

$$\rightarrow B_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n, m \\ \frac{14}{mn\pi^2} & \text{فرد } n, m \\ -\frac{14}{mn\pi^2} & \text{زوج } n, \text{ فرد } m \\ & \text{زوج } n, \text{ زوج } m \end{cases}$$

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \cos[\pi\sqrt{m^2+n^2}z] \sin n\pi x \sin m\pi y$$

معادله لاپلاس در مختصات قطبی، استوانه‌ای و کروی:

$$\begin{cases} u_{xx} = 0 & \text{معادله لاپلاس دوبعدی} \\ u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{معادله لاپلاس سه بعدی} \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & \text{معادله لاپلاس سه بعدی} \end{cases}$$

نکته ۱: معادله لاپلاس توصیف کننده انواع میدانها هستند. (میدان الکتریکی، مغناطیسی، جاذبه...)

نکته ۲: اگر شرایط کرانه‌ای صفر باشد جواب صفر است.

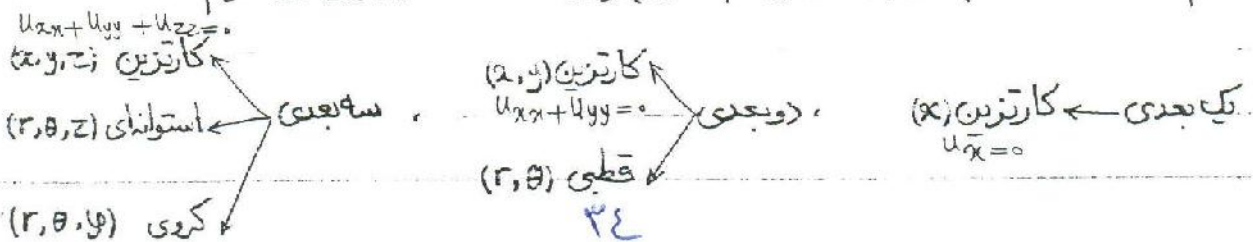
مثال: $u_{xx} = 0 \rightarrow u = Ax + B$ $u(0)$ $u(a)$

اگر $u(0), u(a), u(b)$ هر دو صفر باشند آن گاه $A=B=0$ و نتیجه $u=0$

نکته: لزوماً شرایط کرانه‌ای به فرم مستطیل و یا مکعب مستطیل نیست، بلکه ممکن است به فرم دایره...

(در مختصات دوبعدی) و یا استوانه‌ای و یا کروی (در حالت سه بعدی) داده شود.

لازم است که معادله لاپلاس (به طور کلی لاپلاس) را در مختصات دیگر نیز تعریف کنیم.



$(\nabla^2 u)$

تعريف لابلاس:

$$\nabla^2 u = u_{xx}$$

در مختصات کاتوزین = ۱- یک بعدی

$$\nabla^2 u = u_{zx} + u_{yy}$$

۲- دوز بعدی

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

۳- سه بعدی

$$c^2 \nabla^2 u = u_{tt}$$

معادله کوما

$$\nabla^2 u = 0$$

معادله لابلاس

$$c^2 \nabla^2 u = u_{tt}$$

معادله موج

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$$

لابلاس در مختصات قطبی:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$u_x = u_r \cdot r_x + u_\theta \cdot \theta_x$$

$$u_{xx} = (u_r)_x \cdot r_x + u_r \cdot r_{xx} + (u_\theta)_x \cdot \theta_x + u_\theta \cdot \theta_{xx}$$

$$= [u_{rr} \cdot r_x + u_{r\theta} \cdot \theta_x] r_x + u_r \cdot r_{xx} + [u_{\theta r} \cdot r_x + u_{\theta\theta} \cdot \theta_x] \theta_x + u_\theta \cdot \theta_{xx}$$

$$= (r_x)^2 u_{rr} + r_{xx} u_r + 2 r_x \theta_x u_{r\theta} + (\theta_x)^2 u_{\theta\theta} + \theta_{xx} u_\theta$$

$$r_x = \frac{1}{r} (r_x) (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

$$r_{xx} = \frac{r - r_x \cdot x}{r^2} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}$$

$$\theta_x = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{r^2} = -\frac{y}{r^2}$$

$$\theta_{xx} = \frac{2xy}{r^4}$$

$$\rightarrow u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} + \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + \frac{2xy}{r^2} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{2xy}{r^2} u_{\theta}$$

$$\rightarrow u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + \frac{x^2}{r^2} u_{rr} + \frac{2xy}{r^2} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{2xy}{r^2} u_{\theta}$$

$$\rightarrow \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

$$\rightarrow u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad \text{معادله لاپلاس در مختصات قطبی:}$$

$$C^2 [u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}] = u_{tt} \quad \text{معادله دگر مختصات قطبی:}$$

$$C^2 [u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}] = u_{tt} \quad \text{معادله موج در مختصات قطبی:}$$

لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \quad \text{در حالت سه بعدی لاپلاسین در مختصات کارتزین برابر است با:}$$

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz} \quad \text{لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای:}$$

لاپلاسین در مختصات کروی:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_{\varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi}$$

مسئله ارزش

مثال: نشان دهید که جواب معادله لاپلاس چنانچه شرایط مرزی به صورت کروی باشد از رابطه

اگر شرط همبندی برقرار باشد $u = \frac{C}{r} + K$ تعیین می‌کند.

اگر شرط همبندی برقرار باشد: $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r$

لذا در معادله لاپلاس: $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0$

$u_r = P \rightarrow P_r + \frac{1}{r} P = 0 \rightarrow P = C' e^{-\int \frac{1}{r} dr} = C' e^{-\ln r} = \frac{C'}{r}$

$\rightarrow u_r = \frac{C'}{r} \rightarrow u(r) = \frac{C}{r} + K$

مسئله آهمین بخش: $r_1 = 2, u_1 = 10 \quad r_2 = 10, u_2 = 110$

$\rightarrow \begin{cases} 10 = \frac{C}{2} + K \\ 110 = \frac{C}{10} + K \end{cases} \rightarrow u = \frac{-250}{r} + 135$

مثال: دو استوانه با شعاع‌های $r_1 = 2, r_2 = 10$ داریم که روی اولی $u_1 = 10$ و روی $u_2 = 110$ است.

اگر برای نقاط مختلف بیابید $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}$

اگر شرط همبندی استوانه‌ای باشد: $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r$

$\rightarrow P = u_r = \frac{C'}{r} \rightarrow u = C \ln r + K$

$\rightarrow \begin{cases} 10 = C \ln 2 + K \\ 110 = C \ln 10 + K \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} C = \\ K = \end{matrix}$

کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مثال از کاربرد تبدیل لاپلاس در حل ODE

$$2y + \dot{y} = 0$$

$$\rightarrow 2Y(s) + sY(s) - y(0) = 0 \quad \rightarrow Y(s) = \frac{y(0)}{s+2}$$

$$\rightarrow y(t) = y(0) e^{-2t} \cdot u(t)$$

به طور کلی استفاده از تبدیل لاپلاس در حل ODE، معادله دیفرانسیل را به یک معادله جبری تبدیل می‌کند.

ولی اگر از تبدیل لاپلاس در یک PDE (که شامل فقط دو متغیر است) استفاده کنیم، در این حالت PDE

تبدیل به یک ODE می‌شود.

مثال: $\frac{\partial W}{\partial x} + x \frac{\partial W}{\partial t} = 0$, $W(0, t) = t$, $W(x, 0) = 0$ $W(x, t) = ?$

نکته: می‌توان اثبات کرد که: $\mathcal{L} \left[\frac{\partial W}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L} [W(x, t)]$

$$W(x, t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} W(x, s) \quad \begin{array}{l} xt \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{x}{s} \\ x \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{x}{s} \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{dw}{dx} + x [sW - W(x, 0)] = 0$$

$$\rightarrow \frac{dw}{dx} + x s W = 0 \quad \rightarrow W(x, s) = C(s) e^{-s \frac{x^2}{2}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}0} W(0, s) = \frac{1}{s} \quad \rightarrow C(s) = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow W(x,s) = \frac{1}{sr} e^{-s \frac{x^r}{r}}$$

$$t \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{sr} e^{-as}$$

$$(t-a)u(t-a) \longleftrightarrow \frac{e^{-as}}{sr}$$

: constab

$$\rightarrow W(x,t) = \left(t - \frac{x^r}{r}\right) u\left(t - \frac{x^r}{r}\right)$$

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = x \cdot t, \quad u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$$

= JET

$$u(x,t) \longleftrightarrow U(x,s)$$

$$\rightarrow x \cdot \frac{dU}{dx} + [sU - u(x,0)] = \frac{x}{sr}$$

$$\rightarrow \frac{dU}{dx} + \frac{s}{x} U = \frac{1}{sr}$$

$$\rightarrow U(x,s) = \left[\int \frac{1}{sr} e^{s \ln x} dx + C \right] e^{-s \ln x} = \left[\frac{1}{sr} x^{\frac{s}{r}} + C(s) \right] x^{-s}$$

$$= \left[\frac{1}{sr} \frac{1}{s+1} x^{s+1} + C(s) \right] x^{-s} = \frac{x}{sr(s+1)} + C(s) x^{-s}$$

$$U(x,s) = 0 \rightarrow C(s) = 0 \rightarrow U(x,s) = \frac{x}{sr(s+1)}$$

$$U(x,s) = x \left[\frac{1}{sr} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right]$$

$$\rightarrow u(x,t) = x \left[t - 1 + e^{-t} \right] u(t)$$



اعداد مختلط

مقدمه: لزوم پرداختن به اعداد مختلط

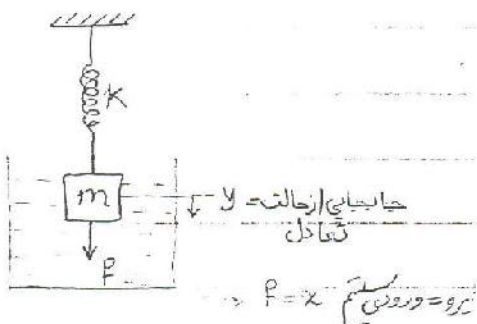
۱- به طور کلی تجزیه و تحلیل سیستمهای مهندسی منجر به حل معادلات دیفرانسیلی می شود.

۲- در حل معادلات دیفرانسیل گاهی نیاز به حل معادلاتی داریم که ریشه حقیقی ندارند.

۳- پیدا کردن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل اگر ورودی زمانی باشد بسیار ساده تر از دیگر

ورودیها است (مثلاً سینوسی)

مثال:



$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + B \frac{dy}{dt} + Ky = x$$

\downarrow
 ضریب اصطکاک

$$y(t) = Ae^{st}$$

برای پیدا کردن جواب همگن:

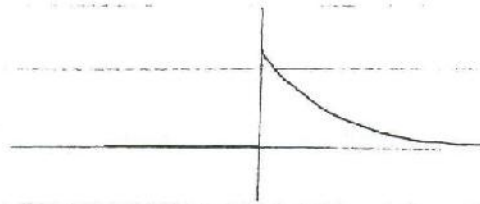
$$MA^2 e^{st} + BAe^{st} + KAe^{st} = 0$$

$$\rightarrow Ae^{st} [Ms^2 + Bs + K] = 0 \quad \rightarrow Ms^2 + Bs + K = 0$$

حالت الف: $M=1$, $K=2$, $B=3$

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \rightarrow (s+1)(s+2) = 0 \rightarrow \begin{matrix} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow y_n(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$



$$M=1, \quad K=2, \quad B=1$$

حالت بیه:

$$\rightarrow s^2 + 2s + 2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2}$$

در تجزیه و تحلیل این سیستم فیزیکی، نیاز به پیدا کردن ریشه‌هایی که عدد منفرجه داریم لذا تعریف

$$\sqrt{-1} = i \quad \text{می‌کنیم:}$$

$$\rightarrow s_{1,2} = -1 \pm i \rightarrow y_n(t) = A_1 e^{(-1+i)t} + A_2 e^{(-1-i)t}$$

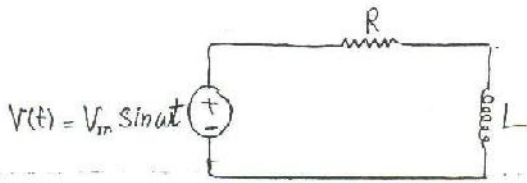
$$\rightarrow y(t) = e^{-t} [A_1 e^{it} + A_2 e^{-it}]$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \quad \text{بعداً اثبات می‌کنیم که:}$$

$$\rightarrow y(t) = A e^{-t} \sin[t + \theta]$$

در جواب نهایی از ناخبری نیست، به عبارت دیگر، یک محمل ریاضی است برای رسیدن به مقصد

مثال:



$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_m \sin \omega t$$

$$i_n(t) = A e^{-\frac{R}{L}t}$$

جواب همگن:

$$i = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

جواب خصوصی:

$$\rightarrow R(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) + L[-A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t] = V_m \sin \omega t$$

$$\rightarrow [RA_1 + L\omega A_2] \cos \omega t + [RA_2 - A_1 L\omega] \sin \omega t = V_m \sin \omega t$$

$$\rightarrow \begin{cases} RA_1 + L\omega A_2 = 0 \\ RA_2 - A_1 L\omega = V_m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = \\ A_2 = \end{cases}$$

$$V_m \sin \omega t = I_m \{ V_m e^{j\omega t} \}$$

راه استفاده از اعداد مختلط:

$$i = I_m e^{i\omega t}$$

اگر $V_m \sin \omega t = V_m e^{i\omega t}$ باشد آن گاه:

$$\rightarrow (RI_m + iL\omega I_m) e^{i\omega t} = V_m e^{i\omega t} \rightarrow I_m = \frac{V_m}{R + iL\omega}$$

$$i = I_m \left\{ \frac{V_m}{R + iL\omega} e^{i\omega t} \right\}$$

جواب خصوصی اصلی:

یک عدد مختلط به فرم زیر از دو قسمت تشکیل شده است:

$$Z = x + iy, \quad i \triangleq \sqrt{-1}$$

چند نکته :

۱- x و y هر دو حقیقی هستند.

۲- اگر $x=0$ باشد عدد را یک عدد موهومی گوئیم.

جمع اعداد مضط :

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases} \rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad \text{تفریق دو عدد مضط :}$$

$$z_1 \cdot z_2 = [x_1 + iy_1][x_2 + iy_2] \quad \text{ضرب دو عدد مضط :}$$

$$= [x_1 x_2 - y_1 y_2] + i [x_1 y_2 + x_2 y_1]$$

تقسیم دو عدد مضط :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

چند خاصیت اعمال حسابی :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \end{aligned}$$

۱- خاصیت جابجایی

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + (z_2 z_3)$$

۲- خاصیت انجمنی

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_3) z_2$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

۳- خاصیت پخش پذیری

چند تعریف:

$$z = x + iy \rightarrow z^* = \bar{z} = x - iy$$

۱- مزدوج یک عدد مختلط

$$\operatorname{Re}(z) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

۲- قسمت حقیقی یک عدد مختلط

$$\operatorname{Im}(z) = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

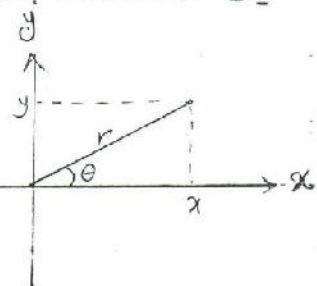
۳- قسمت موهومی یک عدد مختلط

نکته: اعداد حقیقی روی یک محور x قابل نمایش هستند ولی اعداد مختلط در یک صفحه (x, y)

قابل نمایش هستند.

