Subject:
Date: No:

(۳۶۶) → (۵۲)

موارد ۸۱

$z-۲=t \Rightarrow z=t+۲$ $\quad f_1(t)=\dfrac{۲t+1}{t^۲+۴t+۴-۳-۶+۲}$

$=\dfrac{۲t+1}{t^۲+t}=\dfrac{۲t+1}{t(t+1)}$

$=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{1}{t}+\sum(-1)^n t^n$

ریاضی محض ۸۴

در بسط لوران مقدار اصلی $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ حول ۰ ضریب $z^۲$ برابر است با

۱۰۷ (۳۷۰۵)

$w=(1+z)^{\frac{1}{z}} \Rightarrow \ln w=\frac{1}{z}\ln(1+z)$

$\ln w=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^۲}{۲}+\frac{z^۳}{۳}-\frac{z^۴}{۴}+\cdots\right)$

$\ln w=1-\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۳}-\frac{z^۳}{۴}+\cdots)$

$w=e^{1-\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۳}-\frac{z^۳}{۴}+\cdots}=e\,e^{\overbrace{-\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۳}-\frac{z^۳}{۴}+\cdots}^{u}}$

$=e\left(1+u+\frac{u^۲}{۲!}+\frac{u^۳}{۳!}+\cdots\right)=$

$=e\left(1+-\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۳}-\frac{z^۳}{۴}+\cdots+\frac{1}{۲!}\left(-\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۳}-\frac{z^۳}{۴}\cdots\right)^۲+\cdots\right.$

$e\left(\frac{z^۲}{۳}+\frac{z^۲}{۸}\right)=e\,\frac{11}{۲۴}$

Subject:
Date: No:

محاسبه شعاع همگرایی و ناحیه همگرایی :

① آزمون نسبت یا دالامبر

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

② آزمون ریشه (کشی)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right| < 1$$

مثال: برق ۸۳ (۳۳۷)

$$\left|e^{\frac{i}{z+1}}\right| < 1 \Rightarrow \left|e^{\frac{i}{x+iy+1}}\right| < 1$$

$$\left|e^{\frac{i(x-iy+1)}{(x+1)^2+y^2}}\right| < 1 \Rightarrow \left|e^{\frac{i(x+1)}{(x+1)^2+y^2}}\right| \left|e^{\frac{y}{(x+1)^2+y^2}}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{y}{(x+1)^2+y^2}} < 1 \Rightarrow y < 0$$

برق ۸۲ (۳۳۷)

$$\left|e^{\frac{1}{z^2}}\right| < 1 \Rightarrow \left|e^{\frac{1}{x^2-y^2+2ixy}}\right| < 1$$

$$\left|e^{\frac{i(x^2-y^2-2ixy)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}\right| < 1$$

$$\left|e^{\frac{i(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}\right| \left|e^{\frac{2xy}{(x^2-y)^2+4x^2y^2}}\right| < 1$$

$$e^{\frac{2xy}{(x^2-y^2)+4x^2y^2}} < 1 \Rightarrow \frac{2xy}{\quad} < 0$$

مکانیک ۷۰ (۳۳۶)

$$\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n z\right| < 1$$

$$\left|\frac{z}{e}\right| < 1 \Rightarrow |z| < e$$

$$\boxed{\left(f(x)\right)^{g(x)} \overset{\infty}{=} 1 \quad x \to x_0} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} e^{\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)} \\ e^{\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{1}{n}-1)} = e^{-1} \end{array}}$$

$$\ln w = g(x)\, \underbrace{\ln(f(x)-1+1)}_{f(x)-1} \rightarrow w = e^{g(x)(f(x)-1)}$$

برق ۸۴ (۳۳۵)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^z}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right| < 1 \Rightarrow \left|a^z\right| < 1$$

$$\left|a^{x+iy}\right| < 1 \Rightarrow \left|a^x\right| < 1$$

$$x \underbrace{\ln a}_{<0} < 0 \Rightarrow x > 0$$

Subject: Date: No:

انواع نقاط تکین منفرد:

اگر z_0 نقطه تکین منفرد تابع $f(z)$ باشد آنگاه z_0 یکی از ۳ حالت زیر است:

۱- قطب ۲- ویژه اساسی (تکین اساسی) ۳- حذف شدنی (برداشتنی، رفع)

تعریف قطب: اگر در بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین منفرد z_0 تعداد جملات اصلی محدود باشد z_0 قطب تابع است و بالاترین درجه جمله اصلی را مرتبه قطب می نامیم

مثال: اگر بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین منفرد $z=2$ به صورت زیر باشد $z=2$ چگونه نقطه ای است.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}(z-2)^{2n-5}$$

$$=\frac{2}{2}(z-2)^{-3}+\frac{2^2}{2^2+1}(z-2)^{-1}+\frac{2^3}{3^2+1}(z-2)^{1}+$$

$$=\frac{2^4}{4^2+1}(z-2)^3+\cdots$$

$z=2$ قطب مرتبه ۳ است

$$=\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{\frac{4}{5}}{(z-2)}+\frac{2^3}{10}(z-2)+\frac{2^4}{17}(z-2)^3$$

نقطه ویژه اساسی: اگر در بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین منفرد z_0

تعداد جملات اصلی نامحدود باشد z_0 را نقطه تکین اساسی می نامند.

$$f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}=z^3\left(1-\frac{1}{z^2\,2!}+\frac{1}{z^4\,4!}-\frac{1}{z^6\,6!}+\frac{1}{z^8\,8!}-\dots\right)$$

$$=z^3-\frac{z}{2!}+\frac{1}{z\,4!}-\frac{1}{z^3\,6!}+\frac{1}{z^5\,8!}-\dots$$ $z_0=0$ ویژه اساسی است.

