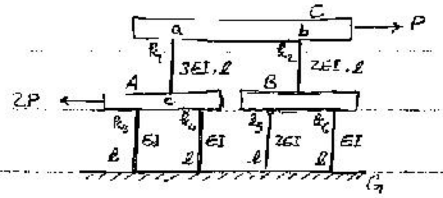
SUBJECT حل تمرین مقاومت ۲

Year | Month | Date |

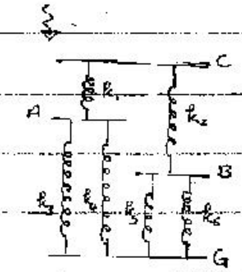
حل بار :



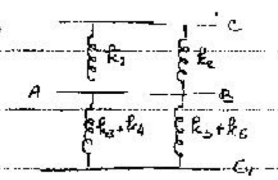
$* \Rightarrow$ برابر P

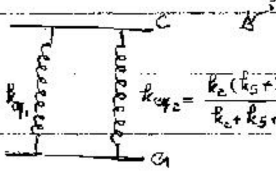
$** \Rightarrow$ برابر $2P$

جهت فنرها رو سیال کن !



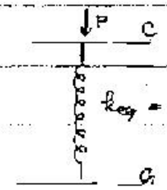
$\overset{*}{\Rightarrow}$ مسیرها : CAG , CBG $\Rightarrow$





$$\frac{k_1(k_3+k_4)}{k_1+k_3+k_4} = k_{eq_1} \qquad k_{eq_2} = \frac{k_2(k_5+k_6)}{k_2+k_5+k_6}$$

$\Rightarrow$



$$k_{eq} = \frac{k_1(k_3+k_4)}{k_1+k_3+k_4} + \frac{k_2(k_5+k_6)}{k_2+k_5+k_6} \Rightarrow \delta_{C_{*}} = \frac{P}{k_{eq}}$$

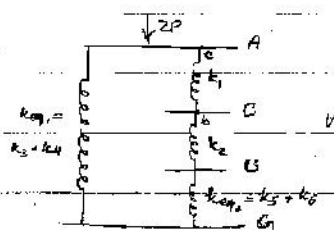
$$F_a = \frac{k_{eq_1}}{k_{eq}} \cdot P = F_c \qquad F_b = \frac{k_{eq_2}}{k_{eq}} \cdot P \qquad \Rightarrow \delta_A = \frac{F_c}{k_3+k_4} = \frac{F_a}{k_3+k_4}$$

پس وقتی وصله رو پیوسته آوردی و مرحله مرحله جلو رفتی به جهت تا به اونی که می‌خوای برسی !

اینجا جهت نیروها و تغییر مکان‌ها در حالت ۲ مثبت پیوسته آمده. فقط یک جهت مثبت قرارداد کنید

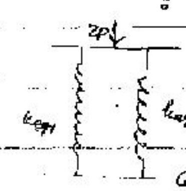
حالت کلی ** :

$\overset{**}{\Rightarrow}$ مسیرها : AG , $ACBG$ $\Rightarrow$



$$k_{eq_1} = k_3+k_4 \qquad k_{eq_2} = k_5+k_6$$

$\Rightarrow$



$$k_{eq_3} = \frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_{eq_2}}}$$

$\Rightarrow$

$$k_{eq} = k_{eq_1} + k_{eq_3} \qquad \Rightarrow \delta_{A_{**}} = \frac{-2P}{k_{eq_{**}}}$$

منفی برای اینکه خلاف جهت !

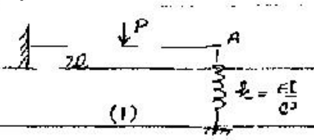
پس $F_c = -\frac{k_{eq_3}}{k_{eq}}(2P) = F_b$ $\Rightarrow$ $\delta_c = -\frac{F_b}{\frac{k_2 k_{eq_2}}{k_2+k_{eq_2}}}$

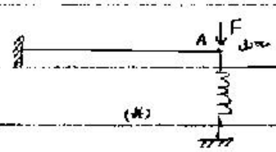
SUBJECT :

Year (　) Month (　) Date (　)

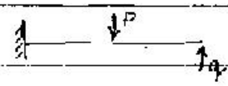
اگر نیرو به یک تراز مناسب اعمال شود، یک بار معادل در یک تراز مناسب دیگر می‌گذاریم تا هر دو مسئله از لحاظ تغییرمکان در نقطه مورد نظر با هم معادل و هم ارز باشند.

مثال ⑤ :





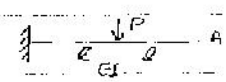
$\delta_{A_{(1)}} = \delta_{A_*}$



$+\ \delta_A = \delta_{A_*} \Rightarrow q = ?$

اگر در یک مسئله‌ای به جای تغییرمکان، شیب می‌خواست باید با فنرهای پیچشی موازی و سری مدلش کنیم و بار معادل هم همان است نه شعاع.

بار معادل یک بارگذاری در نقطه A = (سختی سازه‌ای که بارگذاری روی آن انجام شده در نقطه A) × (تغییرمکان نقطه A در اثر بارگذاری بار داده شده بدون حضور باقی سازه)

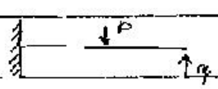


پس اینجا ؛ $k_A = \frac{3EI}{8\ell^3}$

δ_A بدون حضور فنر $= \frac{P\ell^3}{3EI} + \ell\,\frac{P\ell^2}{2EI} = \frac{5P\ell^3}{6EI}$

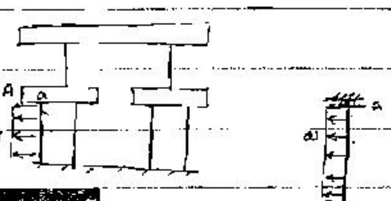
$F_{معادل} = k_A \times \delta_A = \frac{5}{16} P \Rightarrow$

$\delta_{A_*} = \dfrac{\frac{5}{16}P}{\frac{EI}{\ell^3} + \frac{3}{8}\frac{EI}{\ell^3}} = \frac{5}{22}\,\frac{P\ell^3}{EI}$



$\rightarrow \delta_A = \frac{5}{22}\,\frac{P\ell^3}{EI} = \delta_{A_*}$

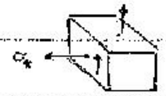
or $\delta_A = \left(\frac{P\ell^3}{3EI} + \ell\,\frac{P\ell^2}{2EI}\right) - \frac{q(2\ell)^3}{3EI} = \frac{5}{22}\,\frac{P\ell^3}{EI}$



در مثال روبه‌رو بار معادل در a را پیدا می‌کنیم می‌گذاریم روی A که برای این کار باید یک مسئله نامعین حل کنیم.

۸۸/۳/۱۶

* محاسبه‌ی انرژی کرنشی:



$$dU_{\sigma_x \text{ تنش}} = \frac{1}{2}\underbrace{(\sigma_x\, dy\, dz)}_{F}\underbrace{(\varepsilon_x\, dx)}_{\Delta} \Rightarrow dU = \frac{1}{2}\varepsilon_x \sigma_x\, dV \Rightarrow$$

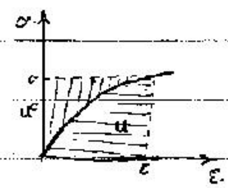
چگالی انرژی کرنشی $= u = \dfrac{dU}{dV} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_x \sigma_x$ خطی

از رابطه‌ی زیر بود، می‌توانیم حتی برای مواقعی که رابطه‌ی σ و ε خطی نیست هم استفاده کنیم. $u_{\text{کل}} = \int \sigma\, d\varepsilon$

$$U = \frac{1}{2}\left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \gamma_{xz}\tau_{xz} + \gamma_{yz}\tau_{yz}\right]$$ خطی

[illegible] $\Rightarrow u = \dfrac{\sigma^2}{2E} + \dfrac{\tau^2}{2G}$

● انرژی کرنشی مکمل:



$u^c = \int \varepsilon\, d\sigma$

$U = \int u\, dV \qquad U^c = \int u^c\, dV$

می‌خواهیم ببینیم به ازای بارگذاری‌های مختلفی که روی سیستم داریم، چقدر انرژی درون سیستم ایجاد می‌شود و ذخیره می‌شود.

اگر یک بارگذاری داشته باشیم که روی تنش‌های مختلف ایجاد کند، می‌شود انرژی ایجاد شده در اثر هر یک از این اثرها را به تنهایی حساب کنیم و آخرش سوپرپوز کنیم.

ولی اگر فقط یک بارگذاری داشته باشیم که هر دو یک اثر ایجاد کنند مثلاً هم محوری داشته باشیم هم خمشی، روی اینها نمی‌توانیم سوپرپوزیشن بزنیم چون انرژی نسبت به تنش خطی نیست!

σ: محوری / خمشی

τ: پیچشی / برشی

از اثر برشی نسبت به خمشی و پیچشی و محوری می‌توان صرف نظر کرد ولی در ارتعاشات باید در نظر بگیریم!

اگر به ما گفتند برشی را در نظر بگیرید، خودمان در نظر می‌گیریم.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

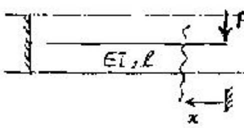
⑤ توجه: فقط وقتی که تار خنثی از مرکز سطح می‌گذرد، می‌شود برای خمش دو محوری هم تکی از سوپرپوزیشن استفاده کرد.

هرکدام از ۵ وجه‌ها را می‌توان روی بار سوپرپوز کرد. مثلاً یعنی انرژی ناشی از خمش توسط این‌ها را به علاوه‌ی انرژی ناشی از خمش توسط اون یکی بیرد!!

⑥ بررسی کنید ببینید می‌شود U را روی M_z و M_y همزمان سوپرپوز کرد یا نه؟

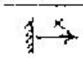
$$U_{محوری} = \int \frac{F^2(x)\,dx}{2AE} \qquad U_{خمشی} = \int \frac{M^2(x)\,dx}{2EI} \qquad U_{پیچشی-دایره‌ای} = \int \frac{T^2(x)\,dx}{2GJ}$$

۱) حساب کردن مثال‌های کوچولو موچولو.



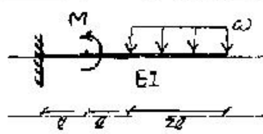
دستگاه را هرجا دوست داشتی بذار ولی باید کرانه‌های انتگرال رو با توجه به دستگاه گزارش کنی!

$$M(x) = Px \qquad 0 \le x \le l \quad \rightarrow U = \int_0^l \frac{(Px)^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 l^3}{6EI}$$



اگر دستگاه اینوری بود $\Rightarrow$ $M(x) = P(l-x) \quad 0 \le x \le l$

2)

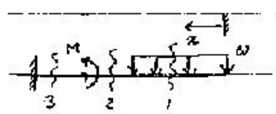


برای این مثال باید استفاده کنیم برای محاسبه لنگر و نیرو در مقطع‌ها

باید منطقی! بازه‌ها برای انتگرال‌گیری! (((((

برای امتحان یادتون باشه حساب انتگرال‌گیری!

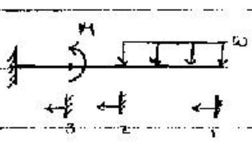
← پس باید دستگاه را سر تیر بگذاریم.



$$M_1(x) = \frac{wx^2}{2} \quad 0 \le x \le 2l \qquad M_2(x) = 2wl(x-l) \quad 2l \le x \le 3l \qquad M_3(x) = 2wl(x-l) - M \quad 3l \le x \le 4l$$

$$U = \int_0^{2l} \frac{M_1^2(x)\,dx}{2EI} + \int_{2l}^{3l} \frac{M_2^2(x)\,dx}{2EI} + \int_{3l}^{4l} \frac{M_3^2(x)\,dx}{2EI}$$

← عیب ندارد هم جهت دستگاه می‌گیریم.

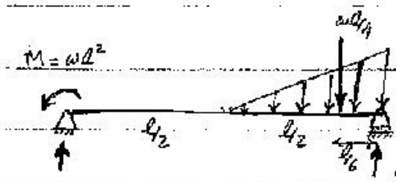


$M_1(x) = wx^2/2 \quad 0 \le x \le 2l \qquad M_2(x) = 2wl(x+l) \quad 0 \le x \le l \qquad M_3(x) = 2wl(x+2l) - M \quad 0 \le x \le l$

SUBJECT : حل تمرین مقاومت ۲

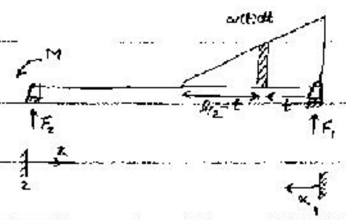
Year ( ) Month ( ) Date ( )

3)



$F_1 = (5/6)\left(\frac{\omega\ell}{4}\right) - \frac{\omega\ell^2}{\ell}$

$F_2 = \frac{1}{6}\frac{\omega\ell}{4} + \frac{\omega\ell^2}{\ell}$



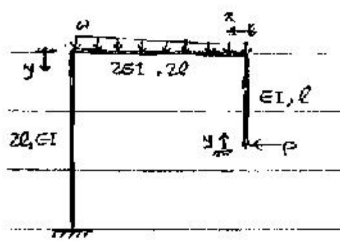
$\omega(t) = \frac{\ell/2 - t}{\ell/2}\,\omega = \frac{\ell - 2t}{\ell}\,\omega$

$M_1(x) = F_1 x - \int_0^x (x-t)(\omega(t))\,dt \qquad 0 \le x \le \ell/2$

$M_2(x) = F_2 x - M \qquad 0 \le x \le \ell/2$

$U = \frac{1}{2EI}\int_0^{\ell/2} [M_1^2 + M_2^2]\,dx = \cdots ✓$

4)



$M_1(y) = Py \qquad 0 \le y \le \ell$

$M_2(x) = P\ell + \frac{\omega x^2}{2} \qquad 0 \le x \le 2\ell$

$M_3(y) = 2\omega\ell^2 + P(\ell - y) \qquad 0 \le y \le 2\ell$

$U = \int_0^{\ell} \frac{M_1(y)^2\,dy}{2EI} + \int_0^{2\ell} \frac{M_2^2(x)\,dx}{2(2EI)} + \int_0^{2\ell} \frac{M_3^2(y)\,dy}{2EI}$

5)

$\varphi_A = 0$

$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_{B/C} + \varphi_C$

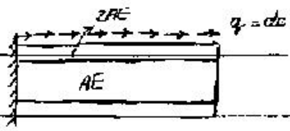
$\Rightarrow \frac{T^*\ell}{GJ} + \frac{(T^* - 2T)(2\ell)}{2GJ} + \frac{(T^* - 3T)\ell}{GJ} = 0$

$T^* = 5/3\,T$ و $T_1 = T^* = 5/3\,T$

$T_2 = T^* - 2T = -1/3\,T$

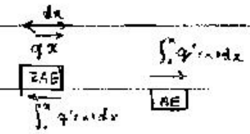
$T_3 = T^* - 3T = -4/3\,T$

$U = \int_0^{\ell} \frac{T_1^2\,dx}{2GJ} + \int_0^{2\ell} \frac{T_2^2\,dx}{2(2GJ)} + \int_0^{\ell} \frac{T_3^2\,dx}{2GJ} = \cdots ✓$



(6

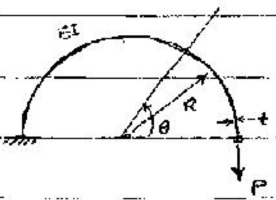
با فرض اینکه بین دو میله چسب زده ایم و هر دو با شکل باهم کوپل می‌کنند، ممکن است نیروی بین دو میله ثابت نباشد و تابعی از x باشد. این تابع را بدست بیاورید.