نمایش اعداد مختلط به فرم قطبی:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$



$$z = x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

فرم قطبی عدد مختلط:

$$\begin{cases} r = |z| & \text{قد مطلق } z \\ \theta = \arg z & \text{آرگومان } z \end{cases}$$

دو تعریف:

نکته: اگر θ آرگومان z باشد آن گاه $\theta \pm 2k\pi$ نیز آرگومان z است.

آرگومان اصلی z : اگر $-\pi < \theta < \pi$ باشد آن را آرگومان اصلی z گوئیم.

نکته: در محاسبه θ باید دقت شود که α یا $\alpha \pm \pi$ را درست انتخاب کنیم.

$$z_1 = 1+i \longrightarrow \arg z_1 = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

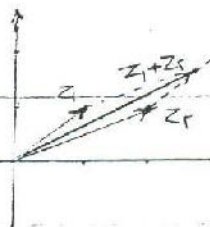
$$z_2 = -1-i \longrightarrow \arg z_2 = \tan^{-1} 1 = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = 1+i$$

$$z_2 = -1-i$$

$$z = z_1 + z_2$$

نیایش جیب اعداد مختلط در صفحه z :



$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

چند نامساوی:

$$\begin{cases} |z| \geq x \\ |z| \geq y \end{cases}$$

قضیه دمورگان:

$$[r \cos \theta + i r \sin \theta]^n = r^n \cos n\theta + i r^n \sin n\theta$$

$$(1+i)^4 = [r \cos \frac{\pi}{4} + i r \sin \frac{\pi}{4}]^4 = 14 \cos 4\pi + i 14 \sin 4\pi = 14$$

مثال:

$$z_1 \cdot z_2 = [r_1 \cos \theta_1 + i r_1 \sin \theta_1][r_2 \cos \theta_2 + i r_2 \sin \theta_2] \quad \text{اثبات:}$$

$$= r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2] + i r_1 r_2 [\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1]$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z_1 = z_1 = z \longrightarrow z^r = r^x [\cos r\theta + i \sin r\theta]$$

به همین شکل از طریق استقرای ریاضی برای توانهای بالاتر اثبات می شود.

انواعی در صفحه مختلط:

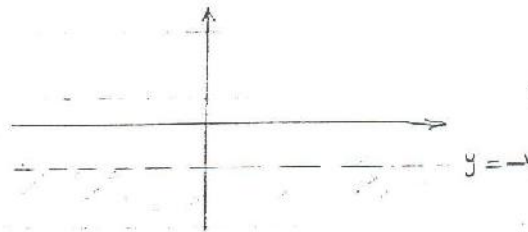
محور حقیقی (x)

محور خیالی (y)

$$\operatorname{Re}\{z\} > 1$$

مثال ۱:

x=1



$$\operatorname{Im}\{z\} < -1$$

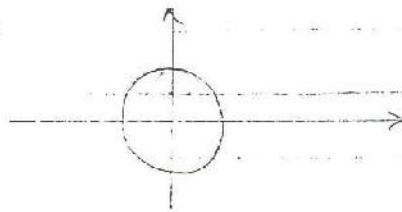
مثال ۲:

y=-1



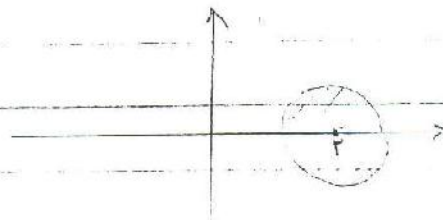
$$|z| < 1$$

مثال ۳:



$$|z-2| < 1$$

مثال ۴:



$$|z - (1+i)| < 2$$

مثال ۵:

$$\longrightarrow |x+iy - (1+i)| = r$$

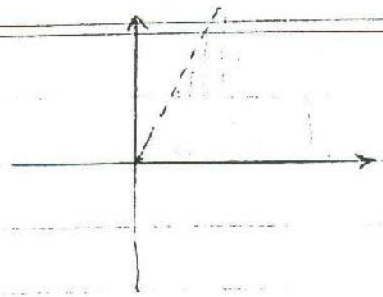
$$\longrightarrow |(x-1) + i(y-1)| = r$$

$$\longrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = r$$

تو



$0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$



مثال ۱

$|\frac{z-1}{z+1}| < 4$

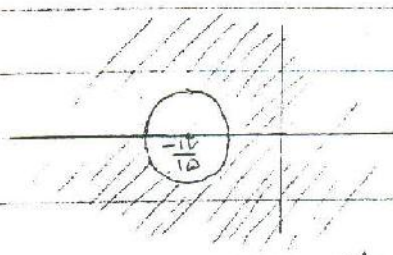
مثال ۲

$\xrightarrow{\text{برای تعیین}} \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 4 \rightarrow \frac{|x+(iy-1)|}{|x+(iy+1)|} = 4 \rightarrow \frac{|(x-1)+iy|}{|(x+1)+iy|} = 4$

$\rightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = 4 \rightarrow (x-1)^2+y^2 = 16[(x+1)^2+y^2]$
 $= 16x^2 + 16y^2 + 16 + 64x = 0$

$\rightarrow x^2+y^2+1 + \frac{16}{15}x = 0$

$\rightarrow (x + \frac{16}{15})^2 + y^2 = (\frac{16}{15})^2$



چند تعریف

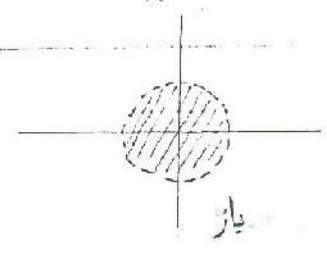
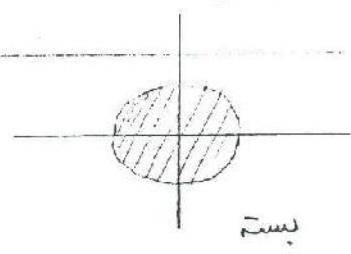
۱- مکان هندسی نقاط هم‌قانونی که تعدادی از نقاط صفت z را گرد آورده مکان هندسی نقاط

نامند مانند $|z|=1$ که مکان هندسی نقالی است که فاصله شان تا مرکز ۱ است.

۲- مجموعه نقاط باز: مجموعه نقالی است که در همسایگی تمام نقاط آن نقالی درون مجموعه می باشد

۳- نقاط کرانه ای: نقالی هستند که در همسایگی آنها نقالی درون مجموعه و نقالی خارج از مجموعه وجود دارند.

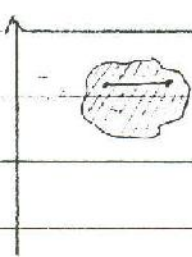
۴- مجموعه نقاط بسته: مجموعه نقالی است شامل نقاط کرانه ای



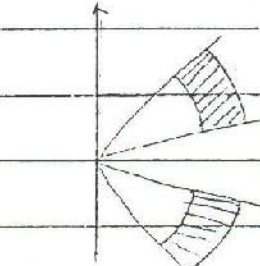
مثال ۳

مجموعه نقاط همبند: چنانچه هر دو نقطه مجموعه توسط خطی درون مجموعه قابل اتصال

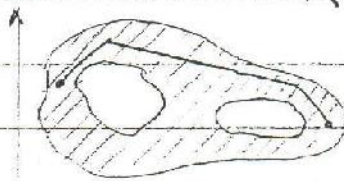
باشد آن مجموعه نقاط را همبند نامند.



همبند



غیر همبند
 $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}$
 $1 < |z| < 1.5$



همبند

۶- حوزه: مجموعه نقاط همبند باز را گوئیم.

۷- ناحیه: مجموعه نقاط همبند بسته را گوئیم.

۸- تابع: تابعی که به تمام نقاط یک ناحیه (حوزه) در صفحه z یک عدد مختلط

نسبت دهد $W = f(z)$

نکته: فرق تابع حقیقی و مختلط در این است که بُرد و دامنه در این حالت یک ناحیه هستند.

$y = \sqrt{1-x}$

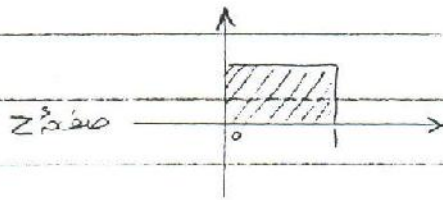
دامنه $x \leq 1$

بُرد $y \geq 0$

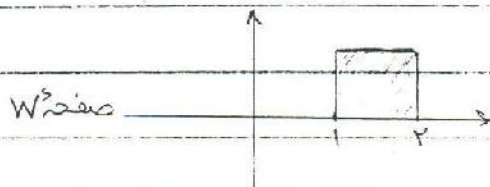
تابع حقیقی:

$$W = Z + 1$$

تابع مختلط =



فرض می کنیم دامنه به صورت مقابل باشد:



در نتیجه برد به صورت زیر است:

پیدا کردن برد از روی دامنه بحثی است تحت عنوان «نگاشت» که در فصل بعد بحث

خواهد شد.

$$W = f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad \text{نکته ۲: در هر تابع مختلط:}$$

$$W = z^2 \quad \text{مثال ۱:}$$

$$\rightarrow W = (x + iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u(x, y)} + i \underbrace{(2xy)}_{v(x, y)}$$

$$W = (1+i)z - (1-i) \quad \text{مثال ۲:}$$

$$\rightarrow W = (1+i)(x+iy) - (1-i) = \underbrace{(x-y-1)}_{u(x, y)} + i \underbrace{(x+y+1)}_{v(x, y)}$$

$$W = z^3 \quad \text{مثال ۳:}$$

$$\rightarrow W = (x+iy)^3 = \underbrace{[x^3 - 3xy^2]}_{u(x, y)} + i \underbrace{[-y^3 + 3x^2y]}_{v(x, y)}$$

قضیه کوشی-ریمان :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \quad \text{اگر تابع } f(z) \text{ در حوزه } D \text{ تحلیلی باشد در آن صورت:}$$

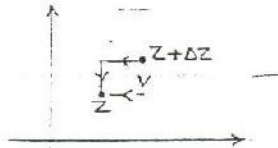
و بالعکس.

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

اثبات:

$$\rightarrow f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$\rightarrow f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i v(x+\Delta x, y+\Delta y) - [u(x, y) + i v(x, y)]}{\Delta x + i \Delta y}$$



نکته: چون تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی است پس تفاوتی نمی‌کند که ابتدا کدامیک از متغیرها $(\Delta y, \Delta x)$

را به سمت صفر میل دهیم.

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i v(x+\Delta x, y) - u(x, y) - i v(x, y)}{\Delta x} \quad \text{مسئله اول:}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = z^2 \rightarrow f'(z) = 2z$$

نکته جانی:

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i(v(x+\Delta x, y+\Delta y)) - u(x, y) - i v(x, y)}{\Delta z} \quad \text{مرحله دوم:}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} - i \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = 2x - i(-2y) = 2z \quad \text{در مثال بالا:}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

مثال: کدامیک از توابع زیر تحلیلی اند؟

$$f_1(z) = z^2 \rightarrow f_1(z) = \overbrace{(x^2 - y^2)}^u + i \overbrace{(2xy)}^v$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_x = 2x & v_x = 2y \\ u_y = -2y & v_y = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{تحلیلی است}$$

چون معادلات کوشی-ریمان برای تمام نقاط صفحه z در مورد $f_1(z)$ برقرار است پس تابع $f_1(z)$

در تمام صفحه z تحلیلی است.

$$f_2(z) = \operatorname{Re}(z) \rightarrow f_2(z) = \frac{u}{x} + i \frac{v}{0}$$

۹. حد یک تابع: تابع $w = f(z)$ در نقطه z_0 دارای حد l است چنانچه برای هر ϵ دلخواه

(ϵ عددی است به طور دلخواه کوچک) یک δ وجود داشته باشد چنانچه $|z - z_0| < \delta$

باشد در آن صورت $|w - l| < \epsilon$ باشد

۱۰. تابع $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ دارای مشتق است چنانچه حد زیر وجود داشته باشد:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

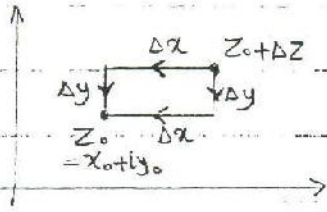
نکته: در تابع حقیقی وقتی این مشتق وجود داشته که حد چپ و راست برابر بودند در توابع

خطی باید این حد به از تمام جهات در صفحه z موجود و برابر باشد



نکته: برای اثبات اینکه تابعی در نقطه ای مشتق پذیر نیست، عموماً ابتدا Δx را به سمت صفر

و سپس Δy را به سمت صفر میل می‌کنیم و بار دیگر برعکس عمل می‌کنیم. اگر این دو پاسخ



یکو نشد نتیجه می‌گیریم که تابع مشتق پذیر نیست.

$f(z) = \bar{z}$

مثال:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\overline{z + \Delta z}) - \bar{z}}{\Delta z}, \quad z = x + iy, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

$$\rightarrow f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[(x+\Delta x) - i(y+\Delta y)] - [x - iy]}{\Delta x + i\Delta y}$$

ابتداء $\Delta y = 0$:

$$\rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - iy - x + iy}{\Delta x} = 1$$

$$\rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x - iy - i\Delta y - x + iy}{i\Delta y} = -1 \quad \text{حال اگر ابتدا } \Delta x = 0$$

11- تابع تحلیلی $f(z)$ تابع $f(z)$ را در ناحیه D تحلیلی گویند چنانچه این تابع از اد

تعام نقاط مستقر پذیر باشد.

قضیه کوشی-ریمان: اگر تابع $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد در آن صورت:

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

وبالعکس

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

در مثال قبل =

$$u(x, y) = x$$

$$v(x, y) = -y$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \end{cases} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

پس تابع در هیچ نقطه تحلیلی نیست.

۴۳

$$\rightarrow \begin{cases} u_x = 1 \\ v_y = 0 \end{cases} \rightarrow u_x \neq v_y$$

تابع $f_1(z)$ در هیچ نقطه‌ای از صفحه z تحلیلی نیست.

$$f_3(z) = z^3 + iz \rightarrow f_3(z) = \overbrace{(x^3 - 3xy^2 + 3x)}^u + i \overbrace{(3y^2 - y^3 + 3y)}^v$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_x = 3x^2 - 3y^2 + 3 \\ u_y = -3xy \\ v_x = 3xy \\ v_y = 3x^2 - 3y^2 + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

تابع $f_3(z)$ در تمام نقاط صفحه z تحلیلی است.

$$f_4(z) = \bar{z} \rightarrow f_4(z) = \frac{u}{x} - i \frac{v}{y}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_x = 1 \\ v_y = -1 \end{cases}, u_x \neq v_y$$

تابع $f_4(z)$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

$$f_5(z) = \frac{1}{z} \rightarrow f_5(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ v_y = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

تابع $f_5(z)$ در تمام نقاط جز نقطه $z=0$ تحلیلی است.

$$f_6(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow u = \sqrt{x^2+y^2}, v = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_x = \frac{1}{r} \cdot rx = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ u_y = \frac{1}{r} \cdot ry = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases}$$

در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

توابع عمدتاً به سه دسته تقسیم می‌شوند:

- ۱- توابعی که در تمام نقاط بی‌نقطه تحلیلی هستند $z^k, \cos z, \sin z, e^z, \dots$
- ۲- توابعی که در تمام صفحه تحلیلی نیستند $z; |z|, \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z), \operatorname{arg}(z), \dots$

- ۳- توابعی که فقط در نقاطی تحلیلی نیستند $\frac{1}{z-1}, \frac{1}{z^2-1}, \dots$

نکته: اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد در آن صورت $u(x, y)$ و $v(x, y)$ هر دو در معادله لاپلاس دو بعدی صدق می‌کنند

با داری معادله لاپلاس دو بعدی:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{cases}$$

اثبات: اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد،

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = v_{xy} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases} \rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

به همین شکل برای v نیز اثبات می‌شود.