حذف شدنی: اگر در بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین منفرد z_0

تعداد جملات اصلی صفر باشد z_0 را حذف شدنی می نامند.

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots$$

جمع بندی:

① اگر تابع $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند آنگاه در تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ ریشه های $g(z)$

قطب یا حذف شدنی می باشند که برای تشخیص آن مطابق زیر عمل می کنیم.

مثال:

اگر z_0 ریشه مرتبه n تابع $g(z)$ و ریشه مرتبه m تابع $f(z)$ باشد آنگاه:

الف) $n>m \Rightarrow$ z_0 قطب مرتبه $n-m$ است

ب) $n<m \Rightarrow$ z_0 حذف شدنی است

Subject:
Date: No.

تعریف مرتبهٔ ریشهٔ تابع $f(z)$:

$f(z_0)=0$

$f'(z_0)=0$

$\vdots$

$f^{(n-1)}(z_0)=0$ $\iff$ z_0 ریشهٔ مرتبهٔ n تابع $f(z)$ است.

$f^{(n)}(z_0)\neq 0$

مثال: $z=0$ ریشهٔ مرتبهٔ چند تابع $f(z)=2e^z-2-2z-z^2$ است

$f(0)=0$

$f'(z)=2e^z-2-2z \rightarrow f'(0)=0$

$f''(z)=2e^z-2 \longrightarrow f''(0)=0$

$f'''(z)=2e^z \longrightarrow f'''(0)\neq 0$ $\Rightarrow$ $z=0$ ریشهٔ مرتبهٔ ۳ است

مثال: در تابع $f(z)=6\sin z-6z+z^3$ ، $z=0$ ریشهٔ مرتبهٔ چند است

$f(z)=0$

$f'(z)=6\cos z-6+3z^2 \rightarrow f'(0)=0$

$f''(z)=-6\sin z+6z \rightarrow f''(0)=0$

$f'''(z)=-6\cos z+6 \rightarrow f'''(0)=0$

$f^{(4)}(z) = 4\sin z \longrightarrow f^{(4)}(0) = 0$ $\qquad$ $z=0$ ریشه پنجم تابع است.

$f^{(5)}(z) = 4\cos z \longrightarrow f^{(5)}(0) \neq 0$

مثال: $f(z) = \underbrace{(z-\sin z)^3}_{\text{مرتبه } 9} \underbrace{(e^{z^2}-1)^2}_{\text{مرتبه } 4} \underbrace{(\cos^2 z+1)^3}_{\neq 0}$

$z=0$ ریشه مرتبه چند تابع فوق است.

$z=0$ ریشه مرتبه ۱۳ است.

$f(z) = z^5 + 3z^4 + 2z^3 - 2z^2 - 3z - 1$

$f(-1) = 0$

$f'(z) = 5z^4 + 12z^3 + 6z^2 - 4z - 3 \longrightarrow f'(-1) = 0$

$f''(z) = \text{----}$ $\qquad$ $f''(-1) = 0$

$f'''(z) = \text{----}$ $\qquad$ $f'''(-1) = 0$

$f^{4}(z) = \text{----}$ $\qquad$ $f^{4}(-1) \neq 0$

$z=-1$ ریشه مرتبه ۴

$f(z) = \dfrac{z^2}{z - \sin z}$ $z=0$ قطب مرتبه ۱ است
قطب ساده

$f(z) = \dfrac{z^3}{z - \sin z} \longrightarrow$ $z=0$ رفع شدنی است

(۲) نقطه ویژه اساسی: اگر z_0 نقطه تکین منفرد تابع $f(z)$ باشد، در توابع $f(z)$، $\cos f(z)$، $sh f(z)$، $ch f(z)$ و $e^{f(z)}$ و ... $z=z_0$ نقطه ویژه اساسی است.

$f(z) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{z^2-1}\right)}{(z-1)^{200}(z^2+1)} \longrightarrow$ $z=\mp 1$ ویژه اساسی

$f(z) = z^{100000000} e^{\frac{1}{z}} \longrightarrow$ $z=0$ ویژه اساسی است

(۳)

$f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0$
$z \to 0$

$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} = \infty \not\Rightarrow$ $z=0$ قطب
$z \to 0$

$e^{\frac{1}{z}}$ $\xrightarrow{z \to 0^+} +\infty$
$\xrightarrow{z \to 0^-} 0$
$z \to 0$

Subject
Date . . No.

برق ۷۲ ۳۴۲
۳۵۸ ← ۵

$$f(z)=\frac{z^{7}\,e^{\frac{-1}{z-2}}}{(z^{2}-4)^{3}}$$

مکانیک ۸۲ ۳۶۲ ← ۲۶
۳۴۳

کامپیوتر ۸۰
۳۶۴ ← ۳۸
۳۴۳

ریاضی محض ۸۴ ۳۷۵ ← ۱۰۹

کامپیوتر ۷۵ ۳۶۳ ← ۳۵

مواد ۷۸ ۳۶۲ ← ۵۰

$\frac{2}{4}=2$

کامپیوتر ۸۵ ۳۶۵ ← ۴۳ تست غلط
۳۴۳

برق ۸۶ ۳۴۴ ۳۷۰ ← ۸۱ غلط است.