دوتا نکته: انرژی کل برابر مجموع انرژی ایجاد شده در هر یک از میله‌هاست!

$\delta_{2AE} = \delta_{AE} \Rightarrow \int q(x)dx = cx \Rightarrow q(x) = c$ اگر بین دو میله چسب نباشد، ممکن است بین لایه‌ها برش به وجود بیاید!

تیرهای خمیده:



1) $t \ll R \Rightarrow \sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow U_{خمش} \approx \int \frac{M^2 ds}{2EI}$

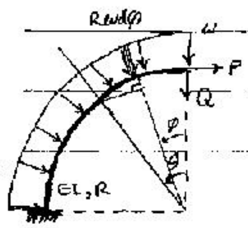
$M(\theta) = PR(1-\cos\theta)$

$$U = \int_0^{\pi} \frac{M^2(\theta)\, R d\theta}{2EI} = \int_0^{\pi} \frac{P^2R^2(1-\cos\theta)^2 R d\theta}{2EI} = \checkmark$$

① انرژی برشی می‌گیریم که:

$$U_{برش} = \int \overset{\text{shear factor}}{k}\, \frac{V^2(x)dx}{2AG}$$

(2



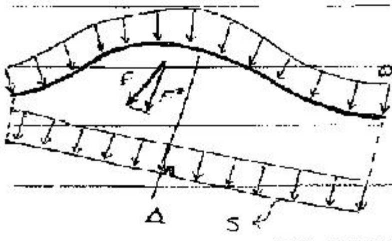
w از $M(\theta)$ ناشی از راه اول محاسبه کردن : $M^*(\theta) = \int_0^{\theta} wRd\varphi \times R\sin(\theta-\varphi) = wR^2(1-\cos\theta)$

" " " " " " راه دوم :

فرض کنید منحنی دلخواه داریم، نیروی برآیند را مولفه‌اش را در راستای دلخواه Δ می‌خواهیم.

یک صفحه عمود بر راستای Δ در نظر می‌گیریم. تصویر منحنی را بر روی این سطح پیدا کنیم.

مولفه‌ی نیروی برآیند در راستای Δ برابر است با نیروی برآیند ناشی از بارگسترده بر روی این تصویر!



$F^* = wS$

طول سطح (تصویر) در صفحه (خط) عمود بر راستای Δ × w = اندازه مولفه بردار برآیند در راستای Δ

حالا برگردیم سراغ سوال خودمون:

راه دوم $\longrightarrow M^*(\theta) = w(2R\sin\theta/2)(R\sin\theta/2) = wR^2(1-\cos\theta)$

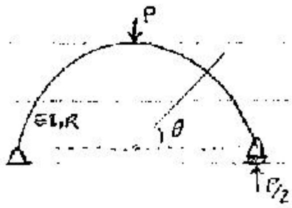
$$M(\theta) = PR(1-\cos\theta) + QR\sin\theta + M^*(\theta)$$

SUBJECT: حل تمرین مقاومت ۲

Year: Month: Date:

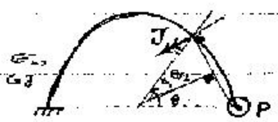
۸۸/۲/۱۵

1)



$$M(\theta) = \frac{P}{2}R(1-\cos\theta) \Rightarrow U = \frac{2}{2EI}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{PR(1-\cos\theta)}{2}\right]^2 R\,d\theta = \cdots \checkmark$$

2)



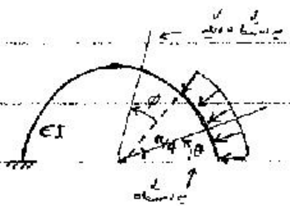
نیروی پیچشی

$$T(\theta) = P(2R\sin\theta/2)$$

$$T(\theta) = P(2R\sin\theta/2)\sin\theta/2 = PR(1-\cos\theta)$$

$$M(\theta) = P(2R\sin\theta/2)\cos\theta/2 = PR\sin\theta$$

3)



$$M_1(\theta) = 2\omega R^2\sin^2\theta/2 \qquad 0\le\theta\le\pi/4$$

$$M_2(\varphi) = [2\omega R\sin\pi/8]R\sin(\varphi+\pi/8)$$

$$U = \int_0^{\pi/4}\frac{M_1^2(\theta)R\,d\theta}{2EI} + \int_0^{3\pi/4}\frac{M_2^2(\varphi)R\,d\varphi}{2EI}$$

⊛ برای تیرهای مستقیم : $M = EIy'' = EI\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow U_{\text{خمشی}} = \int\frac{M^2 ds}{2EI} = \int\frac{1}{2}EI\,y''^2 ds = \int\frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 ds$$

⊛ برای میله‌ها : $\sigma_x = E\varepsilon_x \Rightarrow \dfrac{F(x)}{A} = E\dfrac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow F(x) = AE\dfrac{\partial u}{\partial x}$ (تغییر مکان در راستای x)

$$\Rightarrow U_{\text{محوری}} = \int\frac{F^2(x)ds}{2AE} = \int\frac{1}{2}AE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 ds$$

(حالت تک بعدی) $u = u(x) = \delta(x) \Rightarrow U_{\text{محوری}} = \int\frac{1}{2}AE\,\delta'^2 dx$

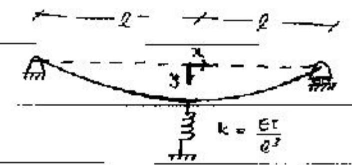
زمان نداشته باشیم!

فعلاً وقتی سازه ارتعاش می‌کند، تغییر مکانش علاوه بر اینکه برحسب x تغییر می‌کند

زمان هم هست! $u = u(x,t)$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



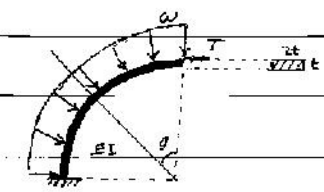
$$y(x) = a_0 + \cancel{a_1 x} + a_2 x^2 + \cancel{a_3 x^3} + a_4 x^4 \quad , \quad a_2 = \text{مجهول} \qquad (4$$

مشتق اول صفر

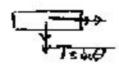
چون تقارن داریم جمله های فرد به خاطر زوج بودن y ، صفر هستند .

$$y(\ell) = 0 \Rightarrow y(\ell) = a_0 + a_2\ell^2 + a_4\ell^4 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{-a_0}{\ell^4} - \frac{a_2}{\ell^2}$$

$$U = \tfrac{1}{2}\left(\frac{EI}{\ell^3}\right)a_0^2 + 2\int_0^{\ell} \frac{1}{2} EI\left[12a_4x^4 + 2a_2\right]^2 dx$$



$$I_{11} = I_{\omega} = \frac{1}{12}(2t)(t)^3$$



خمش z (5

$$I_{22} = I_{+} = \frac{1}{12}(2t)^3(t)$$

اینجا دو تا خمش داریم ، چون تار خنثی با تقریب خوبی از مرکز سطح می گذرد ، می توانیم از

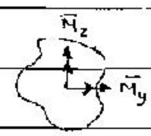
سوپر پوزیشن استفاده کنیم .

$$M_1(\theta) = 2\omega R^2 \sin^2\theta/2$$

$$M_2(\theta) = T\sin\theta$$

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M_1^2(\theta) R d\theta}{2EI_{11}} + \int_0^{\pi/2} \frac{M_2^2(\theta) R d\theta}{2EI_{22}} = \cdots$$

اگر ابعاد سطح مقطع نسبت به شعاع انحنا قابل صرف نظر کردن نباشد ، یک خروج از مرکزیت خواهیم داشت برای تار خنثی !



$$\sigma = \overbrace{\frac{M_y z}{I_{yy}}}^{\sigma_1} - \overbrace{\frac{M_z y}{I_{zz}}}^{\sigma_2}$$

← اثبات این موضوع که اگر تار خنثی از مرکز سطح بگذرد ، می توان

از سوپر پوزیشن استفاده کرد .

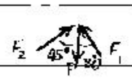
$$U = \int \frac{\sigma^2\, dV}{2E} = \int \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2\, dV}{2E} = \int \frac{M_y^2\, ds}{2EI_{yy}^2} + \int \frac{M_z^2\, ds}{2EI_{zz}^2} - 2\iint \frac{M_y M_z yz}{2EI_{yy} I_{zz}}\, dA\, dx$$

$$= \cdots + \cdots - 2\int \frac{M_y(x) M_z(x)}{2EI_{yy} I_{zz}} \underbrace{\int yz\, dA}_{\text{صفر}}\, dx$$

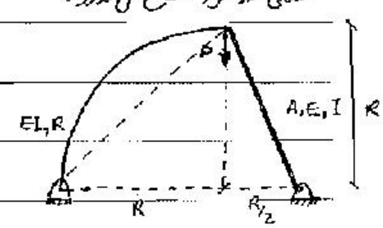
در تیرهای خمیده هم اگر ابعاد سطح مقطع نسبت به شعاع انحنای تیر بسیار کوچک باشند ، می توان با تقریب خوبی در نظر گرفت که تار

خنثی از مرکز سطح می گذرد .

6)



هر دو میله دو نیرویی هستند پس :



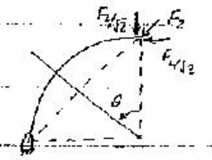
$$F_1 = \frac{\sin 45}{\sin 75} P \qquad F_2 = \frac{\sin 30}{\sin 75} P$$

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year: Month: Date:

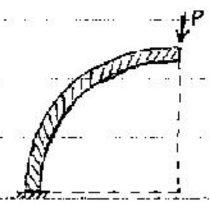
$U = U_{\text{میله}} + U_{\text{تیرخمیده}}$

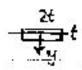
$$U_{\text{میله}} = \frac{F_1^2 \ell}{2AE} = \frac{F_1^2 R}{2\cos 30\, AE}$$



$$M(\theta) = \frac{F_2}{\sqrt{2}} R \left[1 - \cos\theta - \sin\theta \right] \qquad U_{\text{خمشی}} = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2(\theta) R\, d\theta}{2EI}$$

7)





$$E(\theta) = E_0 \cos\theta/_2\, e^{-ky}$$

دوراه داریم: ۱. تابعی را برای هر مقطع بنویسیم و از $\frac{M^2}{2EI}$ ببریم.

۲. مقطع معادل را بیابیم

ما راه دوم را می‌رویم:

$y = 0 \Rightarrow C = E_0 \cos\theta/_2$

$$n(y) = \frac{E(y)}{E(0)} = e^{-ky}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{\int_{-t/2}^{t/2} (2t e^{-ky} dy) y}{\int_{-t/2}^{t/2} 2t e^{-ky} dy} = \ldots$$

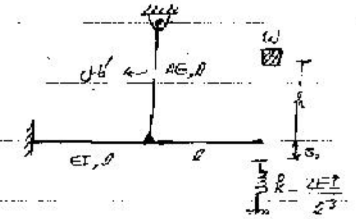
مبداء y را از اینجا روی $\bar{y}$ معادل:

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int y^2 dA = \int (y-\bar{y})^2\, 2t e^{-ky} dy.$$

پس حالا مقطعی داریم که تماماً از $E(0)$ تشکیل شده است.

$$U = \int \frac{M^2(\theta) R d\theta}{2E(y,\theta)\big|_{y=0} I_{\bar{y}\bar{y}}} = \int \frac{P^2 R^2 \sin^2\theta\, R\, d\theta}{2E_0 \cos\theta/_2\, I_{\bar{y}\bar{y}}} = \ldots$$

8)



وقتی وزنه ... تیر را خم می‌کند و ... به حداکثر deformation می‌رسد

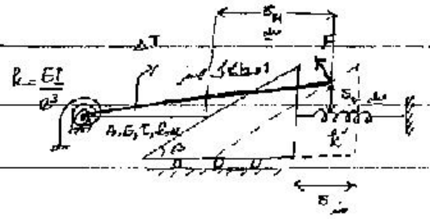
کابل پاره می‌شود و تیر پایین‌تر می‌رود. σ_{max} را بیابید.

SUBJECT

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۸/۲/۲۲ سه جلسه‌ی پس امتحان

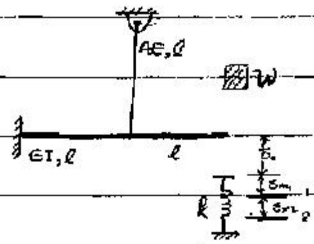
1)



$$\delta_H^{F} = \delta^{F} + \delta_V \cdot \cot\beta \Rightarrow F = \checkmark$$

$$\delta_V = \delta_A + \ell\theta_A + \delta_{B/A\, arch}$$

2)

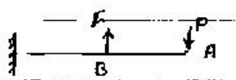


دو تا نکته: ۱) وقتی وزنه به سازه برخورد می‌کند، نیرویی که سازه به وزنه وارد می‌کند و روی وزنه کار انجام می‌دهد، باعث می‌شود انرژی در سازه ذخیره بشود. این نیرو همیشه در راستای برخورد است، پس وزنه هر جوری هم حرکت کند (بعد از برخورد به سازه)، کار این نیرو هم برابر با اندازه‌ی نیرو در جابجایی وزنه در راستای نیرو است، پس کافیست فقط در راستای عمودی فنر بگیریم، کافیه!

E سطح 1 کل هست به تنهایی جذب می‌کند.

سطح 2 را که حداکثر تغییر طول فنر بعد از پایه شدن کامل است را بیابید.

۲) در شرایطی مثل همین مثال، در زمان حداکثر فشردگی فنر، ما شتاب داریم، پس نمی‌توانیم با استفاده از نیروهایی که در این لحظه به تیر وارد می‌شود روابط مقاومت مصالح deflection را (که برای حالت استاتیکی نوشته شده‌اند) بنویسیم.



$$\delta_B = \frac{F\ell}{AE} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{\delta_A|_{P=1}}$$

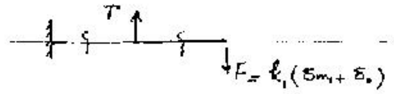
۳) (این یکی بعداً اضافه شد، قرار بود دو تا نکته باشد) فرض می‌کنیم پس از ضربه، همه‌ی نقاط سازه به صورت هم‌فاز ارتعاش می‌کنند.

$$\delta = W(h + \delta_0 + \delta_{m_1}) \Rightarrow \delta_{m_1} \checkmark$$

STAEDTLER

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year: Month: Date:



$F = k_1(\delta_{m_1} + \delta_0)$

می‌گوییم که با یک نیروی T معادل کردن، T بیرون می‌آید $\Rightarrow T = \ldots$

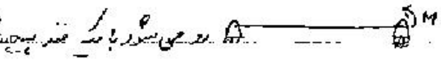
$$U_{تیر} = \int \frac{M^2(x)\,dx}{2EI} \qquad U_{فنر} = \frac{F^2}{2k} = \frac{1}{2} k_{فنر}\, \delta_{m_1}^2 \qquad U_{قبل از ضربه} = U_{تیر} + U_{فنر}$$

با توجه به فشاری جنبی مثل تحلیل‌ها انرژی با U نشان داده می‌شود تحلیل‌ها با E ، هردو یکی هستند.

$$E_2 = -W\delta_{m_2} + \tfrac{1}{2} k_{فنر} (\delta_{m_1} + \delta_{m_2})^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{3EI}{(2l)^3}\right)(\delta_0 + \delta_{m_1} + \delta_{m_2})^2$$

فقط وقتی که تیر ثابت نیرو باشد می‌توانیم بنویسیم $\frac{1}{2}(k_{معادل})(\delta_{تیر})^2$ = انرژی تیر و اگر نیرو نبود نمی‌توانیم یک همچین چیزی بنویسیم.