تعریف ۱: تابعی که در معادله لاپلاس صدق کند، تابع همساز نامند.

تعریف ۲: v را همساز مزدوج u نامند.

مثال: بررسی کنید که در تابع مختلط زیر u و v همساز هستند

$$f(z) = z^2 = \overbrace{(x^2 - y^2)}^u + i \overbrace{(2xy)}^v$$

$$\begin{cases} u_x = 2x \rightarrow u_{xx} = 2 \\ v_y = 2x \rightarrow v_{yy} = 0 \end{cases} \rightarrow u_{xx} + v_{yy} = 2 + 0 = 2 \neq 0$$

$$\begin{cases} v_x = 2y \rightarrow v_{xx} = 0 \\ v_y = 2x \rightarrow v_{yy} = 0 \end{cases} \rightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0$$

مثال: اولاً ثابت کنید که $(x, y) = x^2 - y^2$ همساز است و ثانیاً همساز مزدوج آن را پیدا کنید.

حسب اول در مثال قبلی حل شد.

$$\begin{cases} u_x = 2x \\ u_y = -2y \end{cases} \xrightarrow{v \text{ همساز } u \text{ است}} \begin{cases} v_y = u_x = 2x \\ v_x = -u_y = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(x, y) = 2xy + g(x) \\ v(x, y) = 2xy + f(y) \end{cases} \rightarrow v(x, y) = 2xy + C$$

$$\rightarrow f(z) = (x^2 + y^2) + i(2xy + C) = z^2 + iC$$

$$\text{if } C = 0 \rightarrow f(z) = z^2$$

معادلات کوشی - ریچارد در فرم قطبی:

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$f(z) = z^r = (x + iy)^r = (x^r - rxy^{r-1}) + i(ryx^{r-1} - y^r)$$

$$= [r \cos \theta + i r \sin \theta]^r = \frac{r^r \cos r\theta}{u(r, \theta)} + \frac{i r^r \sin r\theta}{v(r, \theta)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_r = r^r \cos r\theta \\ u_\theta = r^r \sin r\theta \end{cases}, \begin{cases} v_r = r^r \sin r\theta \\ v_\theta = r^r \cos r\theta \end{cases}$$

در مثال قبل:

$$\rightarrow \begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \end{cases}$$

ع

بحث‌های باقی‌مانده از فصل ۱۲ :

۱- محاسبه z^n : برای محاسبه z^n ابتدا اثباتی کنیم که :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

اثبات :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\rightarrow e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots$$

$$= \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right] + i \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right] = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\rightarrow z^n = [re^{i\theta}]^n = r^n \cdot e^{in\theta}$$

$$(1+i)^8 = [r e^{i\frac{\pi}{4}}]^8 = 16 e^{i2\pi} = 16 [\cos 2\pi + i\sin 2\pi] = 16$$

مثال :

۲- محاسبه z^z :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x [\cos y + i\sin y]$$

$$\rightarrow e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$e^{r+i} = e^r \cos 1 + i e^r \sin 1 =$$

مثال :

۳- محاسبه ریشه n ام یک عدد مختلط $\sqrt[n]{z}$:

نکته : وقتی از اعداد مختلط استفاده می‌کنیم برای $\sqrt[n]{z}$ ، n ریشه پیدایی شود.



$$\sqrt[r]{r} = \pm r, \quad \sqrt[r]{1} = 1$$

در اعداد حقیقی همیشه این طور نبود:

$$z = r e^{i\theta}, \quad e^{i r k \pi} = \cos r k \pi + i \sin r k \pi = 1$$

$$\rightarrow z = r e^{i\theta} \cdot e^{i r k \pi} = r e^{i(\theta + r k \pi)}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i(\theta + r k \pi)}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{\theta + r k \pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$k=0 \rightarrow z_1 = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{\theta}{n}}$$

$$k=1 \rightarrow z_2 = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{\theta + r \pi}{n}}$$

⋮

$$k=n \rightarrow z_{n+1} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{\theta + r n \pi}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{\theta}{n}} \cdot \frac{e^{i r \pi}}{1} = z_1$$

خلاصه روش:

$$z = r e^{i\theta}$$

۱- زاویه فرم قطبی نمایش می دهیم.

۲- ریشه ها را از رابطه زیر محاسبه می کنیم.

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{\theta + r k \pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\sqrt[r]{1} = ? \rightarrow 1 = (1) e^{i(0)}, \quad r=1, \theta=0 \quad \text{مثال ۱}$$

$$\rightarrow \sqrt[r]{1} = (1) \cdot e^{i \frac{\theta + r k \pi}{r}}, \quad k = 0, 1$$

$$k=0 \rightarrow z_1 = 1 \cdot e^{i(0)} = 1$$

$$k=1 \rightarrow z_2 = 1 \cdot e^{i\pi} = -1$$



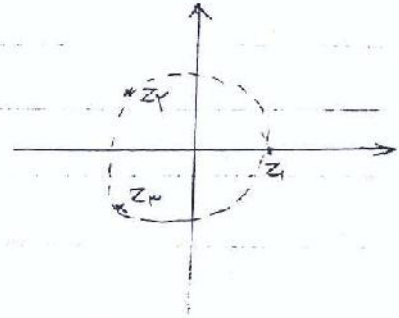
$$\sqrt[n]{1} = ? \rightarrow 1 = (1)e^{i(0)}, \quad r=1, \theta=0 \quad = \text{مثال 1}$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{1} = 1 \cdot e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k=0, 1, 2$$

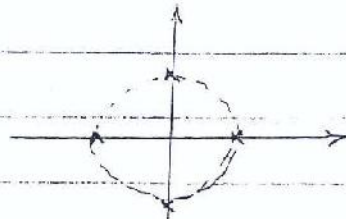
$$k=0 \rightarrow z_1 = 1e^{i(0)} = 1$$

$$k=1 \rightarrow z_2 = 1e^{i \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

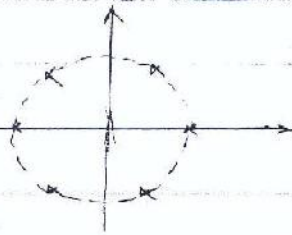
$$k=2 \rightarrow z_3 = 1e^{i \frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\sqrt[4]{1} \rightarrow \begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= i \\ z_3 &= -1 \\ z_4 &= -i \end{aligned}$$



$$\sqrt[4]{1}$$



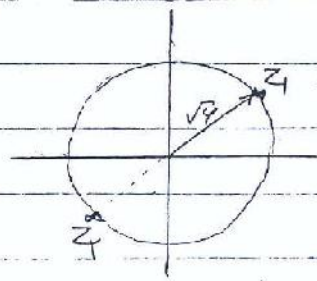
$$\sqrt[4]{3 + 3\sqrt{3}i} = ? \quad = \text{مثال 2}$$

$$3 + 3\sqrt{3}i = 6e^{i \frac{\pi}{3}}, \quad r=6, \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow \sqrt[4]{3 + 3\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{6} \cdot e^{i \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}}, \quad k=0, 1$$

$$k=0 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{6} \cdot e^{i \frac{\pi}{12}}$$

$$k=1 \rightarrow z_2 = \sqrt[4]{6} \cdot e^{i \frac{7\pi}{12}}$$

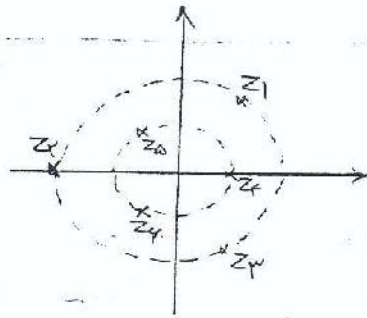


مثال: رابطه‌های معادله $z^6 + \sqrt{z} = 1$ را پیدا کنید.

$$W = z^{\sqrt{z}} \rightarrow W^{\sqrt{z}} + \sqrt{z}W - 1 = 0 \rightarrow \begin{matrix} W_1 = -1 \\ W_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow z^{\sqrt{z}} = -1 \rightarrow \begin{cases} z_1 = re^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_2 = re^{i\frac{3\pi}{2}} \\ z_3 = re^{i\frac{5\pi}{2}} \end{cases}$$

$$z^{\sqrt{z}} = 1 \rightarrow \begin{cases} z_4 = 1 \\ z_5 = e^{i\frac{2\pi}{2}} \\ z_6 = e^{i\frac{4\pi}{2}} \end{cases}$$



۴- معادله توانی مثلثاتی اعداد مختلط:

$$\cos z = \frac{1}{2} [e^{iz} + e^{-iz}]$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} [e^{iz} - e^{-iz}]$$

$$\cosh z = \frac{1}{2} [e^z + e^{-z}]$$

$$\sinh z = \frac{1}{2} [e^z - e^{-z}]$$

$$\cos(1+i) = ?$$

مثال:

$$\rightarrow \cos(1+i) = \frac{1}{2} [e^{i(1+i)} + e^{-i(1+i)}] = \frac{1}{2} [e^{-1+i} + e^{1-i}]$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\rightarrow \cos(1+i) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{e} \cos 1 + i \frac{1}{e} \sin 1 + e \cos 1 - i e \sin 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{e} + e \right) \cos 1 + i \left(\frac{1}{e} - e \right) \sin 1 \right]$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

بعضی فرموله‌های ساده کنده:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y$$

اثبات:

$$\cosh y = \frac{1}{2} [e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}] = \frac{1}{2} [e^{-y} + e^y] = \cosh y$$

$$\sinh y = \frac{1}{2} [e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}] = \frac{1}{2} [e^{-y} - e^y] = -\sinh y$$

$$\rightarrow \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

همچون سابقه لگاریتمیک در مختلط $\ln z$:

از z را به فرم قطبی می‌نویسیم:

$$\ln z = \ln r e^{i(\theta + 2k\pi)} = \ln r + \ln e^{i(\theta + 2k\pi)} = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

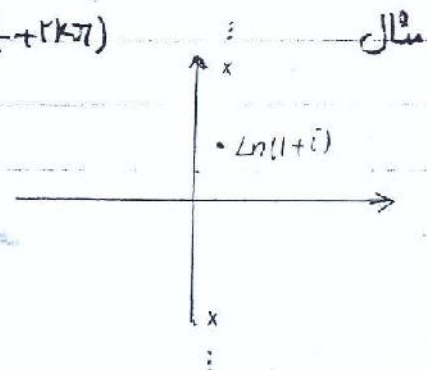
$$\rightarrow \ln z = \underbrace{\ln r}_{\text{جواب حقیقی}} + i \underbrace{[\theta + 2k\pi]}_{\text{جواب تخیلی}}$$

بینهایت جواب داریم. جوابی که به ازاء $k=0$ بدست می‌آید $(-\pi < \theta < \pi)$ جواب اصلی می‌نامیم.

$$\rightarrow \ln z = \ln r + i\theta$$

$$\begin{aligned} \ln(1+i) &= \ln \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} = \ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{جواب اصلی}} \ln(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{\pi}{4}$$



نکته: اگر اعداد مختلط تعریف شده باشند در آن صورت \ln اعداد منفی نیز تعریف شده است.

$$\ln(-1) = ? \rightarrow r=1, \theta=\pi$$

$$\rightarrow \ln(-1) = \frac{\ln|r|}{r} + i\pi = i\pi$$

$$\ln(-i) = ? \rightarrow r=1, \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \ln(-i) = \frac{\ln|r|}{r} - i\frac{\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2}$$

۶- محاسبه یک عدد مختلط به توان یک عدد مختلط دیگر:

$$z = e^{\ln z} \rightarrow z^c = (e^{\ln z})^c = e^{c \ln z} \rightarrow z^c = e^{c \ln z}$$

در اینجا هم چون \ln بی نهایت جواب دارد جواب اصلی، تعریف می کنیم.

$$(1+i)^i = ? \quad z=1+i, c=i \quad \text{سوال:}$$

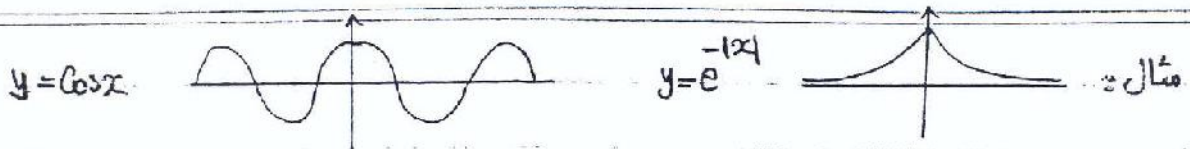
$$\rightarrow \ln z = \ln(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$$

$$c \ln z = i(\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4} + i\frac{1}{2}\ln 2$$

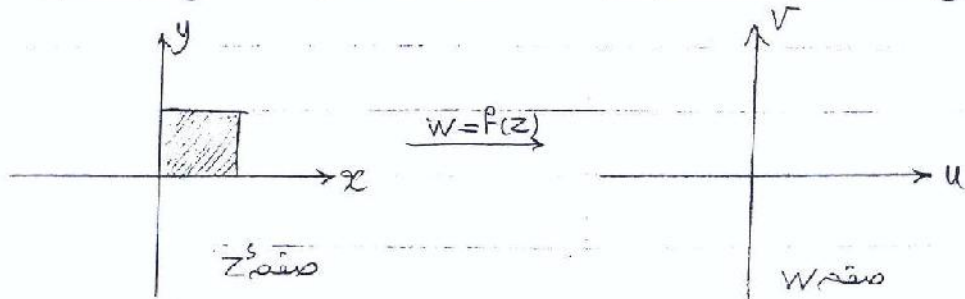
$$\rightarrow (1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4} + i\frac{1}{2}\ln 2} = e^{-\frac{\pi}{4}} [\cos \frac{1}{2}\ln 2 + i \sin \frac{1}{2}\ln 2]$$

نکاشت:

یادآوری: در توابع مستقی $y = f(x)$ نمودار (منحنی) کشیم:

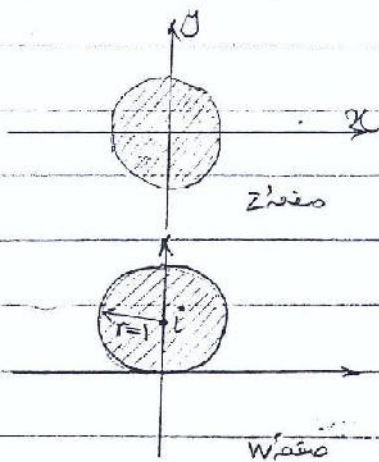


در توابع مختلط $W = f(z)$ ، $W = u + iv$ ، $z = x + iy$



نگاشت: تصویر نامیه ای مشخص از صفت z در صفت w است با تابع تعریف شده $W = f(z)$.

