$w = x^2 + 2 + iy^3$ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 \end{cases}$

مثال) بررسی کنید $f(Z) = \begin{cases} \frac{(\bar{Z})^2}{Z} & Z \neq 0 \\ 0 & Z = 0 \end{cases}$ در مبدأ مشتق ندارد اما در این نقطه

ص ۲۶۳

شرایط کشی ریمان برقرار است.

$\Rightarrow$ بررسی مشتق پذیری

بررسی شرایط کشی ریمان $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = \frac{0}{0} = 0 \end{cases}$

مشتق:

قضیه ①: اگر تابع $f(z)$ مشتق پذیر باشد آنگاه شرایط کوشی ریمان برقرار است

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

* اگر شرایط کوشی ریمان برقرار نباشند $f(z)$ مشتق پذیر نمی باشد

$: \quad \bar{z} = x - iy \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$

مشتق پذیر نیست

$= x^2 + 2 + iy^3 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3y^2$

ممکن است شرایط کوشی ریمان در z_0 برقرار باشد اما تابع در z_0 مشتق ندارد

بررسی کنید مشتق ندارد اما کوشی ریمان برقرار است (در مبدا مشتق ندارد)

$$f'(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{(\bar{z})^2}{z} - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = \lim_{r \to 0} \left(\frac{r\,cis(-\theta)}{r\,cis(\theta)}\right)^2$$

$= cis(-4\theta)$ = وجود ندارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بررسی شرایط کوشی ریمان

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \dfrac{x}{x} = 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to 0} \dfrac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = \dfrac{0}{0} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x - 0} = \frac{0}{0} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \lim_{y \to 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y - 0} = \frac{y}{y} = 1$$

تضیح: در تابع $f(z) = u + iv$ اگر u و v پیوسته و دارای مشتقات جزئی باشند و همچنین شرایط کوشی ریمان در مورد u و v برقرار باشد آنگاه $f(z)$ مشتق پذیر است.

مثال: مشتق پذیری توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $w = e^{z}$

ب) $w = \overline{\sin z}$

ج) $w = |z|^2$

د) $w = x^2 + iy^2$

ه) $w = \operatorname{Ln} z$

الف => $u = e^{x}\cos y$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\sin y$

$v = e^{x}\sin y$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin y \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^{x}\cos y$

در تمام صفحه مشتق پذیر است.

ب => $\sin x\cosh y - i\cos x\sinh y \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos x\cosh y & \dfrac{\partial v}{\partial x} = \sin x\sinh y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin x\sinh y & \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\cos x\cosh y \end{cases}$$

$\cos x\cosh y = -\cos x\cosh y \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x\cosh y = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

$\Rightarrow x = (2k-1)\dfrac{\pi}{2}$

$\sin x\sinh y = -\sin x\sinh y \Rightarrow \sin x\sinh y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

$y = 0$

فقط در نقاط $y=0$ و $x=(2k-1)\dfrac{\pi}{2}$ مشتق دارد.

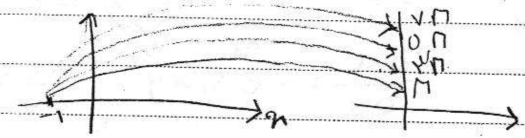
ج) $= |z|^2 = x^2+y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$

فقط در مبدأ مشتق دارد.

د) $w = x^2 + iy^2$ $\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y \end{cases}$

فقط روی خط $y = x$ مشتق دارد

ه) $w = \ln z$ $\quad \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \Rightarrow \ln(-1) =$
$= i(\pi + 2k\pi)$



$w = \ln r + i\theta$ $\quad \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta \quad -\pi < \theta \leq \pi$

$-\pi < \theta \leq \pi$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \end{array}\right. \quad \cancel{\begin{array}{c} -r \\ \dfrac{1}{r} \end{array}} \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial r} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial \theta} = 1 \end{array}\right.$$

تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی است اگر دو شرط زیر برقرار باشد.

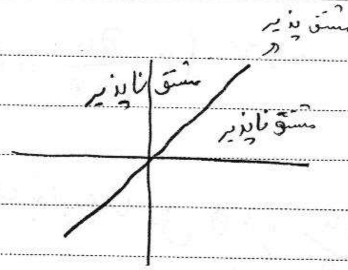
۱- $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر باشد.

۲- همسایگی حول z_0 با شعاع ε وجود داشته باشد که تابع $f(z)$ در تمام نقاط آن مشتق پذیر باشد.

* اگر $f(z)$ مشتق پذیر نباشد، تحلیلی هم نیست
$w = \bar{z} \Rightarrow$ مشتق پذیر نیست

* ممکن است تابعی در z_0 مشتق پذیر باشد اما در z_0 تحلیلی نباشد.
$w = |z|^2 \Rightarrow$ این تابع فقط در $z = 0$

$V \leftarrow$ (۲۹۹) (۲۶۶)



* اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه:

۱) u و v همساز هستند.