برق ۸۸ ۶۷۲ ← ۶

$z-1=t \rightarrow z=t+1 \rightarrow f_1(t)=\frac{t+1}{t(t+3)}$

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{81}$

Subject:
Date: No:

$$f_1(t) = \frac{\frac{1}{3}}{t} + \frac{\frac{2}{3}}{t+3} = \frac{\frac{1}{3}}{t} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t^3}{27}\right.$$

t^2 ضریب $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{9}$

مانده: در بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین منفرد z_0 ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ را مانده می‌گویند (a_{-1})

جمع بندی: ① اگر z_0 نقطه حذف شدنی تابع $f(z)$ باشد مانده آن همواره صفر است

② اگر z_0 نقطه ویژه اساسی تابع $f(z)$ باشد تنها راه محاسبه مانده محاسبه بسط لوران حول z_0 و مشخص کردن ضرایب $\frac{1}{z-z_0}$ می‌باشد.

③ اگر z_0 قطب تابع $f(z)$ باشد با دو روش زیر می‌توان مانده را در z_0 بدست آورد

الف: $a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}$

ب: محاسبه بسط لوران حول z_0 و تعیین ضریب $\frac{1}{z-z_0}$

$$\frac{1}{(z-1)^3(z+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^3} + \frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{z-1} + \frac{-\frac{1}{8}}{z+1}$$

$$\boxed{a_{-(n-i)} = \frac{1}{(i)!}\left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(i)}}$$

اصلاح کتاب

ص ۳۶۳ تست ۳۲ به بعد

شماره تست ها یکی کم شود تا آخر. ~~۳۴۵~~ ۳۴۴

مثال ص ۳۴۲ (۳۳)

$(\sin z)^{(n)} \to \sin(z + \frac{n\pi}{2})$

$(\cos z)^{(n)} \to \cos(z + \frac{n\pi}{2})$

مثال: در تابع $\frac{\tan^{-1} z}{z^6}$ مانده را در $z=0$ بدست آورید.

① $z=0$ ، $6 \to a_{-1} = \frac{1}{5!}\left[z^6 \frac{\tan^{-1} z}{z^6}\right]^{(5)}$

② $\dfrac{z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} \cdots}{z^6} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z} - \frac{z}{7}$

مانده $= \frac{1}{z}$ ضریب $= \frac{1}{5}$

برق ۸۴ (۳۴۹) (۳۶۰) ← (۱۷)

مکانیک ۸۳ (۳۵۰) (۳۶۳) ← (۳۱)

برق ۸۳ (۳۶۰) ← ۱۵

$z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} \cdots\right)$

$z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \cdots$

مانده $= \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

Subject
Date . No.

۳۵۳ ۳۶۵ ← ۴۷

هسته‌ای ۸۴

۳۴۹ ۳۶۰ ← ۱۶

۳۵۳ ۳۶۷ ← ۶۱

مواد ۸۱ ۳۶۶ ← ۵۱ ۳۵۳

۳۵۸ ← ۱ برق ۶۸

قطب ۲ با صفر جفت ما بذواش هم می‌شود.

$$a_{-1} = p \, z \frac{\sin z}{z^2} = 1$$

کامپیوتر ۷۹ ۳۵۱ ۳۶۴ ← ۳۷

مکانیک ۸۵ ۳۵۰ ۳۶۳ ← ۳۴

انتگرال مختلط ص ۳۸۵

برق ۷۱ ۳۸۲

برای حرکت روی مسیر مطابق زیر عمل می‌کنیم:

① معادلات مسیر را می‌نویسیم.

Subject:
Date: No.

۲) معادلات مسیر را در عبارت مقابل انتگرال جایگذاری می‌نماییم.

۱☆ اگر معادلات مسیر بر حسب دو متغیر باشد آنها را با فرم پارامتری می‌نویسیم

تا به یک متغیر تبدیل شود.

۳) در جهت مشخص شده روی مسیر حرکت می‌کنیم و مانند توابع حقیقی

انتگرال می‌گیریم.

مکانیک ۷۶ (۵۵) (ت ۸۳)

برق ۷۷ (ت ۸۶)

$z = z_0 + re^{i\theta}$ = معادله دایره با مرکز z_0 و شعاع r

$z = re^{i\alpha}$ (α = ثابت) ⇐ معادله خطی که با زاویه α از مبدأ عبور می‌کند.

برق ۷۵ (ت ۹۰)

$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i$ (مجموع مانده‌های نقاط تکین منفرد $f(z)$ که داخل ناحیه c قرار دارند)

۱- نقاط تکین منفرد $f(z)$ را بدست می‌آوریم

۲- نقاط تکین منفردی که داخل ناحیه قرار دارند مشخص می‌کنیم.

Subject:
Date: . . No.

۳- مانده را در نقاط مشخص شده در قسمت ② را بدست می آوریم.

۴- مجموع مانده های محاسبه شده در قسمت ③ را در $2\pi i$ ضرب می کنیم که برابر با حاصل انتگرال است.

