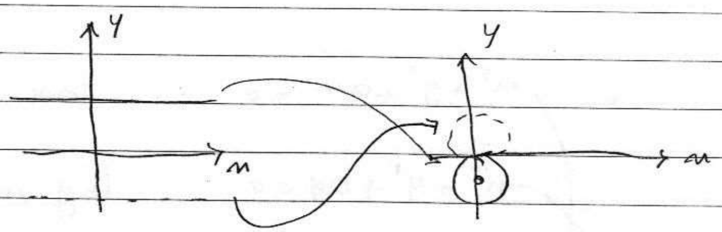


نگاشت منحنی $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ توسط $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید؟

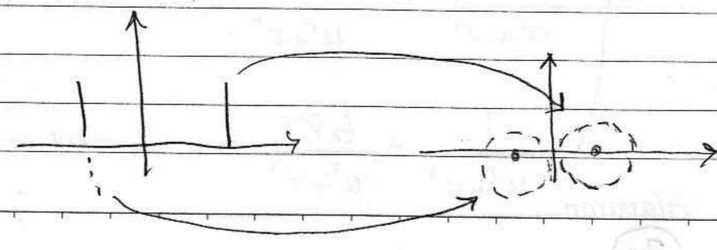
$$a\left(\frac{1}{u^2+v^2}\right)+\frac{bu}{u^2+v^2}-\frac{cv}{u^2+v^2}+d=0$$

$$d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

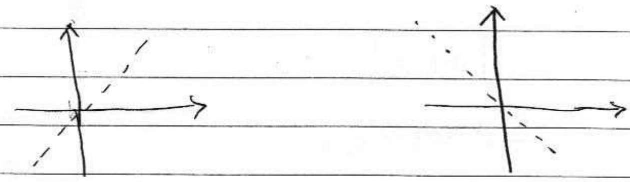
$a=0,\ b=0$



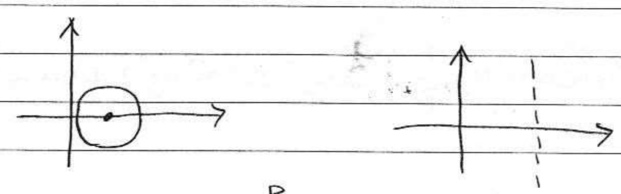
$a=0,\ c=0$

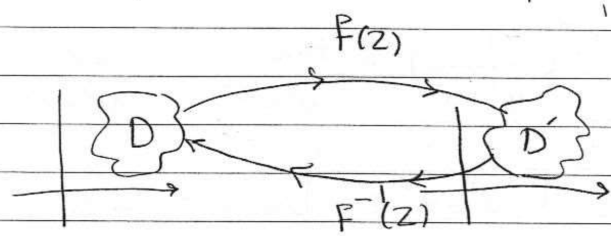


$a=0$,
$d=0$



$b=0$
$d=0$





نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $w = \frac{1}{z}$ را بدست آورید.

مثال ص ۲۱۲

$x^2+y^2+ax=0$ مرکز روی محور xها

$x^2+y^2+by=0$ مرکز روی محور yها

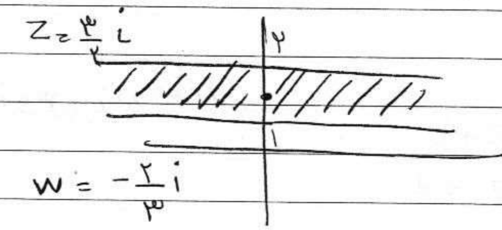
$$\frac{1}{u^2+v^2} = \frac{au}{u^2+v^2} = 0 \to au+1=0 \Rightarrow u = -\frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{u^2+v^2} = \frac{bv}{u^2+v^2} = 0 \to -bv+1=0 \Rightarrow v = \frac{1}{b}$$

سال ۸۵ ۲۱۳

$\boxed{۲۴}$ ← ۲۴۳

گزینه ۲) روش دوم جایگذاری



روش سوم $y = 1 \to \frac{-v}{u^2+v^2} = 1$ $\boxed{u^2+v^2+v=0}$

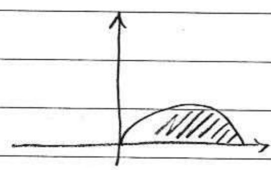
۲۲ ← ۲۴۳

$$\frac{-v}{\cancel{u^2+v^2}} = \frac{u^2}{(u^2+v^2)^{\cancel{2}}}$$

گرایش هوافضا ۸۳

۵۵ ← ۲۵۵

گزینه ۳



Subject: Date:

۶۷۲ ← ۲

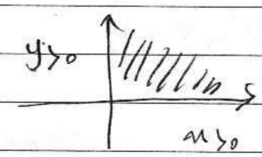
$$\frac{1}{u^2+v^2} - \frac{au}{u^2+v^2} = 0 \rightarrow 1 = au$$

گزینه ۲

نگاشت موبیوس (دو خطی)

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

مثال) نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $w = \frac{z-1}{z+1}$ بدست آورید.



$$wz + w = z - 1 \rightarrow z(w-1) = -1 - w$$

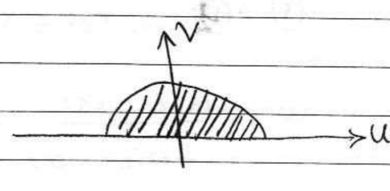
$$z = \frac{1+w}{1-w} \Rightarrow x + iy = \frac{1+u+iv}{1-u-iv} \times \frac{1-u+iv}{1-u+iv}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} \\ y = \dfrac{2v}{(1-u)^2+v^2} \end{cases}$$

کمتر است بجای معادلات مسیر شرط آن را بنویسیم.

$x>0 \Rightarrow 1-u^2-v^2>0 \rightarrow u^2+v^2<1$

$y>0 \Rightarrow v>0$



$$w=\frac{az+b}{cz+d} = \frac{z+\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}z+\frac{d}{a}}$$

A B C

$z_1 \longrightarrow w_1$

$z_2 \longrightarrow w_2$

$z_3 \longrightarrow w_3$

۲ ← ۲۳۹

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

$$-i = \frac{-a+b}{-c+d} \Rightarrow -a+b = ic-id \quad (1)$$

$$0 = \frac{ai+b}{ci+d} = ai+b=0 \Rightarrow b=-ai$$

$$i = \frac{a+b}{c+d} \longrightarrow a+b = ci + id \quad (۳)$$

$$(1)+(۲) \Rightarrow b = ic \Rightarrow c = -a$$

$$(۲)-(1) \rightarrow ۲a = ۲id \rightarrow d = -ai$$

$$w = \frac{az - ai}{-az - ai} = \frac{z-i}{z+i}$$

$$w = -\frac{z-i}{z+i} \Rightarrow wz + iw = -z + i$$

$$z(w+1) = -i - iw \Rightarrow z = i\,\frac{1-w}{1+w}$$

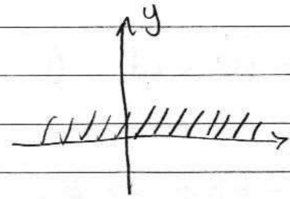
$$|z| < 1 \Rightarrow \left| i\,\frac{1-w}{1+w} \right| < 1 \Rightarrow |1-w|^۲ < |1+w|^۲$$

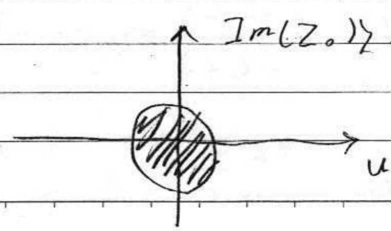
$$(1-u)^۲ + v^۲ < (1+u)^۲ + v^۲ \rightarrow -۲u < ۲u \rightarrow ۴u > ۰$$

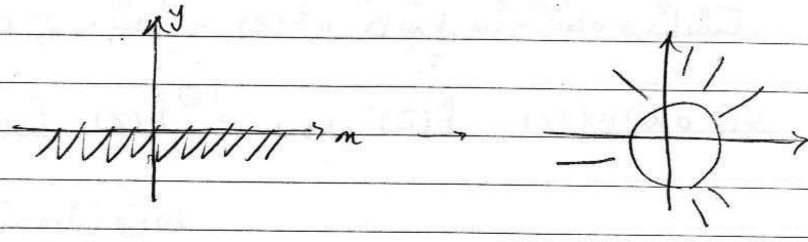
ص 223 کتاب

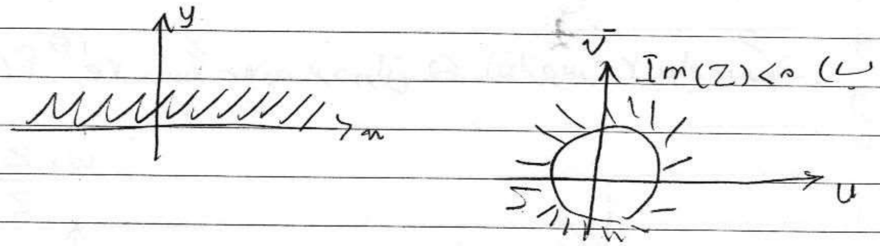
نگاشت $w = e^{i\theta}\,\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ اثر