۲) v را مزدوج همساز u می نامند.
و برعکس (اگر ۱ و ۲ برقرار باشند $f(z)$ تحلیلی ا

تعریف تابع همساز: تابع $u(x,y)$ را همساز می گویند اگر در معادله لاپلاس صدق کند

دکارتی $u_{xx}+u_{yy}=0$

قطبی $\begin{cases} r^2u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=0 \\ u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \end{cases}$

مثال: بررسی کنید $u=e^x\cos y$ همساز است.
همساز است $u_{xx}=e^x\cos y$, $u_{yy}=-e^x\cos y \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$

* روش محاسبه مزدوج همساز:

$$dv=\overset{\frac{\partial u}{\partial x}}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}dy+\overset{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}}dx \Rightarrow v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int\left(\frac{du}{dy}\right)^{*}dx$$

با حذف توابع شامل y از $\frac{\partial u}{\partial y}$ بدست می آید.

$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

$dv = \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v}{\partial r} dr \Rightarrow v = \int r \frac{\partial u}{\partial r} d\theta - \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$

$r\frac{\partial u}{\partial r}$

با حذف توابع شامل θ از $\frac{\partial u}{\partial \theta}$

مثال: مزدوج همساز تابع $u = e^{x}\sin y + x^2 - y^2$ بدست آورید.

$v = \int e^{x}\sin y + 2x\,dy - \int (\cancel{e^{x}\cos y} - 2y)\,dx =$

$= -e^{x}\cos y + 2xy + c$

مثال: مزدوج همساز $u = r^2\cos 2\theta$ را بدست آورید.

$v = \int \left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) d\theta - \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) dr$

$v = \int (2r^2\cos 2\theta)\, d\theta - \int \frac{1}{r}\left(\cancel{-2\sin 2\theta \times r^2}\right) dr = r^2\sin 2\theta + c$

* اگر v مزدوج همساز u باشد آنگاه u نمی تواند مزدوج همساز v باشد مگر آنکه u و v ثابت باشند.

v مزدوج همساز u : $f(z) = u + iv =$ تحلیلی

u مزدوج همساز v $\rightarrow$ $g(z) = v + iu \Rightarrow$ تحلیلی

$g(z) = i(u - iv) = i\,\overline{f(z)}$

مشتق تابع تحلیلی :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}_{\,-\frac{\partial u}{\partial y}}$$

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}}\ **$$

$$\boxed{f'(z)=\frac{dv}{dy}+i\frac{dv}{dx}}\ **$$

مثال: اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $u=sh x\cos y$ آنگاه $f'(z)$ را بدست آورید.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=ch x\cos y+i\,sh x\sin y$$

$$f'(z)=ch z$$

* اگر $f(z)$ تحلیلی باشد و برحسب x و y داده شده باشد برای آنکه آن را برحسب z بنویسیم کافی است $y=0$ و $x=z$ قرار دهیم.

$$f(z)=f(x+iy)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}$$

$$\cancel{f(z)=x^2-y+iy^3\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}\Longrightarrow f(z)=z^2}$$

$$\cancel{f(z)=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\,\cancel{\frac{\partial v}{\partial r}}\right)e^{-i\theta}$$

$$\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$\boxed{f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}-i\,\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-i\theta}} \quad *$$

$x+iy$

$z\cos z$

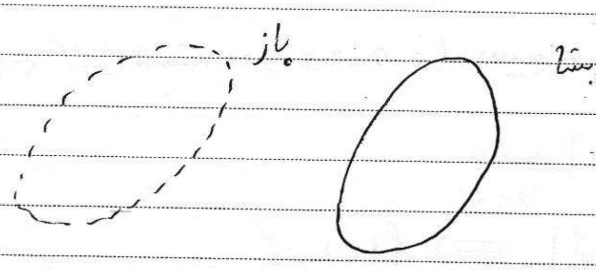
$$\boxed{f'(z)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}} \quad **$$

مثال: اگر $u = x\,ch y \cos x + y \sin x\, sh y$ آنگاه تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را بیابید.

$$f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=ch y\cos x - x\,ch y \sin x + y\cos x\, sh y$$ آوریم

$$-i\left(x\,sh y\cos x+\sin x\, sh y+y\sin x\, ch y\right)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}$$

$$f'(z)=\cos z - z\sin z \Rightarrow f(z)=\sin z+z\cos z-\sin z=z\cos z+c$$



جمع بندی:

① اگر $f(z)$ روی ناحیه باز مشتق پذیر باشد تحلیلی هم است.

