بسمه تعالی

جزوه

ریاضی مهندسی

دانشگاه

صنعتی امیر کبیر

استاد

دکتر کراری

سعید دانشگر

بسم الله الرحمن الرحیم

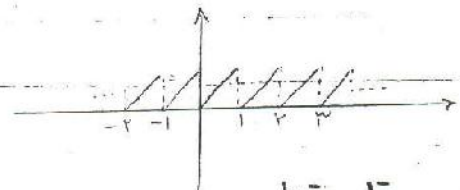
ریاضی مهندسی

سری فوریه:

نکته: سری فوریه برای توابع متناوب تعریف می‌شود. لذا به تعریف توابع متناوب می‌پردازیم.

تابع متناوب: تابع مانند $f(x)$ متناوب است چنانچه یک مقدار بزرگتر از صفر T باشد که:

$$f(x+T)=f(x)$$



چند نکته در مورد تابع متناوب

۱ـ اگر تابعی مانند $f(x)$ با دورهٔ تناوب T متناوب باشد با دورهٔ تناوب $2T$، $3T$، ... و nT نیز متناوب است.

همچنین کوچکترین دورهٔ تناوب را دورهٔ تناوب اصلی گوئیم.

۲ـ اگر $f(x)$ و $g(x)$ هردو با دورهٔ تناوب T متناوب باشند در آن صورت هر ترکیب خطی از این دو تابع نیز متناوب است با همان دورهٔ تناوب T.

$$h(x)=af(x)+bg(x) \longrightarrow h(x+T)=af(x+T)+bg(x+T)$$

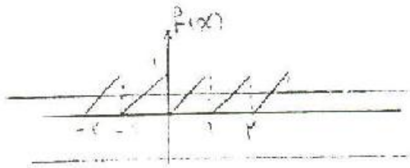
۳ـ اگر $f(x)$ با دورهٔ تناوب T_1 متناوب باشد و $g(x)$ با دورهٔ تناوب T_2 متناوب باشد در آن صورت $h(x)=af(x)+bg(x)$ در صورتی متناوب است که کوچکترین مضرب مشترک T_1 و T_2 وجود داشته باشد که در آن صورت $h(x)$ با همان کوچکترین مضرب مشترک متناوب است.

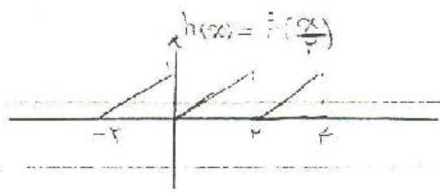
۴ـ یک عدد ثابت با هر دورهٔ تناوب دلخواه متناوب است. (برای عدد ثابت دورهٔ تناوب اصلی ...

قابل تعریف نیست) .

نتیجه: اگر $f(x)$ با دورهٔ تناوب T متناوب باشد در آن صورت $h(x)=A+f(x)$ نیز با همان دورهٔ تناوب متناوب است.

۵- اگر $f(x)$ متناوب باشد با دورهٔ تناوب T، در آن صورت $h(x)=f(ax)$ متناوب است با دورهٔ تناوب $\frac{T}{a}$.





چند مثال مثلثاتی:

$\sin x, \cos x \qquad T_0 = 2\pi$

$\sin 2x, \cos 2x \qquad T_0 = \pi$

$\sin 3x, \cos 3x \qquad T_0 = \frac{2\pi}{3}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\sin(nx), \cos(nx) \qquad T_0 = \frac{2\pi}{n}$

$\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right), \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \qquad T_0 = \frac{T}{n}$

سری فوریه: نمایش یک تابع متناوب است به صورت ترکیب خطی از توابع مثلثاتی. فعلاً با تابعی سروکار داریم که دورهٔ تناوب آن 2π است.

$$a_0 + \underbrace{a_1\cos x}_{2\pi} + \underbrace{b_1\sin x}_{2\pi} + \underbrace{a_2\cos 2x}_{\pi} + \underbrace{b_2\sin 2x}_{\pi} + \cdots + \underbrace{a_n\cos nx}_{\frac{2\pi}{n}} + \underbrace{b_n\sin nx}_{\frac{2\pi}{n}}$$

$$2\pi \qquad \pi \qquad \frac{2\pi}{n}$$

$$2\pi$$

$\vdots$

بحث فعلی ما این است که اگر $\overset{T=2\pi}{f(x)=f(x+2\pi)}$ چگونه ضرایب سری فوریه را پیدا کنیم تا تساوی مقابل برقرار باشد

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

فرض فعلی ما این است که $f(x)$ سری فوریه دارد.

نحوهٔ محاسبهٔ ضرایب: (فرمول های اولر)

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f(x)\,dx \ , \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \ , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

قبل از پرداختن به اثبات چند نکته را بیان می‌کنیم:

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=0 \quad \forall k \ \text{عدد صحیح}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=\begin{cases}2\pi & k=0\\ 0 & k\neq 0 \ \text{عدد صحیح}\end{cases}$$

اثبات فرمول a_0:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \quad *$$

$$\longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}a_0\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx$$

$$\longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=a_0x\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\pi a_0 \longrightarrow a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

اثبات فرمول a_n: طرفین * را در $\cos mx$ ضرب کرده و سپس در یک دورهٔ تناوب انتگرال می‌گیریم:

$$\longrightarrow f(x)\cos mx=a_0\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos mx+b_n\sin nx\cos mx)$$

$$\longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx}_{A_n}+b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx}_{B_n}\right\}$$

$$A_n=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x\,dx$$

$$\longrightarrow\quad A_n=\begin{cases}\pi & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$$

$$B_n=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x\,dx=0$$

$$\longrightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_nA_n=a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_mA_m+a_{m+1}A_{m+1}+\cdots$$

$$=\pi a_m$$

$$\longrightarrow\quad a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx$$

به‌طور خلاصه :

اگر $f(x)$ دارای دورهٔ تناوب 2π و دارای سری فوریه باشد در این صورت :

$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx$ که a_n ، b_n ، a_0 از فرمولهای اول محاسبه می‌شوند

پس اگر $g(x)=f(\frac{2\pi}{T}x)$ باشد در آن صورت $g(x)$ با دورهٔ تناوب T متناوب است. لذا

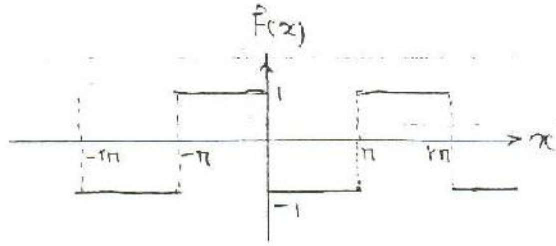
اگر $g(x)$ یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب T باشد در آن صورت :

$$g(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right]$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(x)\,dx\quad,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_T g(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

$$,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_T g(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

مثال: سری فوریهٔ تابع زیر را پیدا کنید:



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi - \cos n\pi + 1\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\longrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\sin nx$$ فرم بستهٔ سری فوریه:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right]$$

مثال: سری فوریه تابع زیر را پیدا کنید:

$$f(x) = a_0 + a_1\cos \pi x + b_1 \sin \pi x + a_2 \cos 2\pi x + b_2 \sin 2\pi x + \cdots$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{0}^{1}(1)\,dx + \int_{1}^{2}(0)\,dx\right] = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_{0}^{1}\cos n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{0}^{1} = 0$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin n\pi x\,dx=\int_0^1 \sin n\pi x\,dx=\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x+\frac{1}{5}\sin 5\pi x+\cdots\right]$$

چند نکته:

۱- اگر $f_N(x)=a_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{2\pi}{T}nx+b_n\sin\frac{2\pi}{T}nx$ آنگاه:

$$f_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\pi x$$
$$f_3(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x\right]$$
$$\vdots$$

$$\longrightarrow f(x)=\lim_{N\to\infty}f_N(x)$$

۲- رابطهٔ بالا فقط در نقاط پیوستگی صادق است در نقاط ناپیوستگی سری فوریه برابر میانگین حد چپ و راست تابع است.

۳- پدیدهٔ گیبس Gibbs phenomena: در نقاط ناپیوستگی نوسان تابع بیشتر از ۹٪ مقدار اولیهٔ آن نیست.

قضیه: اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد در آن صورت b_n برابر صفر و $a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx$ و $a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$ است.

و اگر $f(x)$ یک تابع فرد باشد $a_0=a_n=0$ ، $b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx$

یادآوری چند مطلب :

۱ـ اگر تابعی زوج باشد : $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$

اثبات: با تغییر متغیر $x=-y$: $\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_a^0 f(-y)(-dy)=\int_0^a f(-y)dy=\int_0^a f(y)\,dy$

۲ـ اگر تابعی فرد باشد : $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_0^a f(x)\,dx$

۳ـ حاصل ضرب یک تابع زوج و یک تابع فرد، فرد است و حاصل ضرب دو تابع زوج و یا دو تابع فرد، زوج است.

یادآوری چند انتگرال نامعین :

$$\int x\sin ax\,dx=\frac{-ax\cos(ax)+\sin ax}{a^2}$$

$$\int x\cos ax\,dx=\frac{ax\sin ax+\cos ax}{a^2}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}\left[a\sin bx-b\cos bx\right]}{a^2+b^2}\ ,\ \int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}\left[a\cos bx+b\sin bx\right]}{a^2+b^2}$$

مثال. ضرایب سری فوریه تابع مقابل را بیابید :

$g(x)=\pi+f(x)$

$a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-nx\cos nx+\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{-2}{n}\cos n\pi$$

$$\longrightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-۲}{n}\right)(-1)^n \operatorname{Sin} nx \qquad \operatorname{Cos} n\pi=(-1)^n$$

$$\longrightarrow g(x)=\pi+۲\left[\operatorname{Sin}x-\frac{1}{۲}\operatorname{Sin}۲x+\frac{1}{۳}\operatorname{Sin}۳x-\frac{1}{٤}\operatorname{Sin}٤x+\cdots\right]$$

مثال: ضرایب سری فوریه تابع مقابل را بیابید :

چون تابع زوج است پس $b_n=۰$ ، $a_۰=\frac{k}{۲}$

$$a_n=\frac{٤}{٤}\int_۰^1 k\operatorname{Cos}\left(\frac{۲\pi}{٤}nx\right)dx=k\int_۰^1\operatorname{Cos}\left(\frac{n\pi}{۲}x\right)dx=\frac{۲k}{n\pi}\operatorname{Sin}\left(\frac{n\pi}{۲}x\right)\Big|_۰^1=$$

$$=\frac{۲k}{n\pi}\operatorname{Sin}\left(\frac{n\pi}{۲}\right)=\begin{cases}\frac{۲k}{\pi} & n=1\\ ۰ & n=۲\\ \frac{-۲k}{۳\pi} & n=۳\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{k}{۲}+\frac{۲k}{\pi}\left[\operatorname{Cos}\frac{\pi}{۲}x-\frac{1}{۳}\operatorname{Cos}\frac{۳\pi}{۲}x+\frac{1}{۵}\operatorname{Cos}\frac{۵\pi}{۲}x-\cdots\right]$$

مثال:

$$f(x)=\begin{cases}\pi x+x^۲ & -\pi<x<۰\\ \pi x-x^۲ & ۰<x<\pi\end{cases}$$

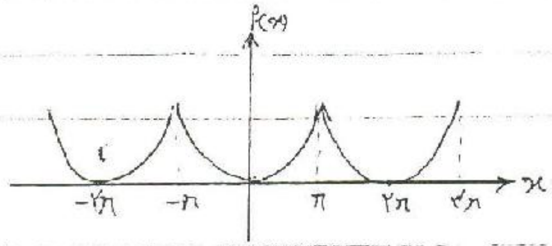
$$\longrightarrow f(-x)=\begin{cases}-\pi x+x^۲ & -\pi<-x<۰\\ -\pi x-x^۲ & ۰<-x<\pi\end{cases}\longrightarrow f(-x)=\begin{cases}-(\pi x-x^۲) & ۰<x<\pi\\ -(\pi x+x^۲) & -\pi<x<۰\end{cases}=-f(x)$$

پس f تابعی فرد است.

مثال:

$f(x)=f(x+۲\pi)$

$f(x)=x^۲ \quad , \quad -\pi<x<\pi$



چون تابعی زوج است پس $b_n=۰$.

$$a_۰=\frac{۲}{۲\pi}\int_۰^{\pi}x^۲dx=\frac{\pi^۲}{۳}$$

$$a_n=\frac{٤}{۲\pi}\int_۰^{\pi}x^۲\operatorname{Cos}nx\,dx=\frac{٤}{n^۲}(-1)^n$$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{\pi^۲}{۳}-٤\left[\operatorname{Cos}x-\frac{1}{٤}\operatorname{Cos}۲x+\frac{1}{۹}\operatorname{Cos}۳x-\cdots\right]$$

درمثال قبل با استفاده از سری فوریه بدست آمده سری $S_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$

عددی زیر را محاسبه کنید. $x=\pi$

$$\rightarrow f(\pi)=\frac{\pi^2}{3}+4\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots\right]=\pi^2$$

$$\rightarrow S_n=\frac{\pi^2}{6}$$

قضیه محاسبه ضرایب سری فوریه بدون انتگرال‌گیری

نکته: این قضیه فقط مربوط به توابعی می‌شود که در یک دوره تناوب پیوسته قطعه‌ای هستند و در هر قطعه به صورت یک چندجمله‌ای از x قابل تعریف هستند.

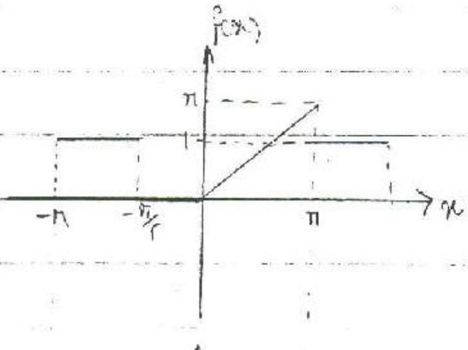
$- \; - \; + \; + \; - \; - \; + \; +$

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\left[-\sum_{s=1}^{m} J_s \sin\frac{2n\pi}{T}t_s-\frac{T}{2n\pi}\sum_{s=1}^{m} J'_s\cdot\cos\frac{2n\pi}{T}t_s+\left(\frac{T}{2n\pi}\right)^2\sum_{s=1}^{m} J''_s\sin\frac{2n\pi}{T}t_s+\cdots\right]$$

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\left[\sum_{s=1}^{m} J_s\cos\frac{2n\pi}{T}t_s-\left(\frac{T}{2n\pi}\right)\sum_{s=1}^{m} J'_s\sin\frac{2n\pi}{T}t_s+\cdots\right]$$

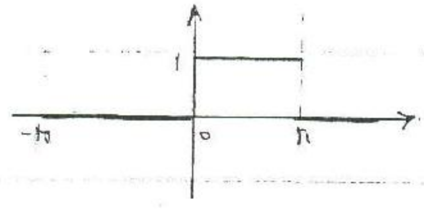
در رابطه بالا t_s نقاط ناپیوستگی است و m تعداد نقاط ناپیوستگی است. J_s مقدار پرش تابع $f(x)$ در نقطه t_s و J'_s مقدار پرش تابع $f'(x)$ در نقطه t_s است و ...