وقتی داری سیستم رو عوض می‌کنی این فنر معادل باید فقط با یک درجه آزادی سیستم مورد نظر را داشته باشد مثلا سیستم



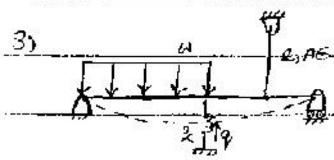
M

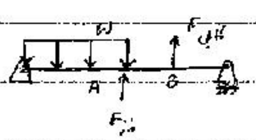
رو می‌شود با یک فنر پیچشی معادل کرد چون M فقط داره θ رو تغییر می‌ده ولی سیستم زیر را نمی‌شود چون

M هم تیر رو بالا می‌بره و هم شیب تغییر می‌ده!

M

3)





$$\begin{cases} \delta_B = \dfrac{F_{کابل}\, l}{AE} \\ \delta_A = \dfrac{F_{فنر}}{k} \end{cases} \Rightarrow F_{فنر}, F_{کابل}$$

$$U_1 = \frac{F_{فنر}^2}{2k} + \int \frac{M^2(x)\,dx}{2EI}$$

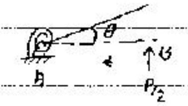
$$\Rightarrow q = ?$$

$$U_2 = \frac{q^2}{2k} + \int \frac{M^{*2}(x)\,dx}{2EI}$$

4) مثال (۵) صفحه ۵۲ کتاب پوپوف mb

ناظر را وسط تیر می‌نشانیم!

همه چیز رو نسبت به زمین می‌سنجیم!

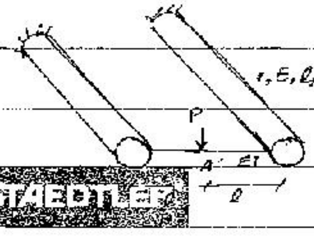


$$M = k\theta \quad \frac{1}{2}\theta \quad 2k$$

$$\delta_{B_x} = \delta_{A_x} + l\,\theta_{A_x} + \delta_{A/B\ \text{canti}}$$

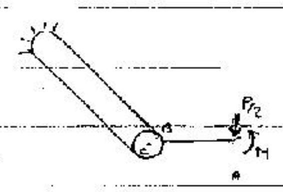
با احتساب حساب شده $\frac{M}{2k} = \frac{Pl/2}{2k}$ ، $\frac{\frac{P}{2} l^3}{3EI}$

5)



$r, E, l, G \qquad \delta_A = ?$

تقارن $\Rightarrow$



$\theta_A = 0$ شیب صفر

SUBJECT :

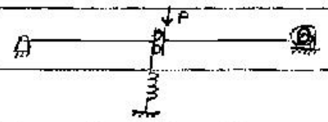
Year ( ) Month ( ) Date ( )

$\theta_A = \theta_{A/B} + \theta_{B/C} + \underbrace{\cancel{\theta_C}}_{0}$, $\theta_{A/B} = \theta_{A/B\,\text{arch}}$, $\theta_{B/C} = \varnothing$

$\theta_A = \left(\frac{P/2\,\ell^2}{2EI} \quad \frac{M\ell}{EI}\right) + \left(\frac{[(P/2)(\ell+r) - M]\times\ell}{GJ}\right) = 0 \Rightarrow M = \checkmark$

$\delta_A = \delta_{A/B} + \delta_{B/C} + \delta_C$, $\delta_{A/B} = \ell\underbrace{\theta_B}_{\varphi} + \delta_{A/B\,\text{arch}}$, $\delta_{B/C} = r \times \varnothing$, $\delta_C = \frac{(P/2)\ell^3}{3EI}$

6)



Engineering Design → Chapter 16 : design of machinery , Norton

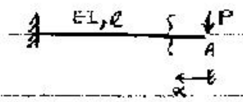
to be a creative engineer you should have → strong basic knowledge, the abilities to visualize, to communicate, to respect what has been done, to see and feel real machinary.

SUBJECT : حل تمرین مقاومت مصالح ۲
Year ( ) Month ( ) Date ( )

۸۸،۳،۶

* کاستیلیانو *

* قضیه: مشتق جزئی انرژی کرنشی متمم نسبت به بار متمرکز خارجی مجازی وارد بر یک نقطه، به طور جبری برابر است با تغییرمکان متناظر آن بار در همان نقطه و در جهت همان بار.

1)  $M(x) = Px \quad 0 \le x \le l$

$$U_{\text{خمشی}} = \int \frac{M^2(x)\,dx}{2EI}\,dx \Rightarrow \delta_{A_v} = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\int \frac{M^2(x)\,dx}{2EI} = \int \frac{M(x)}{EI}\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial P}\,dx$$

$$\Rightarrow \delta_{A_v} = \int_0^l \frac{(Px)x}{EI}\,dx = \frac{Pl^3}{3EI}$$

* تفسیرهای دیگری هم دارد این کاستیلیانو که ما از آن استفاده می‌کنیم: $\frac{\partial U}{\partial(\text{تغییرمکان})}$ = بار اعمال شده

* برای مواد خطی: $U = U^c$

2) تغییرمکان متناظر یک بار: این مفهوم را از روی تعریف کار بیان می‌کنند.

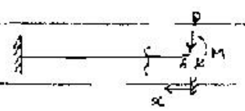
$W =$ (تغییرمکان متناظر همان بار) $\delta \times$ (بار)

تغییرمکان متناظر	بار
δ محوری	نیروی محوری
δ و y (خیز)	بار عرضی P
θ شیب	گشتاور خمشی
ϕ پیچش	گشتاور پیچشی

3) جهت مثبت تغییرمکان را جهت بار خارجی تعیین می‌کند. پس اگر مثلاً تغییرمکان را مثبت بدست آوردیم، یعنی در جهت بار، تغییرمکان داشتیم و کار نیروی خارجی سیستم هم مثبت است.

4) اگر در نقطه‌ای بار متمرکز خارجی در جهت (مربوط به) تغییرمکان مطلوب آن نقطه نداشته باشیم، آن بار را در آن نقطه قرار داده (بار مجازی)، پس از مشتق‌گیری، آن بار را صفر قرار می‌دهیم (استفاده از بار مجازی).

مثال ۵:



$M(x) = Px + M$

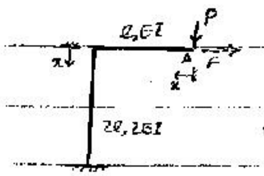
$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M}\Big|_{M=0} = \int \frac{M(x)}{EI}\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial M}\Big|_{M=0} dx = \int_0^l \frac{(Px+\cancel{M})}{EI}(1)\,dx = \frac{Pl^2}{2EI}$$

SUBJECT :

Year : Month : Date :

مثال : اینجا تغییرمکان افقی A را می‌خواهیم ولی بار متمرکز خارجی مربوط به این تغییرمکان

در جهت این تغییرمکان نداریم :



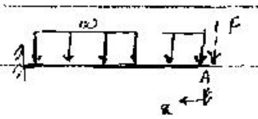
$$M_1(x) = Px \qquad 0 \le x \le l$$

$$M_2(x) = F(x) + Pl \qquad 0 \le x \le 2l$$

$$\delta_{AH} = \frac{\partial U}{\partial F}\Big|_{F=0} = \int \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F}\Big|_{F=0} dx$$

$$\Rightarrow \delta_{AH} = \int_0^{l} \frac{(Px)(0)}{EI} dx + \int_0^{2l} \frac{(Pl)\,x}{(2EI)} dx$$

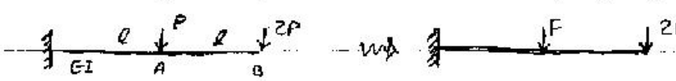
مثال : اینجا بار هست ولی گسترده است.



$$M(x) = \frac{wx^2}{2} + Fx$$

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial F}\Big|_{F=0} = \frac{1}{EI}\int \left(\frac{wx}{2}\right)^2 \cdot x\,dx = \frac{wl^4}{8EI}$$

مثال :



$$\Rightarrow \delta_{A_V} = \frac{\partial U}{\partial F}\Big|_{F=P}$$

نکته دارد اما : در قضیه کاستیلیانو، تمام بارهای خارجی وارد شده می‌بایست پارامتری و متمایز (مستقل) از یکدیگر باشند.

یعنی اینجا کار اشتباهی بود اگر 2P را می‌آوردم توی A و می‌نوشتم $M(x) = 3Px + 2Pl$ بلکه باید به جای P بنویسیم F و

بعد 2P و اندازش رو بیارم توی A و $M(x)$ را بنویسیم.

مثال :

$$\delta_{AH} = \frac{\partial U}{\partial Q}\Big|_{\substack{F = P\cos\alpha \\ Q = P\sin\alpha}} \qquad M(\theta) = FR\sin\theta + Q(1-\cos\theta)R$$

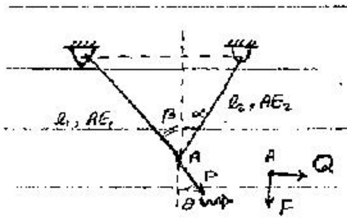
$$\Rightarrow \delta_{AH} = \int_0^{\pi/2} \left[\left(P\cos\alpha\, R\sin\theta + P\sin\alpha\, R(1-\cos\theta)\right) \cdot \left(R(1-\cos\theta)\right) ds\right] \Big/ EI \qquad ds = R\,d\theta$$

$$\delta_{A_V} = \frac{\partial U}{\partial F}\Big|_{\substack{F = P\cos\alpha \\ Q = P\sin\alpha}}$$

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۳

Year: Month: Date:

۵) مثالی از مقاومت مصالح یک :

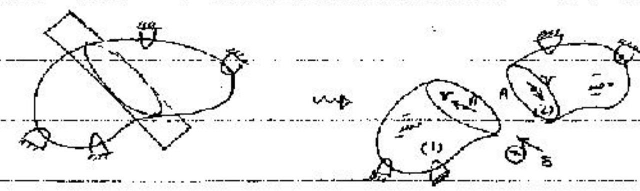


انرژی فنر عبارتست از $\frac{F^2}{2k}$ پس برای محاسبه‌ی انرژی این میله‌ها داریم :

$$F_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} F + \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} Q$$

$$F_2 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} F - \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} Q$$

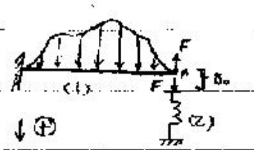
$$U = \frac{F_1^2 l_1}{2A_1E_1} + \frac{F_2^2 l_2}{2A_2E_2} \Rightarrow \delta_{A_H} = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{F_1 l_1}{A_1E_1}\frac{\partial F_1}{\partial Q} + \frac{F_2 l_2}{A_2E_2}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial Q} = \frac{F_1 l_1}{A_1E_1}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{F_2 l_2}{A_2E_2}\cdot\frac{-\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \Bigg| \begin{array}{l} F = \cos\theta \cdot P \\ Q = \sin\theta \cdot P \end{array}$$



* یک سیستم نامعین در نظر بگیرید
اگر یک بار داخلی داشته باشیم
که از اول بررسی ما وجود داشته
و یا داشته بوده‌ایم ، در اینصورت
مشتق انرژی کرنشی مجموع نسبت به بار مجهول داخلی با شرایط ذکر شده صفر است.

$$\delta_{A_1} = \delta_{A_2} \Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial V} = -\frac{\partial U_2}{\partial V} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial V} = 0$$
$$U_1 + U_2 = U$$

۶) حالا اگر شرطی که برای نیروی داخلی ذکر کردیم برقرار نباشد :

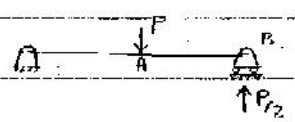


$$\delta_{A_1} = -\frac{\partial U_1}{\partial F} \qquad \delta_{A_2} = \frac{\partial U_2}{\partial F}$$

$$\delta_{A_1} = \delta_0 + \underbrace{\delta_{A_2}}_{\delta_s} \Rightarrow -\frac{\partial U_1}{\partial F} = \delta_0 + \frac{\partial U_2}{\partial F} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial F} = -\delta_0$$

اینجا سیستم ما اول یک بار نبوده و مقدار تنش اولیه نقش داریم ، یا رشته‌ای بجای یک نامعین شده و این نیرو اضافه هم اضافه شده تو کار را
نامعین

● بار خارجی :



$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

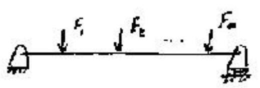
$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial (P/2)} = 2\,\partial U/\partial P = \frac{Pl^3}{24EI} \neq 0$$

پس نسبت به هر نیرویی نمی‌توان مشتق گرفت.

قیودی که ضامن تعادل سیستم است و اگر برش داری یا کم و زیادش کنی، تعادل سیستم به هم می‌خورد، غیر مجاز است.

* پایه‌ی تئوری کاستیگلیانو بر می‌نیمم سازی انرژی پتانسیل است. وقتی سیستم متعادل است و به deflection تعادلی خودش رسیده، انرژی پتانسیل آن می‌نیمم است.

پس باری (برای تئوری کاستیگلیانو) مجاز است، که اگر یک تغییراتی در این بار بدهیم، سیستم باز هم بتواند به تعادل برسد.



F_k : مجاز $\to$ $(F_k - \delta F_k , F_k + \delta F_k)$ ⟸ تعادل ⟸ باز هم تعادل برقرار می‌شود

بنابراین هر سیستم به تعداد معادلات استاتیکی مستقلی که دارد، بار غیر مجاز دارد.

مثلاً در مثال صفحه‌ی قبل اگر P را به $P+\varepsilon$ تبدیل کنیم، بلافاصله در تکیه‌گاه‌ها نیروها از $P/2$ به $P/2+\varepsilon/2$ تبدیل می‌شوند و تعادل برقرار می‌شود ولی اگر اون نیروی $P/2$ را به $P/2+\varepsilon$ افزایش بدهیم، شتاب زاویه‌ای می‌گیرد !!!

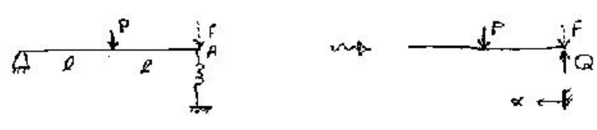
بارهای غیر مجاز سیستم معین به سادگی مشخص می‌شوند ولی در نامعین‌ها، بارهای غیر مجاز، با برداشتن نامعین، بلافاصله به کمک معادلات استاتیکی مشخص می‌شوند.

پس در سیستم نامعین بارهایی را باید به عنوان بار اضافی بگیریم که مجاز باشند.

اگر یک فضای n بعدی در نظر بگیریم که از بارهای سیستم ایجاد تشکیل شده، بارهای مجاز، پارامترهای مستقل این فضا هستند و تغییر دادن یکیشان دیگر پارامترهای این فضا، تغییری در مقدار آنها ایجاد نمی‌کند. بارهای مجاز از همدیگر مستقل هستند ولی بارهای غیر مجاز به بارهای مجاز وابسته هستند. پس بارهای غیر مجاز را می‌توان برحسب بارهای مجاز بدست آورد.

نکته‌ی دیگر آنکه بار مجازی یک نوع بار مجاز است. پس عکس العمل‌هایی که غیر مجاز هستند را باید برحسب بار مجازی بنویسیم.