مثال: نگاشت یا تصویر نامیه ای در صفت z که با $|z| < 1$ مشخص شده است با تابع $W = z + i$.



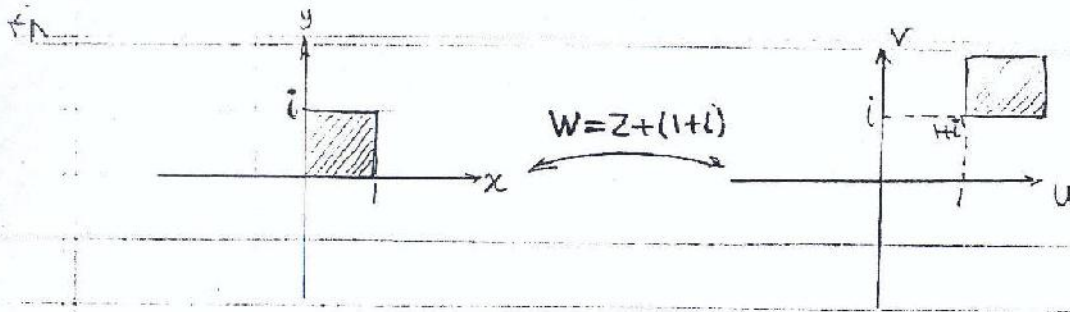
تعیین کنید.

اثبات: $W = z + i$ ، $x^2 + y^2 = 1$

$$\rightarrow W = x + iy + i = \underbrace{(x)}_u + i \underbrace{(y+1)}_v$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = y + 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow u^2 + (v-1)^2 = 1$$

به طور کلی: نگاشت با تابع $W = z + b$ یک انتقال است.



مثال ۲

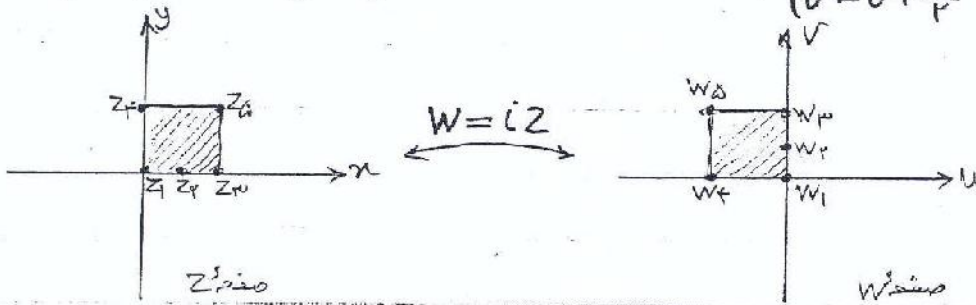
$$W = i \cdot Z$$

مثال ۳

$$z = r e^{i\theta}, \quad W = r' e^{i\theta'}$$

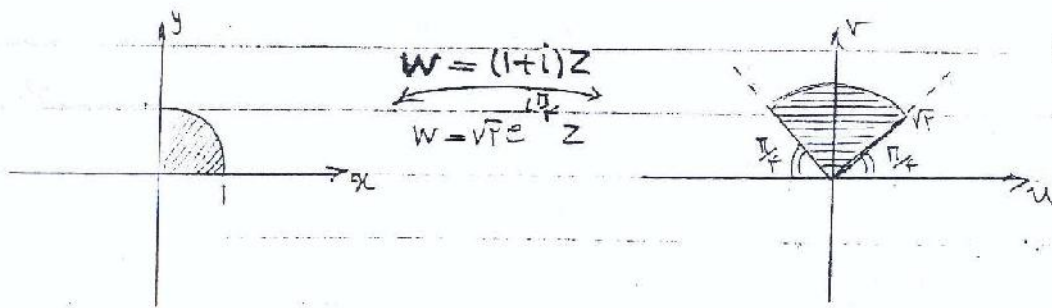
$$W = i [r e^{i\theta}] = e^{i\frac{\pi}{2}} [r e^{i\theta}] = r \cdot e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

$$\begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



به طور کلی نگاشت تابع $W = aZ$ یک دایره است به اندازه زاویه α و یک انبساط و یک انقباض

است.

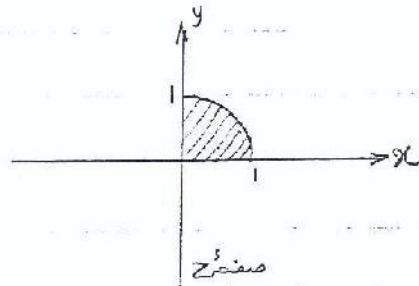
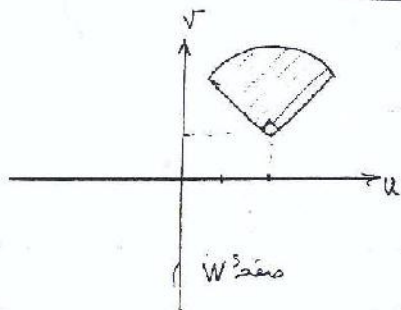


مثال ۵

نگاشت $w = az + b$

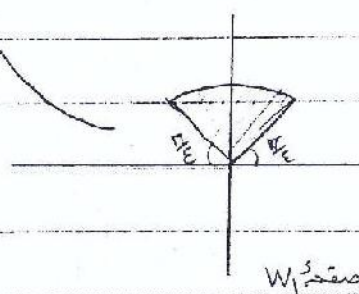
مثال ۱

$$W = (1+i)Z + (2+i)$$



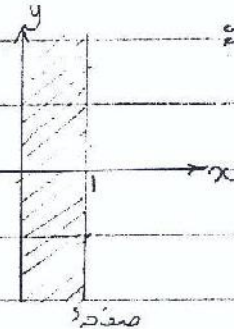
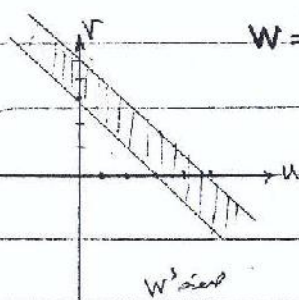
$$W = W_1 + (2+i)$$

$$W_1 = (1+i)Z = \sqrt{2}re^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$



$$W = (1+i)Z + (2+i)$$

مثال ۲



محاسبات می خواهیم تصویر خط $x=1$ را در صفحه w پیدا کنیم.

$$x=1$$

$$W = (1+i)(x+iy) + 2+i = \frac{(x-y+2)}{u} + i \frac{(x+y+1)}{v}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=1 \\ u = x - y + 2 \\ v = x + y + 1 \end{cases}$$

برای پیدا کردن خط $x=1$ کافی است در معادلات بالا x و y را حذف کنیم و یک معادله بر حسب

u و v پیدا کنیم این معادله معادله تصویر خواهد بود.

$$\begin{cases} u = 1 - y + 2 \\ v = 1 + y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = 3 - y \\ v = 2 + y \end{cases} \rightarrow u + v = 5$$

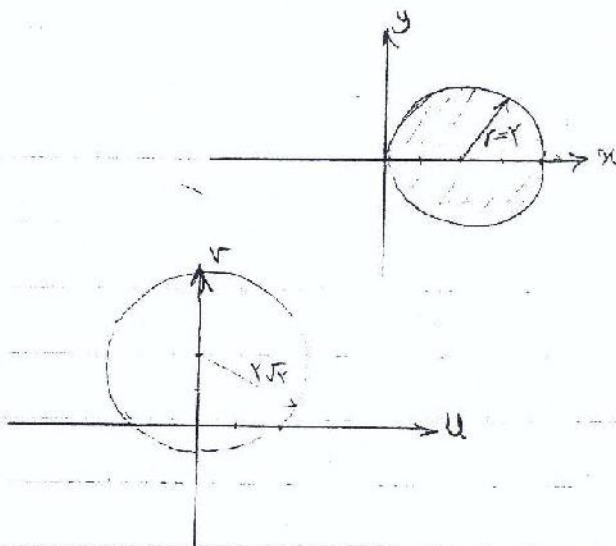
$$u + v = 3$$

به همین شکل تصویر $x=0$ را پیدا کنیم.

$$W = (1+i)Z - 2$$

مثال ۳:

$$\rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ u = x - y - 2 \\ v = x + y \end{cases}$$

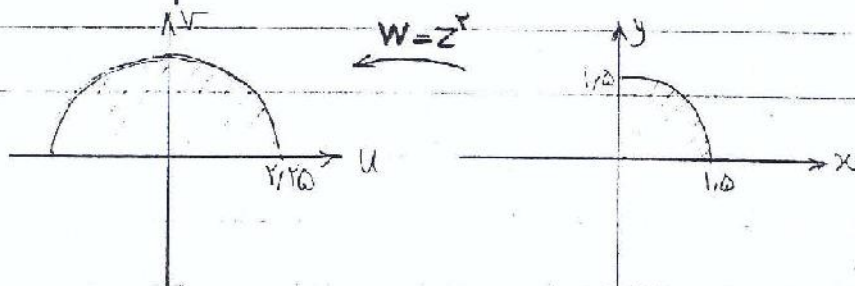


$$\rightarrow (v-2)^2 + u^2 = 4$$

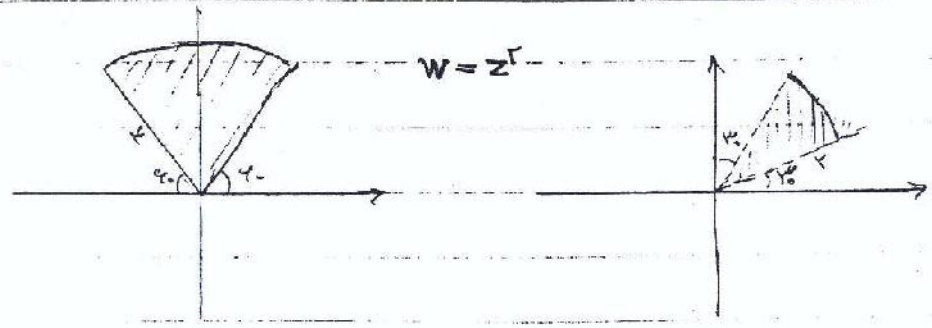
نگاشت $W = Z^2$

$$W = Z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2 \cdot e^{i\frac{2\theta}{\theta}}$$

مثال ۴:



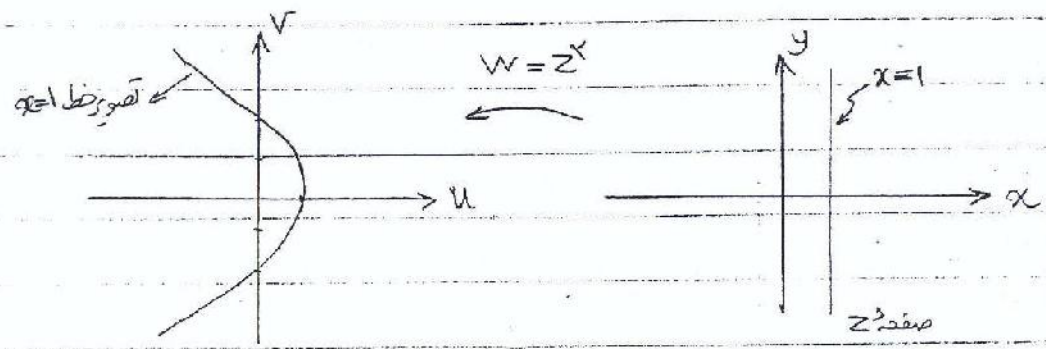
مثال ۲:



مثال ۳: تصویر ربع اول در صفحه z با نگاشت $w = z^2$ ربع اول و دوم در صفحه w است.

مثال ۴: تصویر دایره واحد در صفحه z با نگاشت $w = z^2$ همون دایره واحد در صفحه w است.

مثال ۵:

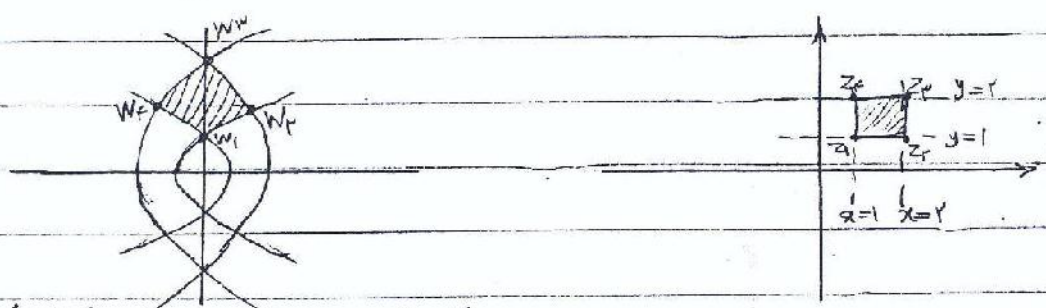


$$x=1$$

$$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x=1 \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \rightarrow u = 1 - \frac{v^2}{4} \end{aligned}$$

مثال ۶:



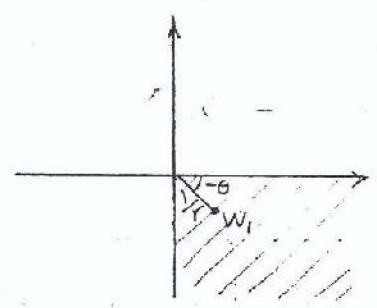
$$\begin{aligned} \begin{cases} x=c \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} u = c^2 - y^2 \\ v = 2cy \end{cases} \rightarrow u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2} \\ c=1 &\rightarrow u = 1 - \frac{v^2}{4} \\ c=2 &\rightarrow u = 4 - \frac{v^2}{16} \end{aligned}$$

50

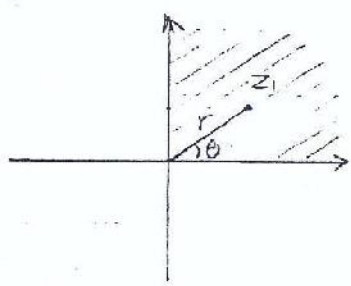
$$\begin{cases} y = C \\ u = x^r - y^r \\ v = rxy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = x^r - C^r \\ v = rCx \end{cases} \rightarrow u = \frac{v^r}{rC^r} - C^r$$

نگاشت $W = \frac{1}{z}$

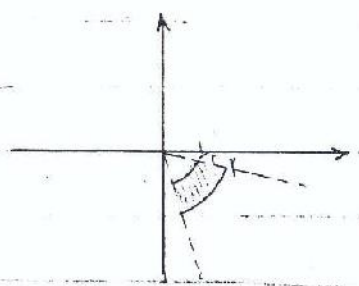
$$W = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \rightarrow \begin{cases} r' = \frac{1}{r} \\ \theta' = -\theta \end{cases}$$