برق ۷۵ ۳۹۲

۳۴۳ روش بدست آوردن بسط tgz

برق ۷۶

۴۴۷ ← ۱۶

$$x+iy=e^{u+iv} \longrightarrow \begin{cases} x=e^{u}\cos v \\ y=e^{u}\sin v \end{cases}$$

$$u=1 \rightarrow \begin{cases} x=e\cos v \\ y=e\sin v \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=e^2 \Rightarrow |z|=e$$

$$c: |z|=e$$

$z=1$ ✓ ⇐ ویژه اساسی ⇐ بسط لوران $\Rightarrow z-1=t$

$$\sin\left(\frac{t+1}{t}\right)=\sin\left(1+\frac{1}{t}\right)=\sin 1\cos\frac{1}{t}+\cos 1\sin\frac{1}{t}$$

مانده = ضریب $\frac{1}{t}$ $=\cos 1 \Rightarrow I=2\pi i\cos 1$

Subject:
Date: . . No.

مهر ۸۴ ‏ ‏(۴۴۹) ← ۳۱

$$\frac{\sin\frac{z}{2}}{z^2\cos\left(\frac{z}{2}\right)} \Rightarrow z=0$$

$$\cos\frac{z}{2}=0 \rightarrow z=(2k-1)\pi \times$$

قطب $z=0$ مرتبه ۱ ، $a_{-1}=\lim_{z\to 0} z\frac{\tan\frac{z}{2}}{z^2}=\frac{1}{2}$

$$I=2\pi i\times\frac{1}{2}=\pi i$$

مکانیک ۸۴، ۸۵

(۴۵۳) ← ۶۰، ۶۲ ‏ ‏ ۶۰ و ۶۲

$$1-\cos z=0 \rightarrow \cos z=1 \rightarrow z=2k\pi$$

$z=0$ ✓

$z=\pm 2\pi \times$

$$a_{-1}=\left(z^2\frac{e^z}{(1-\cos z)}\right)'=2 \quad z\to 0$$

$$I=2\times 2\pi i=4\pi i$$

$$\left(\frac{\sin z}{z}\right)^{(4)} \quad \frac{1}{5!} \quad \lim\left(\frac{\sin^2 z}{z}\right)'''' \rightarrow 0$$

درصورت می توانیم از هم ارزی استفاده کنیم که وکلیه توان ها از بین برود.

مکانیک ۸۳ ‏ ‏(۴۵۳) ← ۵۹

$z=0 \times$

$z=z_0$ ✓ → قطب مرتبه ۱

$$a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(\cancel{z-z_0})\frac{e^z}{z(\cancel{z-z_0})}=\frac{e^{z_0}}{z_0}$$

$$I=2\pi i\frac{e^{z_0}}{z_0} \Rightarrow f'(z_0)=2\pi i\frac{z_0e^{z_0}-e^{z_0}}{z_0^2}$$

$$f'(2)=2\pi i\frac{e^2}{4}$$

Subject: Date: No:

پیرق ۷۸ ‏ (۳۴۷) ← ۲۰

(۳۹۴)

$c: |z-j|=1 \Rightarrow \begin{cases} z=j \ ✓ \\ z=-j \ ✗ \end{cases}$

مانده در $z=j$

$\Rightarrow 2\pi i\, a_{-1} = \pi j e^{j} \operatorname{sh}\pi$

$c: |z+j|=1 \Rightarrow \begin{cases} z=j \ ✗ \\ z=-j \ ✓ \end{cases}$

مانده در $z=-j$

$\Rightarrow 2\pi i\, b_{-1} = \pi j e^{-j} \operatorname{sh}\pi$

$c: |z-j|+|z+j|=4 \begin{cases} z=j \ ✓ \\ z=-j \ ✓ \end{cases}$

$\Rightarrow 2\pi i\, a_{-1} + 2\pi i\, b_{-1} =$

$= \pi j \operatorname{sh}\pi\, \underbrace{(e^{j}+e^{-j})}_{2\cos 1}$

تذکر: اگر در محاسبه انتگرال $\oint f(z)dz$ در مسیر $c: |z|=r$ تابع تا z یا $\bar{z}$ یا $|z|$ یا x یا y باشد مطابق زیر می‌توان جایگذاری نمود و سپس انتگرال را از قضیه مانده حل کرد.

$\bar{z} = \dfrac{r^2}{z}$

$|z| = r$

$x = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{z+\frac{r^2}{z}}{2}$

$y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \dfrac{z-\frac{r^2}{z}}{2i}$

کامپیوتر ۷۴

۶۶ ← ۴۵۳ ۴۰۰

کامپیوتر ۸۳ ۴۵۵ ← ۷۵

۳۸۷

برق ۸۳ ۴۴۹ ← ۲۹

کامپیوتر

برق ۸۱ ۴۴۸ ← ۲۶

۴۰۱

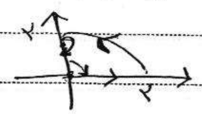
کامپیوتر ۸۱ ۴۵۴ ← ۷۰

$$\oint \left(\frac{z - 2 + \frac{4}{z}}{2} \right) dz = -4\pi j$$

تذکر: اگر نقطه تکین منفرد z روی مرز c واقع شود بطوری که با دوران θ خارج از ناحیه قرار گیرد مانده z را ~~روی~~ در θ ضرب می‌کنیم. (در محاسبه انتگرال)

مثال: حاصل انتگرال مقابل را روی مسیر داده شده بدست آورید.

$$\oint_c \frac{dz}{z(z^2+1)}$$



Subject:
Date: No:

$z=0$ ✓ → قطب ساده → $a_{-1} = \lim z \frac{1}{z(z^2+1)} = 1$

$z=j$ ✓ → 〃 → $b_{-1} = \lim_{z \to j} (z-j) \frac{1}{z(z-j)(z+j)} = -\frac{1}{2}$

$z=-j$ ✗

$$I = \frac{\pi}{2} i a_{-1} + \pi i b_{-1}$$

$$I = \frac{\pi}{2} j - \frac{\pi i}{2} = 0$$

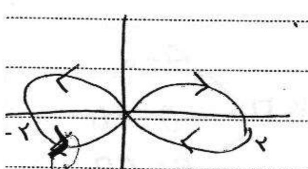
$\int \frac{dz}{z^2-1} = ?$ $\quad C: |z| = 1$ ✗

تذکر: اگر ~~...~~ مسیر c خلاف جهت مثلثاتی باشد در محاسبهٔ انتگرال، مسیر c مانده‌ها را در $-2\pi i$ ضرب می‌کنیم.

