انتگرال توابع مختلط روی منحنی c (ادامهٔ بحث) :

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)]\,\dot{z}(t)\,dt$$

$$C: z(t) \quad , \quad a<t<b$$

قضیهٔ انتگرال کوشی: اگر D یک حوزهٔ همبند ساده و کراندار باشد که تابع $f(z)$ در آن حوزه تحلیلی است و c یک منحنی بسته درون D باشد : $\int_c f(z)\,dz=0$

مثال ۱: در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت $C: |z|=1$ ، $\int_c e^z\,dz$

با توجه به اینکه تابع e^z در تمام صفحهٔ z از جمله نقاط درون منحنی c تحلیلی است پس طبق قضیهٔ انتگرال کوشی

$$\int_c e^z\,dz=0$$

مثالهای دیگر (در مثالهای زیر فرض کنید که $C: |z|=1$)

$$\int_c \cos z\,dz = 0 \quad , \quad \int_c (z^3+z^2)\,dz = 0$$

$$\int_c \left[e^{2z}\cos z + 5z^3\right] dz = 0$$

نکته: شرط تحلیلی بودن در نقاط درون منحنی c برای استفاده از قضیه انتگرال کوشی یک شرط کافی است.

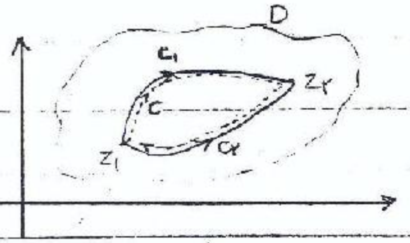
مثال: در جهت عکس عقربه‌های ساعت $C: |z|=1$ ، $\int_c \frac{1}{z^2}\,dz = 0$

تابع $f(z)=\frac{1}{z^2}$ در نقطهٔ $z=0$ تحلیلی نیست.

$$\int_C (z-z_0)^m \, dz = 0 \quad , \quad m \neq -1$$

دو نتیجه از قضیه انتگرال کوشی:

۱ـ اگر تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد و بخواهیم از z_1 تا z_2 (درون حوزه D) انتگرال گیری کنیم



مقدار این انتگرال بستگی به مسیر ندارد.

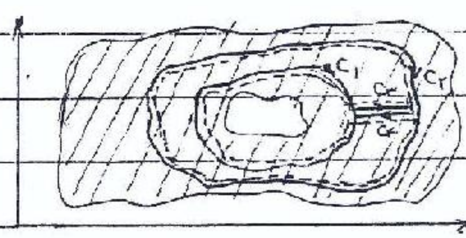
$$\int_C f(z)\,dz = 0 \longrightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\longrightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

اصل تغییر شکل مسیر
اصل استقلال از مسیر

۲ـ اگر تابع $f(z)$ در حوزه همبند D (ساده یا چندگانه) تحلیلی باشد و C_1 و C_2 دو منحنی بسته درون D (داخل همدیگر) باشند به طوری که $f(z)$ در تمام نقاط بین دو منحنی تحلیلی باشد در آن صورت

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$



$$\int_C f(z)\,dz = 0 \longrightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz + \cancel{\int_{C_3} f(z)\,dz} - \int_{C_2} f(z)\,dz + \cancel{\int_{C_4} f(z)\,dz} = 0$$

$$\longrightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

چند مثال دیگر: $(C: |z|=1)$

$$\int_C \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i \quad , \quad \int_C \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi i$$

$$\int_C e^z \cos z\,dz = 0 \quad , \quad \int_C \frac{\sin z}{2z}\,dz = 0$$

جمع بندی :

توابع چند دسته هستند:

۱ در تمام نقاط تحلیلی هستند: e^z, $\cos z$, ...

۲ در تمام نقاط تحلیلی نیستند: $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, ...

۳ در بعضی نقاط تحلیلی نیستند: (نقاط تکین) $\frac{1}{z^2+z}$, $\frac{1}{\cos z}$, ...