مثال:



$$M_1(x) = (F-Q)x \qquad Q-F = P/2 \longrightarrow Q = F + P/2 \qquad M_2(x) = (F-Q)x + P(x-\ell)$$

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial F}\bigg|_{F=0} = \int_0^{\ell} \frac{M_1(x)}{EI}\cdot\frac{\partial M_1(x)}{\partial F}dx\bigg|_{F=0} + \int_{\ell}^{2\ell} \frac{M_2(x)}{EI}\cdot\frac{\partial M_2(x)}{\partial F}dx\bigg|_{F=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{Q^2}{2k}\right)\bigg|_{F=0}}_{\frac{Q}{k}\cdot\frac{\partial Q}{\partial F}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial F} = 1$$

اگر حرارت داشته باشیم از بار واحد استفاده می‌کنیم و نه کاستیگلیانو !

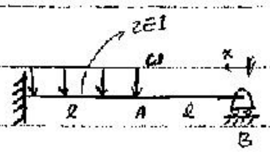
۷) حل مسائل نامعین استاتیکی

در این مسائل به تعداد مجهولات اضافی مان بارمجاز داریم (مجهولات نیرویی اضافی که از حل مسائل استاتیکی بلافاصله بدست نمی‌آیند)

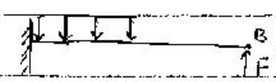
در واقع $\frac{\partial U}{\partial \text{مجهول}} = 0$ جای رابطه‌ی سازگاری را می‌گیرد.

در مسائل نامعین استاتیکی از درجه n، n مجهول نیرویی اضافی که از روابط تعادل استاتیکی بدست نمی‌آیند را انتخاب کرده و به عنوان بارمجاز درنظر می‌گیریم. درصورتیکه این بارها در نقاطی اعمال شده باشند که تغییر مکان متناظر آن نقاط در راستای بار صفر باشد و یا درصورتیکه بارهای انتخاب شده بارهای داخلی سیستم تلقی شوند، $\frac{\partial U}{\partial(\text{این بارها})}$ برابر صفر خواهد بود. بنابراین یک دستگاه n معادله، n مجهول خواهیم داشت که از حل آنها مجهولات نیرویی اضافی بدست می‌آیند.

درحالتیکه بارهای انتخاب شده شرایط بارشده را نداشته باشند، مانند مثال ذکر شده در نکته‌ی ۵ حل کرده و رابطه‌ی سازگاری را تصحیح می‌کنیم. (مجهولات نیرویی که غیر از آن n بار در مسئله ظاهر می‌شوند، بارغیرمجازند و درنتیجه باید برحسب بارهای مجاز، به کمک روابط تعادل استاتیکی بازنویسی شوند.)



$\theta_B = ?$ ۶



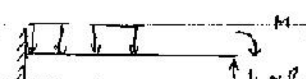
$\frac{\partial U}{\partial F} = 0 \qquad M_1(x) = Fx \qquad 0 \leq x \leq l$

$$M_2(x) = F(l+x) - \frac{\omega x^2}{2} \qquad 0 \leq x \leq l$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^l \frac{M_1(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M_1(x)}{\partial F} dx + \int_0^l \frac{M_2(x)}{(2EI)} \cdot \frac{\partial M_2(x)}{\partial F} dx = \int_0^l \frac{Fx \cdot x}{EI} dx + \int_0^l \frac{\left[F(l+x) - \frac{\omega x^2}{2}\right](l+x)}{(2EI)} dx = 0$$

$\Rightarrow F = \checkmark$ (مثلاً $= \frac{1}{2}\omega l$)

حالا شروع می‌کنیم به حل کردن شکل زیر:

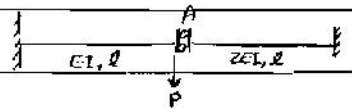


نکته‌ی اخلاقی (با توجه به شرط بندی جناب ملکی): در مسائل نامعین، حتماً اول نامعینی را رفع کنید، بعد بروید سراغ الگوریتمی که یاد گرفتید (در کاستیلیانو) برای پیدا کردن خواسته‌ی مسئله!

SUBJECT :

Year : Month : Date :

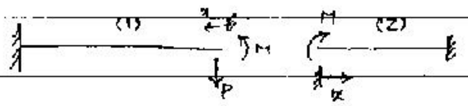
③ یه مثال دیگه از ناهمگن‌ها ! $\theta_A , \delta_{A-} = ?$



اینجا مثل توابع تکین نیست که برای ناپیوستگی تغییر شکل در A یه ضریب بذاری و خودش خود درب بیاد . باید تغییر شکل‌های دو طرف رو جدا جدا حساب کنی . اینجا با توجه به شرایطی که برای شیب داشتیم

در دو شکل

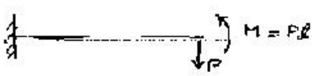
$\frac{\partial U}{\partial M}$ در A صفره !



$M_1(x) = Px - M \qquad M_2(x) = M$

$$\underset{\text{M داخلی}}{\frac{\partial U}{\partial M}} = 0 \Rightarrow \int_0^l \frac{(Px - M)(-1)}{EI} dx + \int_0^l \frac{(M)(1)}{(2EI)} dx = 0 \Rightarrow \underset{\text{داخلی}}{M} = Pl$$

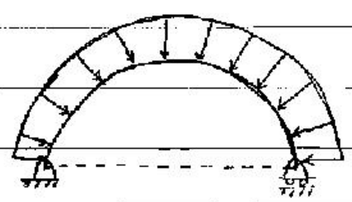
چون سیستم ۱ به تنهایی معینه، پس جوابی که براش بدست میاریم برای نامعین خواهد بود .



برای بدست آوردن θ ، اول با M برو جلو ، آخرش بعد از انتگرال‌گیری مقدار Pl را جایگذاری کن !

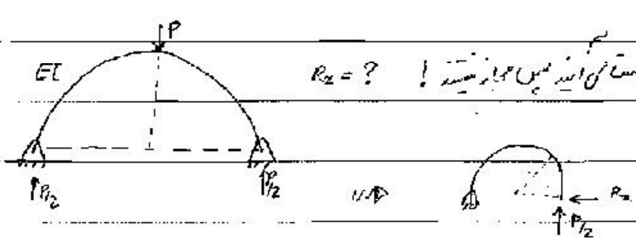
$$\theta_A = \theta_{A-} = \frac{\partial U}{\partial M}\Big|_{M=Pl} = \int_0^l \frac{(Px - M)}{EI}(-1)dx \Big|_{M=Pl} = \dots$$

$$\delta_{A-} = \frac{\partial U}{\partial P}\Big|_{M=Pl} = \int_0^l \frac{(Px - M)x \, dx}{EI}\Big|_{M=Pl} = \dots$$



برو فکر کن چیکار باید کرد ؟

☺ اینجا چون reaction ها با استفاده از استاتیک بدست نمیان پس مجهوله ! $R_x = ?$



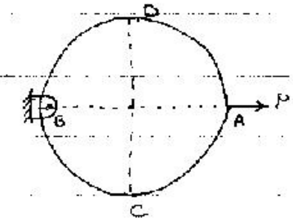
$$M(\theta) = \frac{P}{2} R (1 - \cos\theta) - R_x R \sin\theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_x} = 0 \Rightarrow 2\int_0^{\pi/2} \frac{M(\theta)}{EI} \cdot \frac{\partial M(\theta)}{\partial R_x} \cdot R\,d\theta = 0 \Rightarrow R_x = \dots \checkmark$$

STAEDTLER®

SUBJECT حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year (Month (Date (

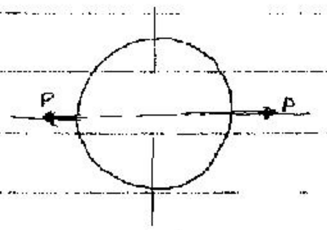


(ت) بیابید $\delta_{A,B}$ و $\delta_{C,D}$ را!

این حلقه‌ها از نظر استاتیکی سه درجه نامعین است!

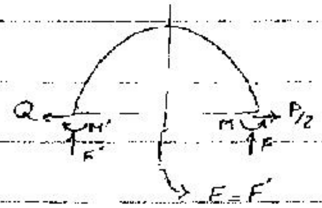
اگر محدودیت تغییر مکانی را در نظر نگیریم، دو تا صفحه تقارن دارد!

(چون تغییر مکان های خواسته شده نسبی هستند، در نظر نگرفتن محدودیت تغییر مکانی مشکلی ایجاد نمی‌کند)



هر صفحه‌ی تقارن یک درجه از درجات نامعینی کم می‌کند.

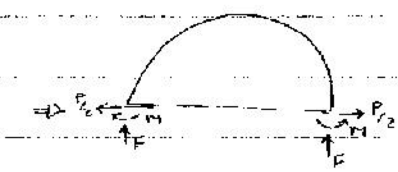
از صفحه تقارن افقی نتیجه گرفتیم به غیر از $P/2$ نیروی برشی دیگری ندارد.



$E = F'$

$M = M'$

$Q = P/2$



$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 2F = 0 \rightarrow F = 0$

می‌شد به جای نوشتن روابط تعادل استاتیکی، با استفاده از این واقعیت که نیروی برشی در صفحه تقارن صفر است و با در نظر گرفتن صفحه تقارن عمودی، صفر بودن F را بدست بیاوریم.

اگر کل دایره را در نظر بگیری $\frac{\partial U}{\partial M} = 0$ است چون M داخلی و اگر ربع دایره یا نیم دایره را در نظر بگیریم، $\frac{\partial U}{\partial M} = 0$ است

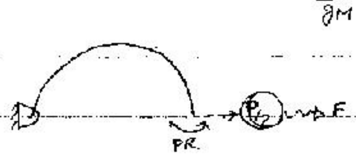
چون بنا بر تقارن شیب در آن نقطه که M دارد می‌شود صفر است!

برای راحتی محاسبات، ربع دایره را در نظر می‌گیریم:

$M(\theta) = \frac{P}{2} R \sin\theta + M$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = 0 \rightarrow \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{P}{2} R \sin\theta + M\right)(1)\, R\, d\theta = 0 \rightarrow M = \dots \checkmark$$

یعنی $= PR$



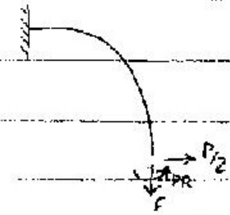
$\delta_{A,D} = \frac{\partial U}{\partial F}\Big|_{F = P/2}$ با تقارن $\delta_{A,B_H} = 2\,\delta_{A,D_H}$

چون شیب در D صفر است، D را گیردار می‌کنیم.

$\delta_{DC_V} = 2\,\delta_{D/A_V} = -2\,\delta_{A/D_V}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



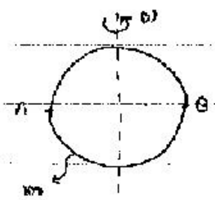
$$\frac{\partial U}{\partial F}\Big|_{F=0} = \delta_{AD}$$

دو روز بعد از جشن
(جواب میدم)

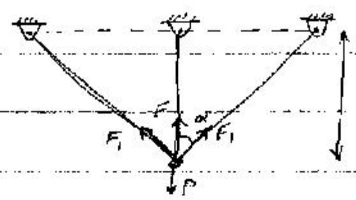
مثال تجاری : حل اینکه حلقه این با جرم داره ! (وجود mg در مقطع بگیرید)

پیدا کنید δ_{AB} را لطفاً.

خودتون حل کنید!



لازم میدانم :

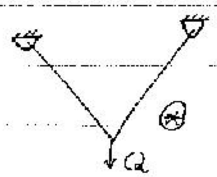


$$\frac{\partial U}{\partial F} = 0$$

$$2F_1\cos\alpha + F = P \Rightarrow F_1 = \frac{P-F}{2\cos\alpha}$$

$$U = \frac{2F_1^2 l_1}{2AE} + \frac{F^2 l_2}{2AE} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{2F_1 l_1}{AE}\frac{\partial F_1}{\partial F} + \frac{F l_2}{AE} = \frac{2(P-F)}{(2\cos\alpha)}\left(\frac{-1}{2\cos\alpha}\right) + \frac{F l_2}{AE} = 0 \Rightarrow F = \ldots$$

(مثلاً $= P/3$)



$$\frac{\partial U^{*}}{\partial Q}\Big|_{Q=P-P/3=2P/3} = \delta$$

کار مجازی :

δ(کار مجازی) = (بار حقیقی) × δ(تغییر مکان مجازی)

وقتی کار مجازی داریم که یا بار یا تغییر مکان ما مجازی باشد.

اگر نیروی داخلی یا خارجی داشته باشیم، کار داخلی یا خارجی داریم.

به تعداد درجات آزادی مستقل سیستم، به سیستم تغییر مکان های مستقل مجازی کوچک "سینماتیکی مجاز" باشند!

اصل کار مجازی : کار مجازی خارجی با کار مجازی داخلی برابرند.

در استاتیک با توجه به این اصل می‌گفتیم که کاری و یا انرژی ای برای جسم صلب صفر است (جایی گفتیم!)

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year: Month: Date:

اصل کار مجازی ــ اصل سکون انرژی پتانسیل ← اصل کار مجازی $\frac{\partial U}{\partial \delta} = P$

اصل کار مجازی متمم:

(تغییر مکان حقیقی) δ . (بار مجازی) = (کار مجازی متمم) $\bar{\delta}$

کار مجازی متمم داخلی = کار مجازی متمم خارجی

روش کار: تمام بارگذاری سیستم حتی حرارت و رطوبت را حذف می‌کنیم، بعد بار مجازی را می‌گذاریم که سیستم یک تغییر مکان مجازی پیدا می‌کند. حالا بارگذاری اصلی سیستم را می‌گذاریم و سیستم را دادامه، دچار یک تغییر مکان حقیقی می‌شود و این بار مجازی که گذاشته بودیم هم دچار این تغییر مکان حقیقی می‌گردد و کار انجام می‌دهد.

به عنوان مثال:

$F_{\text{داخلی مجازی}} = P$

کار مجازی متمم خارجی $= P \times \frac{Ql}{AE}$

برای سازه‌ای هستی!

$\frac{Q\,dx}{AE}$ طول جسم تغییر مکان حقیقی المان داخلی

کار مجازی داخلی متمم $= \int_0^l \left[P \cdot \frac{Q\,dx}{AE}\right] = \frac{PQl}{AE}$

روش کار به طور کلی: همه‌ی بارگذاری روی سیستم را برداره، در نقطه‌ای که تغییر مکان را می‌خواهیم یک بار مجازی واحد بگذار، حالا بارگذاری اصلی را بگذار، بار مجازی یک واحد، یک کار مجازی متمم انجام می‌دهد برابر با تغییر مکان آن نقطه در جهت بار!

کار مجازی متمم داخلی $= \delta_A \times 1 =$ کار مجازی متمم خارجی

	بار مجازی داخلی	تغییر مکان حقیقی داخلی	کار مجازی متمم داخلی
بارگذاری محوری	$f(x)$	$\frac{F(x)\,dx}{AE}$	$\int f(x)\,\frac{F(x)\,dx}{AE}$
خمشی	$m(x)$	$(\theta =)\ \frac{M(x)\,dx}{EI}$	$\int m(x)\,\frac{M(x)\,dx}{EI}$
پیچشی	$t(x)$	$(\varphi =)\ \frac{T(x)\,dx}{GJ}$	$\int t(x)\,\frac{T(x)\,dx}{GJ}$

روش کاستیلیانو از اصل ← اصل سکون انرژی پتانسیل متمم ← اصل کار مجازی متمم

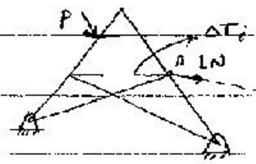
(در سیستم سازی) $\left(\frac{\partial U}{\partial Q_{\text{خارج}}}\right)$

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

روش بار واحد برای مسائل معین به کار برده می‌شود.