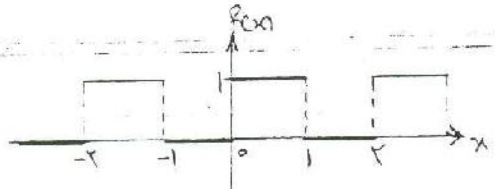
مثال برای محاسبه پرش:



$t_1=-\frac{\pi}{2}$
$t_2=0$
$t_3=\pi$

	$t_1=-\frac{\pi}{2}$	0	π
J_s	-1	0	$-\pi$
J'_s	0	1	-1





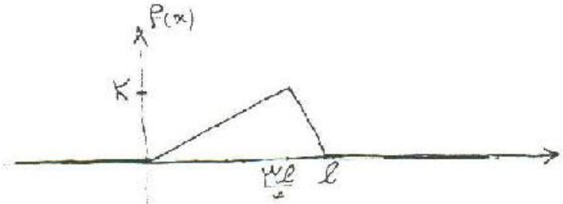
مثال:

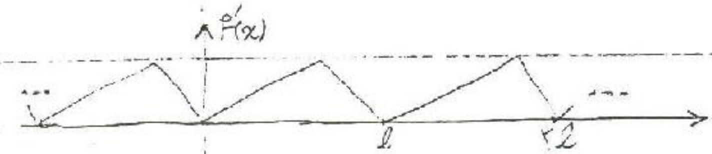
	$t_1=0$	$t_2=1$
J_s	1	-1

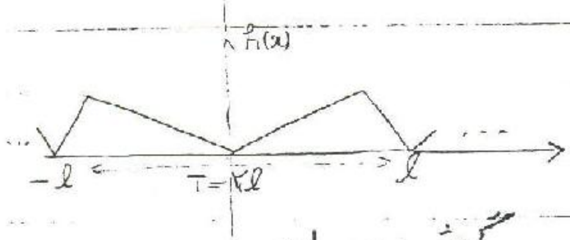
$$\longrightarrow a_n = \frac{-1}{n\pi}\left[0+0\right]=0$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

بسط نیم دامنه:

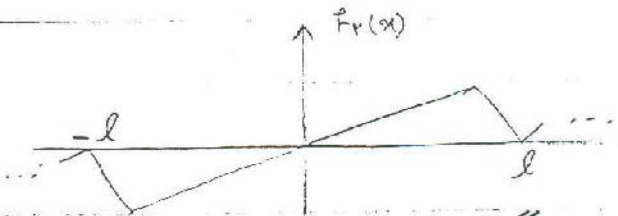






گسترش زوج دوره‌ای

نتیجه: یک سری کسینوسی



گسترش فرد دوره‌ای

نتیجه: یک سری سینوسی

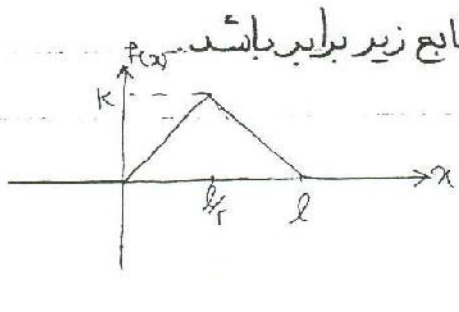
$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = 0$$

$$\longrightarrow f_1(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x \qquad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

مثال: یک سری کسینوسی بیابید که در فاصله ۰ تا l با تابع زیر برابر باشد.



$$\longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & 0<x<\frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2}<x<l \\ 0 & x>l,\ x<0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad a_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx=\frac{k}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx=\frac{2}{\ell}\left[\int_0^{\ell/2}\frac{2k}{\ell}x\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx+\right.$$

$$\left.\int_{\ell/2}^{\ell}\frac{2k}{\ell}(\ell-x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx\right]=\frac{4k}{\ell^2}\left[\int_0^{\ell/2}x\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx+\int_{\ell/2}^{\ell}\ell\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx\right.$$

$$\left.-\int_{\ell/2}^{\ell}x\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx\right]=\frac{4k}{\ell^2}\left[\left(\frac{x\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{\ell}x+\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Big|_0^{\ell/2}\right.$$

$$+\frac{\ell^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Big|_{\ell/2}^{\ell}-\left[\frac{x\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{\ell}x+\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right|_{\ell/2}^{\ell}$$

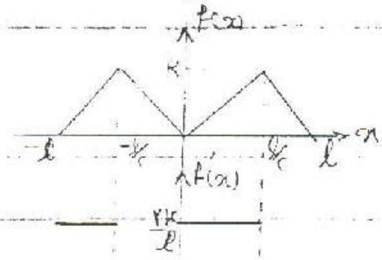
$$=\frac{4k}{\ell^2}\left[\frac{\ell^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}+\frac{\ell^2}{n\pi}\sin n\pi-\frac{\ell^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{\ell^2}{n\pi}\sin n\pi-\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi+\frac{\ell^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{4k}{\ell^2}\cdot\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}$$

$$\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi\right]=\frac{4k}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi\right]$$

$$f_1(x)=\frac{k}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi\right)\cos\frac{n\pi}{\ell}x$$

	$t_1=-\ell/2$	$t_2=0$	$t_3=\ell/2$	$t_4=\ell$
J	0	0	0	0
J'	$-4k/\ell$	$4k/\ell$	$-4k/\ell$	$4k/\ell$
J''	0	0	0	0



حل از روش پرش :

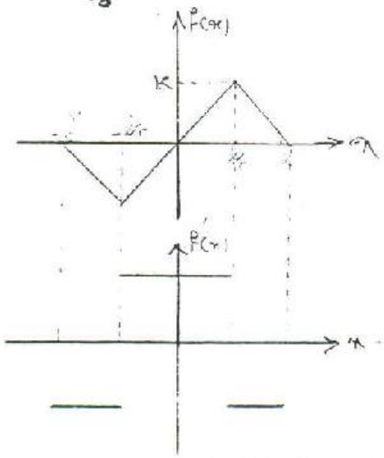
$$\longrightarrow \quad a_n=\frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\ell}{n\pi}\left\{\frac{-4k}{\ell}\cos\frac{n\pi}{\ell}\cdot\frac{-\ell}{2}+\frac{4k}{\ell}\cos(0)-\frac{4k}{\ell}\cos\frac{n\pi}{\ell}\cdot\frac{\ell}{2}+\frac{4k}{\ell}\cos n\pi\right\}\right]$$

$$=\frac{4k}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi\right]$$

مثال : برای مثال قبل سری سینوسی نیز بیابید

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx=\frac{8K}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

حل از روش پرش :



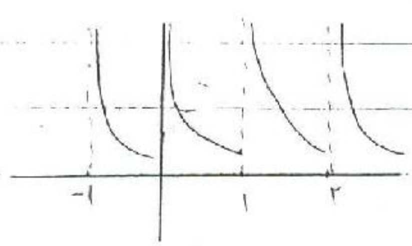
	$t_1=-\frac{\ell}{2}$	$t_2=\frac{\ell}{2}$
J	0	0
J'	$\frac{4K}{\ell}$	$\frac{-4K}{\ell}$
J''	0	0

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\ell}{n\pi}\left\{\frac{4K}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}\left(\frac{-\ell}{2}\right)-\frac{4K}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}\left(\frac{\ell}{2}\right)\right\}\right]=\frac{8K}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

چند قضیه در مورد سری فوریه :

قضیه ۱ : اگر تابع متناوب $f(x)$ در یک دورهٔ تناوب پیوسته و یا پیوستهٔ قطعه ای باشد و مشتق $f(x)$ یعنی $f'(x)$ در نقاط ناپیوستگی دارای حد چپ و راست باشد در آن صورت می توان برای آن یک سری فوریه بدست آورد که این سری در نقاط پیوستگی برابر تابع و در نقاط ناپیوستگی برابر میانگین حد چپ و راست تابع می باشد.

مثال از تابعی که سری فوریه ندارد :



$$f(x)=f(x+1)$$
$$f(x)=\frac{1}{x}\quad,\quad 0<x<1$$

$$a_0=\frac{1}{1}\int_0^1\frac{1}{x}dx=\operatorname{Ln}x\Big|_0^1=-(-\infty)=\infty$$

شرایط دیریکله : (این شرایط کافی هستند نه لازم)

۱- $\int_T |f(x)|dx < \infty$ ۲- تعداد ناپیوستگی در یک دورهٔ تناوب ∞ نباشد.

۳- تعداد ماکزیمم و مینیمم در یک دورهٔ تناوب بینهایت نباشد.

قضیه ۲ : در سری محدود فوریه یعنی $f_N(x)$ اگر ضرایب حاصل (a_n, b_n) را طوری محاسبه کنیم که J حداقل بشود در آن صورت این ضرایب همان ضرایب سری فوریه هستند.

$$e(x) = f(x) - f_N(x) \quad , \quad f_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n \cos\frac{2\pi}{T}nx + b_n \sin\frac{2\pi}{T}nx\right]$$

$$J = \int_T e^2(x)\,dx$$

فرم مختلط سری فوریه :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{T}nx + b_n \sin\frac{2\pi}{T}nx$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \\ e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right] \\ \sin\theta = \frac{1}{2j}\left[e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right] \end{array}$$

ثابت می‌کنیم که :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} \quad , \quad C_n = \frac{1}{T}\int_T f(x) e^{-j\frac{2\pi}{T}nx}\,dx$$

اثبات برای حالت $T = 2\pi$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$, a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_T f(x)\,dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$\rightarrow f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{2}\left[e^{jnx} + e^{-jnx}\right] + \frac{b_n}{2j}\left[e^{jnx} - e^{-jnx}\right]\right\}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{jnx} \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right)}_{C_n} + e^{-jnx} \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right)}_{K_n} \right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{jnx} + K_n e^{-jnx})$$

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{2\pi} f(x) \cos nx\,dx - \frac{j}{\pi} \int_{2\pi} f(x) \sin nx\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(x) \left[\cos nx - j \sin nx \right] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

بهمین ترتیب: $K_n = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(x) e^{jnx} dx = C_{-n}$, $a_0 = C_0$

$$\longrightarrow f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jnx} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-jnx} C_{-n}}_{\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jnx}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnx}$$

مثال: $f(x) = f(x + 2\pi)$, $f(x) = e^x$, $-\pi < x < \pi$

الف- ضرایب فرم حقیقی سری فوریه (b_n , a_n , a_0) را محاسبه کنید. ب- ضرایب فرم مختلط سری فوریه C_n را محاسبه کنید. ج- رابطهٔ $C_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}$ را تحقیق کنید.

الف) $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{2\pi} e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[e^{\pi} - e^{-\pi} \right] = \frac{\sinh \pi}{\pi} = A$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} \frac{ne^x \sin nx + e^x \cos nx}{1+n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi(1+n^2)} \left[e^{\pi} \cos n\pi - e^{-\pi} \cos n\pi \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{1+n^2} \times \frac{2\sinh \pi}{\pi} = \frac{2A(-1)^n}{1+n^2}$$

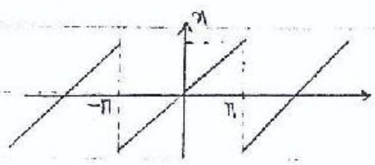
$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+n^2} \left(-ne^x \cos nx + e^x \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cdot \frac{-n \times 2\sinh \pi}{\pi} = \frac{-2An(-1)^n}{1+n^2}$$

ب) $C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot e^{-jnx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-jn)x} dx = \frac{1}{2\pi(1-jn)} e^{(1-jn)x} \Big|_{-\pi}^{\pi}$

$$=\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{1-jn}\times\Big[\underbrace{e^{(1-jn)\pi}}_{e^{\pi}\cdot \underbrace{e^{-jn\pi}}_{(-1)^n}}-\underbrace{e^{-(1-jn)\pi}}_{e^{-\pi}\cdot\underbrace{e^{jn\pi}}_{(-1)^n}}\Big]=\frac{(-1)^n\cdot 2\sinh\pi}{2\pi(1-jn)}=\frac{A(-1)^n}{1-jn}$$

ج) $$C_n\times\frac{(1+jn)}{1+jn}=\frac{A(-1)^n}{1+n^2}\times(1+jn)=\frac{A(-1)^n}{1+n^2}+j\,\frac{An(-1)^n}{1+n^2}=\frac{a_n}{2}-j\,\frac{b_n}{2}$$

مثال: $f(x)=x\ ,\ -\pi<x<\pi$

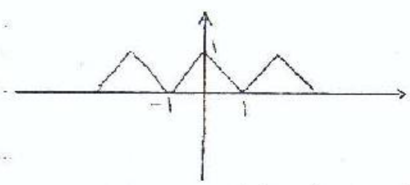


$$a_0=0\ ,\quad a_n=0\ ,\quad b_n=\frac{-2\cos n\pi}{n}$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x e^{-jnx}dx=\frac{x}{-jn}e^{-jnx}-\frac{1}{(-jn)^2}e^{-jnx}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi(-1)^n}{-jn}=\frac{j(-1)^n}{n}$$

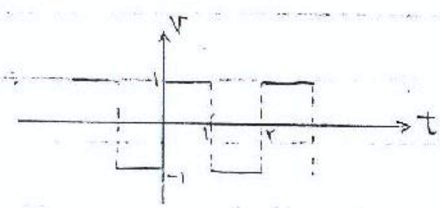
نکته: اگر $f(x)$ فرد باشد C_n فقط موهومی است و اگر $f(x)$ زوج باشد C_n فقط حقیقی است.

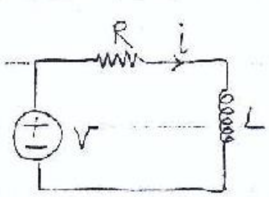
تمرین: ضرایب فرم حقیقی و مختلط سری فوریهٔ تابع مقابل را بیابید.