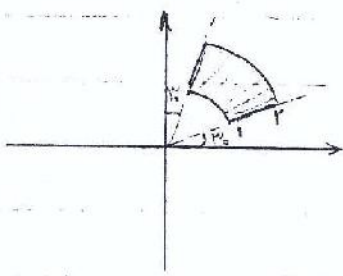
$$W = \frac{1}{z}$$



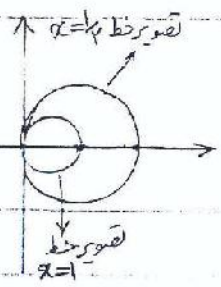
مثال 1



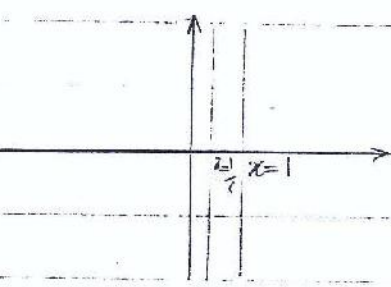
$$W = \frac{1}{z}$$



مثال 2



$$W = \frac{1}{z}$$

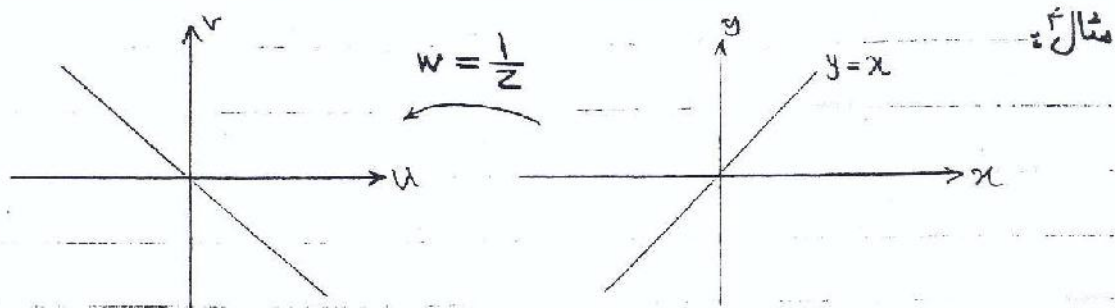


مثال 3

$$W = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}$$

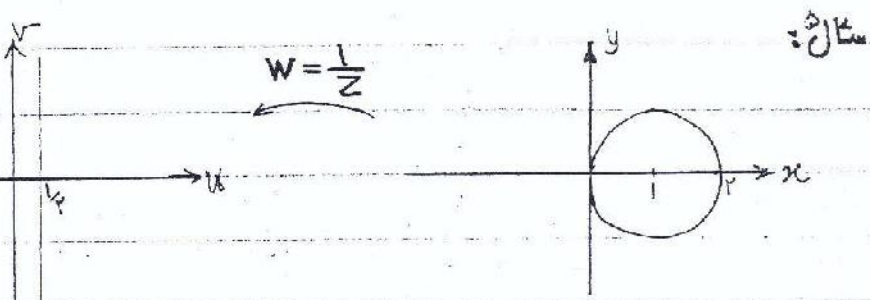
$$\rightarrow \begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ x = c \end{cases} \rightarrow \left(u - \frac{1}{rc}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{rc}\right)^2$$

د



$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \rightarrow u = -v$$

$$x = y$$



$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \rightarrow u = \frac{1}{v}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

قضیه: نگاشت $w = \frac{1}{z}$ تمام خطوط و دایره در صفحه Z را بر روی تمام خطوط و دایره در

صفحه w تصویر می‌کند.

معادله تمام خطوط و دایره در صفحه Z

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

معادله تمام خطوط و دایره در صفحه w

$$A'(u^2+v^2) + B'u + C'v + D' = 0$$

اثبات:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z\bar{z} \\ x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases}$$

$$\rightarrow A(z\bar{z}) + \frac{B}{r}(z + \bar{z}) + \frac{C}{r^2}(z - \bar{z}) + D = 0$$

if $w = \frac{1}{z} \rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{w} \\ \bar{z} = \frac{1}{\bar{w}} \end{cases}$

$$\rightarrow A\left[\frac{1}{w\bar{w}}\right] + \frac{B}{r}\left[\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right] + \frac{C}{r^2}\left[\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}}\right] + D = 0$$

$$\rightarrow A + \frac{B}{r}[\bar{w} + w] + \frac{C}{r^2}[\bar{w} - w] + Dw\bar{w} = 0$$

$$\rightarrow A + B \cdot u + C \cdot v + D[u^2 + v^2] = 0 \rightarrow \begin{cases} D' = A & B' = B \\ C' = -C & A' = D \end{cases}$$

اگر بخواهیم تصویر دایره $(x-1)^2 + y^2 = 1$ را پیدا کنیم به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

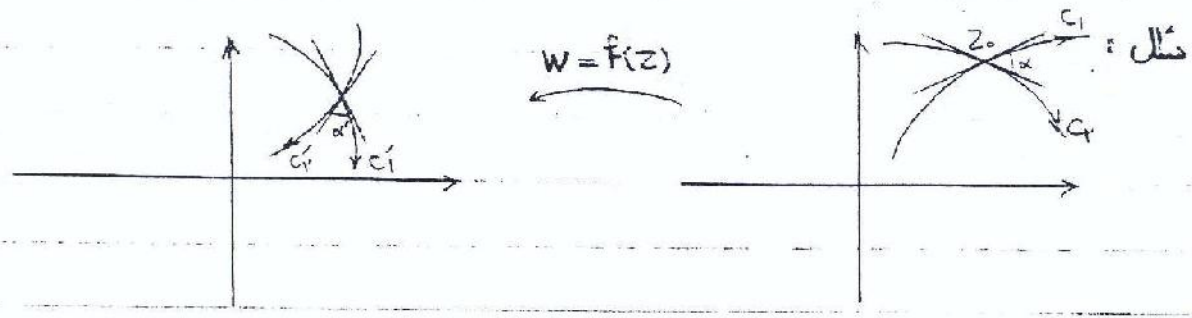
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = 1 \rightarrow A=1, B=-2$$

$u = \frac{1}{r} \leftarrow 1 - 2u = 0$ تصویر آن دایره:

مکانیست چه خطوطی، خط و چه خطوطی دایره است؟

بحث در مورد قضیه:

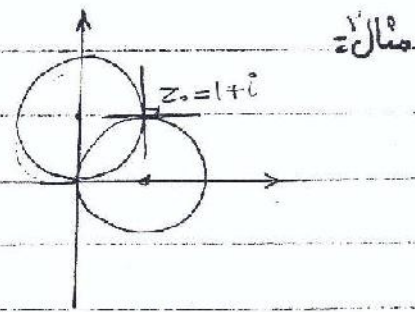
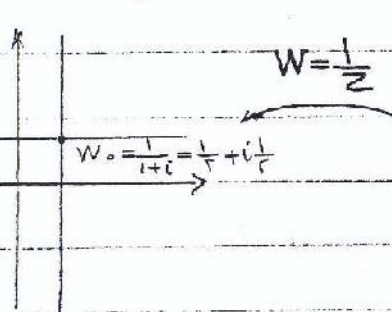
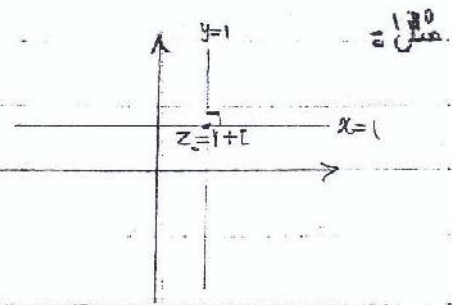
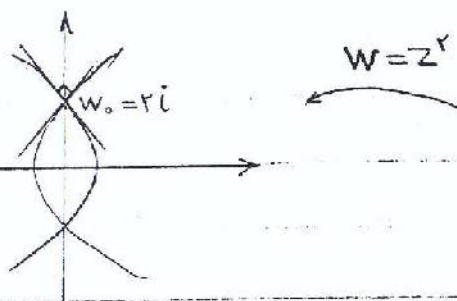
تعریف: نگاشت همبلیس (حفظ کننده زاویه):
Conformal mapping



در

کند.

نگاشت $W = f(z)$ را در نقطه z_0 همبند گویند چنانچه زاویه بین خطوط مار در آن نقطه را حفظ



قضیه ۱: نگاشتی که تابع تحلیلی $W = f(z)$ تعریف می شود یک نگاشت همبند است مگر در نقاطی

که در آن نقاط $f'(z)$ برابر صفر است.

مثال: در نگاشت $W = z^2$ این نگاشت تمام نقاط به جز $z=0$ همبند است.

مثال ۲: در نگاشت $W = z^3 - z^2$ اولاً این تابع در تمام نقاط صفر z تحلیلی است. ثانیاً این

تابع در نقاط 0 و $\pm \sqrt{2}$ مشتق صفر دارد

$$\frac{dw}{dz} = 3z^2 - 2z = z(3z - 2) = \begin{cases} z=0 \\ z=\pm \sqrt{2} \end{cases}$$

نتیجه: نگاشتی که با تابع $W = z^3 - z^2$ تعریف می شود در تمام نقاط صفر z به جز $\pm \sqrt{2}$ همبند

است.

دوقضیه =

است.

۱- نگاشتی که با تابع تحلیلی $W = F(z)$ تعریف شده است هم‌دیس است مگر در نقاطی که $F(z)$ صفر

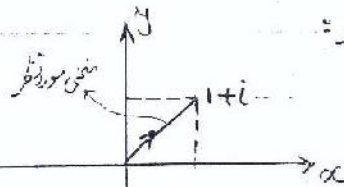
۲- تابع همساز (x, y) تحت تغییر متغیر z از یک نگاشت هم‌دیس، همساز باقی می‌ماند.

اثبات قضیه ۱ =

برای اثبات لازم است که منحنی مورد نظر در صفحه z را با بصورت $Z(t)$ نمایش دهیم.

روش کار:

$$Z(t) = t + it, \quad 0 < t < 1$$



$$Z(t) = t^2 + it^2, \quad 0 < t < 1$$

$$Z(t) = \sin t + i \cos t, \quad 0 < t < 1$$

نکته: $Z(t)$ برای یک منحنی منحصر به فرد نیست

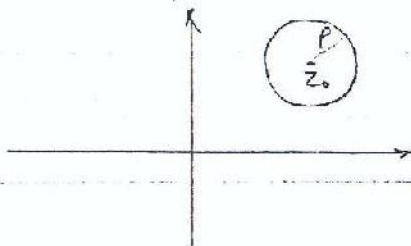
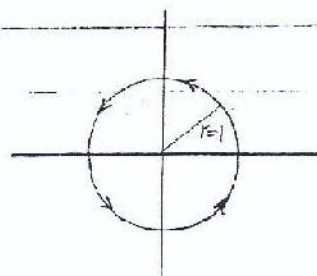
مثال ۱:

$$Z(t) = t + i(1-t), \quad 0 < t < 1$$



مثال ۲:

$$Z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}, \quad 0 < t < 2\pi$$



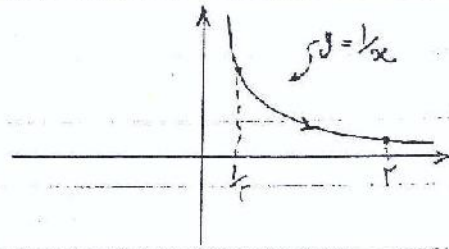
$$Z(t) = z_0 + r e^{it}, \quad 0 < t < 2\pi$$

مثال ۳:

در

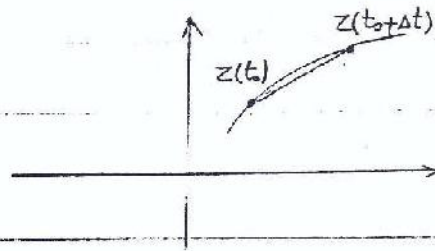
$$z(t) = t + i \frac{1}{t}$$

$$, \frac{1}{r} < t < r$$



مثال ۳:

$$\dot{z}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$$



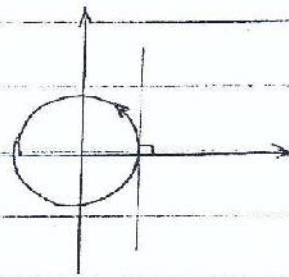
نکته: $\arg \dot{z}(t)$ زاویه بین خط مماس بر منحنی در نقطه $z(t_0)$ با محور x ها است.

$$z(t) = e^{it}$$

$$\dot{z}(t) = i e^{it}$$

$$t_0 = 0 \rightarrow \dot{z}(0) = i$$

$$\arg \dot{z}(0) = \frac{\pi}{2}$$



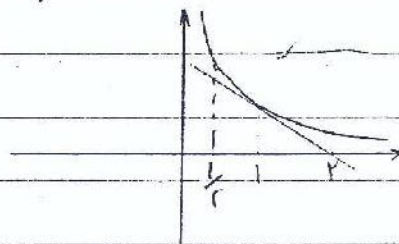
مثال ۴:

$$z(t) = t + i \frac{1}{t}$$

$$\dot{z}(t) = 1 + i \left(-\frac{1}{t^2} \right)$$

$$t_0 = 1 \rightarrow \dot{z}(1) = 1 - i$$

$$\arg \dot{z}(1) = \frac{7\pi}{4} = 135^\circ$$

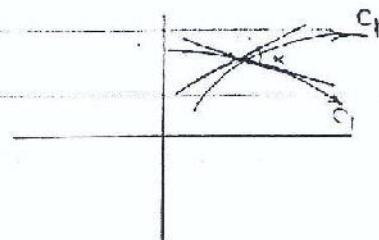


مثال ۵:

یادآوری تعریف کناشست:



$$w = f(z)$$



$$w = f(z)$$

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\dot{w} = f'(z) \cdot \dot{z}(t)$$

$$\rightarrow \arg[w(t)] = \arg[f'(z)] + \arg[\dot{z}(t)]$$

$$\arg[\dot{w}(t_0)] = \arg[f'(z_0)] + \arg[\dot{z}(t_0)]$$

و برای یک نقطه خاص

(۱- مشتق وجود داشته باشد)
۲- $f(z)$ صفر نباشد

نمونه مسائل این بخش: نگاشتی با تابع $f(z) = z^2 - z$ تعریف شده است. این نگاشت در نقطه‌ای همبند است که

۱- تابع $f(z)$ در تمام صفحه تحلیلی است. ۲- $f'(z)$ در نقطه $z = \frac{1}{2}$ صفر است.

نتیجه اینکه نگاشت در تمام نقاط صفحه z به جز نقطه $z = \frac{1}{2}$ همبند است.