② اگر تابعی در تمام صفحه مختلط تحلیلی باشد می‌گوییم تابع تام است.

③ توابع $\sin z$ ، $\cos z$ ، e^{z} ، $sh z$ ، $ch z$ و چند جمله‌ای‌ها $(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots)$ تام هستند.

④ مجموع، حاصلضرب، و تفریق و ترکیب چند تابع تحلیلی یک تابع تحلیلی است.

$$f(z)=z^2\sin^2(e^z)+\cos^4(\sin(z^2+1))-\cos z$$

⑤ اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند آنگاه تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ فقط در ریشه‌های $g(z)$ تحلیلی نمی‌باشد.

$$w=\frac{z^2\cos z+1}{(z^2-1)\sin z}\qquad z^2-1=0\rightarrow z=\mp 1$$
$$\sin z=0\rightarrow z=k\pi$$

بجز $z=\pm 1$ و $z=k\pi$ در سایر نقاط تحلیلی است.

⑥ اگر $f(z)$ تحلیلی و غیرثابت باشد آنگاه $\overline{f(z)}$ غیرتحلیلی است.

$f(z)=u+iv$ * تابع ثابت همواره تحلیلی است.

$\overline{f(z)}=u-iv$

$w=\bar z$

$w=\overline{\sin z}$ و $w=\overline{\cos z}$

غیرتحلیلی

⑦ اگر $f(z)$ تحلیلی و $f(x)$ حقیقی باشد آنگاه

$$\overline{f(z)}=f(\bar z)$$

$\overline{\sin z}=\sin\bar z$

$\overline{iz^2}\neq i(\bar z)^2$ چون i حقیقی نمی‌باشد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۷) اگر $f(z)$ تحلیلی و $f(x)$ موهومی باشد آنگاه

$\overline{f(z)} = -f(\bar{z})$

$\overline{iz^2} = -i(\bar{z})^2$

$f(z) = \cos z + iz$

$\overline{f(z)} = \cos \bar{z} - i\bar{z}$

$\overline{\ln z} \neq \ln \bar{z}$ تحلیلی نیست

(۸) اگر تابع حقیقی خالص یا موهومی خالص باشد تحلیلی نمی باشد (بجز تابع ثابت)

$w = |z|^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow$ تحلیلی نمی باشد

$w = ix^2 y^3 \longrightarrow$ تحلیلی نمی باشد

(۹) مجموع و حاصلضرب و ترکیب یک تابع تحلیلی و غیر تحلیلی همواره غیر تحلیلی است.

$w = \bar{z} + \cos z \longrightarrow$ غیر تحلیلی

$w = \bar{z} \sin z + e^{z} \rightarrow$ "

$w = \sin(e^{\bar{z}}) \rightarrow$ "

(۱۰) تابع تحلیلی نمی تواند شامل $\bar{z}$ باشد.

$f(z) = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

PAPCO

z و $\frac{1}{z}$ $\qquad z \times \frac{1}{z} \neq 1$

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}_{z=0}$$

(11) مجموع و حاصل ضرب و ترکیب، تفاضل دو تابع غیر تحلیلی ممکن است تحلیلی باشد یا غیر تحلیلی.

$f(z) = \bar{z} - 2z + \cos z$ $\qquad$ تحلیلی $f(z) + g(z)$

$g(z) = \sin z - \bar{z}$ $\qquad$ غیرتحلیلی $f(z) + h(z)$

$h(z) = 3\bar{z} - e^{z}$

(12) تابع $f(z)$ نمی تواند فقط روی یک منحنی یا در تعداد نقاط مجزا تحلیلی باشد.

$f(z) = x^2y + iy\cos x$

$2xy = \cos x \Rightarrow$ غیر تحلیلی است $\Leftarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(13) اگر تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد آنگاه تابع $f(z) = v + iu$ حتماً غیر تحلیلی است (بجز آنکه u و v ثابت باشند)

$\theta^2 = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2) \longrightarrow$ غیرتحلیلی

(V مزدوج همساز باشد آنگاه u نمی تواند مزدوج همساز v باشد)

$g(z) = i(u - iv)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۱۴) اگر از روشهای فوق موفق با بررسی تحلیلی بودن تابع نشدیم از شرایط کوشی ریمان و قضایای گفته شده استفاده می کنیم.

(۱۵) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه دسته منحنی های $u(x,y)=c_1$ و $v(x,y)=c_2$ متعامد هستند. با عبارت دیگری برای محاسبهٔ مسیرهای قائم دسته منحنی $u(x,y)=c_1$ کافی است مزدوج همسازآن را بدست آوریم.