استفاده از سری فوریه در حل معادلات دیفرانسیل (حل مدارهای الکتریکی با منابع متناوب):

مثال:

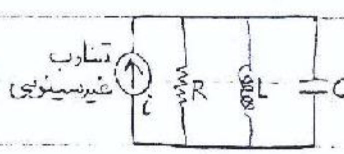




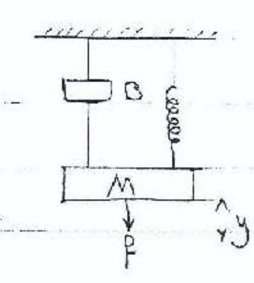
$$Ri+L\frac{di}{dt}=V$$

مثال:

$$i=\frac{V}{R}+C\frac{dV}{dt}+\frac{1}{L}\int V dt$$



مثال:



$$f-B\frac{dy}{dt}-Ky=M\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\longrightarrow M\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+Ky=f$$

یکی از خصوصیات معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی با ضرایب ثابت زیر

$$a_0 y + a_1\frac{dy}{dt} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + a_N\frac{d^N y}{dt^N} = b_0 x + b_1\frac{dx}{dt} + \cdots + b_m\frac{d^m x}{dt^m} \quad *$$

این است که اگر $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ در آن صورت:

$y(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ جواب خصوصی معادله است.

مثال:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = x \ ,\ x(t) = \cos 5t \longrightarrow y(t) = a\cos 5t + b\sin 5t$$

$$+\ \dot{y} = -5a\sin 5t + 5b\cos 5t$$

$$\ddot{y} = -25a\cos 5t - 25b\sin 5t$$

$$\longrightarrow (a + 10b - 25a)\cos 5t + (b - 10a - 25b)\sin 5t = \cos 5t$$

$$\longrightarrow \begin{cases} -24a + 10b = 1 \\ -10a - 24b = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} a = \\ b = \frac{5}{338} \end{matrix}$$

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری فوریه:

اگر معادلهٔ دیفرانسیلی به فرم * داشته باشیم، $x(t)$ با دورهٔ تناوب T متناوب باشد می‌توان $x(t)$

را به فرم سری فوریه نمایش داد. $x(t) = a_0 + \sum a_n\cos\frac{2\pi}{T}nx + b_n\sin\frac{2\pi}{T}nx$

برای محاسبهٔ $y(t)$ (جواب خصوصی) ابتدا جواب معادله را با ورودی زیر می‌یابیم:

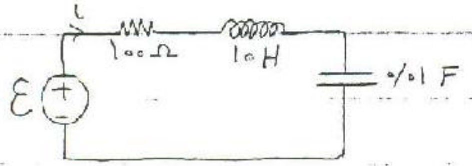
$$x_1(t) = A_n\cos\frac{2\pi}{T}nx + B_n\sin\frac{2\pi}{T}nx$$

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل بصورت زیر است:

$$y(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2\pi}{T}nx + B_n \sin\frac{2\pi}{T}nx$$

A_0 جواب به‌ازاء ورودی $x=a_0$ است.

مثال: یک مدار RLC داریم به صورت زیر:



$$\mathcal{E}=\begin{cases}100(\pi t+t^2) & -\pi<t<0\\ 100(\pi t-t^2) & 0<t<\pi\end{cases}$$

جریان i را بیابید.

$$\longrightarrow a_0=a_n=0 \quad , \quad b_n=\frac{-800}{\pi n^3}$$

$$E=100i+10\frac{di}{dt}+100\int i\,dt \qquad \longrightarrow E(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-800}{\pi n^3}\sin nt=\frac{-800}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin nt$$

فرض می‌کنیم:

$$E_1(t)=\frac{1}{n^3}\sin nt$$

$$\longrightarrow i(t)=A_n\cos nt+B_n\sin nt$$

$$\longrightarrow \frac{di}{dt}=-nA_n\sin nt+nB_n\cos nt \quad , \quad \int i\,dt=\frac{A_n}{n}\sin nt-\frac{B_n}{n}\cos nt$$

$$\longrightarrow \left[100A_n+10nB_n-\frac{100B_n}{n}\right]\cos nt+\left[100B_n-10nA_n+\frac{100A_n}{n}\right]\sin nt=\frac{1}{n^3}\sin nt$$

$$\longrightarrow \begin{cases}100A_n+10nB_n-\frac{100B_n}{n}=0\\ 100B_n-10nA_n+\frac{100A_n}{n}=\frac{1}{n^3}\end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادله دو مجهول فقط A_n و B_n محاسبه می‌شوند:

$$\longrightarrow i(t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nt+B_n\sin nt$$

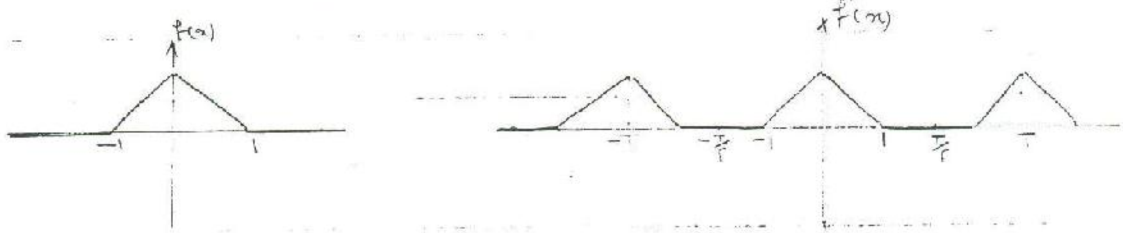
تبدیل یا انتگرال فوریه:

سوال: اگر تابع متناوب نباشد آیا فوریه بحثی دارد یا خیر.

پاسخ: برای توابع نامتناوب تبدیل فوریه تعریف می‌شود.

نشان از تابع نامتناوب:

برای اینکه تبدیل فوریه تعریف شود ابتدا یک تابع متناوب از روی تابع نامتناوب خود تعریف می‌کنیم.



$$f'(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{T}nx + b_n \sin\frac{2\pi}{T}nx$$

$$f'(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx\right]\cos\frac{2\pi}{T}nx$$

$$+\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx\right]\sin\frac{2\pi}{T}nx$$

$$\omega_n \triangleq \frac{2\pi}{T}n \longrightarrow \omega_{n+1} = \frac{2\pi}{T}(n+1), \quad \Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}$$

$$\longrightarrow f'(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta\omega}{\pi}\left\{\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\omega_n x\,dx\right]\cos\omega_n x\right.$$

$$\left.+\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\omega_n x\,dx\right]\sin\omega_n x\right\}$$

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} f'(x)$$

$$f(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx+\frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\omega_n x\,dx\right]\cos\omega_n x\right.$$

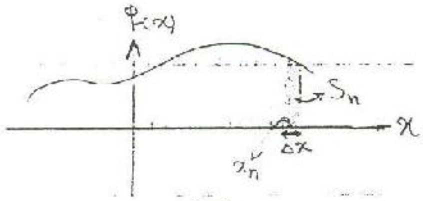
$$\left.+\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\omega_n x\,dx\right]\sin\omega_n x\right\}.\Delta\omega$$

شرط دیریکله برای اینکه بتوانیم برای تابعی تبدیل فوریه تعریف شود : $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega_n x\,dx\right]\cos\omega_n x+\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega_n x\,dx\right]\right.$$

$$\left.\times\sin\omega_n x\right\}\Delta\omega$$

یادآوری: اگر



$$S=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

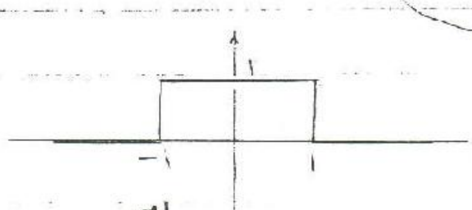
$$\longrightarrow S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}S_n=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f[x_n].\Delta x}$$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega x\,f(x)dx\right]}_{A(\omega)}\cos\omega x+\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx\right]}_{B(\omega)}\sin\omega x\right\}d\omega$$

$$\longrightarrow A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx\quad,\quad B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$,\quad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega$$

مثال ۱:



$$A(\omega)=\int_{-1}^{1}(1)\cos\omega x\,dx=2\frac{\sin\omega}{\omega}\quad,\quad B(\omega)=\int_{-1}^{1}(1)\sin\omega x\,dx=0$$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\\ \frac{1}{2} & |x|=1\end{cases}$$

چند نکته:

۱- اگر تابع $f(x)$ زوج باشد: $A(\omega)=2\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$, $B(\omega)=0$

۲- اگر تابع $f(x)$ فرد باشد: $B(\omega)=2\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$, $A(\omega)=0$

۳- درصورتی که $f(x)$ شرط دیریکله را داشته باشد در آن صورت انتگرال فوریه دارد یعنی $A(\omega)$ و $B(\omega)$ معین هستند که این تبدیل در نقاط پیوستگی برابر تابع و در نقاط ناپیوستگی برابر میانگین حد چپ و راست تابع است.

مثال ۲: تبدیل انتگرال فوریه تابع $f(x)=e^{-k|x|}$ را بیابید. $k>0$ است چون اگر $k<0$ شرط دیریکله را نخواهیم داشت.

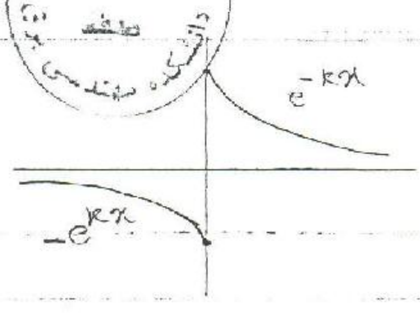
$$A(\omega)=2\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos\omega x\,dx=2\left.\frac{\omega e^{-kx}\sin\omega x-ke^{-kx}\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\right|_0^{+\infty}=\frac{2k}{k^2+\omega^2}$$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2k}{k^2+\omega^2}\cos\omega x\,d\omega$$

برای $k>0$, $x>0$ داریم: $$e^{-kx}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2k}{\omega^2+k^2}\cos\omega x\,d\omega$$

$$\longrightarrow \boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2k}e^{-kx}}$$ انتگرال لاپلاس I

مثال۳:



$$f(x)=\begin{cases} e^{-kx} & x>0 \\ -e^{kx} & x<0 \end{cases} \qquad k>0$$

چون تابع فرد است $A(\omega)=0$ و

$$B(\omega)=2\int_0^{+\infty} e^{-kx}\sin\omega x\,dx = 2\,\frac{-\omega e^{-kx}\cos\omega x + k e^{-kx}\sin\omega x}{k^2+\omega^2}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2\omega}{k^2+\omega^2}$$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\sin\omega x\,d\omega$$

$$\longrightarrow \int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-kx}\ , \ x,k>0$$ انتگرال لاپلاس II

فرم مختلط انتگرال فوریه

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right\}d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{A(\omega)}{2}\left(e^{j\omega x}+e^{-j\omega x}\right)+\frac{B(\omega)}{2j}\left(e^{j\omega x}-e^{-j\omega x}\right)\right\}d\omega$$

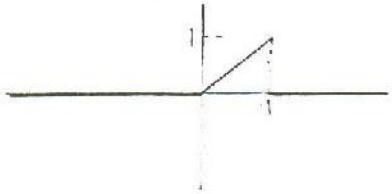
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\underbrace{\left(A(\omega)-jB(\omega)\right)}_{C(\omega)}e^{j\omega x}+\underbrace{\left(A(\omega)+jB(\omega)\right)}_{K(\omega)}e^{-j\omega x}\right]d\omega$$

$$C(\omega)=A(\omega)-jB(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx - j\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left[\cos\omega x - j\sin\omega x\right]dx$$

$$\longrightarrow C(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx$$ ثابت کنید $C(-\omega)=K(\omega)$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C(\omega)e^{j\omega x}d\omega$$



تمرین تابع f(x) به فرم زیر داده شده است.

الف- فرم حقیقی تبدیل فوریه (A(ω) و B(ω)) را محاسبه کنید.

ب- فرم مختلط تبدیل فوریه (C(ω)) را محاسبه کنید.

ج- رابطه C(ω)=A(ω)−jB(ω) را تحقیق کنید.

الف- $A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\int_0^1 x\cos\omega x\,dx=\frac{x}{\omega}\sin\omega x+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x\Big|_0^1$

$$=\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{\cos\omega}{\omega^2}-\frac{1}{\omega^2}$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=\int_0^1 x\sin\omega x\,dx=\frac{-x}{\omega}\cos\omega x+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega x\Big|_0^1$$

$$=\frac{-\cos\omega}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega$$

ب- $C(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx=\int_0^1 x e^{-j\omega x}dx=\frac{x}{-j\omega}e^{-j\omega x}\Big|_0^1-\frac{1}{(-j\omega)^2}e^{-j\omega x}\Big|_0^1$

$$=\left(j\frac{x}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)e^{-j\omega x}\Big|_0^1=\left(j\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)e^{-j\omega}-\frac{1}{\omega^2}$$

ج- $C(\omega)=\left(j\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)(\cos\omega-j\sin\omega)-\frac{1}{\omega^2}=\left[\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega-\frac{1}{\omega^2}\right]$

$$+j\left[\frac{1}{\omega}\cos\omega-\frac{1}{\omega^2}\sin\omega\right]=A(\omega)-j\,B(\omega)$$

چند مطلب متفرقه در مورد تبدیل فوریه:

الف- خواص تبدیل فوریه

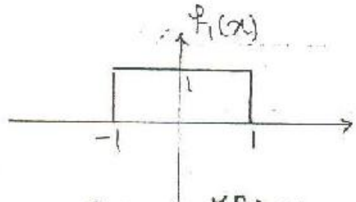
۱- خاصیت خطی بودن:

$$f_1(x) \longleftrightarrow C_1(\omega)$$
$$f_2(x) \longleftrightarrow C_2(\omega)$$

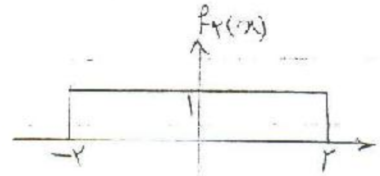
$$\longrightarrow \quad f(x)=af_1(x)+bf_2(x) \longleftrightarrow aC_1(\omega)+bC_2(\omega)$$

اثبات:
$$C(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[af_1(x)+bf_2(x)\right]e^{-j\omega x}dx$$
$$=a\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)e^{-j\omega x}dx}_{C_1(\omega)}+b\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)e^{-j\omega x}dx}_{C_2(\omega)}$$

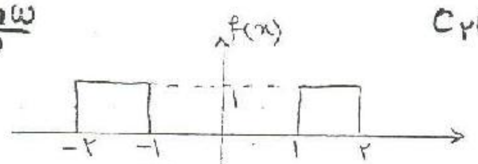
مثال:



$$C_1(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$$



$$C_2(\omega)=\frac{2\sin 2\omega}{\omega}$$



$$\frac{2\left[\sin 2\omega-\sin\omega\right]}{\omega}$$

۲- خاصیت انتقال:

$$f(x) \longleftrightarrow C(\omega)$$
$$f(x-x_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega x_0}\cdot C(\omega)$$

مثال:

$f'(x)=f_1(x-1)$ f_1 در مثال قبلی

$$\longrightarrow C'(\omega)=e^{-j\omega}\cdot\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

۳- خاصیت ضریب:

$$f(x) \longleftrightarrow C(\omega)$$
$$f(ax) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}C\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

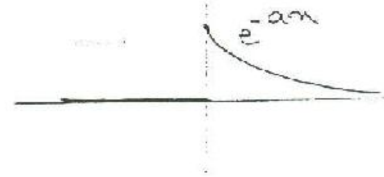
۴- خاصیت تقارن: اگر $f(x)$ حقیقی باشد در آن صورت $C^*(\omega)=C(-\omega)$

اثبات : $C(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-j\omega x}\, dx$, $C(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{j\omega x}\, dx$

$$C^{*}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{j\omega x}\, dx$$

مثال :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

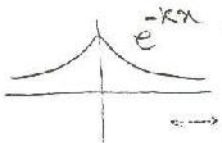


$$C(\omega)=\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}.\, e^{-j\omega x}\, dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)x}\, dx=\frac{1}{-(a+j\omega)}\, e^{-(a+j\omega)x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{a+j\omega}$$

$\rightarrow C(-\omega)=\frac{1}{a-j\omega}$ (از طرفی : $C^{*}(\omega)=\frac{1}{a-j\omega}$

نتیجه : (بعنوان تمرین اثبات کنید)

۱- اگر $f(x)$ حقیقی و زوج باشد، $C(\omega)$ نیز حقیقی و زوج است.