مثال: برق ۷۷ ۳۸۶ ۴۴۷ ← ۱۸

$\int \frac{1}{z} = \frac{\pi}{4} i$

مثال: $\int_c \frac{dz}{z^2-1}$ روی مسیر زیر بدست آورید.



$z=1$ ✓ ⇒ قطب ساده → $a_{-1} = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}$

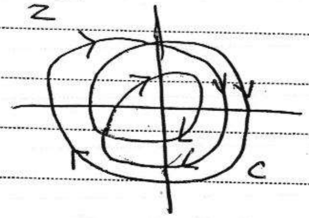
$z=-1$ ✓ ⇒ 〃 → $b_{-1} = \lim (z+1) \frac{1}{(z-1)(z+1)} = -\frac{1}{2}$

$$I = -2\pi i a_{-1} + 2\pi i b_{-1} = -\pi i - \pi i = -2\pi i$$

Subject:
Date: No:

تذکر: اگر در محاسبه انتگرال $f(z)$ روی مسیر C نقطه تکین منفرد درجه n بار در جهت مثلثاتی توسط مسیر C دور زده شده باشد مانده را در $2n\pi i$ ضرب می کنیم.

مثال: حاصل انتگرال زیر روی مسیر داده شده بدست آورید $\int \frac{e^z dz}{z}$



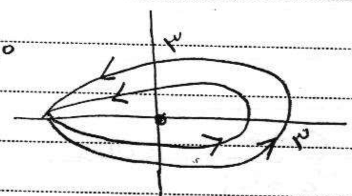
$z=0$ ✓ → ۳ بار → قطب ساده → $a_{-1} = \lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{z} = 1 \to I = -3\times 2\pi i \times 1 = -6\pi i$

برق ۸۵

(۴۰۳)

۳۲ ← (۴۴۹)

$z=0$



$r=3 \to \sin^2\frac{\theta}{4}=0 \to \frac{\theta}{4}=k\pi \to \theta=4k\pi$ → $\theta=0$, $\theta=4\pi$, $\theta=8\pi$

مکانیک ۸۷

(۹۶۳)

۱۲۷ ← (۴۶۱)

بررسی تابع در بینهایت

ص ۳۵

$f(z)=z \to f(\frac{1}{z})=\frac{1}{z}$

$\cos z \to f(\frac{1}{z})=\cos(\frac{1}{z})$

Subject:
Date: No.

محاسبه مانده در بینهایت :

مانده در $\boxed{z=\infty} \Leftrightarrow$ مانده در $\boxed{z=0}$ $\left(-\frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}\right)$

مثال: مانده تابع $f(z)=z^2+1$ در $z=\infty$ بدست آورید.

$$W=-\frac{\frac{1}{z^2}+1}{z^2}=-\frac{z^2+1}{z^4}$$

$$a_{-1}=\frac{1}{3!}\left(-(z^2+1)\right)''' = 0$$
$z \to 0$

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$$

$$f(\tfrac{1}{z})=z^2\sin(\tfrac{1}{z})$$

مانده در $W=-\sin(\frac{1}{z}) \Rightarrow$ مانده $=-1$

۳۹۹

مجموع مانده های تابع برابر ۰ است.

$a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\dots = -$ (مانده در ∞)

برق ۷۵

۴۴۷ ← ۱۲

$z=1$ ✓

$z=0$ ✓

$$-\frac{\frac{1}{\frac{1}{z}-1}\sin(z)}{z^2}=\frac{-z\sin z}{z^2(z-1)}$$

$z=0$ مانده در $=0 \rightarrow$ مانده در $\infty = 0$

$a_{-1}+b_{-1}=0 \rightarrow I=2\pi i(a_{-1}+b_{-1})=0$

Subject:
Date: No.

مهندسی کامپیوتر ۸۳

۷۵ ← ۴۵۵

$$z=1 \to a_{-1} = \underset{z\to 1}{\operatorname{Res}}(z-1)\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = -e$$

$$z \to \infty$$

$$\frac{-\dfrac{e^{z}}{1-\frac{1}{z}}}{z^{2}} = \frac{-ze^{z}}{z^{2}(z-1)}$$

$$a_{-1} = \underset{z\to 0}{\operatorname{Res}}\frac{-ze^{z}}{z^{2}(z-1)} = 1$$

$z=0,1$ $\quad$ $z=1,1$

$$b_{-1} + a_{-1} = -1 \to b_{-1} = e-1$$

$$I = 2\pi i(e-1)$$

محاسبه انتگرالهای معین با استفاده از انتگرالهای مختلط

① $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_{0}^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta, e^{i\theta})\, d\theta = \oint_{C:|z|=1} f\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}, z\right)\frac{dz}{iz}$$

Subject:
Date: No:

برق ۷۶ (۴۴۷) ← ۱۷

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2}\oint_c \frac{\frac{dz}{iz}}{a+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \quad c: |z|=1$$

$$= \frac{1}{i}\int \frac{dz}{z^2+2az+1}$$

$$z^2+2az+1=0 \quad \begin{cases} z=-a+\sqrt{a^2-1} \ \checkmark \\ z=-a-\sqrt{a^2-1} \ \times \end{cases}$$

قطب ساده ← $z=-a+\sqrt{a^2-1}$

$$a_{-1} = \frac{1}{i}\left(z+a-\sqrt{a^2-1}\right) \times \frac{1}{z^2+2az+1} = \frac{1}{i} \times \frac{1}{\cancel{-2a}+2\sqrt{a^2-1}+\cancel{2a}}$$

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

(P) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{q(x)}dx$ که در آن $P(x)$ و $q(x)$ توابع چند جمله‌ای می‌باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{q(x)}dx = 2\pi i \left(\text{مجموع مانده‌ها تابع } \frac{P(z)}{q(z)} \text{ در نقاط تکین منفرد آن در بالای محور حقیقی قرار دارند} \right)$$

تذکر: اگر نقاط روی محور حقیقی واقع باشند مانده در πi ضرب می‌شود

کامپیوتر ۷۷

(۴۱۰) (۴۵۴) ← ۶۷

مقدار انتگرال $I = \int_0^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4-5x^2+4}\,dx$ برابر است با

۱) $\frac{\pi}{4}$ ✓ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

$$f(z) = \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}$$

$$z^4+5z^2+4=0 \longrightarrow (z^2+4)(z^2+1)=0$$

$z=+2j$ ✓

$z=-2j$ ×

$z=j$ ✓

$z=-j$ ×

مانده در $z=2j$ $\longrightarrow a_{-1} = \lim (\cancel{z-2j}) \times \frac{2z^2-1}{(\cancel{z-2j})(z+2j)(z^2+1)} =$

$$= \frac{-9}{-12j} = \frac{3}{4j}$$

مانده در $z=j$ $\longrightarrow b_{-1} = \lim (z-j) \frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z-j)(z+j)} = \frac{-3}{6j} = \frac{-1}{2j}$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx = I = 2\pi i\left(\frac{3}{4j} - \frac{2}{4j}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} = \frac{\pi}{4}$$

۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \begin{Bmatrix} \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix} dx$

الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx\,dx = \mathrm{Im}\Big\{2\pi i\Big($ مانده های تابع $f(z) e^{imz}$ در نقاط تکین منفرد آن که در بالای محور حقیقی قرار دارند $\Big)$

Subject: Date: No:

ب: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx\,dx \quad Re\left(\quad " \quad \right)$

تذکر: اگر نقاط تکین منفرد روی محور حقیقی واقع شوند ما بزای آنها

در πi ضرب می شود.

مکانیک ۷۰

۳۷ ← ۴۵۰

$w = \frac{ze^{iz}}{z^2+1} \quad z^2+1=0 \quad z=j\ \checkmark \quad z=-j\ \times$

$z-j \rightarrow$ قطب ساده $\rightarrow a_{-1} = \lim (z-j)\frac{ze^{iz}}{(z-j)(z+j)} = \frac{je^{-1}}{2j} = \frac{1}{2}e^{-1}$

$Im\left\{2\pi i \times \frac{1}{2}e^{-1}\right\} = \frac{\pi}{e}$

برق ۷۴

۱۱ ← ۴۶۴

کامپیوتر ۷۱

$\frac{e^{2iz}}{z^2+4} \quad z^2+4=0 \quad z=2j\ \checkmark \quad z=-2j\ \times$ $\qquad$ ۶۵ ← ۴۵۳

$$a_{-1} = \lim_{z \to 2j} (z-2j)\,\frac{e^{3iz}}{z\,(z-2j)(z+2j)} = \frac{e^{-6}}{4j}$$

$$I = \frac{1}{2} \times \mathrm{Re}\left\{2\pi j\,\frac{e^{-6}}{4j}\right\} = \frac{\pi}{4e^{6}}$$

۸۱

برق ۸۲

۲۸ ← ۴۴۹

۴۱۳

$$\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^{2} x}{x^{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^{2}}$$

$$w = \frac{1}{4}\,\frac{1-e^{2iz}}{z^{2}} \qquad z=0 \checkmark$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{4}\, z\,\frac{1-e^{2iz}}{z^{2}} = \frac{-2i}{4} = -\frac{i}{2}$$

$$I = \mathrm{Re}\left\{\pi i\left(-\frac{i}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{2}$$

گروه ۴

برای محاسبهٔ انتگرال معین با استفاده از انتگرال مختلط مطابق زیر عمل می‌کنیم.

۱) انتخاب مسیر مناسب یعنی (C)

Subject: Date: No:

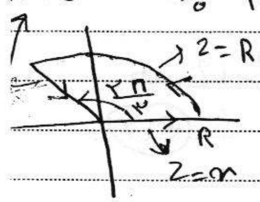
② انتخاب $f(z)$ مناسب.

③ $\oint_c f(z)dz$ را محاسبه می‌کنیم.

④ روی مسیر انتخاب شده حرکت می‌نماییم.