اگر تابع از نوع اول باشد و بخواهیم از z_1 تا z_2 انتگرال بگیریم، انتگرال مثل انتگرال حقیقی برخورد می‌کنیم:

$$\int_0^i \cos 2z\,dz = \frac{1}{2}\sin 2z \Big|_0^i = \frac{1}{2}\left[\sin 2i\right]$$

اگر تابع از نوع اول باشد و بخواهیم روی یک مسیر بسته انتگرال بگیریم، طبق قضیهٔ **انتگرال کوشی**:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

اگر تابع از نوع دوم باشد راهی جز استفاده از فرمول اصلی نداریم:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)]\,\dot{z}(t)\,dt$$

اگر تابع از نوع سوم باشد و بخواهیم روی یک مسیر بسته انتگرال بگیریم،

حالاتی که تا بحال بررسی کردیم:

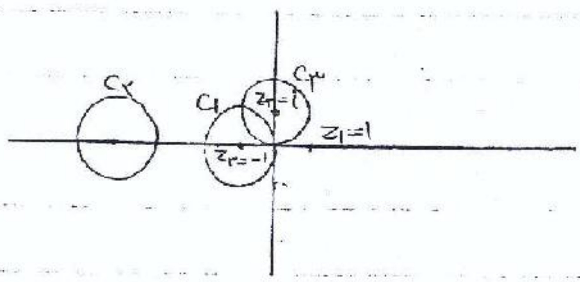
مثال: $\int_C \frac{2z-1}{z^2+z}\,dz = ?$, $C: |z| = \frac{1}{2}$

$$\longrightarrow \int_C \frac{2z-1}{z^2+z}\,dz = \int_C \frac{\frac{2z-1}{z+1}}{z}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{2z-1}{z+1}\Big|_{z=0} = -2\pi i$$

$f(z) = \frac{1}{z^4-1}$, الف: $C_1: |z+1| = 1$

ب: $C_2: |z+3| = 1$ ج: $|z-i| = 1$

نقاط تکین (نقاطی که تابع $f(z)$ در آن تحلیلی نیست) را ابتدا محاسبه می‌کنیم:



حل الف: $\int_{C_1} \frac{1}{z^4-1}\,dz$

راه اول: (راه تجزیه کسر و نتیجه کلی برای $\frac{1}{z-z_0}$)

$$\frac{1}{z^4-1} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z+1} + \frac{A_3}{z+i} + \frac{A_4}{z-i}$$

راه دوم: (استفاده از قضیه قبلی)

$$\int_{C_1} \frac{1}{z^4-1}\,dz = \int_{C_1} \frac{\overbrace{\frac{1}{(z-1)(z+i)(z-i)}}^{f(z)}}{\underbrace{z+1}_{z-z_0}}\,dz = 2\pi i \frac{1}{(-1-1)(-1-i)(-1+i)} = \frac{-\pi i}{2}$$

حل ب: $\int_{C_2} \frac{1}{z^4-1}\,dz = 0$

حل ج: $\int_{C_3} \frac{1}{z^4-1}\,dz = \int \frac{\frac{1}{(z-1)(z+i)(z+1)}}{z-i}\,dz = 2\pi i \frac{1}{(i-1)(i+1)(i+i)} = \frac{-\pi}{2}$

b

۱ـ نقاط تکین را دور نمی‌زند که : $\int_c f(z)dz = 0$

۲ـ یکی از نقاط تکین از مرتبهٔ ۱ را دور می‌زند: $\int_c \frac{g(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, g(z_0)$

ـ حالتی که تا بحال بررسی نکرده‌ایم :

۱ـ چند نقطهٔ تکین را دور بزند. ۲ـ نقطهٔ تکین از مراتب بالاتر داشته باشیم.

قضیهٔ مانده‌ها : (Residuals)

اگر c یک منحنی بسته باشد که تابع $f(z)$ در تمام نقاط درون این مسیر به جز نقاط $z_1, z_2, \ldots, z_n$ تحلیلی باشد در آن صورت : $\int_c f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_i)$

الف : اگر z_0 تکراری نباشد : $\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

ب : اگر z_0 تکراری باشد (از مرتبهٔ m) : $\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)$

مثال : $\int_c \frac{15z+9}{z^3-9z}dz \quad , \quad c: |z-2|=4$

$$z^3-9z=0 \longrightarrow z(z-3)(z+3)=0$$

$$\longrightarrow \int_c \frac{15z+9}{z^3-9z}dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=3} f(z)\right]$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{15z+9}{z^2-9} = -1$$

$$\operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \lim_{z \to 3} \frac{15z+9}{z(z+3)} = \frac{54}{18} = 3$$

$$\longrightarrow \int_C \frac{15z+9}{z^3-9z}\,dz = 2\pi i\,(-1+3) = 4\pi i$$

بحث روی انتگرال یک تابع کسری روی یک منحنی بسته بود.