(۱۶) توابع $\ln(f(z))$ و $(f(z))^{\frac{1}{n}}$ در ریشه‌های $f(z)$ و یک شاخه تحلیلی نمی باشند.

* برای جواب اصلی $\ln(f(z))$ ناحیه غیر تحلیلی بصورت زیر است

$$\begin{cases} Im(f(z))=0 \\ Re(f(z))<0 \end{cases}$$

گرایش برق ۸۲

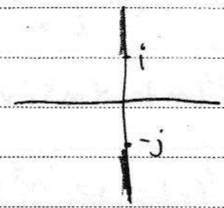
(۲۹۰) (۴۰۰) ← ۱۱

$f(z)=1+z^2=1+x^2-y^2+2ixy$

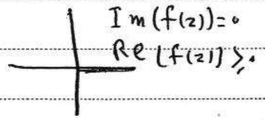
$Re(f(z))=1+x^2-y^2$

$Im(f(z)=2xy \longrightarrow Im(f(z))=0 \rightarrow 2xy=0$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow 1-y^2 \le 0 \Rightarrow |y| \ge 1 \\ y=0 \Rightarrow 1+x^2 \le 0 = \times \end{cases}$$



$$Re(f(z)) \le 0 \Rightarrow 1+x^2-y^2 \le 0$$



$0<\theta\le 2\pi \rightarrow$ ناکل $\Rightarrow \theta=0$

$\frac{\pi}{2}<\theta\le \frac{5\pi}{2}$ ناکل $\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

برق ۷۵
(۲۸۲)

$$V=\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*}dx$$

$$V=\int(2x-2)\,dy-0 \rightarrow 2xy-2y=C$$

(۲۸۹) برق ۷۳

(۲۹۸) ← ۵ توضیحات صفحهٔ بعد

$\sin^2 z=0 \rightarrow z=k\pi$ $z=0$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}-\frac{1}{2}}{z}=\frac{1-\cos z-2\sin^2 z}{2z\,\cancel{\sin^2 z}\,z^2}=\frac{\sin z-4\sin z\cos z}{6z^2}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-4\cos z}{6z}=\frac{4\sin z}{6}=0$$

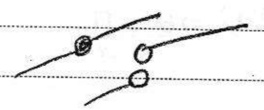
Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$f(x)\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

× ① $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \Rightarrow f'(0)=-\cancel{\cos\infty}=$ وجود ندارد

✓ ② $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$



$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}$$

$$\to \frac{2}{x^2}-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2}=0$$

$$\to \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-\cancel{\sin^2 x}}{\underbrace{\cancel{\sin^2 x}}_{x^2}\underbrace{(\cancel{1-\cos x})}_{\frac{1}{2}x^2}}=\frac{2\sin x-2x}{2x^3}=\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{\ }$$

$$\frac{\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cancel{1-\cos x}}}{x^2}=$$

$$\to \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-\sin^2 x}{\underbrace{\cancel{\sin^2 x}}_{x^2}\underbrace{(\cancel{1-\cos x})}_{\frac{1}{2}x^2}}=\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{2x^3}=$$

$$\to \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x\underbrace{(1-\cancel{\cos x})}_{\frac{1}{2}x^2}}=\frac{\overbrace{(x-\cancel{\sin x})}^{\frac{1}{6}x^3}\overbrace{(\cancel{x+\sin x})}^{2x}}{\frac{1}{2}x^4}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \sim$ بزرگترین توان

PAPCO

(۱۰۵)

$\lim_{x\to 0} f(x)$ <
$a \neq 0$ همارزی وجود ندارد
$a = 0$ هم ارز کوچکترین توان

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ $\quad \lim_{x\to 0} \sin x \sim x$

$x - \sin x \sim \frac{1}{6} x^3$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ × $\quad \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2} x^2$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ × $\quad e^x - 1 \sim x$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$ $\quad \ln(1+x) \sim x$

$\ln(1+x) - x \sim -\frac{1}{2} x^2$

$\mathrm{tg}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots$ $\quad \mathrm{tg}^{-1} x \sim x$

$\mathrm{tg}^{-1} x - x \sim -\frac{1}{3} x^3$

$\mathrm{tg}\, x = x + \frac{1}{3} x^3 + \cdots$ $\quad \mathrm{tg}\, x \sim x$

$\mathrm{tg}\, x - x \sim \frac{1}{3} x^3$

۴۲ ← ۳۰۶
هوافضا

مکانیک ۸۲
۲۹ ← ۳۰۳ ۲۷۸

$v = \int (2x+2)\, dy - \int_0 = 2xy + 2y$

$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}}$

$= z^2 + 2z$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مکانیک ۸۰

(۲۶۷) (۳۰۲) ← ۲۵

تحلیلی نیست ← $-2x=2y$

(۳۰۴) ← (۳۷)