$\longleftrightarrow \frac{2k}{k^2+\omega^2}$

۲- اگر $f(x)$ حقیقی و فرد باشد، $C(\omega)$ موهومی و فرد است.

۳- اگر $f(x)$ حقیقی باشد، $A(\omega)$ همواره زوج و $B(\omega)$ همواره فرد است.

۵- خاصیت مشتق :

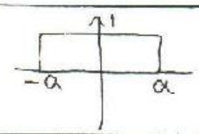
$$f(x) \longleftrightarrow C(\omega)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \longleftrightarrow j\omega\, C(\omega)$$

اثبات : $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)\, e^{j\omega x}\, dx$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega\, C(\omega).\, e^{j\omega x}\, dx$$

ب ـ جدول تبدیل فوریه :

$f(x)$	$C(\omega)$
	$\frac{2\sin a\omega}{\omega}$
$e^{-k\|x\|}$	$\frac{2k}{k^2+\omega^2}$
$\begin{cases} e^{-kx} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$	$\frac{1}{k+j\omega}$
$\begin{cases} xe^{-kx} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$	$\frac{1}{(k+j\omega)^2}$
$\begin{cases} e^{-kx}\cos\omega_0 x & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$	$\frac{j\omega_0+k}{(j\omega+k)^2+\omega_0^2}$

ج ـ استفاده از تبدیل فوریه در حل معادلات دیفرانسیل (حل مدارهای الکتریکی)

در حالت کلی :

$$a_0 y + a_1\frac{dy}{dt} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + a_N\frac{d^N y}{dt^N} = b_0 x + b_1\frac{dx}{dt} + \cdots + b_m\frac{d^m x}{dt^m}$$

$$y(t) \longleftrightarrow Y(\omega)$$
$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

با استفاده از خاصیت مشتق :

$$\frac{dy}{dt} \longleftrightarrow j\omega\, Y(\omega)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} \longleftrightarrow (j\omega)^2 . Y(\omega)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

از طرفین رابطهٔ اصلی تبدیل فوریه میگیریم :

$$a_0 Y(\omega) + a_1 j\omega Y(\omega) + a_2 (j\omega)^2 Y(\omega) + \cdots + a_N (j\omega)^N Y(\omega)$$

$$= b_0 X(\omega) + b_1 (j\omega) X(\omega) + b_2 (j\omega)^2 X(\omega) + \cdots + b_m (j\omega)^m X(\omega)$$

$$\longrightarrow \boxed{Y(\omega)=\frac{b_0+b_1(j\omega)+b_2(j\omega)^2+\cdots+b_m(j\omega)^m}{a_0+a_1(j\omega)+a_2(j\omega)^2+\cdots+a_N(j\omega)^N}\cdot X(\omega)}$$

الگوریتم حل معادله دیفرانسیل با استفاده از تبدیل فوریه:

۱- تبدیل فوریه $x(t)$ را با طریقه مستقیم یا از روی جدول محاسبه می‌کنیم.

۲- $Y(\omega)$ را از رابطه بالا حساب می‌کنیم.

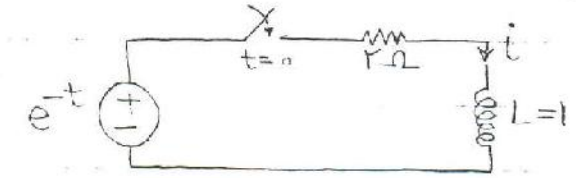
۳- از $Y(\omega)$ عکس تبدیل فوریه می‌گیریم

$\longrightarrow y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$

$\longrightarrow$ از جدول و خواص

نکته مهم: محاسبه $Y(\omega)$ از رابطه انتگرالی معمولاً مشکل است. با تجزیه به کسرهای جزئی و استفاده از جدول به پاسخ برسیم.

مثال:



$$2i+\frac{di}{dt}=V \qquad , \qquad V=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-t} & t>0\end{cases}$$

$$\longrightarrow 2y+\frac{dy}{dt}=x \qquad , \qquad x=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-t} & t>0\end{cases}$$

$$\longrightarrow X(\omega)=\frac{1}{1+j\omega} \qquad \longrightarrow Y(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}X(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\cdot\frac{1}{1+j\omega}$$

$$=\frac{A}{2+j\omega}+\frac{B}{1+j\omega}$$

$$\longrightarrow A=-1 \ , \ B=1$$

$$\longrightarrow Y(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}$$

$$\longrightarrow y(t)=-e^{-2t}+e^{-t}$$

$$\longrightarrow i=\begin{cases}-e^{-2t}+e^{-t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

نکتهٔ مهم : در استفاده از تبدیل فوریه در حل معادلات دیفرانسیل به طور همزمان جواب خصوصی و جواب همگن بدست می آیند.

در مثال قبل اگر $\sigma=0$ بود چون شرط دیریکله را ندارد تبدیل فوریهٔ آن ∞ می شود.

تبدیل لاپلاس :

در این قسمت فرض می کنیم $f(t)$ به ازاء t های کوچکتر از صفر، صفر است.

مثال : $f(t)=\begin{cases} t^2 & t\geqslant 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

در این صورت تبدیل لاپلاس به صورت زیر تعریف می شود : تبدیل لاپلاس یکطرفه $F(S)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

$s=\sigma+j\omega$

برای توابعی که در $t<0$ مقدار دارند $F(S)$ به فرم زیر است :

تبدیل لاپلاس دوطرفه $F(S)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-st}dt$

یادآوری تبدیل فوریه : $C(\omega)=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

نکته : در تبدیل فوریه دیدیم که شرط دیریکله برای اینکه $f(t)$ تبدیل فوریه داشته باشد این است که : $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<\infty$

$$F(S)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-(\sigma+j\omega)t}dt=\int_0^{\infty}\left[f(t).e^{-\sigma t}\right]e^{-j\omega t}dt$$

لذا شرط اینکه تابع $f(t)$ تبدیل لاپلاس داشته باشد این است که : $\int\left|f(t)e^{-\sigma t}\right|dt<\infty$

در این صورت $F(s)$ به ازاء تمام مقادیر $s > \sigma$ مقدار خواهد داشت.

شرط داشتن تبدیل لاپلاس به فرم دیگر: $\quad t \geq 0 \quad |f(t)| < Me^{\gamma t}$

به ازای یک γ و M دلخواه

مثال: این تابع تبدیل فوریه ندارد.

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty |e^{2t}|\,dt = \infty \qquad \text{ولی} \qquad \int_0^\infty |e^{2t} \cdot e^{-3t}|\,dt = 1$$

مثال: $f(t) = e^{at}$

$$\rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\infty$$

اگر $s > a$ باشد: $\quad F(s) = \dfrac{1}{s-a}$

و به همین ترتیب:

$$e^{-t} \longleftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad a = -1$$

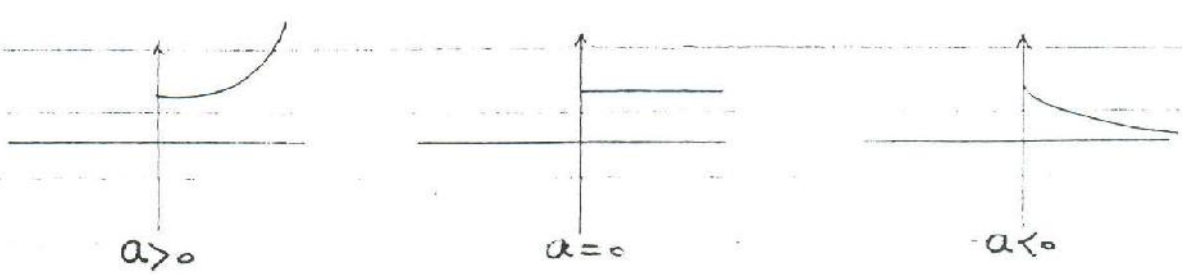
$$e^{t} \longleftrightarrow \frac{1}{s-1}, \quad a = 1$$

$$1 \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \quad a = 0$$

توابع ویژه: به دو دسته نمائی و منفرد تقسیم می‌شوند:

توابع نمائی: $\quad f(t) = e^{\alpha t}, \quad \alpha = a + j\omega_0$

الف- $\quad f(t) = e^{at}, \quad \alpha = a$



$a > 0 \qquad\qquad a = 0 \qquad\qquad a < 0$

جدول تبدیل لاپلاس:

اثبات بعضی از عبارات مبدل:

$$e^{at} \longleftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$e^{(a+j\omega_0)t} \longrightarrow \frac{1}{s-(a+j\omega_0)}$$

$$e^{at} e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow \frac{1}{(s-a)-j\omega_0}$$

$$e^{at}\left[\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t\right] \longleftrightarrow \frac{(s-a)+j\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$$

$$e^{at}\cos\omega_0 t + j\, e^{at}\sin\omega_0 t \longleftrightarrow \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2} + j\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$e^{at}\cos\omega_0 t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$
$e^{at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$

خواص مهم تبدیل لاپلاس:

۱- خطی بودن:

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)$$

$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)$$

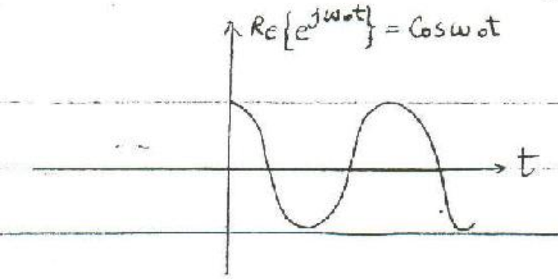
$$af_1(t)+bf_2(t) \longleftrightarrow aF_1(s)+bF_2(s)$$

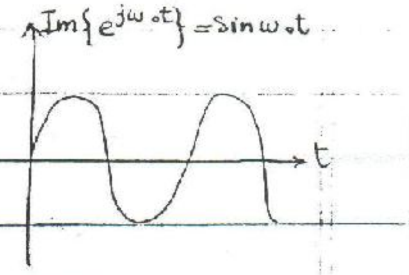
اثبات:

$$F(s)=\int_0^{\infty}\left[af_1(t)+bf_2(t)\right]e^{-st}dt = a\int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st}dt + b\int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st}dt$$

$$= aF_1(s) + bF_2(s)$$

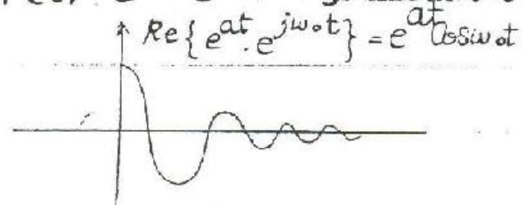
ب- $\alpha = j\omega_0$ ، $f(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$



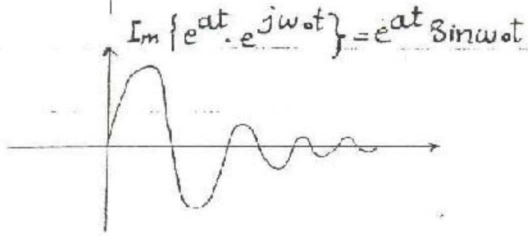


ج- $\alpha = a + j\omega_0$ ، $f(t) = e^{at}\cos\omega_0 t + j\,e^{at}\sin\omega_0 t$

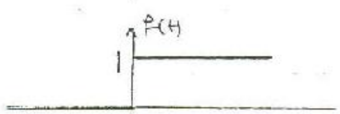
اگر $a<0$ باشد :

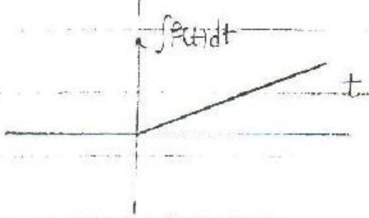


اگر $a<0$ باشد :

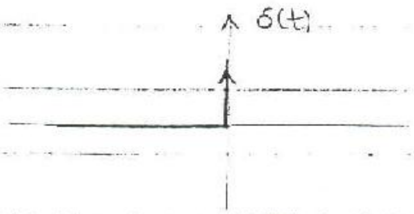


توابع منفرد: مشتق ها و انتگرالهای تابع پله است.





مشتق عام تابع پله :



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)$$

۲ـ خاصیت مشتق در حوزهٔ زمان:

$$f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

$$\frac{d f(t)}{dt} \longleftrightarrow sF(s) - f(0)$$

اثبات:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = ?$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \quad , \quad f'(t)dt = dv \; , \; e^{-st} = u$$

$$f(t) = v \; , \; -se^{-st} = du$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}[f'(t)] = f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = -f(0) + sF(s)$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

به همین ترتیب:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

و در حالت کلی:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

نکته مهم این خاصیت در حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و همگن کمک بزرگی می‌کند.