قضیه ۲: تابع همساز $f(x, y)$ تحت آفیسر متغیرناشی از یک نگاشت همبند، همساز باقی می‌ماند.

$$f_x^2 + f_y^2 = 0$$

شکل ۲

این تابع همساز است (در معادله لاپلاس $f_{xx} + f_{yy} = 0$ صدق می‌کند)

$$w = \ln z$$

$$\rightarrow u + iv = \ln(x + iy)$$

$$\rightarrow x + iy = e^{u+iv}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases}$$

$$h_{uu}(u, v) = (e^u \cos v)^r - (e^u \sin v)^r$$

$$h_{uu} + h_{vv} = 0$$

می توان ثابت کرد که $h_{uu}(u, v)$ نیز همسان است.

$$h_{uu}(u, v) = e^{ru} \cos^r v - e^{ru} \sin^r v$$

در مثال بالا:

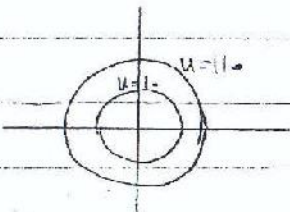
$$= e^{ru} [\cos^r v - \sin^r v] = e^{ru} \cos^r v$$

$$\rightarrow \begin{cases} h_{uu} = e^{ru} \cos^r v \\ h_{vv} = -e^{ru} \cos^r v \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{vv} = -e^{ru} \sin^r v \\ h_{vv} = -e^{ru} \cos^r v \end{cases}$$

$$h_{uu} + h_{vv} = 0$$

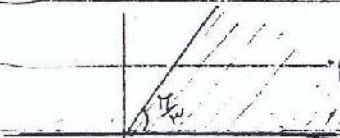
مثال از کاربرد این قضیه:



نکته: حل معادله لاپلاس در شرایط مرزی دایره ای ساده است.

$$u(r) = \frac{C}{r} + K$$

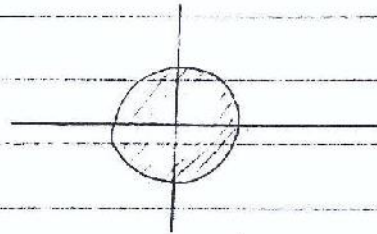
حال فرض کنید بخواهیم معادله لاپلاس را با شرایط مرزی زیر حل کنیم.



$$W_1 = z^r$$

$$W = f(z)$$

نکات مهم



$$W_2 = W_1 + \frac{i}{r}$$

$$W_2 = \frac{1}{W_1}$$

$$\rightarrow W = \frac{1}{W_2} = \frac{1}{W_1 + \frac{i}{r}} = \frac{1}{z^r + \frac{i}{r}}$$

نگاشت $w = \frac{az+b}{cz+d}$ (تبدیل کسری = نگاشت موبیوس) =

در این نگاشت باید شرط $ad - bc \neq 0$ برقرار باشد

حالات خاص =

۱- $c=0$ که در این صورت $w = \frac{az+b}{d} = a'z + b'$ که بررسی شد.

۲- $a=d=0$ که در این صورت $w = \frac{b}{cz} = k \cdot \frac{1}{z}$ که بررسی شد.

۳- $a=d, b=c=0$ که در این صورت $w = z$ نگاشت همانی است.

نکته =

نگاشت کسری صفحه z توسعه یافته (صفحه z شامل ∞) را به طوریکه به یک در صفحه توسعه یافته

w نگاشت $w = \frac{az+b}{cz+d}$

$$z = \frac{-d}{c} \rightarrow w = \infty$$

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}, w = \frac{a}{c} \rightarrow z = \infty$$

قضیه = هر نگاشت کسری (غیر از حالت‌های خاص) دارای دو نقطه ثابت است مگر نگاشت همانی.

تعریف نقطه ثابت = به ازاء $z = \bar{z}$ اگر $w = z$ بشود در آن صورت فقط z را نقطه ثابت ^{مند}

برای پیدا کردن نقطه ثابت در رابطه $w = \frac{az+b}{cz+d}$ و $w = z$ را می‌گذاریم.

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \rightarrow cz^2 - (a-d)z - b = 0$$

ad

$\begin{cases} z_1 \\ z_2 \end{cases}$

$$W = \frac{\Delta Z + \epsilon}{Z + \delta}$$

مثال: نقاط ثابت تبدیل کسری زیر را پیدا کنید:

$$\rightarrow Z = \frac{\Delta Z + \epsilon}{Z + \delta} \rightarrow Z^2 = \epsilon \rightarrow Z = \pm \sqrt{\epsilon}$$

مثال: تمام تبدیلهای کسری را پیدا کنید که نقاط ثابت آنها $\pm i$ باشد:

$$\rightarrow (Z-i)(Z+i) = 0 \rightarrow Z^2 + 1 = 0$$

$$cZ^2 - (a-d)Z - b = e \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ c = -b \end{array}$$

$$\rightarrow W = \frac{az+b}{cz+d} \rightarrow \frac{z+i}{-iz+1}, \frac{i(z+(1+i))}{-(1+i)z+i}$$

قضیه ۲: یک تبدیل کسری تمام خطوط و دایره در صفحه Z را به تمام خطوط و دایره در صفحه W می نگارد.

برای اثبات قضیه نشان می دهیم که یک تبدیل کسری قابل نمایش یا تبدیل های ساده تر به شکل

$$\rightarrow W = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} \quad \text{نمایی باشد}$$

$$= \frac{a}{c} + k \cdot \frac{1}{cz+d}$$

$$W_1 = CZ \rightarrow W_2 = W_1 + d \rightarrow W_3 = \frac{1}{W_2} \rightarrow W_4 = k \cdot W_3$$

$$\rightarrow W = \frac{a}{c} + W_4$$

می دانیم که W_1 خط را به خط و دایره را به دایره تبدیل می کند. W_3 تمام خطوط و دایره را به تمام خطوط و دایره تبدیل می کند.

و دایره خاصی کند. W_4 خط را به خط و دایره را به دایره تبدیل می کند. در نتیجه W تبدیل است که

خط را به خط و دایره را به دایره تصویر می کنند.

مثال: یک تبدیل کسری به فرم $w = \frac{z-i}{-i z+1}$ تعریف شده است.

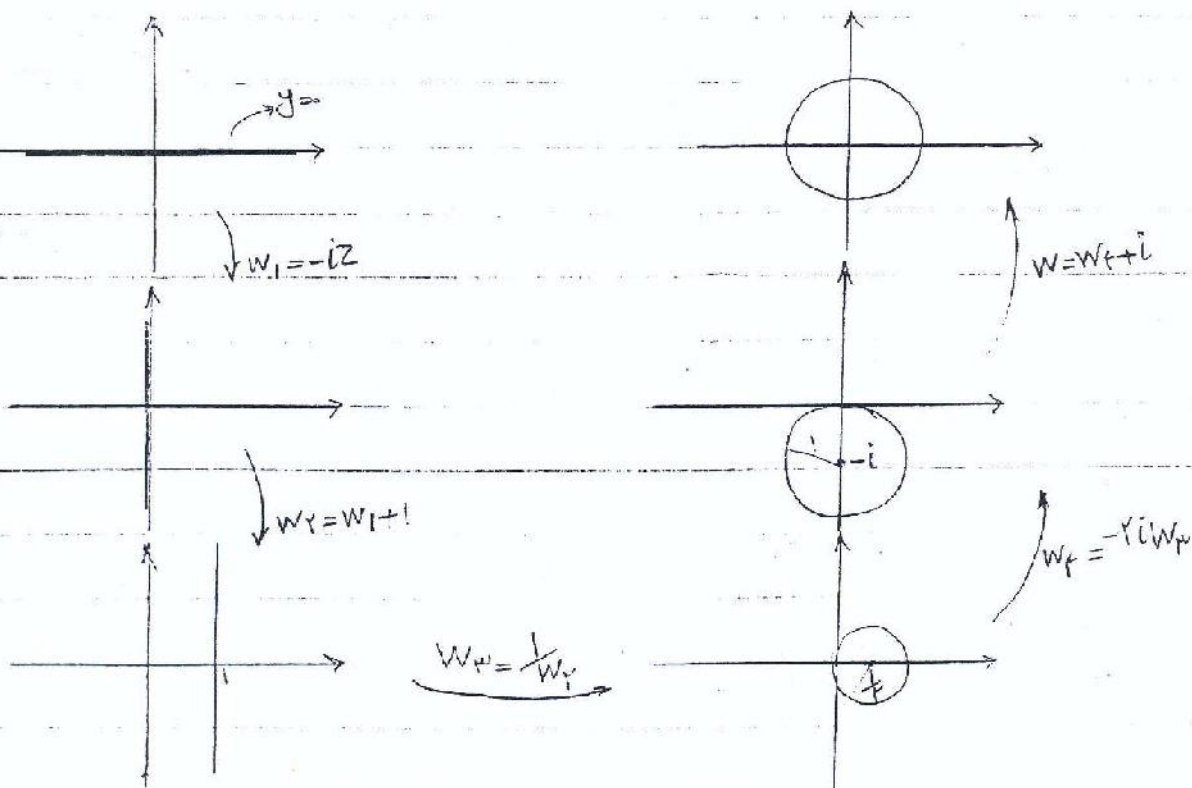
۱- این تبدیل را با تبدیلهای ساده نمایش دهید. ۲- با استفاده از تبدیلهای ساده بالا تصویر

خط $y=0$ را پیدا کنید. ۳- تصویر خط $y=0$ را به طور مستقیم پیدا کنید.

$\rightarrow c = -i, d = i, \therefore K = \frac{bc-ad}{c} = -2i, \frac{a}{c} = i$

$w_1 = -iz, w_2 = w_1 + i$ تبدیلهای ساده:

$w_3 = \frac{1}{w_2}, w_4 = -2i \cdot w_3, w = w_4 + i$



$$W = \frac{z-i}{-iz+1}, \quad z = x+iy, \quad y=0 \text{ تصویر خط}$$

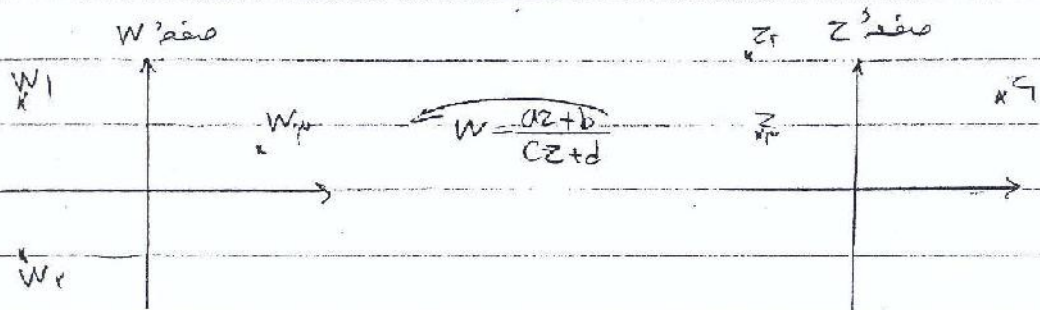
$$\rightarrow W = \frac{x-i}{-ix+1} = \frac{x-i}{-ix+1} \cdot \frac{ix+1}{ix+1} = \frac{x+x}{1+x^2} + i \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u = \frac{2x}{1+x^2} \\ v = \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{cases} \rightarrow u^2 + v^2 = 1$$

تغییر آه ماه نقطه مفروضه z_1, z_2, z_3 با یک نقطه که تبدیل کسری بیرونی سه نقطه

مفروضه W_1, W_2, W_3 با رابطه زیر تصریح شود.

$$F(W) = \frac{W-W_1}{W-W_3} \cdot \frac{W_2-W_3}{W_2-W_1} = G(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$



اثبات: $G(z)$ یک تبدیل کسری است. $F(W)$ نیز یک تبدیل کسری است.

$$W = F^{-1}[G(z)]$$

عکس تبدیل کسری یک تبدیل کسری است. $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$

تبدیل کسری که تبدیل کسری نیز یک تبدیل کسری است.

$$W = F^{-1}[G(z)] = f(z) \quad \text{در این تبدیل کسری:}$$

$$F(w_1) = G(z_1) \quad , \quad F(w_2) = G(z_2) \quad , \quad F(w_3) = G(z_3)$$

تابه اینجا ثابت شد که یک تبدیل کسری وجود دارد که نقطه z_1 را بر روی w_1 ، z_2 را بر روی w_2 ،

نقطه z_3 را بر روی w_3 تصویر کند.

ابتدا فرض می کنیم دو تبدیل کسری $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ وجود دارد که نقاط z_1 ، z_2 و z_3 را به ترتیب بر

$$g^{-1}(z_1) = z \xrightarrow{f} F(z) = g(z) \quad \text{روی } w_1, w_2, w_3 \text{ تصویر می کند.}$$

مثال: یک تبدیل کسری پیدا کنید تا نقاط $z_1=0, z_2=1, z_3=i$ را به ترتیب به نقاط $w_1=2, w_2=3, w_3=i+2$ تصویر

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_2 &= 1 \\ z_3 &= i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= 2 \\ w_2 &= 3 \\ w_3 &= i+2 \end{aligned}$$

کند (بگذارید):

$$\rightarrow \frac{w-2}{w-(i+2)} \cdot \frac{3-(i+2)}{1} = \frac{z}{z-i} \cdot \frac{1-i}{1}$$

$$\rightarrow \frac{w-2}{w-(i+2)} = \frac{z}{z-i} \rightarrow \frac{w-2}{(w-2-i)z - (w-2)} = \frac{z}{(z-i)z}$$

$$\rightarrow \frac{w-2}{-i} = \frac{z}{-i} \rightarrow \boxed{w = z+2}$$

مثال ۱: $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$

$w_1 = 0$, $w_2 = -1$, $w_3 = \infty$

$$\rightarrow \frac{w}{w-\infty} \cdot \frac{-1-\infty}{-1} = \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{-1}{1}$$

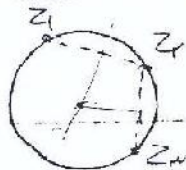
نکته: اگر یکی از نقاط ∞ باشد عبارات شامل آن نقطه از صورت و مخرج ساده می شوند.

$$\frac{W-W_1}{W_2-W_1} = \frac{Z-Z_1}{Z-Z_2} \cdot \frac{Z_2-Z_3}{Z_2-Z_1}$$

در مثال بالا:

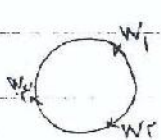
$$\rightarrow \frac{W}{-1} = \frac{2+1}{2-1} \times -1 \rightarrow W = \frac{Z+1}{Z-1}$$

نکته: از سه نقطه یا یک خط عبوری کند و یا یک دایره



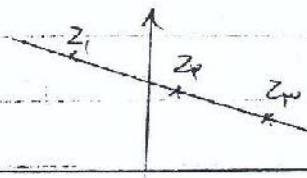
نتیجه (از این نکته و دو قضیه قبلی):

هر خط یا دایره شود نظر در صفحه Z قابل تصویر شدن بر هر خط و یا دایره در صفحه W می باشد.



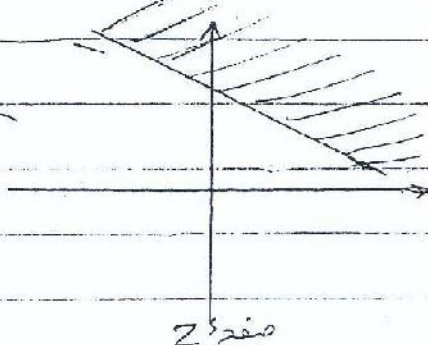
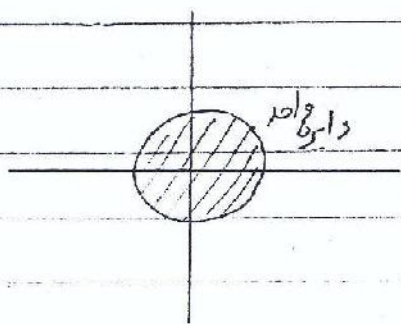
$$W = \frac{aZ+b}{cZ+d}$$

در نهایت انتخاب داریم



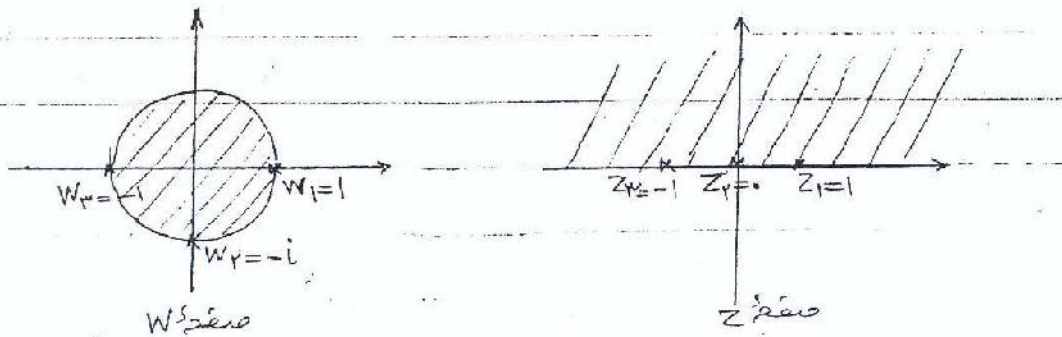
کاربرد: گاهی نیاز داریم معادله لایبلاسی را حل کنیم که شرایط مرزی آن به طور دلخواه نیست.