برق ۸۴

(۳۰۰) ← ۱۳

$xy>0 \Rightarrow f(z)=x^2-y^2+2ixy$

$xy<0 \Rightarrow f(z)=x^2-y^2-2ixy$ ×

مکانیک ۷۹

(۳۰۲) ۲۴

$v=\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*}dx$

$v=\int(-6xy)\,dy-\int(-3x^2)\,dx$

$v=-3xy^2+x^3+c$

مکانیک ۷۶

(۲۷۵) (۳۰۱) ← ۲۲

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

$f'(z)=6-2y+i2x\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}=6+2iz$

$f(z)=6z+iz^2+c$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مکانیک ۸۰

۲۸۰ ۳۰۲ ← ۲۶

$$v=\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*}dx$$

$$v=\int\frac{2x}{x^2+y^2}dy-\int 0=2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$u=2\ln r \Longrightarrow v=2\theta \longrightarrow$ گزینهٔ ۳

۲۸۰

مسابقهٔ ریاضی فرهنگستان علوم

* مزدوج همساز u را بدست آورید

* $f(z)=u+iv$ تحلیلی و $u=$ --- آنگاه v را بدست آورید

$f(z)$ را بدست آورید

$$u=\frac{r\cos\theta}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$v=\int\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\theta-\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^{*}dr$$

$$v=-\int\left(r\frac{\cos\theta}{r^2}\right)d\theta-\int\frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{-\sin\theta}{r}}\right)^{*}dr=\frac{-\sin\theta}{r}$$

$$v=\frac{-r\sin\theta}{r^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲۷۱ ۲۹۹ ← ۱۰

$V = \int (2^x \ln 2 \cos(y \ln 2))\,dy - 0 = 2^x \sin(y \ln 2) + c$

$f(z) = 2^x \cos(y \ln 2) + i\,2^x \sin y(\ln 2) + ic \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}}$

$f(z) = 2^z + ic$

۲۷۴ ۳۰۳ ← ۳۱

$u_{xx} = 2\alpha y$

$u_{yy} = -4y$

$(2\alpha - 4)$

برق ۸۳

۳۰۰ ← ۱۲

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \dfrac{1}{4}(u_{xx} + u_{yy})$

معادله لاپلاس $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \bar{z}} = 0$

۲۶۹ برق ۸۵

۳۰۰ ← ۱۴

$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$= 1 + e^x \cos y + i e^x \sin y$

$f'(1)\Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 1 + e$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$
۵۴ ← ۳۰۶ ۲۶۹

برق ۸۷

۴۳ ← ۳۰۸ ← ۲۶۲

$$\frac{(x-iy)^3}{(x+iy)^2} \begin{cases} x=0: & \frac{iy^3}{-y^2} = -iy \\ y=0: & x \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0} = 1 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0} = -1$$

۴ ← ۳۰۸ ۲۸۱

$$du = \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial x}dx$$
مکانیک ۸۷

$$u = -\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \int\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx$$

$$0 + \int\frac{2y}{x^2+y^2}dx = 2\tan^{-1}\frac{x}{y} + c$$

$$u_{xx} = 6ax$$
$$4xx + 4by = 0 \rightarrow a=0,\ b=0$$
۴۷ ← ۳۰۹
ابزار دقیق ۸۷

$$u_{yy} = 6by$$

$$u = 0$$

۲ ← ۶۷۲ مکانیک ۸۱

$$v(x,y) = \int(4x(x^2-y^2+1) - 8xy^2)dy - \int_0$$

$$v(x,y) = 4x^3y - \frac{4}{3}xy^3 + 4xy - \frac{8}{3}xy^3 + c$$

$$v(0,0) = c \rightarrow c = 0$$

PAPCO

 $v(1,1) = 4 - \frac{4}{3} + 4 - \frac{8}{3} = 4$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* راه حل کتاب چک شود

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

ابزار دقیق ۸۸ + ۹ ← ۶۷۷

$$=>2y\,e^{x^2-y^2}\cos(2xy)+i2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy)-2ixe^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$

$$f'(z)=-2ize^{z^2}=>f(z)=-ie^{z^2}$$

$x=z$
$y=0$

قضیه اصل ماکزیمم: اگر تابع $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد آنگاه ماکزیمم خود را در مرز D انتخاب می کند نه در داخل آن.

* اگر $f(z)$ تام باشد حتماً بی کران است مگر آنکه ثابت باشد.

* اگر $f(z)$ تام و کراندار باشد آنگاه $f(z)$ ثابت است.