(از استاتیک حساب می‌شود) نیروهای مجازی داخلی f_i

F_i

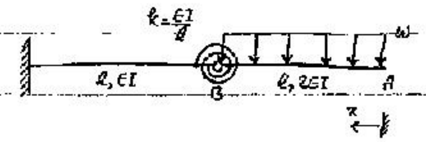
$$\text{کار مجازی سیستم خارجی} = 1 \times \delta_A = \sum_{i=1}^{N} f_i \times \left(\frac{F_i\, l_i}{A_i E_i} + \alpha_i l_i \Delta T_i\right)$$

علامت F و f کششی ⇐ مثبت برای کرنش

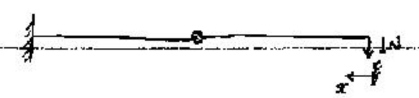
$\Rightarrow \delta_A = \checkmark$

88/3/12

مثال) $\theta_B\ ,\ \delta_A = ?$



این سؤال رو نمی‌شود با کاستیلیانو حل کرد، چون اگر از B جدا کنیم، AB معین نیست.



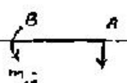
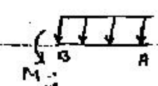
$m(x) = 1 \times x \qquad 0 \le x \le 2l$

$M_1(x) = \frac{wx^2}{2} \qquad 0 \le x \le l$

$M_2(x) = wl(x - l/2) \qquad l \le x \le 2l$

$\text{کار سیستم خارجی} = 1 \times \delta_A$

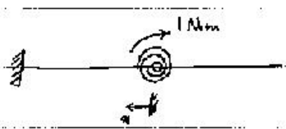
$\text{کار سیستم داخلی} = \int \frac{m(x)M(x)\,dx}{EI}$

$m_{\text{فنر}}$:  $m_{\text{فنر}} = 1 \times l$  $M_{\text{فنر}} = \frac{wl^2}{2}$

$\theta_{\text{فنر}} = \frac{wl^2}{2k} = \frac{wl^3}{2EI}$

$$\delta_A = \int_0^{l} \frac{(1\times x)}{2EI} \cdot \frac{wx^2}{2}\,dx + \int_l^{2l} \frac{(1\times x)(wl)(x - l/2)}{EI}\,dx + \frac{wl^3}{2EI} \times 1 \times l$$

در حالت اول m صفر است پس M را حساب نمی‌کنیم



مستقل از استاتیک $m_{\text{فنر}} = 1\ N.m \qquad m(x) = 1\ Nm \quad 0 \le x \le l$

$M(x) = wl(x + l/2) \qquad 0 \le x \le l$

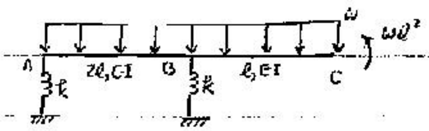
$$1 \times \theta_{B_+} = \int_0^{l} \frac{(1)\,wl(x + l/2)}{EI}\,dx + \frac{wl^3}{2EI}(1\,N.m)$$

۳۴

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

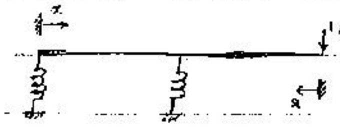
Year: Month: Date:

سوال ۱ :

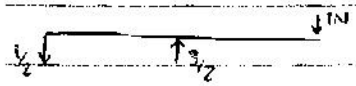


$\theta_A = ?$ $\delta_C = ?$ $k = \frac{EI}{l^3}$

بارگذاری را برداشته و 1N قرار می‌دهیم.

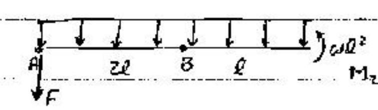


$m_1(x) = 1 \times x \qquad 0 \le x \le l$ ⊕



$m_2(x) = \frac{1}{2}x$ ⊕

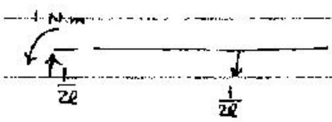
$M_1(x) = \frac{\omega x^2}{2} - \omega l^2$ ⊕



$M_2(x) = \left(-\frac{5}{4}\omega l\right)x + \frac{\omega x^2}{2} \qquad 0 \le x \le 2l$

$2lF + \frac{1}{2}l \cdot 3\omega l + \omega l^2 = 0 \rightarrow F_A = -\frac{5}{4}\omega l \downarrow \qquad F_B = \frac{7}{4}\omega l \uparrow$ ⊕

$$1 \times \delta_C = \frac{1}{EI}\int_0^{l}(x)\left(\frac{\omega x^2}{2} - \omega l^2\right)dx + \int_0^{2l}\left(\frac{1}{2}x\right)\left(-\frac{5}{4}\omega l x + \frac{\omega x^2}{2}\right)dx + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\frac{7}{4}\omega l}{EI/l^3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-\frac{5}{4}\omega l}{EI/l^3}\right)$$

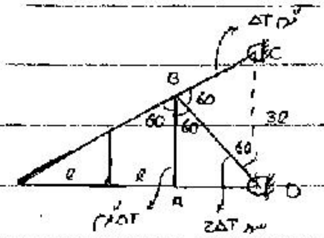


$m(x) = \frac{1}{2l}x - 1$

$M(x) = \frac{5}{4}\omega l x - \frac{\omega x^2}{2}$

$$1 \times \theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^{2l}\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{5}{4}\omega l x - \frac{\omega x^2}{2}\right)dx + \left(\frac{1}{2l}\right)\left(\frac{\frac{5}{4}\omega l}{EI/l^3}\right) + \left(\frac{1}{2l}\right)\left(\frac{-\frac{7}{4}\omega l}{EI/l^3}\right)$$

سوال ۲ :

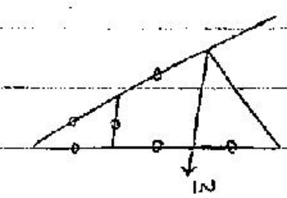


$\delta_{Av} = ?$

$f_{AB} = 1N \qquad f_{BC} = 1N$ (متساوی‌الاضلاع، زاویه 60°) $f_{BD} = -1N$

$1 \times \delta_A = f_{AB} \cdot (\alpha l_{AB} \cdot \Delta T_{AB}) + f_{BC}(\alpha l_{BC} \cdot \Delta T_{BC}) + f_{BD}(\alpha l_{BD} \Delta T_{BD})$

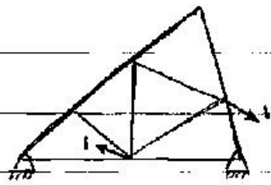
$= 1\alpha\left(\frac{2\sqrt{3}l}{3}\right)(\Delta T) + (1)(3l\alpha\Delta T) + (-1)(\alpha \times 8l(-2\Delta T))$

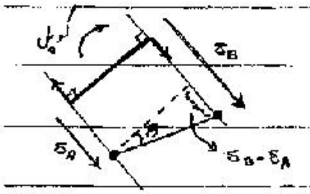


مثال: طول میله چقدر دوران می‌کند؟

خرپا گسسته و تحمل نمی‌کند چون تمام اعضاء اعضای دونیرویی اند که

به جای گذاشتن گشتاور متمرکز ساده ۱ یک کوپل قرار می‌دهیم





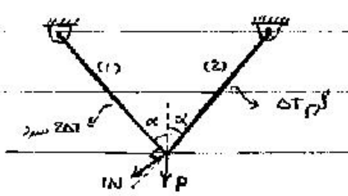
$\delta_B - \delta_A = \ell\theta$

$$\theta = \underbrace{\frac{1}{\ell}\delta_B}_{\text{کار در B}} - \underbrace{\frac{1}{\ell}\delta_A}_{\text{کار در A}}$$

جابجایی نسبی

$\ell\theta = 1\times\delta_B - 1\times\delta_A$

مثال:



$\theta_{AB} = ?$

$f_1 = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}(1N)$

$f_2 = \frac{1}{\sin 2\alpha}(1N)$

$\ell\theta = f_1\left(\frac{F_1\ell}{AE} - 2\alpha\ell\Delta T\right) + f_2\left(\frac{F_2\ell}{AE} + \alpha\ell\Delta T\right)$

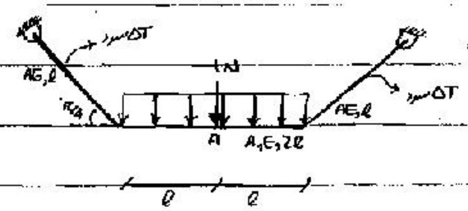
$F_1 = F_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}P$

$F_1 = F_2 = \frac{P}{2\cos\alpha}$

$\ell\theta = 1\times\delta_B - \cancel{1\times\delta_A} = 1\times\delta_B$

مثال:

$\delta_{A_V} = ?$



$F_{\text{میله}} = \sqrt{2}\,\omega\ell$ $\qquad F_{\text{تیر}} = \omega\ell$

$M(x) = \left(\omega\ell x - \omega x^2/2\right) \qquad 0\le x\le\ell$

$f_{\text{میله}} = \sqrt{2}/2 \qquad (f_{\text{تیر}}\ \text{افقی}) = \frac{1}{2} \qquad m(x) = \frac{1}{2}x$

$$1\times\delta_A = 2\int\frac{m(x)M(x)}{EI}dx + 2\int\frac{f_{\text{تیر}}F_{\text{تیر}}\,dx}{AE} + 2\left[f_{\text{میله}}\left(-\alpha\ell\Delta T + \frac{F_{\text{میله}}\ell}{AE}\right)\right]$$

اصل سکون انرژی پتانسیل:

اگر یک تابعی به اسم انرژی پتانسیل را حساب کنیم (همراه به تعادل رسیدن سیستم و قبل از آن) در حالت تعادل انرژی پتانسیل اکسترمم می‌شود.

اصل سکون انرژی پتانسیل: میدان تغییر مکان سینماتیکی مجازی که سیستم را به حالت تعادل استاتیکی در می‌آورد، انرژی پتانسیل را اکسترمم می‌کند و برعکس.

اصل سکون انرژی پتانسیل متمم: میدان نیروهای مجازی که سیستم را به حالت تعادل در می‌آورد، انرژی

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲
Year: Month: Date:

پتانسیل مجموع را اکسترمم می‌کند.

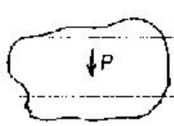
$$\Pi = U - W \qquad W = P_{\text{خارجی}} \cdot \delta_{\text{خارجی}} \quad \text{یا} \quad M_{\text{خارجی}} \cdot \theta_{\text{خارجی}}$$

U ← انرژی کرنشی

W ← کار خارجی پتانسیل (و $\frac{1}{2}$ ندارد)

$$\Pi^c = U^c - W$$

متغیرهای تغییرپذیر



$$y = a_1 \square + \dots + a_n \square \qquad y(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \, \underbrace{e_k(x)}_{\text{توابع پایه}} \qquad e_k(x) = \sin kx \;\; \text{یا} \;\; e^{kx} \;\; \text{یا} \dots$$

$$\Pi = \Pi(a_1, \dots, a_n)$$

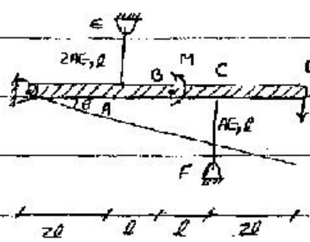
شرایط توابع پایه:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0 \end{cases}$$

e_k ها باید در شرایط مرزی هندسی صدق کنند.

۸۸/۳/۱۳

مثال: $F_{AE} = ?$



$$U = \frac{1}{2}\frac{2AE}{\ell}(2\ell\theta)^2 + \frac{1}{2}\frac{AE}{\ell}(4\ell\theta)^2 = 12AE\ell\theta^2$$

$$W = P(6\ell\theta) - M\theta$$

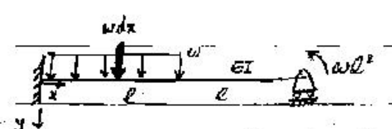
$$\Rightarrow \Pi = 12AE\ell\theta^2 - 6P\ell\theta + M\theta$$

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 0 \Rightarrow 24AE\ell\theta - 6P\ell + M = 0 \qquad \theta = \frac{1}{4}\frac{P}{AE} - \frac{M}{24\ell AE}$$

$$F_{AE} = \left(\frac{2AE}{\ell}\right)(2\ell\theta) = \checkmark \to P - \frac{M}{6\ell} \qquad F_{CF} = \left(\frac{AE}{\ell}\right)(4\ell\theta) = \checkmark$$

از استاتیک: $F_{AE} = P - \frac{M}{2\ell}$

مثال:



در A، y و مشتق آن باید صفر شود ← x^2 نیاز داریم. به علاوه y باید در شرایط مرزی $(x=2\ell, y=0)$ هم صدق کند. ← x^2 را در $(x-2\ell)$ ضرب می‌کنیم. چون درجه انرژی ما y از درجه 4 است. ← باید در ترم $(ax+b)$ ضرب کنیم:

$$y(x) = x^2(x-2\ell)(ax+b) = ax^4 - (2a\ell - b)x^3 - 2b\ell x^2$$

دستگاه مختصات خیلی مهم است. با توجه به این دستگاه، θ در جهت ساعتگرد مثبت است.

$$U = \int_0^{2\ell} \frac{1}{2} EI y''^2 \, dx = U(a, b)$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

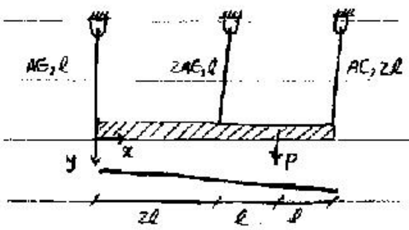
کار خارجی پتانسیل $W = \int_0^{l} (\omega dx)\, y(x) + \omega l^2 \left(-y'(2l)\right) = W(a,b)$

چون جهت θ ناشی از ωl^2 خلاف جهت θ مثبت قراردادی است.

$y'(2l) = 4a(2l)^3 - 3(2al - b)(2l)^2 - 4bl(2l)$

$\Pi = U - W = \Pi(a,b)$ $\quad \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow a, b$ ✓

مثال: نیروی میله‌ها؟



بدو جسم آزادی دارد، پایین می‌آید کمی هم دوران می‌کند.

شکل تیر بعد از تغییر شکل به صورت مقابل است ⇐

$y(x) = ax + b$

$U = \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{l}\right) y^2(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{2AE}{l}\right) y^2(2l) + \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{2l}\right) y^2(4l) = U(a,b)$

$W = P\, y(3l)$

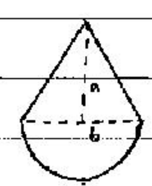
$\Pi = U - W = \Pi(a,b)$ $\quad \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow a, b$ ✓

$F_1 = \left(\frac{AE}{l}\right) y(0) = \frac{AE}{l} b$ ✓

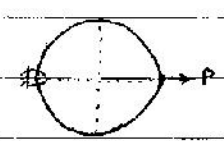
$F_2 = \left(\frac{2AE}{l}\right) y(2l) = \frac{2AE}{l}(2al + b)$ ✓

$F_3 = \frac{AE}{2l} \cdot y(4l) = \frac{AE}{2l}(4al + b)$ ✓

مثال: نسبت a به b را طوری حساب کنید که هر طوری قرار بگیرد در حالت تعادل باشد



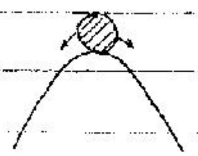
مثال: سؤال چنین صفحه‌ای را با استفاده از مینیمم سازی انرژی پتانسیل حل کنید



STAEDTLER

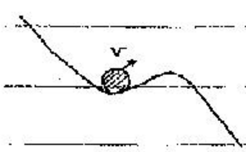
● پایداری تعادل :

تعادل پایدار : یک بازه‌ی تغییر مکانی وجود دارد که اگر جسم را در آن بازه کمی تغییر مکان دهیم، سیستم نوسان می‌کند و سرانجام در همان جای قبلی به تعادل می‌رسد.