$z=re^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ مثال: با توجه به مسیر داده شده نشان دهید

ص ۴۱۴ مثال (۱۵)



$\oint \frac{dz}{1+z^3}$ $\quad z^3+1=0 \Rightarrow z=(-1)^{\frac{1}{3}}=$

$$=cis\frac{2k\pi+\pi}{3} \quad \begin{cases} cis\frac{\pi}{3} & ✓ \\ cis\,\pi & \times \\ cis\frac{5\pi}{3} & \times \end{cases}$$

مانده $=\text{Res}\left(z=cis\frac{\pi}{3}\right)\frac{1}{1+z^3}=\frac{1}{3cis\frac{2\pi}{3}}$

$$\oint\frac{dz}{1+z^3}=\frac{2\pi i}{3cis\frac{2\pi}{3}}$$

حرکت روی c: $\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{1+x^3}+\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cancel{\frac{Rie^{i\theta}d\theta}{1+R^3e^{3i\theta}}} \to 0 +\int_R^0 \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}dr}{1+r^3\underbrace{e^{2\pi i}}_{1}}=$

$$=\frac{2\pi i}{3cis\frac{2\pi}{3}}$$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^3}-e^{i\frac{2\pi}{3}}\int_0^\infty\frac{dr}{1+r^3}=\frac{2\pi i}{3cis\frac{2\pi}{3}}$$

$$\left(1-e^{\frac{2 i \pi}{3}}\right)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi i}{3\,\mathrm{cis}\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} =$$

$$= \frac{2\pi i}{3\,\mathrm{cis}\frac{2\pi}{3}} \times \frac{1}{1-e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{\pi}{3}\,\frac{e^{-\pi i}}{-\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

گروه ۱ و ۲ و ۳ مهم است و گروه ۴ را با دست آمده.

هسته‌ای ۸۴

۴۱۶   ۴۶۱ ← ۱۲۶

Subject:

Year. Month. Date. ( )

لیست فرمولها

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \sec^2\alpha$$

$$1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 = \csc^2\alpha$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y = \sec U \longrightarrow y' = U' \sec U \tan U$

$y = \csc U \longrightarrow y' = U' \csc U \cot U$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sec^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$$

$$\boxed{\sec^2 t - 1 = \tan^2 t}$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$$

$$\boxed{\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}}$$

$$\cos 2t = 1 - 2\sin 2t$$

$$\boxed{\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}}$$

«یادآوری فرمول های مشتق»

(۱) $\overset{\text{عدد}}{y = k}$ $\qquad y' = 0$

(۲) $y = kx \qquad y' = k$

(۳) $y = kx^n \qquad y' = kn\,x^{n-1}$

(۴) $y = f \pm g \pm \dots \qquad y' = f' \pm g' \pm \dots$

(۵) $y = kU^n \qquad y' = knU^{n-1}U'$

(۶) $y = U.V \qquad y' = U'V - V'U$

حالت خاص

$$\begin{cases} y = \dfrac{U}{V} \longrightarrow y' = \dfrac{U'V - V'U}{V^2} \\[2ex] y = \dfrac{1}{x} \longrightarrow y' = \dfrac{-1}{x^2} \xrightarrow{\text{تعمیم}} y = \dfrac{a}{x} \longrightarrow y' = \dfrac{-a}{x^2} \end{cases}$$

(۷) $y = \sqrt[n]{U^m} \longrightarrow y' = \dfrac{mU'}{n\sqrt[n]{U^{n-m}}}$

حالت خاص

$$\begin{cases} y = \sqrt{U} \longrightarrow y' = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}} \\[2ex] y = \sqrt{x} \longrightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

(۸) $y = |U| \longrightarrow y' = \dfrac{U \cdot U'}{|U|}$

حالت خاص $y = |x| \longrightarrow y' = \dfrac{x}{|x|}$

(۹) $y = \log_a U \longrightarrow y' = \dfrac{U'}{U \ln a} = \dfrac{U'}{U} \log_a e$

حالت خاص
$y = \ln U \Longrightarrow y' = \dfrac{U'}{U}$
$y = \ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

(۱۰) $y = a^U \longrightarrow y' = U' a^U \ln a$

نمایی
حالت خاص
$y = e^U \longrightarrow y' = U' e^U$
$y = e^x \longrightarrow y' = e^x$

مشتق مثلثات:

(11) $y = \sin U \longrightarrow y' = U' \cos U \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \boxed{y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x}$

$y = \cos U \longrightarrow y' = -U' \sin U \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \boxed{y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y = \tan g\, U \to y' = U'(1+\tan g^2 U) \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \tan g\, x \to$

$y' = 1+\tan g^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$y = \cot g\, U \to y' = -U'(1+\cot g^2 U) \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \cot g\, x \to$

$y' = -(1+\cot g^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

مشتق معکوس مثلثاتی:

$y = \operatorname{Arc}\sin U \to y' = \dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \operatorname{Arc}\sin x \to$

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \operatorname{Arc}\cos U \to y' = \dfrac{-U'}{\sqrt{1-U^2}} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \operatorname{Arc}\cos x \to$

$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \operatorname{Arc}\tan g\, U \to y' = \dfrac{U'}{1+U^2} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \operatorname{Arc}\tan g\, x \to$

$\boxed{y' = \dfrac{1}{1+x^2}}$

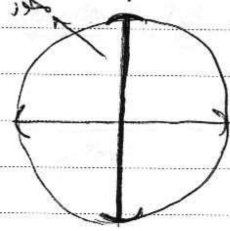
$y = \operatorname{Arc}\cot g\, U \to y' = \dfrac{-U'}{1+U^2} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} y = \operatorname{Arc}\cot g\, x \to$