برق ۷۳

۲۹۲ ← ۲۹۹ ← ۶

$$f''(z)=\text{مقدار ثابت}=A \quad => f'(z)=Az+B$$

$$f(z)=\frac{A}{2}z^2+Bz+c \qquad f''(z)=2A_1$$

A_1

$$|2A_1|<c\rightarrow|A_1|<\frac{c}{2}$$

برق ۸۵

۲۹۳ ۲۰۰ ← ۱۵

$$|\sin z|^2=\sin^2x+sh^2y$$

$$|\sin z|^2=(\sin x\,ch y)^2+(\cos x\,sh y)^2$$

PAPCO

Subject:
Date: No.

کنکور ۸۸ (۶۷۲) ← ۳

$$z^4+1=0 \rightarrow z=(-1)^{\frac{1}{4}}=(1)^{\frac{1}{4}}\operatorname{cis}\frac{2k\pi+\pi}{4}$$

$$k=0 \rightarrow \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\mp i)$$

$$k=1 \rightarrow \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\mp i)$$

$$|\sin z|^2=\sin^2 z+\operatorname{sh}^2 y=\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{sh}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

نقطه تکین: نقطه z_0 را نقطه تکین تابع $f(z)$ می‌نامند اگر دو شرط زیر را دارا باشد.

۱- $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی نباشد.

۲- در همسایگی z_0 به شعاع ε نقاطی وجود داشته باشند که $f(z)$ در آن‌ها تحلیلی باشد.

تعریف نقطه تکین منفرد (تنها): نقطه z_0 را نقطه تکین منفرد تابع $f(z)$ می‌نامند اگر دو شرط زیر را دارا باشند.

۱- $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد.

۲- در همسایگی z_0 به شعاع ε در تمام نقاط تحلیلی باشد.

نقطه تکینی که تنها نباشد را نقطه تکین غیرتنها می‌باشد.

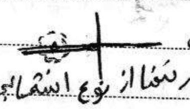
Subject:
Date: No:

مثال: در توابع زیر نقاط تکین را بدست آورید و نوع آنها را مشخص کنید.

الف) $f(z) = \frac{1}{z} \longrightarrow z=0$ $z=0$ نقطه تکین منفرد

ب) $f(z) = \sin z \longrightarrow z=0$ $z=0$ نقطه تکین منفرد

ج) $f(z) = \operatorname{Ln} z \rightarrow$

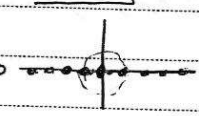


$z=0$ و همه نقاط روی سمت منفی محور حقیقی تکین غیر تنها از نوع انشعابی هستند.

د) $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ $z=0$

$\sin(\frac{1}{z}) = 0 \quad \frac{1}{z} = k\pi \rightarrow z = \frac{1}{k\pi}$

ه) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}-1}$



$z=0$ نقطه تکین غیر تنها از نوع انباشتگی است

نقاط تکین منفرد

$\frac{1}{(n+1)\pi} \quad \frac{1}{n\pi} \quad \frac{1}{(n-1)\pi}$

و) $f(z) = |z|^2$

نقطه تکین ندارد

ز) $f(z) = \frac{z}{z}$

$z=0$ تکین منفرد

ه) $\left(\frac{1}{z-1}\right) \Rightarrow$ فقط در $z=1$ غیر تحلیلی

نقطه تکین ندارد

$\left(\frac{1}{\overline{z-1}}\right) \Rightarrow$ در همه جا غیر تحلیلی

$\frac{1}{\sin z}$

جمع بندی: ① اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند آنگاه تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ در ریشه‌های

$g(z)$ همواره تکین منفرد می باشد

Subject:
Date: No:

$W = \dfrac{z^2 e z}{(z^2-1)\cos z}$ $z^2-1=0 \quad z=\mp 1$

تکین منفرد = $\cos z = 0 \longrightarrow z = (2k-1)\dfrac{\pi}{2}$

۲ در تابع $\ln(f(z))$ و $(f(z))^{\frac{1}{n}}$ نقاط غیر تحلیلی از نوع تکین غیر تنها (انشعابی) می‌باشد.

۳ در توابع $\dfrac{1}{\sin f(z)}$ و $tg(f(z))$ و $\dfrac{1}{\cos f(z)}$ و $\dfrac{1}{\operatorname{sh} f(z)}$ و $\dfrac{1}{\operatorname{ch} f(z)}$ و $\cot f(z)$ و $\operatorname{tgh}(f(z))$ و $\coth(f(z))$ نقاط تکین منفرد $f(z)$ همگی از نوع تکین انباشتی می‌باشند.

$\dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2-1}\right)}$ $z=\mp 1$

۴ اگر $f(z)$ در یک ناحیه غیر تحلیلی باشد در آن ناحیه نقطه تکین ندارد.