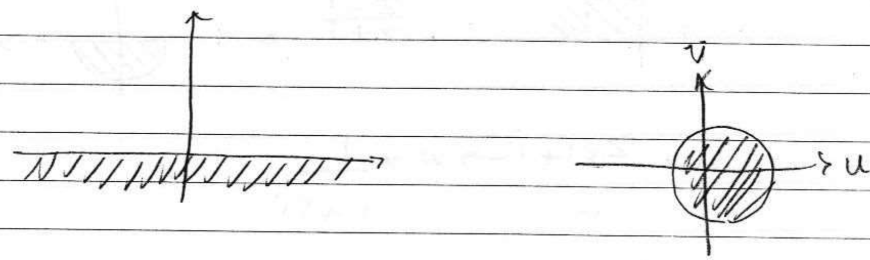
الف) $\operatorname{Im}(z_0) > ۰$

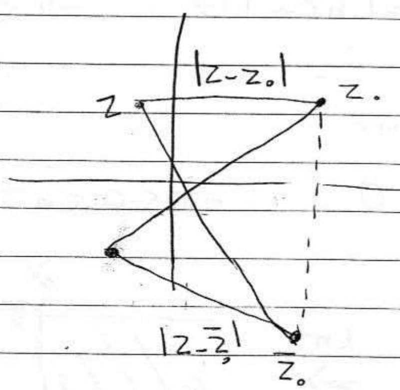












دوران

$$|w| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{1} \frac{|z-z_0|}{|z-\bar{z}_0|}$$

$|w|<1$

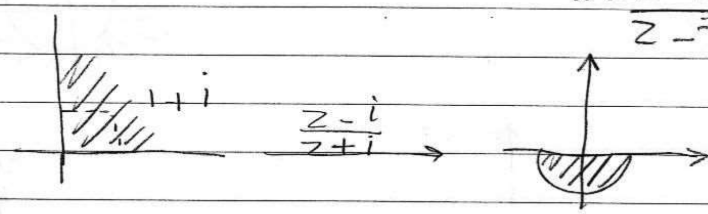
اگر ناحیه D توسط نگاشت f(z) به 'D تبدیل شود آنگاه در نگاشت

ناحیه D توسط $e^{i\theta} f(z)$ خروجی f(z) یعنی ('D) به اندازه θ در

جهت مثلثاتی دوران می‌کند

و اگر $re^{i\theta} f(z)$ باشد علاوه بر دوران به اندازه θ اندازه‌اش r برابر می‌شود

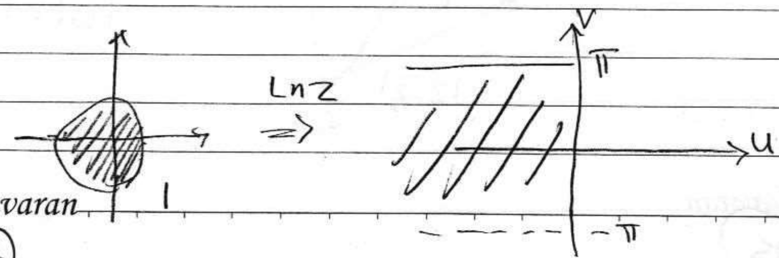
$$w = \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$$



$$z = 1+i \to w = \frac{1}{1+2i}$$

$$w = \ln z = \ln r + i\theta \qquad -\pi < \theta < \pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \qquad -\pi < \theta \leq \pi \end{cases}$$