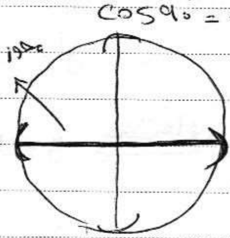
$y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y = \sec U \longrightarrow y' = U' \sec U \tan U$

$y = \csc U \longrightarrow y' = U' \csc U \cot U$





Sin ۴۵°, Cos ۴۵° = √۲/۲ tan ۰°, 180° = ۰

tan ۴۵°, cot ۴۵° = ۱ cot ۹۰°, ۲۷۰° = ۰

	$۰, ۳۶۰^\circ, ۲\pi$	$۳۰^\circ, \frac{\pi}{۶}$	$۴۵^\circ, \frac{\pi}{۴}$	$۶۰^\circ, \frac{\pi}{۳}$	$۹۰^\circ, \frac{\pi}{۲}$	$۱۸۰, \pi$	$۲۷۰^\circ, \frac{۳\pi}{۲}$
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تن	۰	تن
cot	تن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تن	۰

علامتهای نسبتهای مثلثاتی :

ربع دوم	ربع اول
sin > ۰	sin > ۰
cos < ۰	cos > ۰
tang < ۰	tag > ۰
cotg < ۰	cotg > ۰
ربع سوم	**ربع چهارم**
sin < ۰	sin < ۰
cos < ۰	cos > ۰
tang > ۰	tang < ۰
cotg > ۰	cotg < ۰

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خواص انتگرال :

(1) $\int k\,dx = kx + c$

عدد (برای k)

(2) $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + c$

(3) $\int (f(x) \pm g(x) \pm \dots)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \pm \dots$

(4) $\int k x^n\,dx = k\,\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$n \neq -1$

(5) $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$n \neq -1$

$\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$ فرمول

u: هر عبارتی که شامل x است

du: دیفرانسیل (مشتق)

$n \neq -1$

(6) $\int u^{-1}\,du = \int \dfrac{1}{u}\,du = \int \dfrac{du}{u} = \mathrm{Ln}\,|u| + c$

* صورت = مشتق (دیفرانسیل) مخرج است.

(۷) $\int a^{v}\,dv = \dfrac{a^{v}}{\ln a} + C$

* باید مشتقش کنارش باشد.

$\int e^{v}\,dv = e^{v} + C$

$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$

* $\int \dfrac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{v}{a} = -\operatorname{Arc\,cos} \dfrac{v}{a}$

* $\int \dfrac{dv}{a^2 + v^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{Arc\,tang} \dfrac{v}{a} = \dfrac{-1}{a} \operatorname{Arc\,cotg} \dfrac{v}{a}$

(مکان متحرک) — سرعت — شتاب

$x(t) \xrightarrow{\text{مشتق}} v(t) \xrightarrow{\text{مشتق}} a(t)$

$x(t) \xleftarrow{\text{انتگرال}} v(t) \xleftarrow{\text{انتگرال}} a(t)$

مسافت زمان

فرمول های انتگرال

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int (1 + \tan^2 x)\,dx = \operatorname{tang} x + C$

$\int (1 + \cot^2 x)\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

حالت خاص

$$* \int \tan^2 x \, dx = \int \left((1+\tan^2 x) - 1 \right) dx = \tan x - x + C$$

$$* \int \cot^2 x \, dx = \int \left((1+\cot^2 x) - 1 \right) dx = -\cot x - x + C$$

$$* \int \tan x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$* \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sin U \, dU = -\cos U + C$$

$$\int \cos U \, dU = \sin U + C$$

$$\int (1+\tan^2 U) \, dU = \tan U + C$$

$$\int (1+\cot^2 U) \, dU = -\cot U + C$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(x) \Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

خواص مهم :

$$① \int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \Big]_{x=a}^{x=a} F(a) - F(a) = 0$$

(۲) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

(۳) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(۴) $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \pm \dots\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \pm \dots$

(۵) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} ۲\int_0^a f(x)\,dx & \leftarrow \text{تابع زوج است} \\ \text{صفر} & \leftarrow \text{تابع فرد است} \end{cases}$

(۶) $\int_0^{n \in N} [x]\,dx = \dfrac{n(n-1)}{۲}$

انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء:

$$A = \int (\text{چند جمله‌ای بر اساس } x) \times \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx$$

$$B = \int e^{ax} \times \begin{Bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{Bmatrix} dx$$

$$C = \int (\text{چند جمله‌ای بر اساس } x) \times \begin{bmatrix} \ln x \\ \text{Arctang } x \end{bmatrix} dx$$

مثال) $\int \ln x \, dx$

$U = \ln x \qquad dV = dx$

$dU = \frac{1}{x} dx \qquad V = x$

مشتق ⟷ انتگرال

$$\boxed{\int U dV = U \cdot V - \int V du}$$

یادآوری)

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a+b+c=0 \;\Rightarrow\; x_1=1,\quad x_2=\frac{c}{a}$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a+c=b \;\Rightarrow\; x_1=-1,\quad x_2=\frac{-c}{a}$$

یادآوری فرمول های اتحاد:

اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

$$(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab=a^2+b^2$$

اتحاد مزدوج

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

مربع سه جمله‌ای

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

مجموع مکعبات

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

تفاضل مکعبات

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

مکعب دوجمله‌ای

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=$$

$$a^3-b^3-3ab(a-b)$$

مکعب دوجمله‌ای