بسط تیلر: اگر تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد آنگاه می‌توان $f(z)$ را برحسب سری توانی $z-z_0$ مطابق زیر بسط داد:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \quad a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

تذکر: بسط فوق را مک لورن می‌گویند

بسط لوران: اگر $f(z)$ در همسایگی z_0 تحلیلی باشد آنگاه $f(z)$ را می‌توان

حول z_0 با سری توانی $z-z_0$ مطابق زیر بسط داد.

بسط لوران را فقط حول نقاط تحلیلی و در تکین منفرد می‌توان نوشت.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{جملات اصلی بسط لوران (قسمت اصلی بسط لوران)}}$$

بسط لوران $f(z)=\dfrac{1}{z^3\sin(\frac{1}{z})}$ حول $z=0$ را بدست آورید. ×

بسط لوران $Ln\,z$ حول $z=0$ بدست آورید. ×

روش محاسبه بسط لوران حول z_0

۱- $z-z_0=t$ در نظر می‌گیریم تا بسط با حول $t=0$ تبدیل شود.

۲- اگر تابع شامل عبارتهای $\sin z$ و $\cos z$ و e^{z} و $e^{z^{-1}}$ و $Ln(1+z)$ و .....

مثلثاتی - لگاریتمی - نمایی - هایپربولیکی باشد از بسط های لوران آنها استفاده

می‌کنیم.

۳- اگر توابع کسری چند جمله‌ای داشته باشیم سعی می‌کنیم آنها را تفکیک به

کسرهای جزئی نموده و از قواعد هندسی استفاده می‌کنیم.

مثال: بسط لوران در ناحیه $|z-z_0|<r$ = بسط لوران حول z_0

مثال بسط لوران $f(z)=\dfrac{\ln(z)\sin z \; tg^{-1}z}{z^2(z-1)^3}$ در ناحیه $|z-1|<1$ بدست آورید.

$$z-1=t \Rightarrow z=t+1 \Rightarrow f_1(t)=\frac{\ln(t+1)\sin(t+1)\; tg^{-1}t}{t^3\,(t+1)^2} \quad |t|<1$$

$$=\frac{1}{t^3}\times\underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{f_2}\times\underbrace{\ln(t+1)}_{f_3}\times\underbrace{tg^{-1}t}_{f_4}\times\underbrace{\sin(t+1)}_{f_5}$$

$$\frac{a_0}{1-q}\overset{|q|<1}{=} a_0+a_0q+a_0q^2$$

$$\frac{1}{1-z}\overset{|z|<1}{=}1+z+z^2+z^3+\dots$$

$$\frac{1}{1+z^2}\overset{|z|<1}{=}1-z^2+z^4-z^6+z^8\dots$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1+z^k}\overset{|z|<1}{=}1-z^k+z^{2k}-z^{3k}+\dots$$

$$*)\quad \frac{1}{1+t}\overset{|t|<1}{=}1-t+t^2-t^3+t^4\dots$$

مشتق از: $\dfrac{-1}{(1+t)^2}=-1+2t-3t^2+4t^3\dots \Rightarrow \underbrace{\dfrac{1}{(1+t)^2}=1-2t+3t^2-4t^3+\dots}_{f_2}$

Subject:
Date: No:

انتگرال از: $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots$: f_3

$y=tg^{-1}t \to y'=\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots \xRightarrow{\text{انتگرال}}$

$\Rightarrow y=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\cdots$

$\boxed{tg^{-1}t=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\cdots}$: f_4

$\sin(t+1)=\sin t\cos 1+\cos t\sin 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(t-\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)\cos 1+\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}\cdots\right)\sin 1$

$f_t=\frac{1}{t^3}+f_2+f_3+f_4+f_5 \to \boxed{t=z-1}$

$$\boxed{\sin\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}-\frac{1}{3!t^3}+\frac{1}{5!t^5}\cdots}$$

مثال ۲: بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ در نواحی داده شده بدست آورید.

الف) $|z|<1$ ب) $1<|z|<2$ ج) $|z|>2$

الف) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\underbrace{\frac{-1}{z-1}}_{f_1}+\underbrace{\frac{1}{z-2}}_{f_2} \Rightarrow$

Subject: Date: No:

$$\frac{1}{1-z} \overset{|z|<1}{=} 1+z+z^2+z^3 \dots$$

$$f_2 = \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \overset{|\frac{z}{2}|<1}{=} -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3\right.$$

$$f = f_1 + f_2$$

ب) $1<|z|<2 \to f_1: \frac{1}{1-z} \overset{|z|>1 \Rightarrow |\frac{1}{z}|<1}{=} -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$

$$= -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\dots\right)$$

$f_2 = |z|<2 \longrightarrow |\frac{z}{2}|<1 \quad = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \overset{|\frac{z}{2}|<1}{=} -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\dots\right)$