مثال:

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \quad , \quad y(0) = 3 \; , \; y'(0) = 1$$

$$\longrightarrow s^2Y(s) - s\overset{3}{y(0)} - \overset{1}{y'(0)} + 4[sY(s) - \overset{3}{y(0)}] + 3Y(s) = 0$$

$$\longrightarrow (s^2+4s+3)Y(s) = 13 + 3s$$

$$\longrightarrow Y(s) = \frac{3s+13}{s^2+4s+3} = \frac{3s+13}{(s+1)(s+3)} = \frac{-2}{s+3} + \frac{5}{s+1}$$

$$\longrightarrow y(t) = -2e^{-3t} + 5e^{-t}$$

اگر طرف دوم معادله صفر نباشد:

مثال :
$$y''+4y'+3y=x \quad , \qquad x=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad (s^2+4s+3)Y(s)-(2s+12)=\frac{1}{s}$$

$$\longrightarrow \quad Y(s)=\frac{2s+12+\frac{1}{s}}{(s+1)(s+3)}=\frac{2s^2+12s+1}{s(s+1)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+3}$$

$$\longrightarrow \quad y(t)=A+Be^{-t}+Ce^{-3t}$$

۳- انتگرال در حوزه زمان : $\quad f(t) \longrightarrow F(s)$

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}F(s)$$

مثال: عکس تبدیل لاپلاس $\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega_0^2)}$ چیست ؟

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right]=\sin\omega_0 t$$

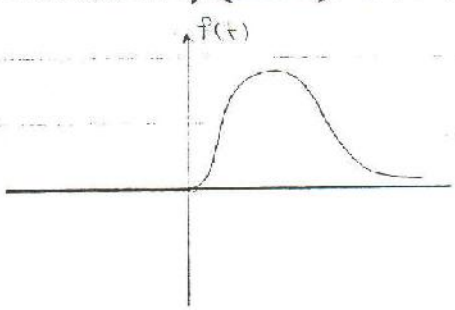
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_0}{s(s^2+\omega_0^2)}\right]=\int_0^t \sin\omega_0\tau\,d\tau=\frac{1}{\omega_0}(1-\cos\omega_0 t)$$

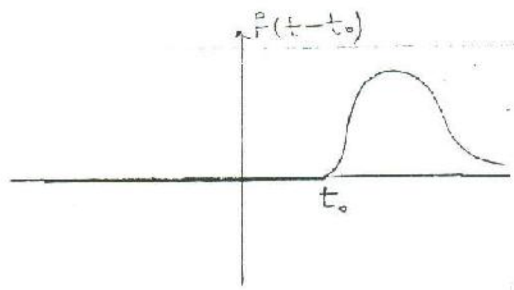
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_0}{s^2(s^2+\omega_0^2)}\right]=\int_0^t \frac{1}{\omega_0}(1-\cos\omega_0\tau)\,d\tau=\frac{1}{\omega_0}\left(t-\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+\omega_0^2)}\right]=\frac{1}{\omega_0^2}\left[t-\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right]$$

۴- خاصیت انتقال در حوزه زمان : $\quad f(t) \longleftrightarrow F(s)$

$$f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}F(s)$$

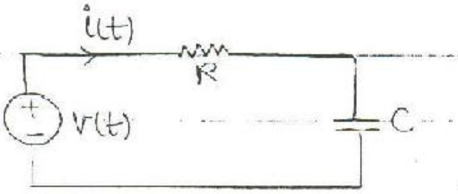


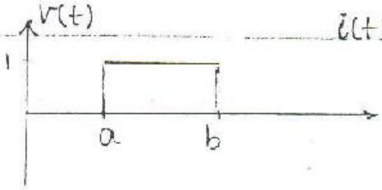


اثبات: $\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\right] = \int_0^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt \quad , \quad t-t_0=\tau$

$$\longrightarrow \mathcal{L}\left[f(t-t_0)\right] = \int_{-t_0}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau = e^{-st_0}\underbrace{\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{F(s)}$$

مثال: $i(t)=?$

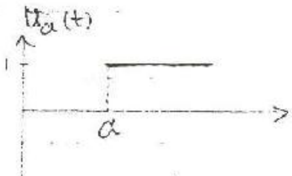


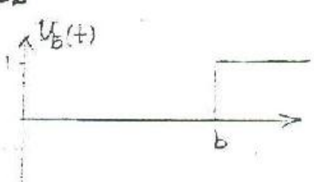


$$V(t) = R\,i(t) + \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau$$

$$\longrightarrow V(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) \longrightarrow I(s) = \frac{V(s)}{R+\frac{1}{Cs}}$$

$V(t) = u_a(t) - u_b(t)$





$$\longrightarrow V(s) = \frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}$$

$$\longrightarrow I(s) = \frac{1}{R+\frac{1}{Cs}}\cdot\frac{1}{s}\left[e^{-as}-e^{-bs}\right] = \frac{C}{1+RCs}\left[e^{-as}-e^{-bs}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{1+RCs}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/R}{1/RC+s}\right] = \frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\longrightarrow i(t) = \frac{1}{R}\left[e^{-\frac{t-a}{RC}}u_a(t) - e^{-\frac{t-b}{RC}}u_b(t)\right]$$

۵ـ مشتق در حوزه لاپلاس:

$$f(t) \longrightarrow F(s)$$

$$-t\,f(t) \longleftrightarrow \frac{dF(s)}{ds}$$

اثبات:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\longrightarrow \frac{dF(s)}{ds} = \int_0^{+\infty} -t f(t) e^{-st} dt$$

مثال :

$$\sin \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$-t \sin \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{-2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

$$\frac{1}{2} t \sin \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

$$\int_0^t \frac{1}{2} \tau \sin \omega_0 \tau \, d\tau \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

$$e^{at} \longleftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$te^{at} \longleftrightarrow \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\vdots$$

$$t^n e^{at} \longleftrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega_0^2} \sin \omega_0 t + \frac{-t}{\omega_0} \cos \omega_0 t\right] \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

۶- خاصیت انتگرال در حوزهٔ لاپلاس :

$$f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

$$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_0^s F(\theta) d\theta$$

مثال: عکس تبدیل لاپلاس مقابل را بیابید.

$$G(s) = Ln\left[1+\frac{\omega^2}{s^2}\right] \qquad g(t) = ?$$

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{-2\frac{\omega^2}{s^3}}{1+\frac{\omega^2}{s^2}} = \frac{-2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{+2s}{s^2+\omega^2} - \frac{2}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{dG(s)}{ds}\right] = 2\cos t - 2 \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{2\cos t - 2}{t}$$

۷- خاصیت انتقال در حوزهٔ S :

$$f(t) \longleftrightarrow F(S)$$

$$e^{at} f(t) \longleftrightarrow F(S-a)$$

اثبات:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(S-a)$$

۸- خاصیت کانولوشن :

$$f(t)*g(t) \triangleq \int_0^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{+\infty} g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau = g(t)*f(t)$$

$$\begin{matrix} f(t) \longleftrightarrow F(S) \\ g(t) \longleftrightarrow G(S) \end{matrix} \longrightarrow f(t)*g(t) \longleftrightarrow F(S).G(S)$$

اثبات،

$$\mathcal{L}\left[f(t)*g(t)\right] = \int_0^{\infty}\left[f(t)*g(t)\right]e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^{\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} f(\tau)\left[\int_0^{\infty} g(t-\tau)e^{-st}\,dt\right]d\tau$$

از طرفی :

$$G(S) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt \longrightarrow e^{-s\tau}G(s) = \int_0^{\infty} g(t-\tau)e^{-st}\,dt$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}\left[f(t)*g(t)\right] = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}G(s)\,d\tau = G(S)\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = F(S).G(S)$$

مثال :

$$H(S) = \underbrace{\frac{1}{S}}_{G(S)} \cdot \underbrace{\frac{1}{S-1}}_{F(S)} \qquad h(t) = ?$$

راه اول: تجزیه کسر

$$H(S) = \frac{-1}{S} + \frac{1}{S-1} \longrightarrow h(t) = -1 + e^{t}$$

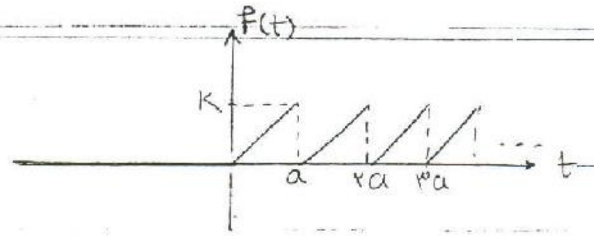
راه دوم: کانولوشن

$$h(t) = f(t)*g(t) \quad , \quad \begin{matrix} g(t) = 1 \\ f(t) = e^{t} \end{matrix}$$

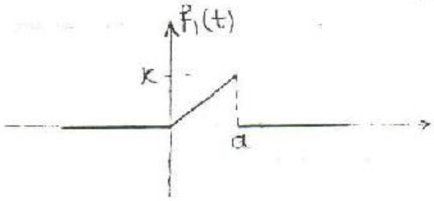
$$\longrightarrow h(t) = \int_0^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{t} g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{t} e^{(t-\tau)}\cdot 1\,d\tau$$

$$= e^{t}\int_0^{t} e^{-\tau}\,d\tau = e^{t}\cdot -1e^{-\tau}\Big|_0^{t} = e^{t}\left[-e^{-t}+1\right] = -1+e^{t}$$

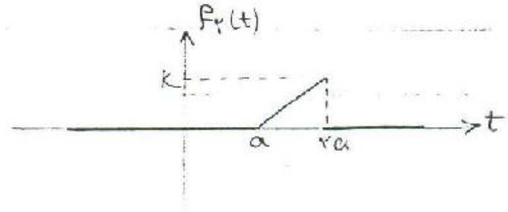
تبدیل لاپلاس توابع متناوب (قبل از صفر، صفر است) :



$$F(S)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$$



،



$$F(S)=\underbrace{\int_0^{\infty} f_1(t)\,e^{-st}\,dt}_{F_1(S)}+\underbrace{\int_0^{\infty} f_2(t)\,e^{-st}\,dt}_{F_2(S)}+\cdots$$

$$F(S)=F_1(S)+F_2(S)+\cdots$$

$$F_2(S)=e^{-aS}\cdot F_1(S)$$

$$F_3(S)=e^{-aS}\cdot F_2(S)=e^{-2aS}F_1(S)$$

$$F(S)=F_1(S)+e^{-aS}F_1(S)+e^{-2aS}F_1(S)+\cdots=F_1(S)\cdot\left[1+e^{-aS}+e^{-2aS}+\cdots\right]$$

$$\longrightarrow F(S)=\frac{F_1(S)}{1-e^{-aS}}\quad,\quad |e^{-aS}|<1$$

$$\mathrm{Re}\{S\}>0$$

مثال:

$$f_1(t)=\begin{cases}\frac{K}{a}t & 0<t<a\\ 0 & \text{خارج فاصلهٔ فوق}\end{cases}$$

$$\longrightarrow F_1(S)=\int_0^{a}\frac{K}{a}t\,e^{-st}\,dt=\frac{K}{a}\left[\frac{t}{-S}e^{-st}+\frac{1}{S^2}e^{-st}\right]_0^a$$

$$\longrightarrow F_1(S)=\frac{K}{a}\left[\frac{a}{-S}e^{-aS}+\frac{1}{S^2}e^{-aS}-\frac{1}{S^2}\right]$$

$$F(S)=\frac{\frac{K}{a}\left[\frac{a}{-S}e^{-aS}+\frac{1}{S^2}e^{-aS}-\frac{1}{S^2}\right]}{1-e^{-aS}}$$

تجزیه کسر:

$$F(s)=\frac{b_0+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_m s^m}{a_0+a_1 s+a_2 s^2+\cdots+a_N s^N}$$

$$=\frac{b_0+b_1 s+\cdots+b_m s^m}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\cdots(s+\alpha_N)}$$

الف- ریشه‌های مخرج حقیقی و مجزا هستند:

$$\longrightarrow F(s)=\frac{A_1}{s+\alpha_1}+\frac{A_2}{s+\alpha_2}+\cdots+\frac{A_N}{s+\alpha_N}$$

$$\longrightarrow f(t)=A_1 e^{-\alpha_1 t}+A_2 e^{-\alpha_2 t}+\cdots+A_N e^{-\alpha_N t}$$

برای محاسبهٔ A_K چند راه وجود دارد:

۱- $A_K=(s+\alpha_K)\cdot F(s)\Big|_{s=-\alpha_K}$

۲- $A_K=\dfrac{b_0+b_1 s+\cdots+b_m s^m}{\frac{d}{ds}\left(a_0+a_1 s+\cdots+a_N s^N\right)}\Bigg|_{s=-\alpha_K}$

مثال: $F(s)=\dfrac{s+1}{s^3+s^2-6s}=\dfrac{s+1}{s(s-2)(s+3)}=\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2}{s-2}+\dfrac{A_3}{s+3}$

$$A_1=\frac{s+1}{(s-2)(s+3)}\Big|_{s=0}=\frac{-1}{6}\quad\rightarrow\quad A_2=\frac{s+1}{s(s+3)}\Big|_{s=2}=\frac{3}{10}$$

$$,\quad A_3=\frac{s+1}{s(s-2)}\Big|_{s=-3}=\frac{-2}{15}$$

$$\longrightarrow f(t)=\frac{-1}{6}+\frac{3}{10}e^{2t}-\frac{2}{15}e^{-3t}$$

ب- ریشه‌های مزدوج مختلط داشته باشیم:

$$\begin{cases}\alpha_1=a+j\omega\\ \alpha_2=a-j\omega\end{cases}$$

$$F(s)=\frac{A_1 s+A_2}{s^2+B_1 s+B_2}+\frac{A_3}{s+\alpha_3}+\frac{A_4}{s+\alpha_4}+\cdots$$

$$\frac{A_1 s+A_2}{s^2+B_1 s+B_2}=\frac{A_1 s+A_2}{\Big(s+\underbrace{\frac{B_1}{2}}_{-a}\Big)^2+\underbrace{B_2-\left(\frac{B_1}{2}\right)^2}_{\omega_0^2}}$$

$$e^{at}\sin\omega_0 t \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$$

$$e^{at}\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$$

$$e^{at}\left[A\cos\omega_0 t+\frac{\alpha A+B}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right]\longleftrightarrow\frac{As+B}{(s-a)^2+\omega_0^2}$$

مثال :

$$H(s)=\frac{2s+3}{s^2+2s+2}\quad,\quad s=-1\pm j$$

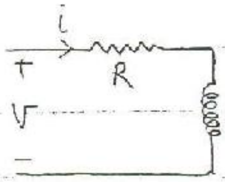
$$H(s)=\frac{A_1(s+1)+A_2(1)}{(s+1)^2+1^2}=\frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2+1^2}=2\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

$$\longrightarrow h(t)=2e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی :

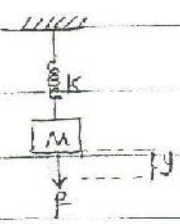
قبلاً با معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) آشنا شده‌ایم. چند مثال از سیستمهای فیزیکی که با ODE مدل می‌شوند را در زیر بیان می‌کنیم :

مثال۱



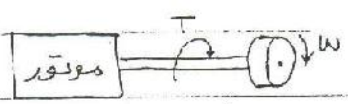
$$V=Ri+L\frac{di}{dt}$$

مثال۲



$$M\frac{d^2y}{dt^2}+\underbrace{B}_{\text{ضریب اصطکاک}}\frac{dy}{dt}+ky=F$$

مثال۳



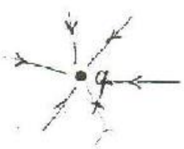
$$T=\overset{\text{اینرسی}}{J}\frac{d\omega}{dt}+B.\omega$$

نکته: در مثالهای بالا متغیرهای درنظرگرفته شده (جریان، ولتاژ، نیرو، گشتاور و ...) همگی تابعی از یک متغیر یعنی زمان هستند ... $i(t)$, $v(t)$, $F(t)$, $y(t)$, $T(t)$, $\omega(t)$, ...