$r < 1 \to \ln r < 0 \Rightarrow u < 0$

$-\pi < \theta \leqslant \pi \Rightarrow -\pi < v \leqslant \pi$

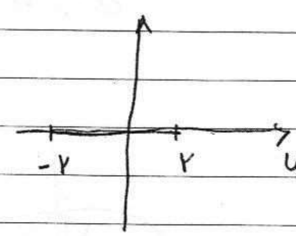
$w = z + \frac{1}{z} \Rightarrow u + iv = r\cos\theta + ir\sin\theta + \frac{1}{r}\cos\theta - \frac{1}{r} i\sin\theta$

$$\begin{cases} u = (r + \frac{1}{r})\cos\theta \\ v = (r - \frac{1}{r})\sin\theta \end{cases}$$

اگر: $r = a \,,\, a \neq 1 \rightarrow \begin{cases} u = (a + \frac{1}{a})\cos\theta \\ v = (a - \frac{1}{a})\sin\theta \end{cases} \rightarrow$

$\frac{u^2}{(a + \frac{1}{a})^2} = 1$ بیضی

$r = 1 \rightarrow \begin{cases} u = 2\cos\theta \\ v = 0 \end{cases}$



(۲۵۱ ← ۵۸

$$u+iv = r^k \operatorname{cis} k\theta + \frac{1}{r^k} \operatorname{cis}(-k\theta) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u = \left(r^k + \frac{1}{r^k}\right)\cos k\theta \\ v = \left(r^k + \frac{1}{r^k}\right)\sin k\theta \end{cases}$$

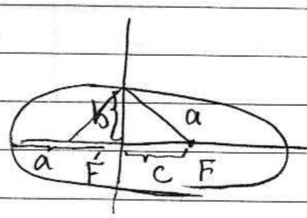
$$r=d \Rightarrow \begin{cases} u = \left(d^k + \frac{1}{d^k}\right)\cos k\theta \\ v = \left(d^k - \frac{1}{d^k}\right)\sin k\theta \end{cases}$$

$$\frac{u^{۲}}{\left(d^k + \frac{1}{d^k}\right)^{۲}} + \frac{v^{۲}}{\left(d^k - \frac{1}{d^k}\right)^{۲}} = 1$$ بیضی

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \Rightarrow d^{۲k} + \frac{1}{d^{۲k}} + ۲ = d^{۲k} + \frac{1}{d^{۲k}} - ۲ + c^{۲}$$

$$+c^{۲} = ۴$$

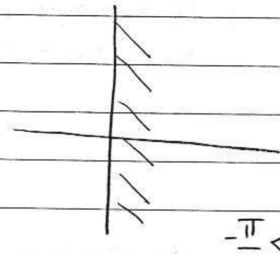
$$c = ۲$$



$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$

۲۴۸ ← ۴۳

تمرین ۴



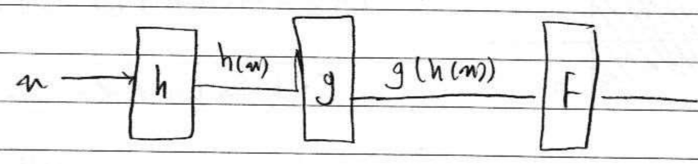
$u = Ln\, r$

$v = \Theta$

$-\frac{\pi}{2} < \Theta < \frac{\pi}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$

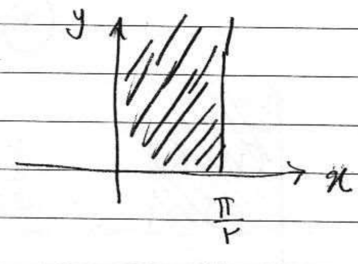
نگاشت‌های ترکیبی:

$f(g(h(x)))$



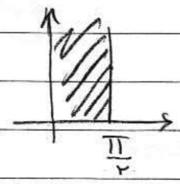
مثال

نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط تابع $w = \dfrac{Ln \sin^2 z - i}{\sin^2 z + i}$ بدست آورید.