$f = f_1 + f_2$

ج) $|z|>2 \quad |\frac{1}{z}|<\frac{1}{2}$

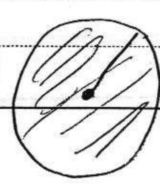
$f_1: \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \overset{|\frac{1}{z}|<1}{=} -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\frac{1}{z^3}+\dots\right)$

$f_2: |\frac{1}{z}|<\frac{1}{2} \to |\frac{2}{z}|<1 \to \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right) \overset{|\frac{2}{z}|<1}{=} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\left(\frac{2}{z}\right)^3+\dots\right)$

۱)  $r<1$

az

۲)  $r<2$ $\frac{a}{z}$ ۳)  $r>2$

Subject:
Date: . . No:

کامپیوتر ۸۴
۳۲۷ ۴۰ ۳۶۴ ← ۴۱

$$\overbrace{\frac{1}{z+1}}^{f_1} + \overbrace{\frac{-1}{z+3}}^{f_2} =$$

$$= \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

$$\frac{-1}{z+3} = \frac{-1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 - \left(\frac{z}{3}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$$

برق ۷۹
۳۲۸ → ۱۱

$$z-(1+i) = t \longrightarrow f_1(t) = \frac{1}{4-3(t+1+i)} = \frac{1}{1-3i-3t}$$

$$\frac{1}{1-3i}\,\frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}t} =$$

$$\left|\frac{3}{1-3i}t\right| < 1 \longrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}}|t| < 1 \longrightarrow |t| < \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\frac{1}{1-3i}\left(1 + \frac{3}{1-3i}t + \frac{3^2}{(1-3i)^2}t^2 + \cdots\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underline{3^n t^n}$$

Subject:
Date: . . No:

مکانیک ۲ ۷۲

۳۲۹ ← ۲۲

$z-1=t \rightarrow z=1+t$

$f(t)=\frac{1}{t^2+2t}=\frac{1}{t(t+2)}$

$\frac{1}{t}\ \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{t}}\right)=\frac{1}{t^2}\left(1-\frac{2}{t}+\frac{2^2}{t^2}-\dots\right)$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{t^{n+2}}$

مواد ۸۴

۳۹۷ ← ۵a

$z-1=t \Rightarrow f_1(t)=\frac{e(t+1)-e\,e^t}{t^2}$

$\frac{e(t+1-e^t)}{t^2}=\frac{e\left(t+1-1-t-\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}\right)}{t^2}$

$=-e\left(\frac{1}{2!}+\frac{t}{3!}+\frac{t^2}{4!}+\dots\right)$

$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=-e\frac{1}{(n+2)!}$

$f^{(n)}(0)=-e\frac{\cancel{n!}}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}}=\frac{-e}{(n-1)(n+2)}$

LIYAN

Subject:
Date: No:

(۳۶۶) → (۵۲)

موارد ۸۱

$z-۲=t \Rightarrow z=t+۲$ $\quad f_1(t)=\dfrac{۲t+1}{t^۲+۴t+۴-۳-۶+۲}$

$=\dfrac{۲t+1}{t^۲+t}=\dfrac{۲t+1}{t(t+1)}$

$=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{1}{t}+\sum(-1)^n t^n$

ریاضی محض ۸۴

در بسط لوران مقدار اصلی $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ حول ۰ ضریب $z^۲$ برابر است با

۱۰۷ از (۳۷۵)

$w=(1+z)^{\frac{1}{z}} \Rightarrow \ln w=\dfrac{1}{z}\ln(1+z)$

$\ln w=\dfrac{1}{z}\left(z-\dfrac{z^۲}{۲}+\dfrac{z^۳}{۳}-\dfrac{z^۴}{۴}+\cdots\right)$

$\ln w=1-\dfrac{z}{۲}+\dfrac{z^۲}{۳}-\dfrac{z^۳}{۴}+\cdots)$

$w=e^{1-\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۳}-\frac{z^۳}{۴}+\cdots}=e\,e^{\overbrace{-\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۳}-\frac{z^۳}{۴}+\cdots}^{u}}$

$=e\left(1+u+\dfrac{u^۲}{۲!}+\dfrac{u^۳}{۳!}+\cdots\right)=$

$=e\left(1+-\dfrac{z}{۲}+\dfrac{z^۲}{۳}-\dfrac{z^۳}{۴}+\cdots+\dfrac{1}{۲!}\left(-\dfrac{z}{۲}+\dfrac{z^۲}{۳}-\dfrac{z^۳}{۴}\cdots\right)^۲+\cdots\right.$

$e\left(\dfrac{z^۲}{۳}+\dfrac{z^۲}{۸}\right)=e\,\dfrac{11}{۲۴}$