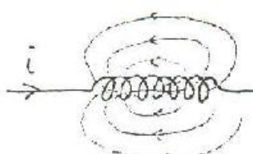
نکته: سیستمهایی می توان مثال زد که متغیرهای آن تابعی از چند متغیر مستقل (زمان و مکان) می باشند این گونه سیستمها با PDE مدل می شوند.

مثال:

۱- میدان الکتریکی: شدت میدان الکتریکی نه تنها به زمان، بلکه به مکان نقطه مورد نظر نیز بستگی دارد.

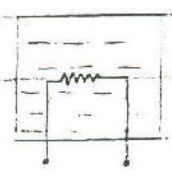


۲- میدان مغناطیسی: شدت میدان مغناطیسی نیز نه تنها به زمان بلکه به مکان نیز بستگی دارد.



۳- ارتعاش: $u(x,t)$ انحراف از حالت تعادل

۴- انتقال حرارت در سیستم گرمایی: $T(t,x,y,z)$ درجه حرارت



تعریف (PDE): یک معادله را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) نامند به شرط آنکه در آن معادله مشتق از تابعی باشد که آن تابع دارای دو یا چند متغیر مستقل (x, y, z, t) باشد.

مثلاً اگر $u(x,t)$ باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$x^2 u + t^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 5 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

تعریف۲: یک PDE را خطی نامند چنانچه نسبت به u و مشتقات آن از درجه اول باشد.

تعریف۳: یک PDE را همگن نامند چنانچه هر جمله آن شامل u و یا مشتقات آن باشد.

تعریف۴: بزرگترین مشتق یک PDE را مرتبهٔ آن نامند.

مثال:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$ خطی، همگن، مرتبه یک

$$x^2 u + t^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 5$$ خطی، ناهمگن، مرتبه یک

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$ خطی، همگن، مرتبهٔ دو

$$u^2 + t^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ غیرخطی، همگن، مرتبهٔ یک

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + x^2 + t^2 = 0$$ غیرخطی، ناهمگن، مرتبهٔ یک

در این درس با معادلات دیفرانسیل خطی و همگن کار می‌کنیم. (عموماً از مرتبهٔ ۲)

نمونه معادلاتی که بررسی می‌شوند:

الف: معادلهٔ لاپلاس (توصیف‌کنندهٔ انواع میدان‌ها)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{یک بعدی} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{دو بعدی} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & \text{سه بعدی} \end{cases}$$

ب: معادلهٔ موج (توصیف‌کنندهٔ انواع ارتعاشات) یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 . \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 . \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$
دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 . \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$
سه بعدی

ج : معادلهٔ گرما (توصیف کنندهٔ انواع سیستمهای انتقال گرما) یک بعدی $\frac{\partial u}{\partial t} = C^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

سه بعدی $\frac{\partial u}{\partial t} = C^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$ دو بعدی $\frac{\partial u}{\partial t} = C^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$

برای سادگی قرار دادی گذاریم که : $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}$

بررسی چند نکته :

۱- u را پاسخ یک PDE در فضای R نامند، به شرط آنکه اولاً در آن فضا مشتقات تعریف شده در معادله را داشته باشد و ثانیاً در معادله صدق کند.

۲- اگر $u_1, u_2, \ldots, u_n$ پاسخ PDE خاصی باشند اگر PDE تعریف شده خطی و همگن باشد در آن صورت $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$ نیز جواب معادله است.

۳- پاسخهای ODE فقط با مقدار ثابت با هم متفاوتند ولی در PDE چنین نیست. (پاسخهای PDE بر خلاف ODE ممکن است تفاوت زیادی داشته باشند).

مثال : در ODE

$$\dot{y} + 2y = 0 \longrightarrow y(t) = Ce^{-2t} \begin{cases} e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \\ 3e^{-2t} \\ \vdots \end{cases}$$

مثال : نشان دهید که توابع زیر در معادلهٔ لاپلاس دوبعدی صدق می‌کنند

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ لاپلاس دوبعدی

$$\longrightarrow \quad u(x,y)=x^2-y^2 \quad , \quad u(x,y)=Ln(x^2+y^2)$$

$$u(x,y)=e^{x}Cosy \quad , \quad u(x,y)=Sinx\,Coshy$$

$$u(x,y)=x^3-3xy^2 \quad , \quad u(x,y)=Arctg\frac{y}{x}$$

اثبات :

$$u(x,y)=x^2-y^2 \longrightarrow u_x=2x \quad , \quad u_y=-2y$$

$$u_{xx}=2 \quad \quad u_{yy}=-2$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$u(x,y)=Ln(x^2+y^2) \longrightarrow u_x=\frac{2x}{x^2+y^2} \quad , \quad u_{xx}=\frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y=\frac{2y}{x^2+y^2} \quad , \quad u_{yy}=\frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\longrightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$u(x,y)=e^{x}Cosy \longrightarrow u_x=e^{x}Cosy \quad u_y=-e^{x}Siny$$

$$u_{xx}=e^{x}Cosy \quad , \quad u_{yy}=-e^{x}Cosy$$

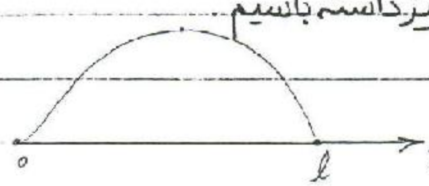
$$\longrightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

۴ــ در بدست آوردن پاسخ خاص در ODE باید شرط اولیه معلوم کنیم.

$$\dot{y}+2y=0 \longrightarrow y(t)=Ce^{-2t} \quad , y(0)=1 \longrightarrow y(t)=e^{-2t}$$

در PDE علاوه بر شرط اولیه باید شرایط کرانه ای را نیز داشته باشیم.

مثال در ارتعاش نخ :



$$u_{tt}=C^2.u_{xx} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=C^2.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) = g(x) \end{cases}$$ شرط اولیه

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$ شرط کرانه‌ای

۵- بعضی PDEها را می‌توان با همان روشهای حل ODE حل کرد.

در ODE : $[u(t)]$ $\qquad u_t = 0 \longrightarrow u = C$

در PDE : $[u(x,y)]$ $\qquad u_x = 0 \longrightarrow u(x,y) = f(y)$

مثال : $u(x,y)$ $\qquad u_{xx} = 0 \quad , \quad u = ?$

$$\longrightarrow u_x = f(y) \longrightarrow u = f(y).x + g(y)$$

مثلاً تابع مقابل در PDE بالا صدق می‌کند. $\quad u = \ln y^2 . x + tg^{-1} y^3$

مثال ۲ : $\quad u_{xy} + u_x = 0 \quad$ یا $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$\text{if } u_x = P \longrightarrow P_y + P = 0 \qquad \dot{y} + y = 0 \rightarrow y = ce^{-t}$$

$$\longrightarrow P = F(x)\, e^{-y}$$

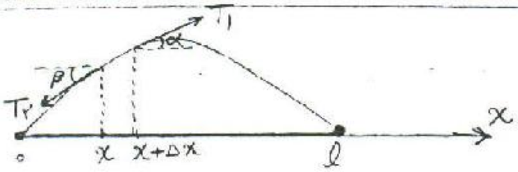
$$\longrightarrow u = F(x)\, e^{-y} + g(y)$$

اشاره به حل بعضی از دستگاهها :

$$\begin{cases} u_x = 0 \longrightarrow u = g(y) \\ u_y = 0 \longrightarrow u = f(x) \end{cases} \longrightarrow u = c$$

$$\begin{cases} u_{xx} = 0 \longrightarrow u = x . f_1(y) + g_1(y) \\ u_{yy} = 0 \longrightarrow u = y . f_2(x) + g_2(x) \\ u_{xy} = 0 \longrightarrow u = f_3(x) + g_3(y) \end{cases} \longrightarrow u = ax + by + c$$

معادلهٔ ارتعاش نخ:



انحراف از حالت تعادل در لحظهٔ t و در نقطهٔ x $\longrightarrow u(x,t)$

فرضیات: ۱- نخ کشسان، همگن است. (ρ: جرم نخ در واحد طول ثابت است).

۲- قبل از اعمال کشش نخ آن قدر زیاد است که وزن نخ در مقابل آن قابل صرف نظر است.

۳- هر نقطه فقط حرکت عمودی دارد.

$$\left(\sum F\right)_{\text{افقی}} = 0 \longrightarrow T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\sum F\right)_{\text{عمودی}} = \text{جرم} \times \text{شتاب} \longrightarrow T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta = \underbrace{(\rho \cdot \Delta x)}_{\text{جرم}} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\text{شتاب}} \qquad (2)$$

$$(1) \longrightarrow T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T$$

$$(2) \longrightarrow \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} - \frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} = \frac{\rho}{T} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\longrightarrow tg\alpha - tg\beta = \frac{\rho}{T} \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad \begin{cases} tg\alpha = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \\ tg\beta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}}{\Delta x} = \frac{\rho}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حال اگر Δx را به سمت صفر میل دهیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$c^2 \triangleq \frac{T}{\rho} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

معادلهٔ موج یک بعدی : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ یا $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$

شرایط مرزی $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$ شرایط اولیه $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ معمولاً صفر است

معادله موج از دو روش حل می‌شود : - روش جداسازی متغیرها - روش دالامبر

۱- روش جداسازی متغیرها : فرض می‌کنیم $u(x,t) = F(x).G(t)$

برای سادگی از قراردادهای مقابل استفاده می‌کنیم : $\frac{dG}{dt} = \dot{G}$, $\frac{dF}{dx} = F'$, $u = F.G$

$\longrightarrow u_x = F'.G$, $u_t = F.\dot{G}$

$u_{xx} = F''.G$, $u_{tt} = F.\ddot{G}$

طرفین تساوی مقابل را بر c^2FG تقسیم می‌کنیم : $\longrightarrow F\ddot{G} = c^2 . F''.G$

$$\longrightarrow \frac{F\ddot{G}}{c^2FG} = \frac{c^2.F''.G}{c^2FG} \longrightarrow \underbrace{\frac{\ddot{G}}{c^2G}}_{\text{تابعی صرفاً از } t} = \underbrace{\frac{F''}{F}}_{\text{تابعی صرفاً از } x} = K$$

به این شکل PDE مورد نظر تبدیل به دو ODE می‌شود. $\longrightarrow \begin{cases} F'' - KF = 0 \\ \ddot{G} - Kc^2G = 0 \end{cases}$

حل معادلهٔ اول : از شرایط مرزی $\longrightarrow \begin{cases} F(0).G(t) = 0 \\ F(l)G(t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F(0) = 0 \\ F(l) = 0 \end{cases}$

$F'' - KF = 0$

اگر $K > 0$ باشد مثلاً $K = \mu^2$ آن‌گاه : $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$

$$F(0)=0 \longrightarrow A+B=0$$
$$F(l)=0 \longrightarrow Ae^{\mu l}+Be^{-\mu l}=0 \longrightarrow A=B=0$$

پس K نمی‌تواند مثبت باشد.

اگر $K=0$ باشد:

$$F''=0 \longrightarrow F(x)=AX+B$$

$$F(0)=0 \longrightarrow B=0 \longrightarrow A=0$$
$$F(l)=0 \qquad Al+B=0 \qquad B=0$$

پس K نمی‌تواند صفر باشد.

اگر $K<0$ باشد مثلاً $K=-\rho^2$

$$\longrightarrow F''+\rho^2F=0$$

$$F(x)=A\cos\rho x+B\sin\rho x$$

$$F(0)=0 \qquad A=0$$
$$F(l)=0 \longrightarrow B\sin\rho l=0$$

اگر $n\pi=\rho l$ باشد در آن صورت:

$$F_n(x)=B\sin\rho x$$

$$\longrightarrow F_n(x)=B\sin\frac{n\pi}{l}x$$

حل معادلهٔ دوم:

$$\ddot{G}-Kc^2G=0$$

$$K=-\rho^2=-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad , \quad \text{if} \quad \lambda_n=\frac{n\pi c}{l}$$

$$\longrightarrow \ddot{G}+\lambda_n^2G=0 \longrightarrow G_n(t)=B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t$$

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

$$\longrightarrow u_n(x,t)=F_n(x).G_n(t)=\left[B\sin\frac{n\pi}{l}x\right]\left[B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t\right]=$$

$$= \left[B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t\right] \sin\frac{n\pi}{l}x$$

آگر بخواهد شرط مقابل برقرار باشد: $u(x,0) = f(x)$

باید: $B_n \sin\frac{n\pi}{l}x = f(x)$

$f(x)$ هر فرمتی ممکن است داشته باشد.

$$u(x,t) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t\right] \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad *$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x = f(x)$$

B_n همان ضرایب گسترش فرد فوریه‌ای است.

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

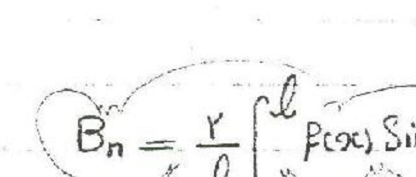
$$u_t(x,0) = g(x) \longrightarrow B_n^* = \frac{2}{\lambda_n l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

خلاصه بحث ارتعاش نخ با معلوم بودن $f(x)$ ، $g(x)$ به شکل زیر عمل می‌کنیم.

۱- ابتدا B_n ، B_n^* را از فرمولهای بالا حساب می‌کنیم.

۲- در فرمول اصلی (*) جایگزین می‌کنیم.

مثال ۱: شکل نخ در لحظه اولیه $f(x)$ به شکل زیر است.