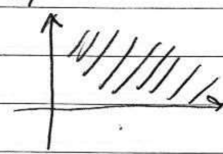
$z \to T = \sin z \ , \ S = T^2 \ , \ M = \dfrac{S - i}{S + i} \ , \ W = Ln\, M$

Subject: Date:

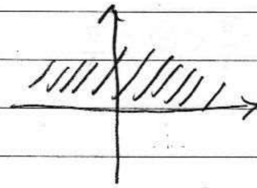


$\begin{cases} u = \sin x \operatorname{ch} y \\ v = \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$

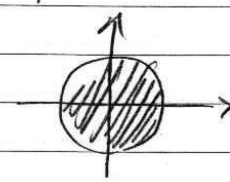
$\xrightarrow{\sin z}$



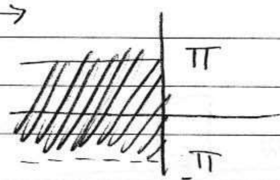
$\xrightarrow{z^2}$



$\xrightarrow{\frac{z-i}{z+i}}$



$\xrightarrow{\operatorname{Ln} M}$



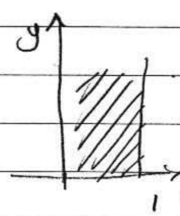
$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta \quad -\pi < \theta \leq \pi$

$r < 1 \to \operatorname{Ln} r < 0 \to u < 0$

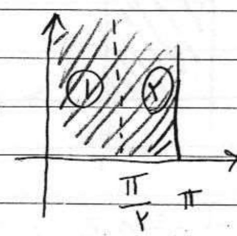
$-\pi < v \leq \pi$

$z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$ کلیات

۲۰ ← ۲۲۳



$\xrightarrow{\pi z}$

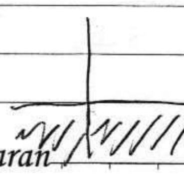


$u = \cos x \operatorname{ch} y > 0$

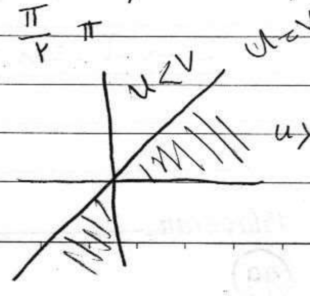
$v = \sin x \operatorname{sh} y < 0$

$\xrightarrow{\cos z}$

$\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$



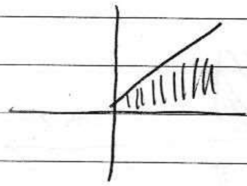
$\xrightarrow{(1+i) f(z)}$



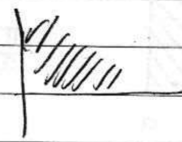
Pilavaran

(۹۰)

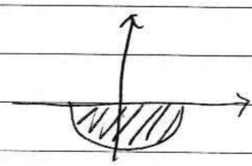
$\boxed{۲۳۴}$ ۲۳۹



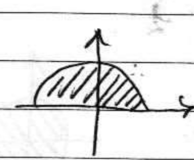
$\xrightarrow{r = z^{۳}}$



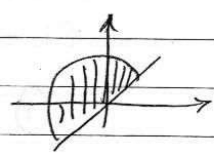
$\xrightarrow{s = \frac{r-j}{r+j}}$



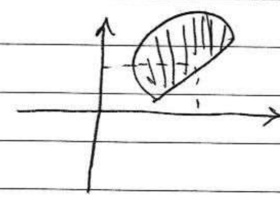
$\xrightarrow{M = -S}$



$\xrightarrow{N = e^{j\frac{\pi}{۲}} M}$



$\xrightarrow{N + ۲ + ۲j}$



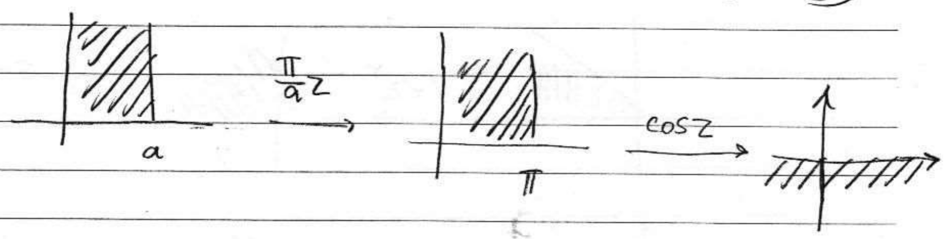
$$w = -e^{j\frac{\pi}{۲}} \frac{z^{۳} - j}{z^{۳} + j} + ۲ + ۲j$$