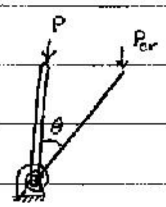


تعادل ناپایدار : نمی‌توانیم بازه بالا را پیدا کنیم و در اثر تغییر مکان (با هر پارامتر دیگری) سیستم در مکان (پارامتر) جدیدی پایدار می‌شود. (ممکن است هیچ جا به پایداری نرسد)

تعادل خنثی : در جاهای جدید هم به تعادل می‌رسد ولی مطمئن هستیم که می‌رسد.



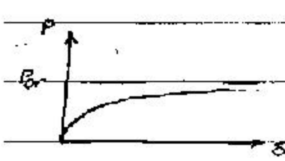
علاوه بر پارامترهای هندسی، پارامترهای فیزیکی هم می‌توانند پایداری یا ناپایداری سیستم را تغییر دهند. مثلاً در شکل مقابل پارامتر فیزیکی مورد نظر v (سرعت) است. اگر سرعت کم باشد جسم در همان جای قبلی خود به تعادل می‌رسد (تعادل پایدار) اما اگر سرعت خیلی زیاد باشد جسم دچار تعادل ناپایدار خواهد شد.



$P < P_{cr}$ تعادل پایدار

$P = P_{cr}$ تعادل خنثی

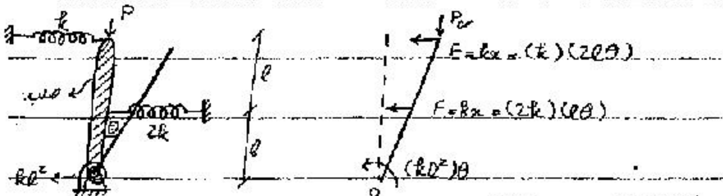
$P > P_{cr}$ تعادل ناپایدار



یک نیرویی وجود دارد که به ازای آن نیروی ثابت، deflection های متفاوت می‌دهد. این نیرو همان بار بحرانی است. وقتی این بار بحرانی به جسم اعمال می‌شود، شکل تیر را به هر طوری تغییر دهیم، به همان شکل باقی می‌ماند.

مثال :

● روش تعادل استاتیکی :



$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow P_{cr}(2l\theta) = kl^2\theta + (2kl\theta)l + (2kl\theta)(2l)$$

$$\Rightarrow P_{cr} = ✓$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

برای سیستم‌هایی که تعداد اعضای متصلشان کم است، روش تعادل استاتیکی خوب است.

* توجه توجه : P_{cr} به θ بستگی ندارد *

روش بقای انرژی :

$U = W_{ext}$

کار خارجی (کار جابجایی)

$\parallel$

کار پتانسیل

در کمانش : $\sin\theta \simeq \theta$ و $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

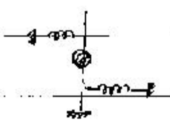
$$U = \underbrace{\tfrac{1}{2}(kl^2)\theta^2}_{\frac{1}{2}k\theta^2} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(2k)(l\theta)^2}_{\frac{1}{2}k\delta^2} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(k)(2l\theta)^2}_{\frac{1}{2}k\delta^2}$$

$(1-\cos\theta)2l$ θ

$$W = P_{cr}(2l)(1-\cos\theta) = P_{cr}\,2l\frac{\theta^2}{2}$$

$U = W \Rightarrow P_{cr} = ✓$

این روش فقط یک معادله به ما می‌دهد پس اگر شکل دو درجه آزادی داشت نمی‌توانیم از این روش استفاده کنیم



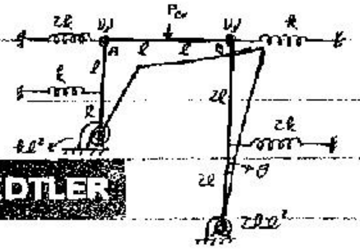
روش مانایی انرژی پتانسیل :

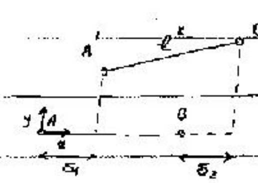
$$\Pi = U - W \longrightarrow \Pi = \Pi(\theta) \rightarrow \frac{d\Pi}{d\theta} = 0 \longrightarrow P_{cr} = ✓$$

θ^2 تا

$$\text{اگر}\quad \Pi = \Pi(\theta_1, \theta_2) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \rightarrow P_{cr} = ✓$$

مثال ۸ :





STAEDTLER

SUBJECT: حل تمرین مسائل پایداری ۲
Year: Month: Date:

(*) چون صلب است: $\delta_2-\delta_1=0 \Rightarrow \delta_1=\delta_2$

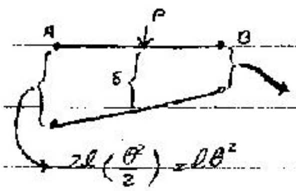
جابجایی سر دو تیر عمودی با هم برابر است. طبق بالا

$$2l\theta = 4l\varphi \Rightarrow \varphi=\frac{\theta}{2}$$

$$U=\frac{1}{2}(kl^2)\theta^2+\frac{1}{2}k(l\theta)^2+\frac{1}{2}(2k)(2l\theta)^2+\frac{1}{2}k(4l\varphi)^2+\frac{1}{2}(2k)(2l\varphi)^2+\frac{1}{2}(2kl^2)\varphi^2$$

$$(*)\ l^2=(X_A-X_B)^2+(Y_A-Y_B)^2 \Rightarrow l\,dl=(X_A-X_B)(dX_A-dX_B)+(Y_A-Y_B)(dY_A-dY_B)$$

$$\Rightarrow dX_A=dX_B$$



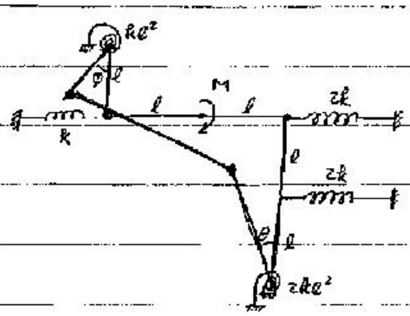
$$4l\frac{\varphi^2}{2}=\frac{l\theta^2}{2}$$

$$2l\underbrace{\left(\frac{\theta^2}{2}\right)}_{1-\cos\theta}=l\theta^2$$

$$\delta=\frac{\delta_A+\delta_B}{2}=\frac{3}{4}l\theta^2$$

$$W=P_{cr}\cdot\delta=P_{cr}\left(\frac{3}{4}l\theta^2\right)\Rightarrow P_{cr}=?$$

مثال ۲:



$$2l\theta=l\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi=2\theta}$$

$$U=\frac{1}{2}(kl^2)\varphi^2+\frac{1}{2}k(l\varphi)^2+\frac{1}{2}(2k)(2l\theta)^2+\frac{1}{2}k(l\theta)^2+\frac{1}{2}(2kl^2)\theta^2$$

$$\frac{2l\theta^2}{2}$$

$$2l\theta^2=l\frac{\varphi^2}{2}$$

$$\alpha=\frac{\delta_A+\delta_B}{2l}=\frac{3l\theta^2}{2l}=\frac{3}{2}\theta^2$$

$$W=M_{cr}\cdot\frac{3}{2}\theta^2 \Rightarrow W=U \Rightarrow M_{cr}=?$$

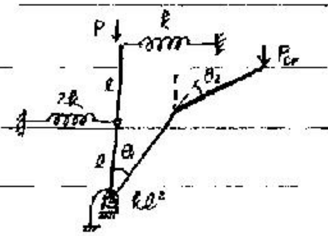
اگر شکل تحت کشش باشد، هیچ وقت ناپایدار نمی شود.

حالا در شکل بالا اگر جهت M برعکس باشد، تیرهای عمودی تحت کشش قرار خواهند گرفت و هیچ وقت ناپایدار نمی شود.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

سوال :



$$\pi = U - W$$

$$U = \frac{1}{2}(k\ell^2)\theta_1^2 + \frac{1}{2}(2k)(\ell\theta_1^2) + \frac{1}{2}k[\ell\theta_1 + \ell(\theta_1+\theta_2)]^2$$

$$W = P_{cr}\cdot\left[\ell\,\frac{(\theta_1+\theta_2)^2}{2} + \ell\,\frac{\theta_1^2}{2}\right]$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial\theta_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial\theta_1} = \frac{\partial W}{\partial\theta_1}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial\theta_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial\theta_2} = \frac{\partial W}{\partial\theta_2}$$

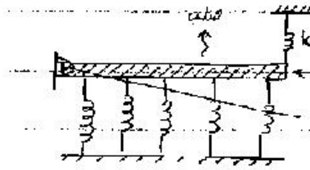
$$k\ell^2\theta_1 + 2k\ell^2\theta_1 + k[2\ell\theta_1 + \ell\theta_2](2\ell) = \frac{1}{2}P_{cr}[2\ell(\theta_1+\theta_2) + 2\ell\theta_1]$$

$$\rightarrow k[2\ell\theta_1 + \ell\theta_2]\ell = \frac{1}{2}P_{cr}[\ell(\theta_1+\theta_2)]$$

$$[A]\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

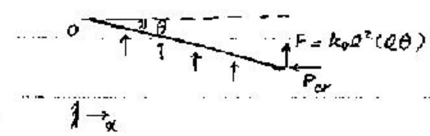
برای اینکه به ازای هر θ_1 و θ_2 ای جواب داشته باشد.

۸۸٫۳٫۱۶



مثال (۱۰) : $P_{cr} = ?$

اگر تکیه به جای اینکه لولا باشد به دیوار چسبیده باشد، سخت می‌شود. دو درجه آزادی می‌شود، θ_1 و θ_2 می‌گیریم و حل می‌کنیم!



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow P_{cr}\, l\theta = (k_0 l^2 \theta)\cdot l + \int_0^l x\,(k(x)\,dx)\,\theta x$$

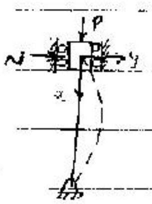
$$P_{cr} = k_0 l^2 + \frac{k_0}{4} l^3 = \frac{5}{4} k_0 l^3$$

کمانش :

کمانش در واقع ناپایدار شدن ستون های الاستیک است. ما به بررسی نوعی از کمانش که خمشی است می‌پردازیم.

برای این کار ستون ها را به دو دسته تقسیم می‌کنند:

الف - ستون های بلند : طول ستون به اندازه‌ی کافی (که بعداً می‌گوییم چقدر و چگونه "کافی" به شمار می‌آید) از ابعاد سطح مقطع بزرگتر باشد. در این ستون ها از رابطه‌ی $EI y'' = M(x)$ استفاده می‌کنیم.

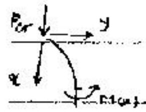


در مورد مثل شکل روبه‌رو به ازای یک P خاص (P_{cr})، اگر به تیر یک ضربه کوچک در راستای افقی بزنیم شکلش تغییر می‌دهد و همین شکلی هم می‌ماند در حالیکه اگر P کمتر از این مقدار باشد، شکل تغییر شده دوباره صاف می‌شود.

این معادله‌ی $EI y'' = M(x)$ به مسائل مقدار ویژه، بردار ویژه منجر می‌شود.

در مثال بالا :

چون از حرکت جسم در راستای افقی جلوگیری کرده‌ایم، ممکن است یک N به آن وارد شود ولی اگر حول لولا یک لنگر بگیریم مقدار این N، صفر به دست می‌آید. $N \cdot l = 0 \Rightarrow N = 0$



$$P_{cr}\cdot y(x) + M(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{EI y'' + P_{cr}\cdot y = 0}_{\text{همگن}} \Rightarrow y'' + \underbrace{\left(\frac{P_{cr}}{EI}\right)}_{\lambda^2} y = 0$$

شکل کلی این معادله به صورت $EI y'' + P_{cr}\cdot y = f(x)$ است که اینجا چون N صفر به دست آمده گشتاور Nx هم صفر بوده و $f(x)$ صفر است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$\Rightarrow y'' + \lambda^2 y = 0 \Rightarrow y = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$, B.Cs $\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow B=0 \\ y(l)=0 \Rightarrow A\sin\lambda l = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\sin\lambda l = 0} \Rightarrow \lambda l = k\pi$

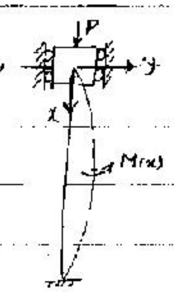
به معادله‌ای که از دل آن λ ها و در نتیجه P_{cr} بدست می‌آید، می‌گویند معادله مشخصه می‌گویند!

$\lambda^2 l^2 = k^2\pi^2 \Rightarrow \frac{P_{cr} l^2}{EI} = k^2\pi^2 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k^2\pi^2 EI}{l^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

وقتی سیستم به بار بحرانی دچار می‌شود، به تعادل خنثی می‌رسد. یعنی اگر یه کم از این وضع خارجش کنیم در این وضع جدید هم تعادل خواهد داشت.

جوابهای ما یه خانواده از $A\sin\lambda x$ ها هستند که مقدار A هم به بزرگی ضربه‌ای که به تیر می‌زنیم وابسته است.

دقت کن اینجا y(x) به دست نمی‌آید و فقط به کمک B.Cs ها P_{cr} بدست می‌آید (که مسئله مقدار ویژه است)



$M(x) + P_{cr}\cdot y = Nx \Rightarrow EIy'' + P_{cr}y = Nx \Rightarrow y'' + \lambda^2 y = \frac{N}{EI}x$

$\Rightarrow y(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + \frac{N}{P_{cr}}x$

B.Cs $\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow B=0 \\ y(l)=0 \Rightarrow A\sin\lambda l + \frac{N}{P_{cr}}l = 0 \\ y'(l)=0 \Rightarrow \lambda A\cos\lambda l + \frac{N}{P_{cr}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{A\sin\lambda l}{A\lambda\cos\lambda l} = l \Rightarrow \boxed{\tan\lambda l = \lambda l}$

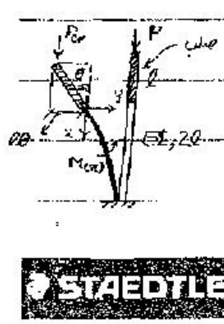
معادله مشخصه می‌شود

کوچکترین λl مثبتی که داریم $= 4$ با یه سری خورده ریزه! $\Leftarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{[(0.69\ldots)l]^2}$

برای اینکه خاطر جمع شویم این عدد را به بالا گرد می‌کنیم تا P_{cr} ای که بدست می‌آید کوچکتر باشد و امن‌تر! $\xrightarrow{\text{پس}} P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$

معمولاً می‌نویسند $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2}$ است و هرچه سازه را سخت‌تر و قوی‌تر می‌کنیم l_e کمتر و P_{cr} هم بیشتر می‌شود!

☺ یکی از مسئله‌های پر امتحانی! معادله مشخصه را می‌خواهد.