همچنین سرعت اولیهٔ نخ صفر است:

$$\rightarrow B_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2} \frac{2K}{l} x \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x + \int_{l/2}^{l} \frac{2K}{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]$$

$$= \frac{8K}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8K}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

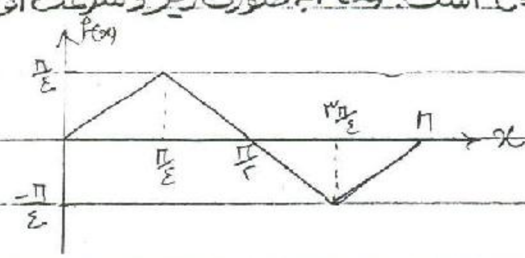
$$f(x) = \frac{8K}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi}{l}x - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi}{l}x + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi}{l}x - + \cdots\right]$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi c}{l}t \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8K}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\cdot\cos\frac{n\pi c}{l}t \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$= \frac{8K}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi c}{l}t\cdot\sin\frac{\pi}{l}x - \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi c}{l}t\,\sin\frac{3\pi}{l}x + \cdots\right]$$

مثال ۲: در ارتعاش نخ طول نخ برابر π و $C=1$ است. $f(x)$ به صورت زیر و سرعت اولیهٔ نخ صفر است.



$$\lambda_n = \frac{n\pi c}{l} = n \qquad , \qquad f(x) = \frac{1}{10}\begin{cases} x & 0<x<\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2}-x & \frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4} \\ x-\pi & \frac{3\pi}{4}<x<\pi \end{cases}$$

$$B_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/4} x\sin nx\,dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin nx\,dx\right.$$

$$\left. + \int_{3\pi/4}^{\pi}(x-\pi)\sin nx\,dx\right] = \frac{4}{10n^2\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{3n\pi}{4}\right]$$

$$\rightarrow n=1 \qquad B_n=0$$
$$n=2 \qquad B_n=\frac{4}{5\pi}\left(\frac{1}{2^2}\right)$$
$$n=3 \qquad B_n=0$$
$$n=4 \qquad B_n=0$$
$$n=5 \qquad B_n=0$$
$$n=6 \qquad B_n=\frac{4}{5\pi}\left(\frac{1}{6^2}\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx=\frac{4}{5\pi}\left[\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{36}\sin 6x+\frac{1}{100}\sin 10x+\cdots\right]$$

$$\rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nt \sin nx=\frac{4}{5\pi}\left[\frac{1}{4}\cos 2t \sin 2x+\frac{1}{36}\cos 6t \sin 6x+\cdots\right]$$

مثال ۲: اگر $f(x)=\sin 2x$ ، $g(x)=0$ ، $C=1$ ، $l=\pi$

$$\longrightarrow u(x,t)=\cos 2t . \sin 2x$$

۲- روش دالامبر: بعضی از معادلات دیفرانسیل PDE هستند که می توان آنها را با همان روشهای حل ODE حل کرد. در روش دالامبر هدف تغییر متغیر به نحوی است که معادله PDE مورد نظر به شکل معادله ای قابل حل از روش های ODE درآید.

تغییر متغیر: $Z=x+Ct \quad , \quad V=x-Ct$

از طرفی: $u_t=u_Z.\underbrace{Z_t}_{C}+u_V.\underbrace{V_t}_{-C}=C\left[u_Z-u_V\right]$

$$u_{tt}=C\left[(u_Z)_t-(u_V)_t\right]$$
$$=C\left[\left(u_{ZZ}.\underbrace{Z_t}_{C}+u_{ZV}.\underbrace{V_t}_{-C}\right)-\left(u_{VZ}.\underbrace{Z_t}_{C}+u_{VV}.\underbrace{V_t}_{-C}\right)\right]$$
$$\longrightarrow u_{tt}=C^2\left[u_{ZZ}+u_{VV}-2u_{VZ}\right]$$

$$u_x = u_z \cdot \underbrace{z_x}_{1} + u_v \cdot \underbrace{v_x}_{1} = u_z + u_v$$

$$u_{xx} = \underbrace{(u_z)_x}_{} + (u_v)_x = \underbrace{u_{zz} \cdot \overbrace{z_x}^{1} + u_{zv} \cdot \overbrace{v_x}^{1}}_{} + u_{vz} \cdot \overbrace{z_x}^{1} + u_{vv} \cdot \overbrace{v_x}^{1}$$

$$\longrightarrow \quad u_{xx} = u_{zz} + u_{vv} + 2u_{vz}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$\longrightarrow \quad \cancel{c^2}\left[\cancel{u_{zz}} + \cancel{u_{vv}} - 2u_{vz}\right] = \cancel{c^2}\left[\cancel{u_{zz}} + \cancel{u_{vv}} + 2u_{vz}\right]$$

$$\longrightarrow \quad 4u_{vz} = 0 \qquad \longrightarrow \quad u_{vz} = 0$$

$$u_{xy} = 0 \quad \longrightarrow \quad u = f(x) + g(y)$$

$$u_{vz} = 0 \quad \longrightarrow \quad u = \varphi(z) + \psi(v) \; *$$

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

$$\overset{*}{\longrightarrow} \quad u_t = \varphi_z \cdot \overbrace{z_t}^{c} + \psi_v \cdot \overbrace{v_t}^{-c}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) = 0 \end{cases} , \quad z = x + ct$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ \varphi_x(x) - \psi_x(x) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ \varphi(x) - \psi(x) = k \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{f(x)+k}{2} \\ \psi(x) = \dfrac{f(x)-k}{2} \end{cases}$$

$$\varphi(z) = \frac{f(x+ct)+k}{2} , \quad \psi(v) = \frac{f(x-ct)-k}{2} \longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

حل معادلهٔ موج یک بعدی :

۱- روش جداسازی متغیرها

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos\lambda_n t+B_n^{*}\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

$$B_n=\frac{۲}{\ell}\int_{0}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

$$B_n^{*}=\frac{۲}{\ell\cdot\lambda_n}\int_{0}^{\ell}g(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

اگر $g(x)=0$ باشد :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\underbrace{\cos\frac{n\pi c}{\ell}t}_{\alpha}\,\underbrace{\sin\frac{n\pi}{\ell}x}_{\beta}$$

۲- روش دالامبر $\qquad g(x)=0$

$$u(x,t)=\frac{1}{۲}f(x+ct)+\frac{1}{۲}f(x-ct)$$

نکته : این دو پاسخ یکی هستند. $\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{۲}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

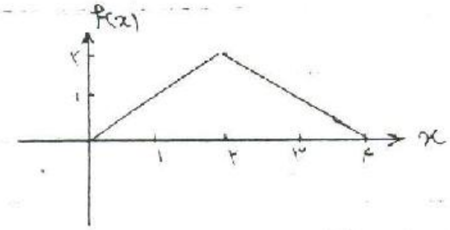
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[\frac{1}{۲}\sin\left[\frac{n\pi}{\ell}(ct+x)\right]-\frac{1}{۲}\sin\left[\frac{n\pi}{\ell}(ct-x)\right]\right]$$

$$=\frac{1}{۲}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left[\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)\right]+\frac{1}{۲}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left[\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)\right]$$

$$=\frac{1}{۲}f(x+ct)+\frac{1}{۲}f(x-ct)$$

تفسیر جواب دالامبر:

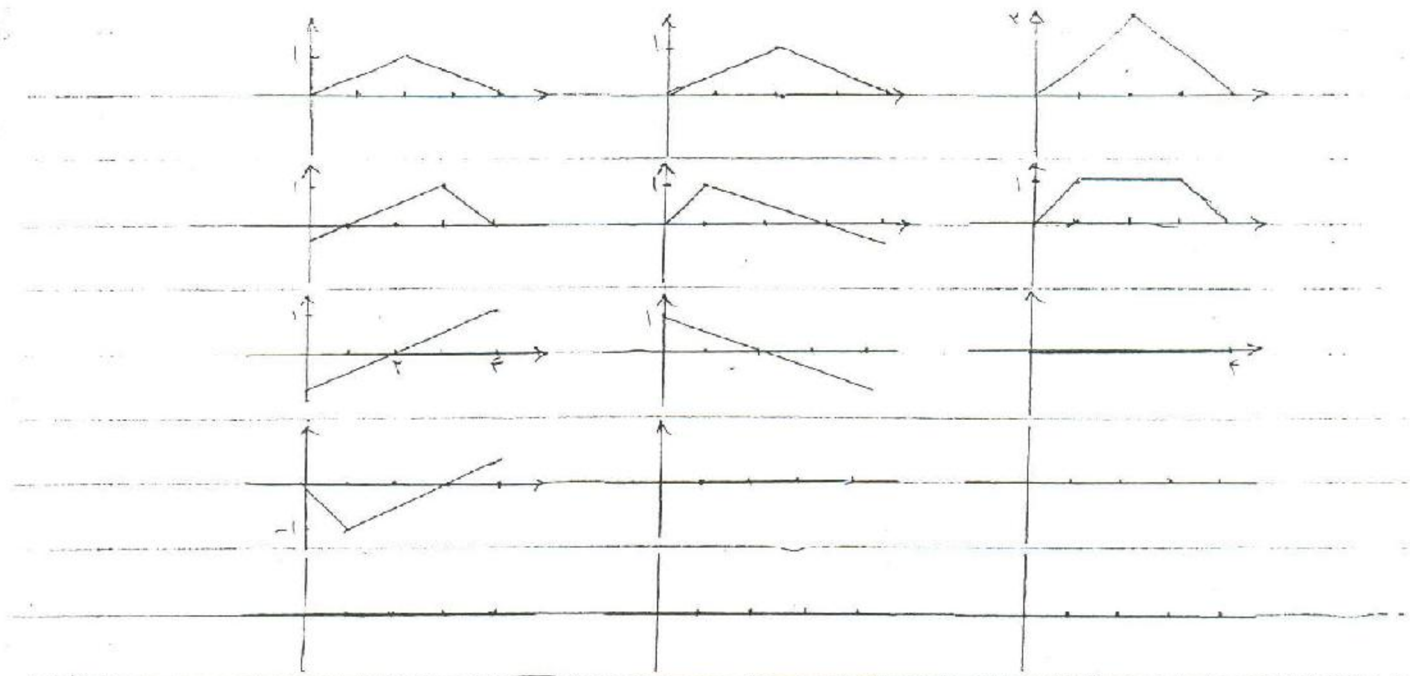
مثال:



با فرض c=1

$$u(x,t)=\frac{1}{2}f[x+ct]+\frac{1}{2}f[x-ct]$$

$$=\frac{1}{2}f(x+t)+\frac{1}{2}f(x-t)$$



به طور کلی در حل PDE ها سه روش داریم:

۱ـ استفاده از روشهای حل ODE ۲ـ استفاده از روش جداسازی متغیرها

۳ـ استفاده از روش دالامبر.

۱ـ استفاده از روش حل ODE

مثال: $u_{xy}+u_x=0$

$$u_x = P \longrightarrow P_y + P = 0$$
$$\dot{y} + y = 0 \longrightarrow y(t) = ce^{-y}$$
$$\longrightarrow P = f(x)\,e^{-y} = u_x$$
$$\longrightarrow u = F(x)\,e^{-y} + g(y)$$

۲ـ استفاده از روش جداسازی متغیرها

مثال ۱:

$$u_x + u_y = 0$$

$$u = F(x).G(y) = F.G \longrightarrow u_x = F'G \quad , \quad F' = \frac{dF}{dx}$$
$$u_y = F\dot{G} \quad , \quad \dot{G} = \frac{dG}{dy}$$

$$\longrightarrow F'G + F\dot{G} = 0 \longrightarrow \underbrace{\frac{F'}{F}}_{\text{تابعی از } x} = -\underbrace{\frac{\dot{G}}{G}}_{\text{تابعی از } y} = +K$$

$$\longrightarrow \begin{cases} F' - KF = 0 \\ \dot{G} + KG = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F(x) = C_1 e^{Kx} \\ G(y) = C_2 e^{-Ky} \end{cases}$$

$$\longrightarrow u(x,y) = Ce^{Kx}.e^{-Ky} \longrightarrow u(x,y) = Ce^{K(x-y)}$$

مثال ۲:

$$u_x - y\,u_y = 0$$

$$\longrightarrow F'G - yF\dot{G} = 0 \longrightarrow \frac{F'}{F} = \frac{y\dot{G}}{G} = K$$

$$\longrightarrow \begin{cases} F' - KF = 0 \\ \dot{G} - \frac{K}{y}G = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F(x) = C_1 e^{Kx} \\ G(y) = C_2 y^K \end{cases}$$

$$\longrightarrow u(x,y) = C\left[e^{x}.y\right]^K$$

۳- استفاده از روش دالامبر:

مثال:
$$U_{xy} - U_{yy} = 0$$

$$\begin{cases} z = x+y \\ v = x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z_x = 1 \\ v_x = 1 \end{cases} , \begin{cases} z_y = 1 \\ v_y = 0 \end{cases}$$

$$U_x = U_z \cdot z_x + U_v \cdot v_x = U_z + U_v$$

$$(U_x)_y = [U_z + U_v]_y = (U_z)_y + (U_v)_y$$

$$U_{xy} = U_{zz} \cdot z_y + U_{zv} \cdot v_y + U_{vz} \cdot z_y + U_{vv} \cdot v_y$$

$$\underline{\underline{U_{xy}}} = U_{zz} + U_{vz}$$

$$U_y = U_z \cdot z_y + U_v \cdot v_y = U_z$$

$$\underline{\underline{U_{yy}}} = U_{zz}$$

$$U_{xy} - U_{yy} = 0 \longrightarrow [U_{zz} + U_{vz}] - U_{zz} = 0$$

$$\longrightarrow U_{vz} = 0 \longrightarrow U = f(z) + g(v)$$

$$\longrightarrow U(x,y) = f(x+y) + g(x)$$

به عنوان مثال: $\cos(x+y) + e^{9x}$

مثال ۲:
$$U_{xx} + U_{xy} - 2U_{yy} = 0$$

$$\begin{cases} z = 2x+y \\ v = x+y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z_x = 2 \\ v_x = 1 \end{cases} , \begin{cases} z_y = 1 \\ v_y = 1 \end{cases}$$

$$U_x = U_z \cdot z_x + U_v \cdot v_x = 2U_z + U_v$$

$$U_{xx} = U_{vv} + 4U_{vz} + 4U_{zz}$$

$$u_{xy} = u_{vv} + u_{zv} - 2u_{zz}$$

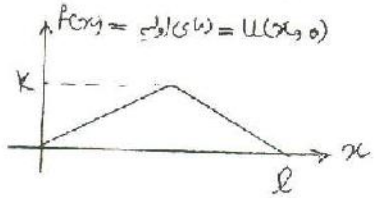
$$\overset{-2}{u_{yy}} = \overset{-2}{u_{vv}} - \overset{+4}{2u_{vz}} + \overset{-2}{u_{zz}}$$

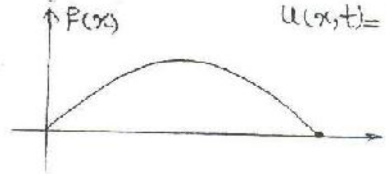
$$\longrightarrow 9u_{vz} = 0 \longrightarrow u = f(v) + g(z)$$

$$\longrightarrow u(x,y) = f(x+y) + g(2x-y)$$

حل معادله گرما : $u_t = c^2 . u_{xx}$ یا $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 . \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