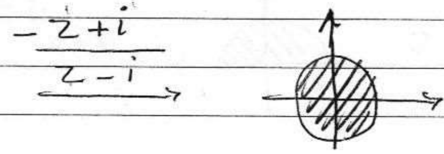
۱۰ ← ۲۴۰

$$e^{i\pi} \frac{-۲-۲j}{-۲+۲i} = e^{i\pi} \frac{۱+i}{۱-i} = \frac{(۱+i)^{۲}}{۲} = \underbrace{e^{i\pi}}_{-۱} i$$

$$f(z) = \frac{z^{۲} - ۲i}{-۲+۲i}$$

۳۶ ← $\boxed{۲۴۶}$ ۲۴۳

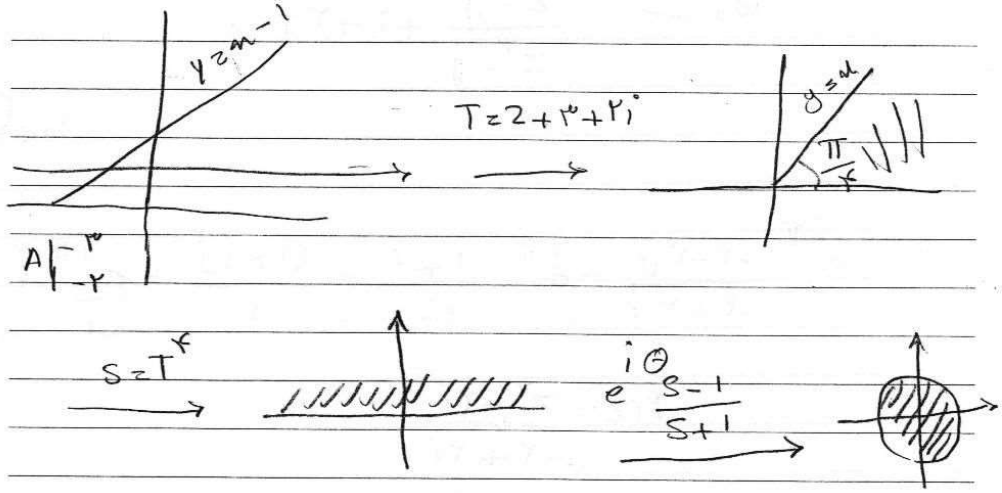




۴۱ ← ۲۴۹

گزینه ۲

۱۳ ← ۲۴۲ گرایش برق سال ۷۹



$$w = e^{i\theta}\frac{(z+3+2i)^4 - i}{(z+3+2i)^4 + i} = \frac{1}{-i}\,\frac{(z+3+2i)^4 - i}{-i(z+3+2i)^4 + 1}$$

$$e^{i(\cancel{\theta}+\frac{\pi}{2})} \quad -\frac{\pi}{2}$$

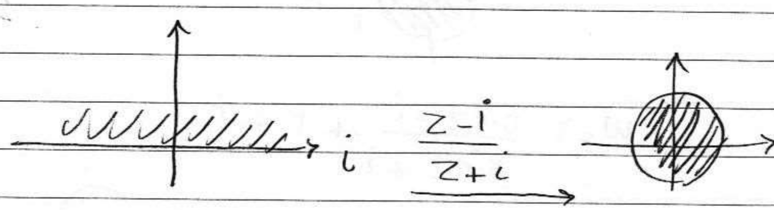
گرایش معدن ۸۳) نگاشت

نگاشت $w = \dfrac{e^z - i}{e^z + i}$

ناحیه $A=\{z=x+iy \;,\; 0<y<\pi\}$ را به کدام ناحیه از نواحی داده شده می‌نگارد.

$e^z \longrightarrow |w| = e^x$

$\arg w = y \qquad 0<\arg w<\pi$



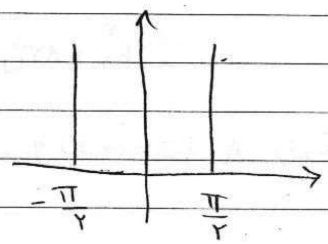
$|w|<1$

Subject: Date:

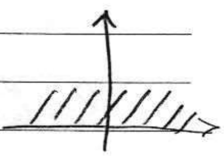
۶۶ ← ۲۵۳ ۲۳۷

برق ۸۷

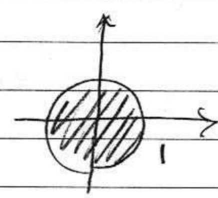
$$\frac{۲\sin z - ۲i}{\sin z + i}$$



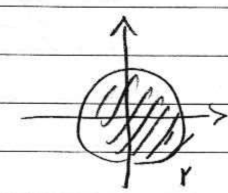
$\xrightarrow{\sin z}$ $\begin{cases} u = \sin x \, ch y \\ v = \cos x \, sh y \end{cases}$