$M(x) - P_{cr}(y + l\theta) = 0 \Rightarrow EIy'' + P_{cr}y = -P_{cr}l\theta$

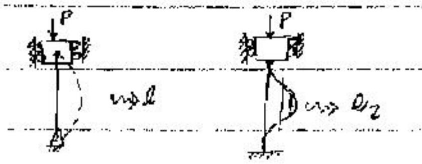
$y(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x - l\theta$

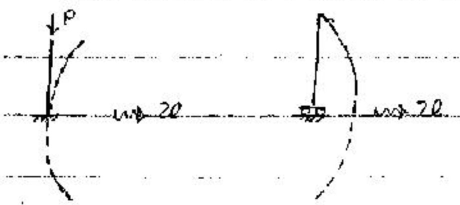
ادامه در برگه‌های صفحه بعد

به استدلال عجیب غریب برای یافتن ℓ_e به صورت سمعی بصری:

می‌یاد و به زور شکل کمانش هر تیر را به شکل کمانش تیر دوسر لولا

ربط می‌دهد و ℓ_e را تخمین می‌زند! چندان جالب نیست!



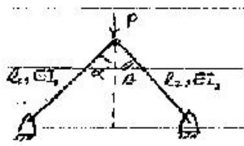


(۴) به مثال ۴: دریغ کنیم ادامه مثال قبلی:

$$B.C.s\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow B = \ell\theta \\ y'(2\ell)=0 \Rightarrow A\lambda\cos 2\lambda\ell - \ell\theta\lambda\sin 2\lambda\ell \\ y'(0)=\theta \Rightarrow A\lambda=\theta \Rightarrow \boxed{\tan 2\lambda\ell = \frac{1}{\lambda\ell}} \end{cases}$$

معادله مشخصه کمانش

این معادله حل تحلیلی ندارد!



(۵) یک نوع دیگر از مثال‌ها: در این نوع مسائل روی سازه یک بارگذاری داریم و می‌خواهیم

بارگذاری بحرانی که به ازای آن سازه fail می‌شود را پیدا کنیم.

اگر سازه معین باشد، fail شدن یک عضو به نابود شدن کل سازه می‌انجامد.

میله‌هایی که بار روی آنها کششی باشد که دچار کمانش نمی‌شوند، پس فقط فشاری‌ها را

پیدا می‌کنیم.

N تا میله داریم

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ از آنها فشاری باشند

اگر میله (1) کمانش کند: $F_1 = F_1(p) = \frac{\pi^2 EI_1}{\ell_{e_1}^2} \Rightarrow P_1 = \dots$ ✓

« (2) « : $F_2 = F_2(p) = \frac{\pi^2 EI_2}{\ell_{e_2}^2} \Rightarrow P_2 =$ ✓

این کار را برای هر n میله انجام می‌دهیم

P_{cr} کمترین مقدار از میان این P_i ها است. $\leadsto$ $P_n = \dots$ ✓

حالا حل مثال:

$$F_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} P \qquad F_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} P$$

اگر (1) کمانش کند: $\frac{\pi^2 EI_1}{\ell^2} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} P_1 \rightarrow P_1 = \frac{\pi^2 EI_1 \sin(\alpha+\beta)}{\ell^2 \sin\beta}$

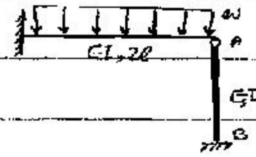
اگر (2) کمانش کند: $P_2 = \frac{\pi^2 EI_2 \sin(\alpha+\beta)}{\ell^2 \sin\alpha}$

$P_{cr} = \min\{P_1, P_2\}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

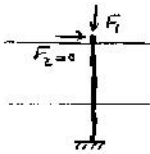
Next Example :



$w_{cr} = ?$

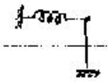
بحرانی برای ناپایدار شدن میله AB

$\delta_{AH}=0$ زیرا سختی EA دارد. پس سختی محوری فقط یک نیروی عکس‌العمل محوری وجود دارد و A هم فقط تغییرمکان عمودی دارد.



$$\delta_{AV} = \frac{w(2l)^4}{8EI} - \frac{F_1(2l)^3}{3EI} = \frac{F_1 l}{AE} \Rightarrow F_1 = \frac{2wl^4/EI}{\frac{8}{3}\frac{l^3}{EI}+\frac{l}{AE}} = \cdots \checkmark$$

اینجا یک سر گیردار و یک سر لولا است چون تغییر مکان افقی ندارد نقطه‌ی A

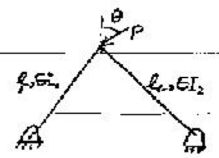
ولی اگر θ سختی A هم داشت، برای کمانش AB باید مسئله‌ی  را حل می‌کردیم.

برای مسائل کمانش سعی کن مسئله رو به یکی از اشکالی که کمانش آن را بلدی نزدیک کنی!

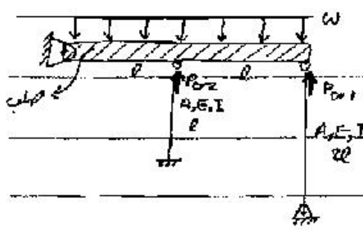
حالا برمی‌گردیم سر سؤال خودمون:

$$F_1 = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} \Rightarrow w_{cr} = \cdots \checkmark$$

سازه‌ای بهینه است و از لحاظ اقتصادی به صرفه است که همه‌ی عضوهایش باهم fail شوند. مثلاً در خرپای زیر می‌خواهیم θ را طوری طراحی کنیم که سازه از نظر اقتصادی به صرفه باشد، پس باید $P_1=P_2$ باشد و $P_{cr}=P_1=P_2$



حالا یک سازه‌ی نامعین:



w_{cr} برای آنکه کل سازه fail شود! پس هر دو میله باید کمانش کنند.

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \qquad P_{cr2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

$$\Rightarrow 2wl^2 = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}\cdot l + \frac{\pi^2 EI}{4l^2}\cdot(2l) \Rightarrow w_{cr} = \cdots \checkmark$$

ایراد گرفتند که ممکن است هر دو باهم fail نکنند. پاسخ این است که وقتی مقدار بار به مقدار بحرانی برسد، تعادل خنثی دارد و وقتی P_{cr} برای یکی تأمین شد، نیروی آن دیگر تغییر نمی‌کند (؟) تا بالاخره دومی هم دچار کمانش شود.

 پرسیدند چرا P بیشتر از P_{cr} نمی‌شود. پاسخ این بود که در حالت تعادل خنثی، سیستم برای تغییر شکل

SUBJECT : حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year : Month : Date :

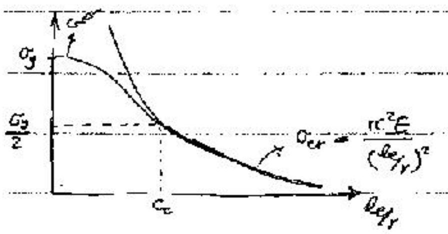
دارد نیازی ندارد که نیروی بیشتری از P_{cr} بر آن وارد شود.

اگر وقتی به P_{cr} رسیدیم، خودمون به زور نیروی بیشتری به تیر وارد کنیم، یه اتفاقاتی می افتد.

۸۸,۲,۲۵

ستون بلند : $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2}$ $\quad \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A l_e^2} = \frac{\pi^2 E A r^2}{A l_e^2} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{l_e}{r})^2}$

$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \Rightarrow I = Ar^2$ $\quad \frac{l_e}{r} \rightarrow$ بهش ضریب لاغری یا رعنایی !!



$\frac{\pi^2 E}{C_c^2} = \frac{\sigma_y}{2} \Rightarrow C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}}$

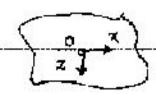
$$\sigma_{cr} = \begin{cases} \text{ستون کوتاه} \quad \sigma_y\left[1 - \left(\frac{(l_e/r)^2}{2C_c^2}\right)\right] & l_e/r \le C_c \\ \text{ستون بلند} \quad \frac{\pi^2 E}{(l_e/r)^2} & l_e/r \ge C_c \end{cases}$$

$$S.F. = \begin{cases} 5/3 + 3/8 \cdot \frac{l_e/r}{C_c} - 1/8 \left(\frac{l_e/r}{C_c}\right)^3 & l_e/r \le C_c \\ 1.92 & l_e/r \ge C_c \end{cases}$$

$\sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{S.F.} \Rightarrow P_{all} = \cdots$ ✓

● کمانش در دو بعد:

☺ دقت می‌کنیم ستون بلند باشد، بین حالا l_e/r ببینید.



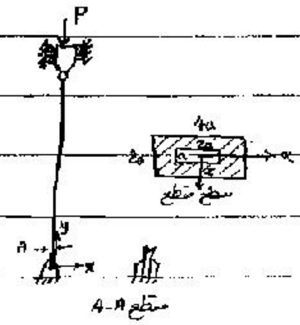
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2}$

* I : باید حول محور عمود بر صفحه کمانش محاسبه شود. ← $P_{cr} = \min\left[P_{cr}\ \text{دو صفحه}\right]$

$$\Rightarrow P_{cr} = \min\{P_{cr} \text{ در صفحات مختلف}\} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_e^2} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_{xx}+I_{zz}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xx}-I_{zz}}{2}\right)^2 + I_{xz}^2}$$

پس اگر ستون بلند باشد یعنی از بلند بودن آن مطمئن باشیم باید P_{cr} را در صفحات مختلف حساب کنیم حتماً.



مثال) ستون بلند است.

در اینگونه مواقع می‌آییم کمانش را حول دو تا محور اصلی بررسی می‌کنیم

اگر در صفحه xy کمانش کند: $I_{zz} = \frac{1}{12}\left[(2a)(4a)^3 - a(2a)^3\right] = 10a^4$

$$l_e = l \Rightarrow P_{cr_1} = \frac{10\pi^2 E a^4}{l^2}$$

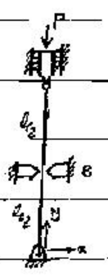
اگر در صفحه yz کمانش کند: $I_{xx} = \frac{1}{12}\left[(4a)(2a)^3 - (2a)a^3\right] = 2.5a^4$

$$l_e = 0.7l \Rightarrow P_{cr_2} = \frac{2.5\pi^2 E a^4}{(0.7l)^2} = \frac{5\pi^2 E a^4}{l^2}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \min(P_{cr_1}, P_{cr_2}) = P_{cr_2}$$

مثال) سطح مقطع، مقطع A-A مثال بالا!

این مانع فقط از حرکت در همین صفحه جلوگیری می‌کند.



$$c_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = \cdots$$

کمانش در صفحه xy: $I_{zz} = 10a^4 \Rightarrow r_z = \sqrt{\frac{10a^4}{6a^2}} = a\sqrt{\frac{5}{3}}$

به خاطر تقارن دو جا y صفر می‌شود. چون ما داریم y و y' پیوسته است، پس y' هم یه جایی صفر می‌شود. ممکن است y' به تعداد زیادی هم صفر شود ولی در اینصورت مود بالاتری از کمانش بدست می‌آید.

پس چون ما ساده‌ترین حالت را می‌خواهیم همان تکیه‌ها را در نظر می‌گیریم که به خاطر تقارن می‌افتد روی B. پس B حکم لولا را پیدا می‌کند. پس $l_e = l_2$ اگر می‌توانستیم از تقارن استفاده کنیم باید از

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$\Rightarrow \frac{l_e}{r} = \sqrt{0.15}\cdot l_a$ $\boxed{\text{مقایسه}}$ $C_c \Rightarrow \sigma_{cr} = \dots$ ✓ معادلات دیفرانسیل استفاده می‌کنیم.

$S.F. = \dots$ ✓ $\Rightarrow P_{all_1} = \frac{\sigma_{cr_1}}{SF_1} = \dots$ ✓

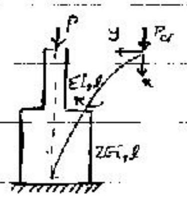
xz کمانش در صفحه : $I_{xx} = 2.4a^4 \Rightarrow r_x = \sqrt{\frac{2.5a^4}{6a^2}} = a\sqrt{\frac{5}{12}}$

$l_e = 0.7l \Rightarrow \frac{l_e}{r} = 0.7\sqrt{\frac{12}{5}}\cdot \frac{l}{a}$ $\boxed{\text{مقایسه}}$ $C_c \Rightarrow \sigma_{cr} \dots$

$S.F. = \dots \Rightarrow P_{all_2} = \frac{\sigma_{cr_2}}{SF_2} = \dots$ ✓

$P_{all} = \min\{P_{all_1}, P_{all_2}\}$

یک ستون داریم با چگالی ρ. اگر طولش از یک حدی زیادتر باشد، کمانش می‌کند. طول بحرانی آن را بدست آورید به کمک معادلات دیفرانسیل.



$M_1(x) + Py_1 = 0$ $\quad 0 \leq x \leq l$

$EIy_1'' + Py_1 = 0 \Rightarrow y_1'' + \lambda_1^2 y_1 = 0$

$y_1 = A_1\sin\lambda_1 x + B_1\cos\lambda_1 x$

$M_2(x) + P_{cr}\, y_2 = 0$ $\quad l \leq x \leq 2l$

$2EIy_2'' + P_{cr}\, y_2 = 0 \Rightarrow y_2'' + \frac{1}{2}\lambda_2^2 y_2 = 0$

$y_2 = A_2\sin\frac{\lambda_2}{\sqrt{2}}x + B_2\cos\frac{\lambda_2}{\sqrt{2}}x$

$$B.C.s \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2'(2l) = 0 \end{cases}$$

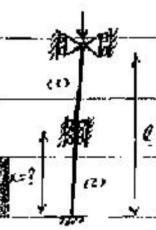
$$\text{پیوستگی} \begin{cases} y_1(l) = y_2(l) \\ y_1'(l) = y_2'(l) \end{cases} \Rightarrow \text{معادله مشخصه} \Rightarrow P_{cr} = \dots ✓$$

ستون‌ها تحلیلی یعنی هم استاتیکی و هم دینامیکی را بررسی کنید!

با این فرض که گرانش قسمت پایینی ستون از بالایی بیشتر است

است حتی وقتی که بالایی کمانش می‌کند پایینی کمانش نکند

جای تکیه‌گاه میانی را پیدا کنید که هر دو قسمت باهم



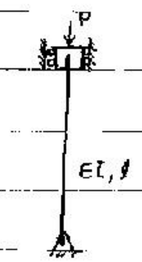
SUBJECT :

Year : Month : Date :

کمانش بکند.

$$P_{cr1} = P_{cr2} \Rightarrow \frac{\pi^2 EI}{0.7^2(l-x)^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5x)^2} \Rightarrow x = \checkmark$$

به دست آوردن بار بحرانی به روش ریلی - ریتز



اگر تابع کمانش را درست حدس بزنیم (هرچه دقیق‌تر حدس بزنیم) P_{cr} دقیق‌تر در می‌آید.

$y(x)$ را به گونه‌ای حدس می‌زنیم که در شرایط مرزی هندسی صدق کند. البته باید دقت

کنی که ما از قبل می‌دونستیم که اینجا y به صورت چنین شکلی داره $y(x) = A\sin\frac{\pi x}{l}$

U-W انرژی ها را می‌نویسیم :

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} EI y''^2 dx = U(A)$$

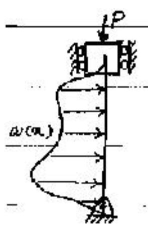
$$W = \left[\int_0^l \frac{1}{2} y'^2 dx\right] \times P_{cr} = W(A) \qquad \delta = \int_0^l \frac{1}{2} y'^2 dx \quad \Leftarrow \int dx - \int\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

چون تیر AE ندارد پس طول تیر تغییر نمی‌کند. پس وقتی کمانش می‌کند، P_{cr} مقداری می‌آید پایین!

$$\Rightarrow \Pi = U - W \Rightarrow \frac{d\Pi}{dA} = 0 \Rightarrow P_{cr} = \dots \checkmark$$

تیر ستون ها

تیرستون عضوی گفته می‌شود که هم بار عرضی تحمل کند هم بار محوری!