در این صورت می توانیم با استفاده از نتایج بالا و قضیه حاسبه قبل مسئله را ساده تر کنیم.



مثال ۱: تابع $w = f(z)$ را طوری تعریف کنید که نیم صفحه بالادری صفحه z را بر روی دایره ای در صفحه w .

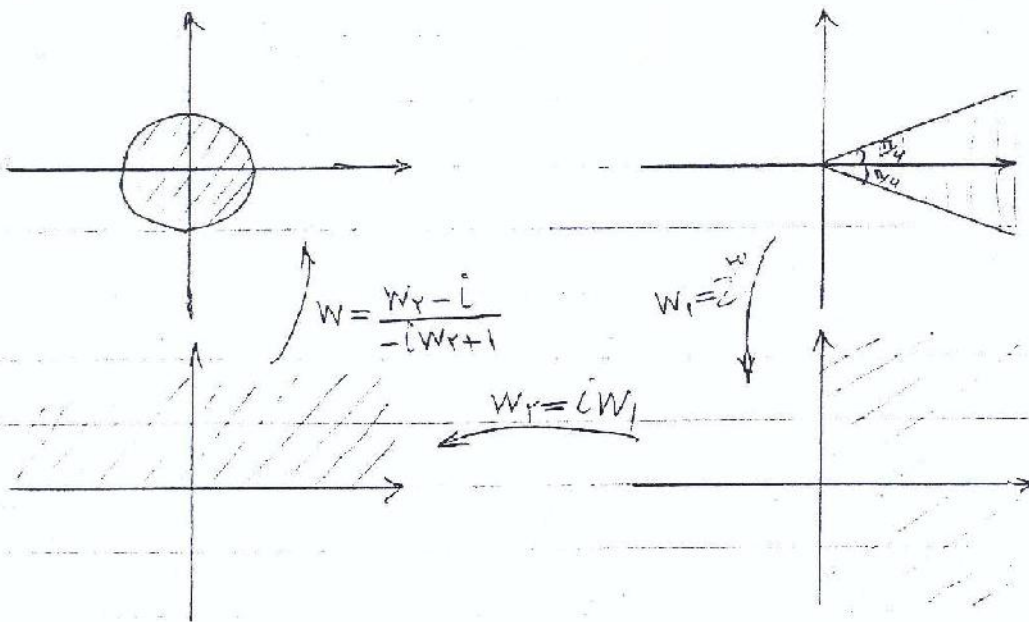
w تصویر کند.



$$w = \frac{z-i}{-iz+1}$$

مثال ۲: تابع $w = f(z)$ را طوری تعریف کنید که ناحیه شکل زیر در صفحه z را بر روی دایره ای در صفحه w تصویر کند.

صفحه w تصویر کند.



$$\rightarrow w = \frac{iz^2 - i}{z^2 + 1} = i \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

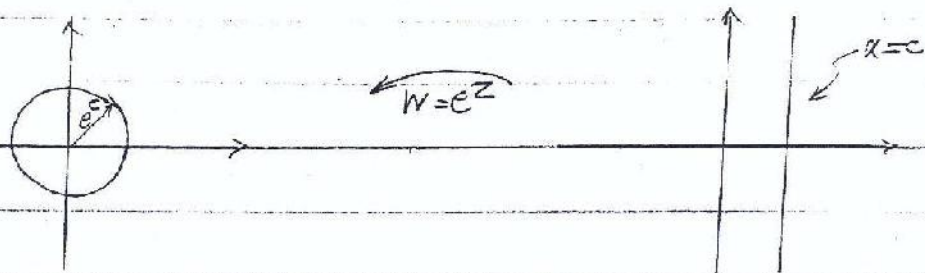
تکاشت $W=e^z$

$$W=e^z=e^{x+iy}=e^x \cdot e^{iy}$$

$$W=r'e^{i\theta'}$$

$$\left. \begin{array}{l} W=e^x \cdot e^{iy} \\ W=r'e^{i\theta'} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} r'=e^x \\ \theta'=y \end{cases}$$

$$W=U(x,y)+iV(x,y)=\frac{e^x \cos y}{u} + i \frac{e^x \sin y}{v}$$

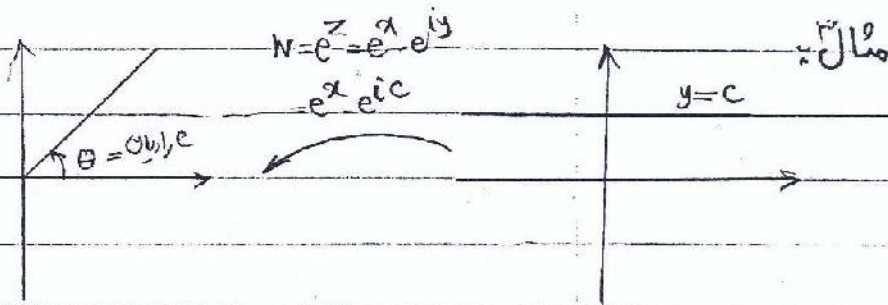
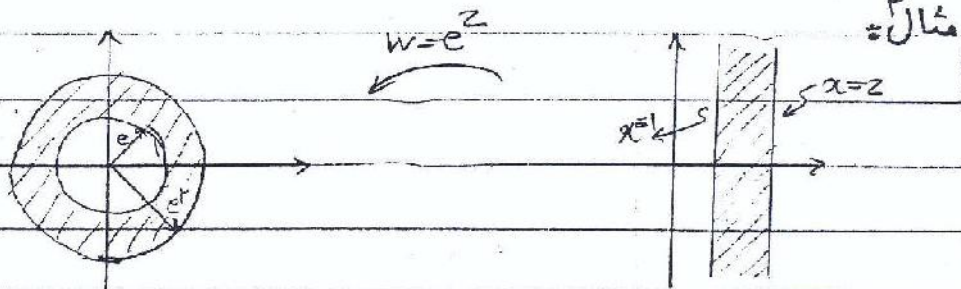


$$\begin{cases} u=e^x \cos y \\ v=e^x \sin y \\ x=c \end{cases}$$

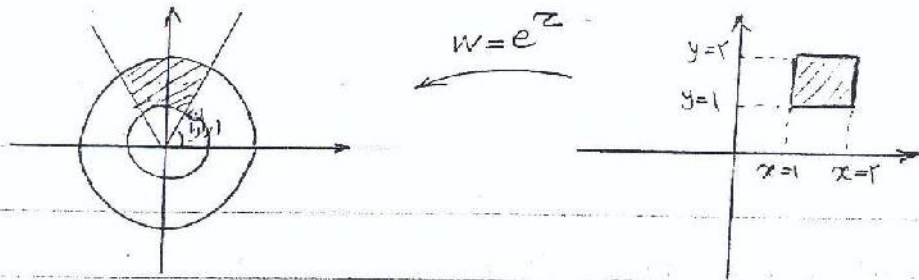
$$\rightarrow \begin{cases} u=e^c \cos y \\ v=e^c \sin y \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin y = \frac{v}{e^c} \\ \cos y = \frac{u}{e^c} \end{cases}$$

$$\rightarrow u^2 + v^2 = (e^c)^2$$



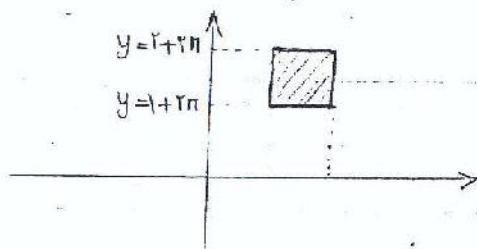
مثال ۴:



نکته: تابع e^z با دوره تناوب $2\pi i$ متناوب است.

$$W = f(z) = e^z$$

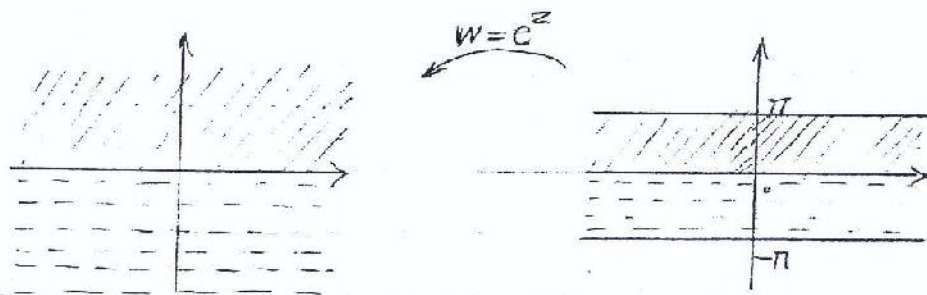
$$f(z + 2\pi i) = e^{z + 2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z [\cos 2\pi + i \sin 2\pi] = e^z = f(z)$$



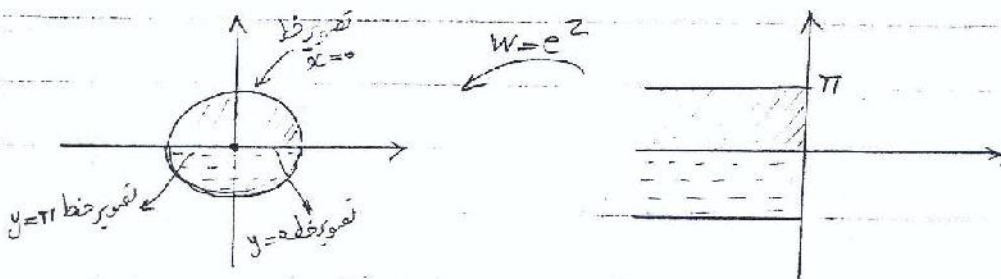
به عبارت دیگر در مثال قبل

تصویر همان تصویر قبلی است

مثال ۵:



مثال



اگر روند طو سده در مثالهای قبل را از صفحه w به صفحه z دنبال کنیم نگاشت $W = \ln z$ را خواهیم داشت.

$$W = \sin z$$

$$W = \cos z$$

$$W = \sinh z$$

$$W = \cosh z$$

نگاشت توابع مثلثاتی =

ابتداءً نگاشت $W = \sin z$ می پردازیم:

$$W = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

روش کلی محاسبه تصویر مثل تمام نگاشتهای قبلی به فرم زیر است:

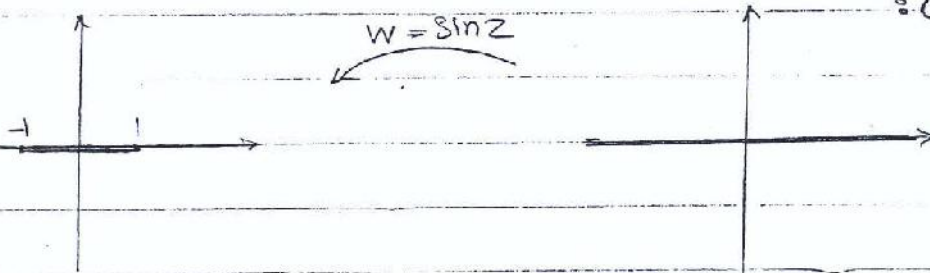
$$u = \sin x \cosh y$$

$$v = \cos x \sinh y$$

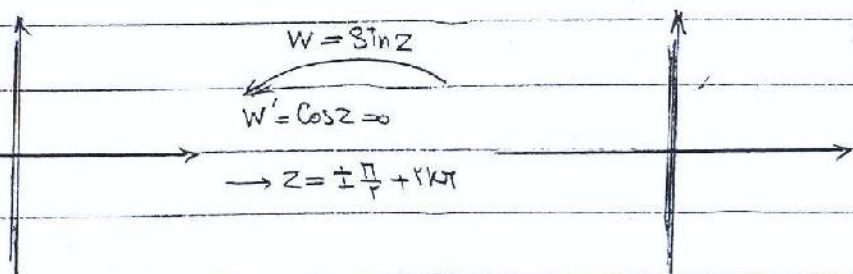
رابطه منحنی مورد نظر

x را حذف می کنیم

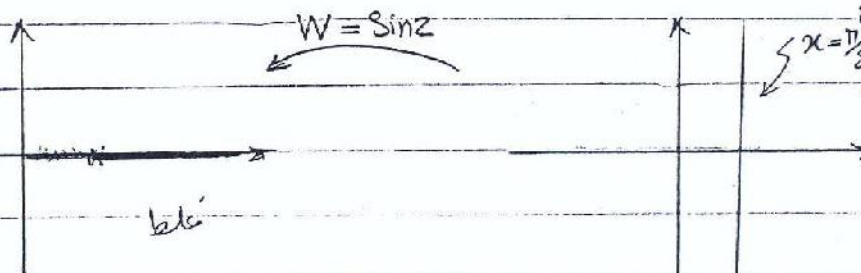
مثال ۱:

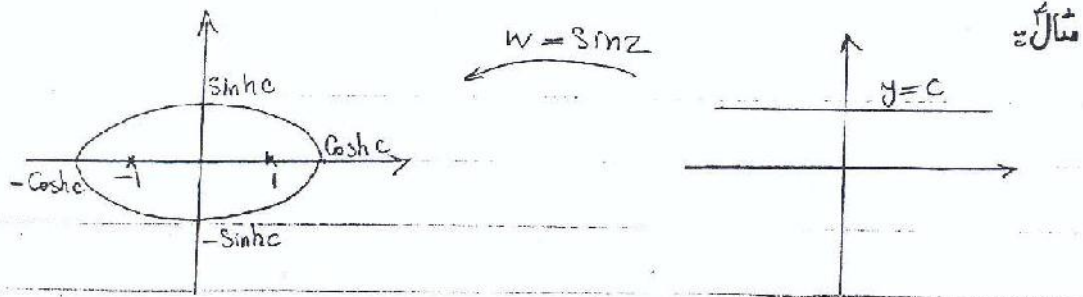


مثال ۲:



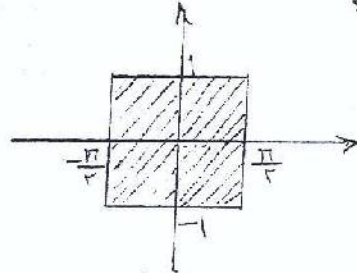
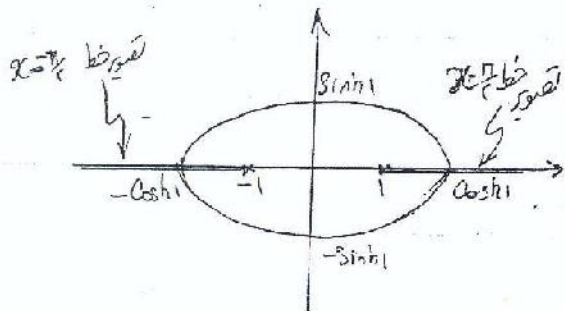
مثال ۳:



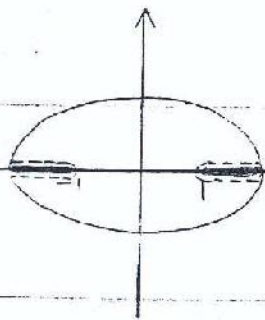


$$\begin{cases} u = \sin x \cosh c \\ v = \cos x \sinh c \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \\ y = c \end{cases}$$

$$\left(\frac{u}{\cosh c}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh c}\right)^2 = 1$$



اگر نامیه تعريف شده در صفحه Z شامل



نواحی زیر باشد تصویر در W به صورت مقابل

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$-1 < y < 1$$

است.

$$W = \cos Z = \sin\left(Z + \frac{\pi}{2}\right)$$

برای هماسیه نگاشت

$$W_1 = Z + \frac{\pi}{2}$$

۱- ابتدا ناحیه مورد نظر را به شکل $\frac{\pi}{2} + \text{استقال}$ می بردیم.

$$W = \sin(W_1) \quad ۲-$$

برای محاسبه نگاشت $W = \cosh z$

$$\cosh(z) = \cos(iz) = \sin(iz + \frac{\pi}{2})$$

۱- تصویر را به اندازه 90° می چرخانیم $(W_1 = iz)$

۲- تصویر در W_1 را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ انتقال می دهیم $(W_2 = W_1 + \frac{\pi}{2})$

$$W = \sin(W_2) \quad -3$$

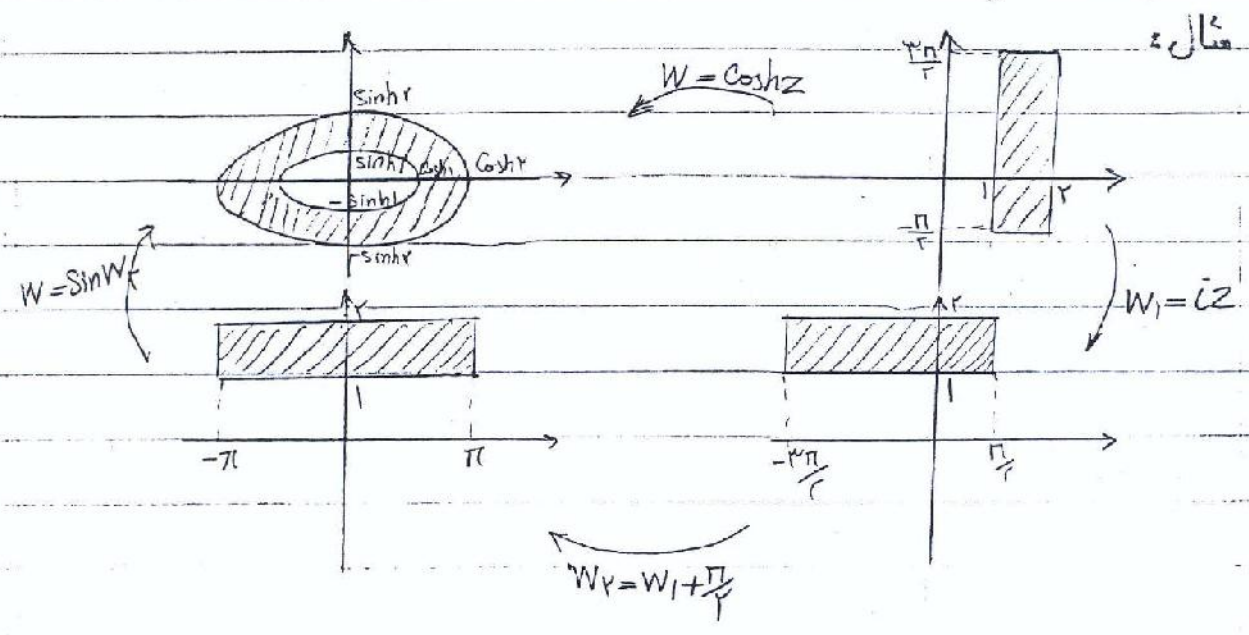
برای محاسبه نگاشت $W = \sinh z$

$$\sinh(z) = -i \sin(iz)$$

۱- تصویر را به اندازه 90° می چرخانیم $(W_1 = iz)$

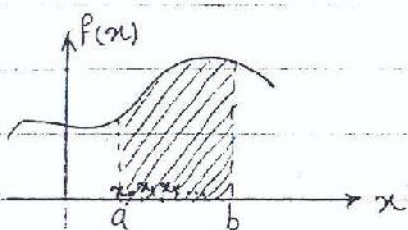
$$W_2 = \sin(W_1) \quad -2$$

۳- تصویر را به اندازه 90° می چرخانیم $W_3 = -i W_2$



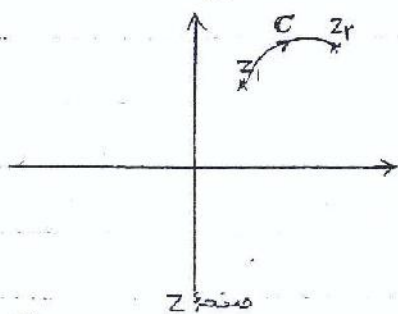
انگرال توابع مختلطه

یادآوری انگرال توابع حقیقی :



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x_i) \Delta x$$

در اعداد مختلط به جای محور x صفحه z را داریم : $w = f(z)$

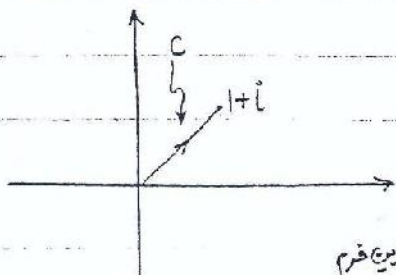


در حالت کلی انگرال تابع $f(z)$ از نقطه z_1 تا نقطه z_2 به مسیر انگرالگیری بستگی دارد. در نتیجه

انگرال توابع مختلط روی یک منحنی خاص (C) تعریف می شود. $\int_C f(z) dz$

قبل از ادامه به بحث این نکته را یادآوری کنیم که هر منحنی در صفحه z به صورت زیر قابل

نمایش است.



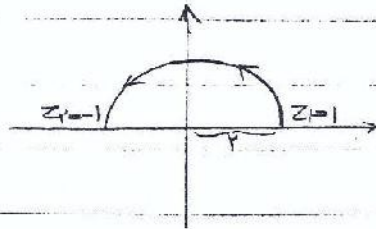
مثال:

سناده زیری فرم $z(t) = t + it$, $0 < t < 1$ یا $z(t) = \sin t + i \cos t$

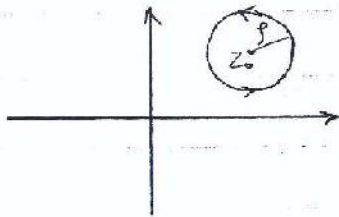
$z(t) = t^n + it^{n+1}$, $0 < t < 1$, $0 < t < \pi$

برای پاره خطی $y = ax + b$ فرم $z(t) = t + i[at + b]$ بهترین است.

$$z(t) = r \cos t + ri \sin t \\ = r e^{it}, \quad 0 < t < \pi$$



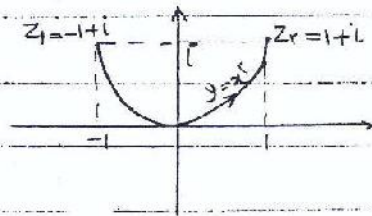
مثال ۲:



مثال ۳: دایره ای به شعاع r و مرکز z_0 :

$$z(t) = z_0 + r e^{it}, \quad 0 < t < 2\pi$$

$$z(t) = t + it^2 \\ , -1 < t < 1$$



مثال ۴:

مثال ۵: منحنی پاره خط واصل: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 4i$

نکته: اگر بخواهیم پاره خط واصل بین $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ را محاسبه کنیم

$$z(t) = x_1 + iy_1 + [(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)]t \\ , 0 < t < 1$$

که در مثال ۵: $z(t) = 1 + i + [1 - 5i]t = (1+t) + i(1-5t)$, $0 < t < 1$

$$\int_c f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt, \quad c = z(t) \quad a < t < b$$

مروری بر اثبات:

$$\int_c f(z) dz = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum f(z) \Delta z$$

$$W = f(z) = u + iv, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

$$\rightarrow \int_C f(z) dz = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum [u + iv][\Delta x + i\Delta y]$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum u \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum iv \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum iu \Delta y - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum v \Delta y$$

$$= \int u dx + i \int v dx + i \int u dy - \int v dy$$

$$= \int_a^b u \cdot \dot{x} dt + i \int_a^b v \dot{x} dt + i \int_a^b u \dot{y} dt - \int_a^b v \dot{y} dt$$

$$= \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y}) dt = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt$$

مثال: از تابع $f(z) = \operatorname{Re} z$ روی پاره خط واصل بین $z_1 = e$ و $z_2 = i$ انتگرال بگیرید.

$$z(t) = t + it, \quad \begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ \odot \\ \downarrow \\ b \end{array} \rightarrow \dot{z}(t) = 1 + i$$

$$f[z(t)] = \operatorname{Re}[z(t)] = t$$

$$\rightarrow \int_C f(z) dz = \int_0^1 t \cdot (1+i) dt = (1+i) \int_0^1 t dt = (1+i) \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1+i}{2}$$

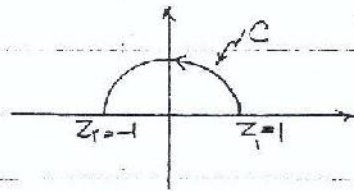
مثال: از تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ روی دایره واحد (در جهت عکس عقربه‌های ساعت) انتگرال بگیرید.

$$\rightarrow z(t) = e^{it}, \quad \begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ \odot \\ \downarrow \\ b \end{array} \rightarrow \dot{z}(t) = ie^{it}$$

$$f[z(t)] = \frac{1}{e^{it}} = e^{-it}$$

$$\rightarrow \int_c f(z) dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

$$f(z) = rz - \frac{r}{z}$$



مثال:

$$z(t) = e^{it}, \quad 0 < t < 2\pi \quad \rightarrow \dot{z}(t) = ie^{it}$$

$$f[z(t)] = re^{it} - \frac{r}{e^{it}} = re^{it} - re^{-it}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_c f(z) dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it} - re^{-it})(ie^{it}) dt = \int_0^{2\pi} r i e^{2it} dt - \int_0^{2\pi} r i dt \\ &= r i \int_0^{2\pi} e^{2it} dt - r i \int_0^{2\pi} dt = \frac{r i}{2} e^{2it} \Big|_0^{2\pi} - r i t \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{r}{2} [e^{4\pi i} - e^0] - 2\pi r i = -2\pi r i \end{aligned}$$

مثال: از تابع $f(z) = (z - z_0)^m$ روی دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع r و روی تمام دایره در جهت $m \in \mathbb{Z}$

$$\rightarrow z(t) = z_0 + r e^{it}$$

عکس حرکت عقربه‌های ساعت است. انتگرال بگیرد.

$$0 < t < 2\pi$$

$$\rightarrow \dot{z}(t) = i r e^{it}$$

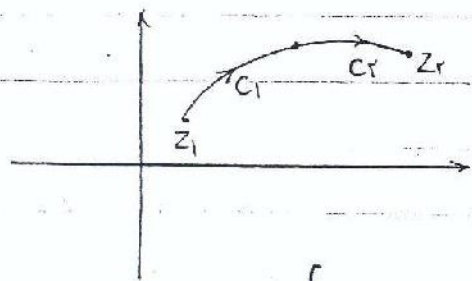
$$f[z(t)] = [z_0 + r e^{it} - z_0]^m = r^m e^{i m t}$$

$$\rightarrow \int_c f(z) dz = \int_0^{2\pi} r^m e^{i m t} \cdot i r e^{it} dt = i r^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt$$

$$= i r^{m+1} \times \begin{cases} \frac{1}{i(m+1)} e^{i(m+1)t} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{i(m+1)} [e^{i(m+1)2\pi} - e^0] = 0 & m \neq -1 \\ 2\pi & m = -1 \end{cases} = 2\pi i \quad m = -1$$

$$\rightarrow \int_C (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & m \neq -1 \end{cases}$$

خواص انتگرال مختلط :



۱- اگر منحنی C به دو منحنی (یا چند منحنی)

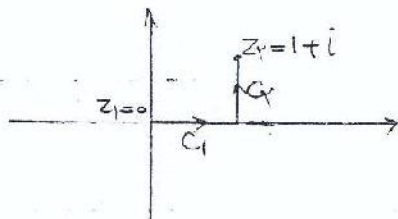
C_1 و C_2 تقسیم شود در آن صورت :

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

سؤال : از تابع $f(z) = \text{Re}[z]$ روی منحنی زیر انتگرال بگیرید.

$C_1: z_1(t) = t \quad , \quad 0 < t < 1$

$C_2: z_2(t) = 1 + it \quad , \quad 0 < t < 1$



$\dot{z}_1(t) = 1 \quad , \quad \dot{z}_2(t) = i$

$f[z_1(t)] = t \quad , \quad f[z_2(t)] = 1$

$$\rightarrow \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = \int_0^1 t \cdot 1 dt + \int_0^1 1 \cdot i dt = \frac{1}{2} + i$$

نکته : اگر نتیجه این سؤال را با نتیجه سؤال ۱ مقایسه کنیم به این نتیجه می‌رسیم که در حالت کلی

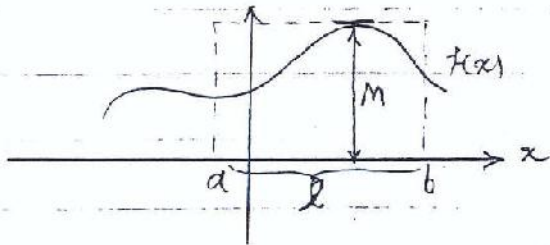
انتگرال از z_1 تا z_2 به مسیر انتگرالگیری بستگی دارد.

۲- اگر مسیر انتگرالگیری برعکس شود مقدار انتگرال منفی مقدار اولیه خواهد بود.

۳- اگر $f(z) = K_1 f_1(z) + K_2 f_2(z)$ آن گاه : $\int_C f(z) dz = K_1 \int_C f_1(z) dz + K_2 \int_C f_2(z) dz$

$$-۴ \quad \left| \int_c f(z) dz \right| \leq M \cdot l \quad \text{که در آن:}$$

M = حداکثر مقدار $|f(z)|$ ، l = طول مسدود است.

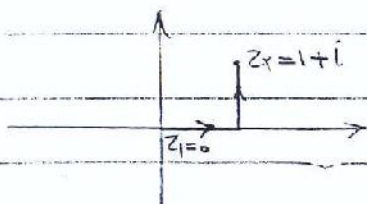


یادآوری این رابطه برای انتگرالهای حقیقی:

$$\text{اثبات:} \quad \left| \int_c f(z) dz \right| = \left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum f(z) \Delta z \right| \leq \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum |f(z)| |\Delta z|$$

$$\leq \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum M \cdot |\Delta z| = M \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum |\Delta z| = M \cdot l$$

مثال = یک حد بالا برای $\left| \int_c f(z) dz \right|$ وقتی $f(z) = \operatorname{Re} z$ ، C منحنی زیر است بدست آورید.



$$l = 2$$

$$M = 1$$

(بدون محاسبه انتگرال)

$$\rightarrow \left| \int_c f(z) dz \right| \leq 2$$