$\frac{z - i}{z + i}$



$\xrightarrow{۲S}$



$$w = ۲\,\frac{\sin z - i}{\sin z + i} + ۲ + i$$

۶۷ ← ۲۵۲ مکانیک ۸۷

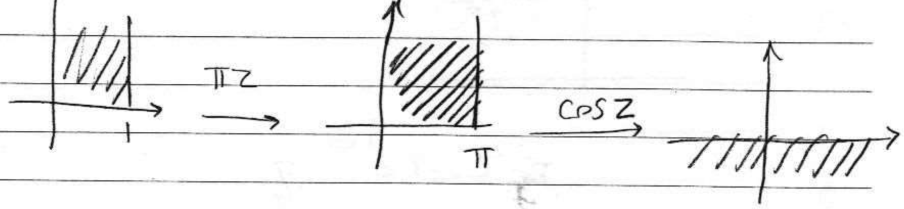
$$w = \frac{i}{z} \rightarrow z = \frac{i}{w}$$

$$\left|\frac{i}{w} - i\right| = ۱ \rightarrow |۱ - w| = |w|$$

$$(۱-u)^۲ + v^۲ = u^۲ + v^۲ \rightarrow ۱ - ۲u = ۰$$

$$u = \frac{۱}{۲}$$

برق ۸۸ — (۶۷۲) ← ۵



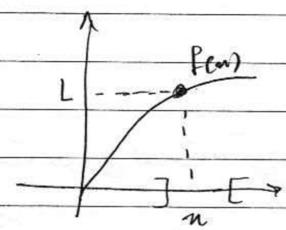
(۶۷۴) ← ۴

$$\frac{-v}{u^2+v^2} = \frac{u}{2(u^2+v^2)} \Rightarrow u + 2v = 0$$

حد توابع مختلط :

حد تابع حقیقی: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

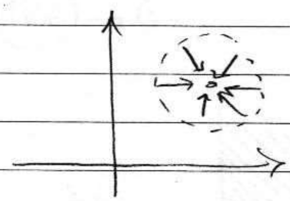
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



در همسایگی x_0 تمامی x وجود دارند

به اندازه دلخواه می‌توانیم $f(x)$ را به L

نزدیک نماییم.



$$z - z_0 = r e^{i\theta}$$

r را به سمت صفر میل میدهیم

مثال)

الف) حد $\dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{r\,cis\,\theta}{r\,cis(-\theta)} = cis\,2\theta \rightarrow$ حد ندارد

$z \to 0 \qquad r \to 0$

$\theta = 0 \longrightarrow 1$

$\theta = \frac{\pi}{4} \longrightarrow i$

$\theta = \frac{\pi}{8} \longrightarrow i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) حد $\dfrac{z^2}{\bar{z}} + 1 \qquad \dfrac{r^2 cis\,2\theta}{r\,cis(-\theta)} + 1 = r\,cis\,(3\theta) + 1 = 1$

$z \to 0 \qquad r \to 0$

مشتق:

نسبت تغییرات خروجی نسبت به تغییرات ورودی وقتی که $\Delta x \to 0$

حد $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Delta x \to 0$

Subject: Date: 60

جلسه جدید

قضیه ۱) اگر تابع $f(z)$ مشتق پذیر باشد آنگاه شرایط کشی ریمان در مورد آن برقرار است:

شرایط کشی ریمان در مختصات دکارتی $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

" " " قطبی $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$

اگر شرایط کشی ریمان برقرار باشد $f(z)$ مشتق پذیر می باشد

$$w = \bar{z} = x - iy \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1 \end{cases}$$

چون شرایط کشی ریمان برقرار نیست مشتق پذیر نیست.

ممکن است شرایط کشی ریمان در z برقرار باشد اما تابع در z مشتق نداشته باشد

$$w = x^2 + 2 + iy^3 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 \end{cases}$$

مثال) بررسی کنید $f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ در مبدأ مشتق ندارد اما در این نقطه

ص ۲۴۳

شرایط کشی ریمان برقرار است.

بررسی مشتق پذیری $\Rightarrow$

بررسی شرایط کشی ریمان
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = \dfrac{0}{0} = 0 \end{cases}$$