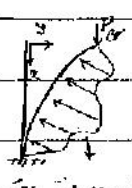


$$EI y^{(4)}(x) + P_{cr} \cdot y^{(2)} = -w(x)$$

$$\text{B.C.s} \begin{cases} y''(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \\ y''(l) = 0 \end{cases}$$

از آنجایی که رابطه $V(x) = \frac{dM}{dx}$ برقرار است پس نیروی برشی در تیرستون عبارت است از: $V(x) = EIy''' + Py'$

برای تیر یک سر آزاد هم داریم:



این شکل غلطه، w افقی باقی می‌مونه!

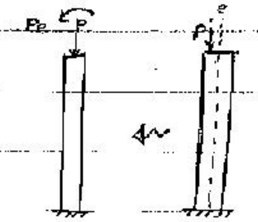
$$\text{B.C.s} \begin{cases} y(l) = 0 \\ y'(l) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ EIy'''(0) + P_{cr}\, y'(0) = 0 \Rightarrow y'''(0) + \lambda^2 y'(0) = 0 \end{cases}$$

در اینجا به مسائلی که معادله مشخصه نمی‌رسیم بلکه $y(x)$ را بدست می‌آوریم (مثل ستون‌ها مقدار ویژه نیست نوع مسئله‌ی ما)

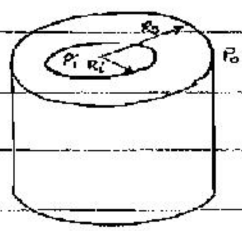
y_{max} ها به صورت تابعی از P_{cr} بدست می‌آید. P_{cr} ای که ما می‌خواهیم همان مقداری است که به ازای آن y_{max} به بی‌نهایت میل می‌کند.

$$tg(P_{cr}) = y_m \to \infty \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi}{2}$$

بعدیه بار خارج از مرکز و مسائلات را بخوانید. وقتی بار خارج از مرکز داشته باشیم به جای y_0، e ساماتت بدست می‌آوریم.



مخازن جدار ضخیم

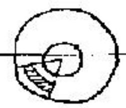


فرض می‌کنیم طول استوانه زیاد و کرنش در راستای z صفر است یا مهم نیست.

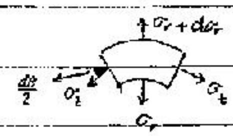
یک فشار داخلی و یک فشار خارجی داریم.

مبنای تشخیص جدار ضخیم:

$\frac{\Delta R}{R} < 10, 20 \to$ جدار نازک



در حالت جدار ضخیم تنش مماسی برای ما مهم است.



با توجه به تقارن در المان روبرو $\frac{\partial(\text{هرچیزی})}{\partial\theta}$ صفر است.

به کمک تقارن ثابت می‌شود تنش برشی‌ها هم صفر است.

برای این المان معادله‌ی دیفرانسیل‌های تعادل را می‌نویسیم که

به خاطر تقارن به جای ۳ تا، فقط یک معادله می‌نویسیم و این معادله برحسب تنش‌هاست. با استفاده از قانون هوک این معادله

را برحسب کرنش‌ها می‌نویسیم. حالا کرنش‌ها را هم به صورت زیر جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du}{dr} \\ \varepsilon_t = \frac{u}{r} \end{cases}$$

$\varepsilon_t = \frac{u}{r} \to$ کرنش محیطی یا کرنش مماسی

در این مبحث u را می‌گیریم تغییر مکان در راستای r.

پس در آخر به یک معادله دیفرانسیل درجه ۲ برحسب u بدست می‌آوریم. با حل این معادله u برحسب چیز ثابت c_1 و c_2 بدست می‌آید.

حالا با این u می‌رویم σ_r و σ_t می‌نویسیم.

$$\begin{cases} \sigma_r = c_1 - \frac{c_2}{r^2} \\ \sigma_t = c_1 + \frac{c_2}{r^2} \end{cases}$$

بعضی وقت‌ها شرایط مرزی رو تغییر مکان‌ها (u و v و w) است و گاهی روی خود تنش‌هاست:

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

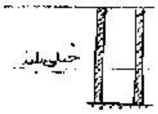
با اعمال شرایط مرزی روبرو C_1 و C_2 به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$B.C.s\begin{cases}\sigma_r(r=R_i) = -P_i\\ \sigma_r(r=R_o) = -P_o\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}C_1 = \dfrac{P_iR_i^2 - P_oR_o^2}{(R_o^2-R_i^2)}\\ C_2 = \dfrac{R_i^2R_o^2(P_i-P_o)}{(R_o^2-R_i^2)}\end{cases}$$

هنوز هم نمی‌دانیم چه می‌خواهیم، هر مسئله‌ای که به ما دادند، الگوریتم زیر را تا ته می‌رویم :

ا) بدست آوردن σ_z : به شرایط مرزی در راستای z بستگی دارد و در مسائل مختلف متفاوت است.



الف- کرنش صفحه‌ای ($\varepsilon_z = 0$) مثلاً یک استوانه‌ی خیلی بلند

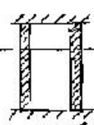
** اگر بار خارجی چیزی به جز فشار بود، سوپرپوز می‌کنیم.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_r+\sigma_\theta)\right] = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_r+\sigma_\theta) = 2C_1\nu$$

این رابطه نشان می‌دهد σ_z برخلاف σ_θ و σ_r به موقعیت و مکان بستگی ندارد و همه جا یکنواخت است.

** در این مبحث از اثرات لبه صرف نظر می‌کنیم.

دو طرف استوانه را دیوار کنیم و در راستای z بارگذاری نداشته باشیم (برخلاف پایان ترم مقاومت ۱)

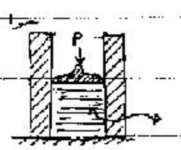


$\varepsilon_z = 0 \rightarrow \sigma_z = 2C_1\nu$

اگر طول ترم طول در راستای z ، z همش دارمی‌شد باید از رابطه‌ی $\int_0^L \varepsilon_z dz = 0$ استفاده کنیم.

این هم کرنش صفحه‌ای بود باشی !

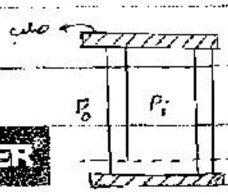
ب- تنش صفحه‌ای



$\sigma_z = 0$

پیستون ← تنش برشی نداریم

استوانه‌ای که دو سر آن را با یک جسم صلب بسته‌ایم یا دیواره‌ی ضخیم دارد، سوراخ آن تغییر مکان طولی تمام نقاط هر کدام از آنها باهم تکان می‌خورند.



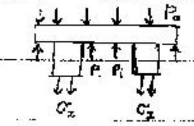
در نتیجه از یک جایی به بعد تنش یکنواخت است.

برای این دو تا صلب‌ها معادل می‌نویسیم.

STAEDTLER

SUBJECT: حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year (Month (Date ( )



$$\Rightarrow P_o(\pi R_o)^2 = P_i \pi R_i^2 + \sigma_z [\pi R_o^2 - \pi R_i^2] = 0 \Rightarrow \sigma_z = \frac{P_i R_i^2 - P_o R_o^2}{R_o^2 - R_i^2} = c_1$$

استوانه در سر بسته یعنی دو سرش جسم صلب !

۲) بدست آوردن کرنش‌ها :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)]$$

$$* \varepsilon_t = \frac{1}{E}[\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]$$ کرنش محیطی $\xrightarrow{\theta \text{ - تعریف}} = \frac{\Delta \text{محیط}}{\text{محیط اولیه}}$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)] = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(2c_1)]$$

۳) بدست آوردن u :

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} \Rightarrow u(r) = r\,\varepsilon_t(r) = \cdots \checkmark$$

$$\text{تغییر شعاع داخلی (خارجی)} = u(r)\Big|_{r=R_i \ (\text{و } r=R_o)}$$

$$\text{تغییر قطر داخلی (خارجی)} = 2u(r)\Big|_{r=R_i \ (\text{و } r=R_o)}$$

۴) بدست آوردن تغییر حجم استوانه :

تغییر حجم داخلی : $V = \pi r^2 l$

$$dv = \pi[2r\,dr\,l + r^2 dl] \Rightarrow \frac{dV}{V} = 2\frac{dr}{r} + \frac{dl}{l} = 2\varepsilon_t + \varepsilon_z \Rightarrow \Delta V = V_1(2\varepsilon_t + \varepsilon_z)$$

کرنش حجمی برای کل استوانه : $\varepsilon_V = \frac{dV}{V} = \varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}[\sigma_r + \sigma_t + \sigma_z] = \frac{1-2\nu}{E}\underbrace{[2c_1 + \sigma_z]}_{\text{عدد ثابت (تابع r نیست)}} \Rightarrow \varepsilon_V$: عدد ثابت

$$\Delta V = \int \varepsilon_V\, dV = \varepsilon_V \int dV = V_1 \cdot \varepsilon_V \ \checkmark$$

راه دوم : $\Delta V = V_2 - V_1$

$$h_2 = h_1(1+\varepsilon_z), \quad R_{i2} = R_{i1} \times (1 + \varepsilon_t|_{r=R_i}), \quad R_{o2} = R_{o1} \times (1 + \varepsilon_t|_{r=R_o})$$

$$\Rightarrow V_2 = h_2[\pi R_o^2 - \pi R_i^2]$$

۵) تنش برشی ماکزیمم : (جهت مقاومت مصالح در ترسکا)

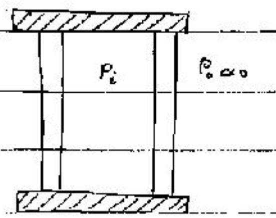
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$ اینجا هم چون داریم تنش اصلی است ←

$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \{\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z\}$ $\quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ جبری

STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



یه مثال و دیگه هستیم : سطح داخلی و خارجی و E و هیچ چیزی نداریم .

یک کرنش سنج می‌گذاریم روش .

$$\varepsilon_z\Big|_{r=R_o} = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_\theta\Big|_{r=R_o} = \varepsilon_2$$

$\Rightarrow$! ν را بیابید

پرسؤال مرسوم

$$c_1 = \frac{P_i R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \quad , \quad c_2 = \frac{R_i^2 R_o^2 P_i}{R_o^2 - R_i^2} = R_o^2 c_1$$

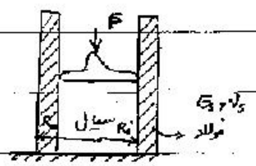
$$\sigma_z = c_1$$

$$\varepsilon_t\Big|_{r=R_o} = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[c_1 + \frac{c_2}{R_o^2} - \nu\left(c_1 - \frac{c_1 R_o^2}{R_o^2} + c_1\right)\right] = \frac{1}{E}\left[c_1(2-\nu)\right] = \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_z\Big|_{r=R_o} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\overbrace{\sigma_r + \sigma_t}^{2c_1})\right] = \frac{1}{E}\left[c_1(1-2\nu)\right] = \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{1-2\nu}{2-\nu} \Rightarrow \nu = \dots \checkmark$$

نکته اخلاقی حل این سؤال که باید خیلی توجه کنی اینکه تو ضرب بنویسی و فاکتور بگیری !



گول خوردیم ، باز هم یه مثال دیگه : بیابید تغییر سطح داخلی را !

چون طول استوانه کم از محور فشار سیال صرف نظر کرده و فقط $\frac{F}{A}$ را در نظر می‌گیریم .

از فشار هوا به عنوان فشارهای اتمسفری صرف نظر می‌کنیم .

$$P_i = \frac{F}{A}$$

$$P_o = 0$$

$$c_1 = \frac{P_i R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \quad , \quad c_2 = \frac{R_i^2 R_o^2 P_i}{R_o^2 - R_i^2} = R_o^2 c_1$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)\right]\Big|_{r=R_i} = \frac{1}{E}\left[c_1 + \frac{c_1 R_o^2}{R_i^2} - \nu(-P_i)\right] = \dots \checkmark$$

$$\text{تغییر سطح داخلی} = u\Big|_{r=R_i} = R_i\, \varepsilon_t\Big|_{r=R_i} = \dots \checkmark$$

باز هم یه مثال دیگه : به جای سیال یه استوانه توپر جنس با E_c و ν_c می‌گذاریم در مثال بالا !

مسئله نامعین است آقا !

P : فشار بین دو استوانه

SUBJECT : حل تمرین مقاومت مصالح ۲

Year : Month : Date :

استوانه خارجی : $\sigma_r = \frac{PR_i^2}{R_o^2-R_i^2}$, $\sigma_t = R_o^2\,\sigma_r$, $\sigma_z = 0$

استوانه داخلی : $\sigma_r' = \frac{-PR_i^2}{R_i^2-0} = -P$, $\sigma_t' = 0$, $\sigma_z' = -F/A$

توجه کنید : در این روابط فشار P به صورت اسکالر در نظر گرفته شده و منفی بودنش لحاظ شده !

رابطه سازگاری : $u_{\text{خارجی}}\Big|_{r=R_i} = u_{\text{داخلی}}\Big|_{r=R_i}$ ⊛

فرق سیال و جامد در این است که سیال تنش برشی تحمل نمی‌کند و تمام فشار رو منتقل می‌کند! در صورتی که جامد ضریب پواسون دارد.

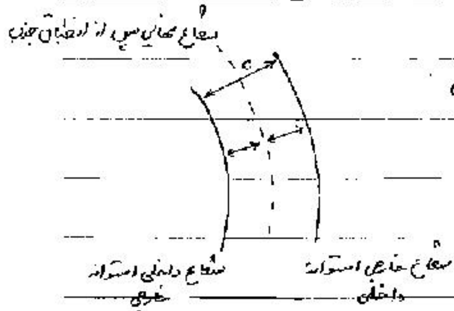
$$⊛ \longrightarrow \cancel{R_i}\,\varepsilon_{t_{\text{خارجی}}}\Big|_{r=R_i} = \cancel{R_i}\,\varepsilon_{t_{\text{داخلی}}}\Big|_{r=R_i} \Rightarrow \frac{1}{E_s}\left[\sigma_r + \frac{R_o^2}{R_i^2}\sigma_r - \nu_s(-P+0)\right]$$

$$= \frac{1}{E_c}\left[-P - \nu_c\left(-P - \frac{F}{A}\right)\right] \Rightarrow P = \dots \checkmark$$

۸۸/۴/۲۳ ← روز پیش از امتحان پایان ترم

Shrink fit

مثلاً دو تا استوانه رو می‌خواهند بذارند توی هم. معمولاً شعاع داخلی یکی از شعاع خارجی اون یکی یه کم کوچکتره که به طور عادی توی هم نمی‌رند. حدود این اختلاف هم در حد تلورانس‌هاست و اندازه‌های ناپ آنها یکی هستند.



رابطه سازگاری : $u_{\text{خارجی}}\Big|_{r=a} - u_{\text{داخلی}}\Big|_{r=a} = c \Rightarrow P$ فشار بین دو استوانه

$\underset{\text{بر حسب } P}{\S}$ $\underset{\text{بر حسب } P}{\S}$

حالت سخت‌تر وقتی است که بعد از Shrink fit یک فشار داخلی هم بذاریم توی استوانه‌ها !

برو جزوه‌ی مقاومت یک رو بخوان !