میله‌ای به طول l داریم که این میله یک توزیع دمای اولیه دارد :





در حل معادله گرما :

$u(x,0) = f(x)$ شرط اولیه

$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$ شرط کرانه‌ای

روش کار همان روش جداسازی متغیرها : $u_t = c^2 u_{xx}$

$u = F(x).G(t) = FG \quad , \quad u_t = F\dot{G} \quad , \quad u_x = F'G$

$u_{xx} = F''G$

$$\longrightarrow \frac{F\dot{G}}{c^2FG} = \frac{c^2F''G}{c^2FG} \longrightarrow \frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k$$

$$\longrightarrow \begin{cases} F'' - kF = 0 \\ \dot{G} - kc^2G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F(0)G(t) = 0 \\ F(l)G(t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F(0) = 0 \\ F(l) = 0 \end{cases}$$

همانند حل معادلهٔ موج می‌توان نتیجه گرفت که K باید حتماً عددی منفی باشد. $(K=-\beta^2)$

$$\longrightarrow F''+\beta^2F=0 \longrightarrow F(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$$

$$F(0)=0 \longrightarrow A=0$$
$$F(\ell)=0 \longrightarrow F_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x \quad , \quad \beta=\frac{n\pi}{\ell}$$

$$\dot{G}-Kc^2G=0 \quad , \quad K=-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

$$\longrightarrow \dot{G}+\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2G=0 \quad , \quad \lambda_n=\frac{n\pi c}{\ell}$$

$$\longrightarrow G_n(t)=B_ne^{-\lambda_n^2t}$$

$$, \quad U_n(x,t)=B_ne^{-\lambda_n^2t}\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

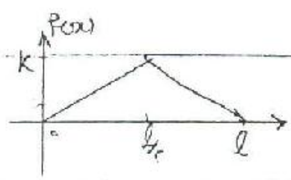
$$U_n(x,0)=B_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-\lambda_n^2t}\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

$$U(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x=f(x)$$

$$\longrightarrow B_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

مقایسه حل مسائل بخش ۱۰-۵ (گسترش فرد دوره‌ای) با
مسائل بخش ۱۱-۳ (حل معادلهٔ موج) $g(x)=0$
و مسائل بخش ۱۱-۵ (حل معادلهٔ گرما)



در تمام اینها $f(x)$ تعریف شده در فاصله صفر تا ℓ می‌باشد.

در بخش ۵-۱۰: تابع $f(x)$ در فاصلهٔ صفر تا ℓ به صورت زیر تعریف شده یک سری سینوسی ..

(گسترش فرد دوره ای) طوری پیدا کنید که در فاصله ۰ تا l با تابع $f(x)$ برابر باشد.

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad , \quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

در بخش ۱۱-۳ : شکل اولیهٔ نخ در فاصلهٔ ۰ تا l به صورت زیر $f(x)$ تعریف شده است. مطلوبست مقدار انحراف نخ $u(x,t)$.

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$,\ u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos\frac{n\pi c}{l}t\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$$

در بخش ۱۱-۵ : دمای اولیهٔ میله ای در فاصلهٔ ۰ تا l به صورت زیر $f(x)$ داده شده است.

مطلوبست میزان در نقاط و لحظات مختلف $u(x,t)$.

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x \quad , \quad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

مثال : دمای اولیهٔ یک میله به صورت $f(x)=\pi^2x-x^3$ داده شده است. طول میله π برابر π

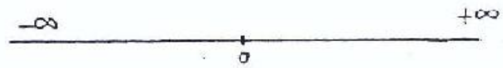
است و $c=1$ است. مطلوبست محاسبه پاسخ معادلهٔ گرما $u(x,t)$

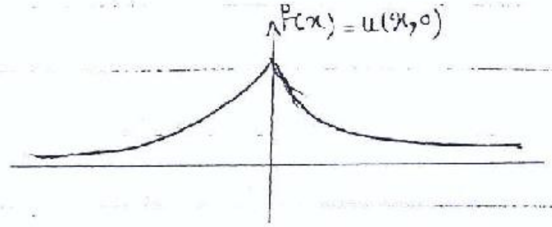
$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2x-x^3)\sin nx\,dx=\frac{-12}{n^3}\cos n\pi \quad , \quad \lambda_n=\frac{n\pi c}{l}=n$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-12}{n^3}\cos n\pi\right)e^{-n^2t}\sin nx=12\Big[e^{-t}\sin x-\frac{1}{2^3}e^{-4t}\sin 2x$$

$$+\frac{1}{3^3}e^{-9t}\sin 3x-+\cdots\Big]$$

گرما در یک میلهٔ نامتناهی : $u_t = c^2 . u_{xx}$





در این حالت شرط کرانه‌ای قابل تعریف نیست.

برای حل مسأله مثل سابق از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم.

$$u(x,t) = F(x).G(t) \quad , \quad u_t = F\dot{G} \quad , \quad u_{xx} = F''G$$

$$\longrightarrow F\dot{G} = c^2 F''G \longrightarrow \frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} F'' + p^2 F = 0 \\ \dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F(x) = A\cos px + B\sin px \\ G(t) = B' . e^{-c^2 p^2 t} \end{cases}$$

اگر میله متناهی بود از شرایط کرانه‌ای مقابل استفاده $\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(l) = 0 \end{cases}$

می‌کردیم امّا در این حالت به شکل زیر عمل می‌کنیم :

$$u_p(x,t) = (A\cos px + B\sin px).e^{-c^2 p^2 t}$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \int_0^{+\infty} \left[A(p)\cos px + B(p)\sin px\right].e^{-c^2 p^2 t}\, dp$$

$f(x) = u(x,0)$

$$\longrightarrow f(x) = \int_0^{+\infty} \left[A(p)\cos px + B(p)\sin px\right] dp$$

بامقایسه با روابط انتگرال فوریه خواهیم داشت:

$$A(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\cos fv\, dv$$

$$B(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\sin fv\, dv$$

مثال: یک میلهٔ نامتناهی داریم که در آن دمای اولیه به شکل زیر است. دما در نقاط مختلف و لحظات مختلف $u(x,t)$ را بدست آورید.

$$A(f)=\frac{100}{\pi}\,\frac{2\sin f}{f} \qquad , \qquad B(f)=0$$

$$u(x,t)=\frac{200}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin f}{f}\cdot \cos fx\cdot e^{-c^2f^2t}\,df$$

ثابت می‌شود که:

$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\, e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}}\,dv$$

درمثال قبل:

$$u(x,t)=\frac{100}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{1} e^{\frac{-(x-v)^2}{4c^2t}}\,dv$$

تعریف تابع خطا:

$$\operatorname{erf}(x)\triangleq\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-z^2}dz$$

انتگرال بالا با استفاده از جدول آخر کتاب محاسبه می‌شود.

با تغییر متغیر $z^2 \to \frac{(x-v)^2}{4c^2t}$ خواهیم داشت:

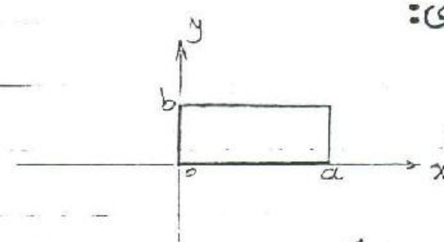
$$u(x,t)=\frac{100}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{1+x}{2c\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz$$

$$=50\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}\right]-\operatorname{erf}\left[-\frac{1+x}{2c\sqrt{t}}\right]\right\}$$

معادله موج دو بعدی:

$$u_{tt} = c^2\left[u_{xx} + u_{yy}\right]$$

$$u(x,y,t)$$



صفحه مرتعش

دربخش ۷-۱۱ اثبات شده که در صفحه (غشای) مرتعش معادله موج دو بعدی حاکم است.

شرایط اولیه $\longrightarrow \begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$

شرایط کرانه‌ای $\longrightarrow \begin{cases} u(0,y,t) = 0 \\ u(a,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = 0 \\ u(x,b,t) = 0 \end{cases}$

فرض می‌کنیم: $u(x,y,t) = F(x,y)\cdot G(t)$

$$u = F.G \quad , \quad u_{tt} = F\ddot{G} \quad , \quad u_{xx} = F_{xx}\cdot G \quad , \quad u_{yy} = F_{yy}\cdot G$$

$$\longrightarrow F\ddot{G} = c^2\left[F_{xx}.G + F_{yy}.G\right]$$

$$\longrightarrow \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F_{xx} + F_{yy}}{F} = -\rho^2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} F_{xx} + F_{yy} + \rho^2 F = 0 \\ \ddot{G} + c^2\rho^2 G = 0 \end{cases}$$

فرض می‌کنیم: $F(x,y) = H(x)\,Q(y) = H.Q$

$$\longrightarrow H_{xx}\,Q + H.\,Q_{yy} + \rho^2.\,HQ = 0$$

$$\xrightarrow{\div HQ} \frac{H_{xx}}{H} + \frac{Q_{yy}}{Q} + \rho^2 = 0$$

$$\longrightarrow \frac{H_{xx}}{H} = -\left(\frac{Q_{yy}}{Q} + \rho^2\right) = -\nu^2 \longrightarrow \begin{cases} H_{xx} + \nu^2 H = 0 \\ Q_{yy} + K^2 Q = 0 \\ \ddot{G} + c^2\rho^2 G = 0 \end{cases}$$

و $K^2 = \rho^2 - \nu^2$

یادآوری از حل معادله موج یک بعدی:

$$F'' + \beta^2 F = 0 \quad , \begin{cases} F(0)=0 \\ F(\ell)=0 \end{cases}$$

$$F(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

در حالت دو بعدی:

$$\longrightarrow H_{xx} + \nu^2 H = 0 \quad , \begin{cases} H(0)=0 \\ H(a)=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow H(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$Q_{yy} + k^2 Q = 0 \quad , \begin{cases} Q(0)=0 \\ Q(b)=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow Q(y) = \sin \frac{m\pi}{b} y$$

در حالت یک بعدی:

$$G(t) = B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t$$

$$, \; u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad , \quad \lambda_n = \frac{n\pi c}{\ell} = c\beta$$

در حالت دو بعدی:

$$G(t) = B_{mn} \cos\lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin\lambda_{mn} t$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{mn} \cos\lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin\lambda_{mn} t \right] \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{b} y$$

در حالت یک بعدی:

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx$$

در حالت دو بعدی:

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{b} y \, dy \, dx$$

$$, \; B_{mn}^* = \frac{4}{ab \cdot \lambda_{mn}} \int_0^a \int_0^b g(x,y) \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{b} y \, dy \, dx$$

$$, \quad \lambda_{mn} = cf = c\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}$$

به عنوان مثال معادلهٔ گرمای دوبعدی به صورت زیر است:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\, e^{-\lambda_{mn}^2 t} . \sin\frac{n\pi}{a}x . \sin\frac{m\pi}{b}y$$

معادله موج دو بعدی:

$$u_{tt} = c^2\left[u_{xx}+u_{yy}\right]$$

$$\begin{cases} u(x,y,0)=f(x,y) \\ u_t(x,y,0)=g(x,y) \end{cases}$$

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y$$

$$B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y\,dy\,dx$$

$$B^*_{mn}=\frac{4}{ab\cdot\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y\,dy\,dx \quad , \quad \lambda_{mn}=\pi c\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$$

مثال ۱:

$$a=b=c=1 \qquad g(x,y)=0$$
$$f(x,y)=xy \quad , \quad u(x,y,t)=?$$

$$\lambda_{mn}=\pi\sqrt{m^2+n^2} \quad , \quad B^*_{mn}=0$$

$$B_{mn}=4\int_0^1\int_0^1 xy\sin n\pi x\cdot\sin m\pi y\,dy\,dx = 4\Big[\underbrace{\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx}_{A}\Big]\Big[\underbrace{\int_0^1 y\sin m\pi y\,dy}_{B}\Big]$$

$$A=\frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1=\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi=\frac{-1}{n\pi}(-1)^n$$

$$B=\frac{-1}{m\pi}(-1)^m$$

$$\longrightarrow u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{mn\pi^2}(-1)^{m+n}\cos\left[\pi\sqrt{n^2+m^2}\right]t\cdot\sin n\pi x\,\sin m\pi y$$

مثال ۲: در ارتعاش یک غشاء مستطیل شکل داریم:

$$a=b=\pi \quad , \quad c=1$$
$$f(x,y)=xy(\pi^2-x^2)(\pi^2-y^2)$$
$$g(x,y)=0$$
$$u(x,y,t)=?$$

$B^*_{mn}=0$, $\lambda_{mn}=\pi\sqrt{\frac{n^2}{\pi^2}+\frac{m^2}{\pi^2}}=\sqrt{n^2+m^2}$

$$B_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi xy(\pi^2-x^2)(\pi^2-y^2).\sin nx\sin my\,dy\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi^2-x^2)\sin nx\,dx\right]\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\pi y(\pi^2-y^2)\sin my\,dy\right]=\frac{144}{n^3m^3}(-1)^{m+n}$$

$$\longrightarrow u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{144}{n^3m^3}(-1)^{m+n}\cos\left[\sqrt{m^2+n^2}\,t\right]\sin nx\,.\sin my$$

$a=b=1$, $c=1$, $g(x,y)=0$, $f(x,y)=x+y$:مثال

$B^*_{mn}=0$, $\lambda_{mn}=\pi\sqrt{n^2+m^2}$

$$B_{mn}=4\int_0^1\int_0^1(x+y)\sin n\pi x\sin m\pi y\,dy\,dx=4\int_0^1\Big[\underbrace{\int_0^1(x+y)\sin m\pi y\,dy}_{A}\Big]\sin n\pi x\,dx$$

$$A=-\frac{x}{m\pi}\cos m\pi-\frac{1}{m\pi}\cos m\pi+\frac{x}{m\pi}$$

$$\longrightarrow A=\begin{cases}\frac{-1}{m\pi} & : \text{زوج } m\\ \frac{2x}{m\pi}+\frac{1}{m\pi} & : \text{فرد } m\end{cases}$$

if زوج m :

$$\longrightarrow B_{mn}=4\int_0^1\frac{-1}{m\pi}\sin n\pi x\,dx=\frac{-4}{m\pi}\cdot\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{4}{mn\pi^2}\left[\cos n\pi-1\right]$$

if فرد m :

$$\longrightarrow B_{mn}=4\int_0^1\frac{2x+1}{m\pi}\sin n\pi x\,dx=\frac{4}{m\pi}\left[\frac{-2}{n\pi}\cos n\pi-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n\pi}\right]$$