دیدیم که :
$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$$

۱- z_i نقاط تکین درون مسیر بسته است.

۲- این انتگرال در جهت عکس عقربه‌های ساعت تعریف شده است

اگر از مرتبهٔ اول باشد:
$$\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z) = \lim_{z\to z_i} (z-z_i) f(z)$$

اگر از مرتبهٔ m باشد:
$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_i)^m f(z)$$

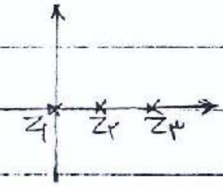
چند مثال:

مثال ۱: از تابع $\frac{z+1}{z(z-1)(z-2)}$ روی $c: |z-2| = \frac{1}{2}$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرید.

$z_1 = 0$

$z_2 = 1$

$z_3 = 2$



$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{3}{2}$$

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(\frac{3}{2}\right) = 3\pi i$$

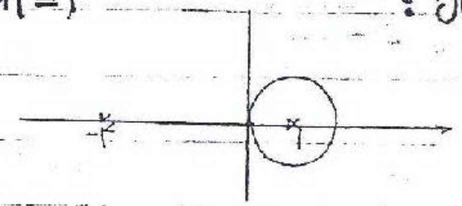
نکته: ~~تعداد~~ مقدار باقیمانده (وقتی که ریشه از مرتبهٔ ۱ باشد) از رابطهٔ زیر نیز قابل محاسبه است:

e

$$f(z)=\frac{q(z)}{p(z)} \quad , \quad \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)=\frac{q(z)}{p'(z)}\Bigg|_{z=z_i}$$

$$\rightarrow f(z)=\frac{z+1}{z^3-3z^2+2z} \quad , \quad \operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=\frac{z+1}{3z^2-6z+2}\Bigg|_{z=2}=\frac{3}{2}$$

مثال ۲: $f(z)=\dfrac{2z}{(z+4)(z-1)^2} \quad , \quad C: |z-1|=1$

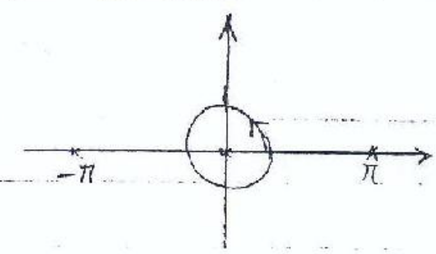


$$\longrightarrow \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{z+4}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{2(z+4)-(2z)}{(z+4)^2}=\frac{8}{25}$$

$$\longrightarrow \int_C f(z)\,dz=2\pi i\,\frac{8}{25}=\frac{16\pi i}{25}$$

مثال ۳: $\displaystyle\int_C \operatorname{cotg} z\,dz=? \qquad C: |z|=1$

$$\rightarrow \int_C \frac{\cos z}{\sin z}\,dz \longrightarrow \sin z=0 \longrightarrow z=\pm k\pi$$



$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{\cos z}{\cos z}\Bigg|_{z=0}=1$$

مثال ۴: $\displaystyle\int_C \frac{\sin \pi z}{z^4}\,dz=? \qquad C: |z|=1$

$$\operatorname{Res} f(z)=2\pi i\,\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}(\sin \pi z)=\frac{2\pi i}{6}\lim_{z\to 0}(-\pi^3\cos \pi z)=\frac{\pi i}{3}(-\pi^3)$$

$$=\frac{-i\pi^4}{3}$$

مثال ۵: $\displaystyle\int_C \frac{dz}{1-e^z}=? \qquad C: |z|=1$

$$1-e^z=0 \longrightarrow e^z=1 \longrightarrow z=\pm 2k\pi i$$

$$\int_C \frac{1}{1-e^z}dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{-e^z}\Big|_{z=0} = -2\pi i$$

مثال:

$$\int_C \frac{15z+9}{z^3-9z}dz = ? \qquad C: |z-3|=4$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{15z+9}{3z^2-9}\Big|_{z=0} = -1 \quad , \quad \operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \frac{15z+9}{3z^2-9}\Big|_{z=3} = 3$$

$$\longrightarrow \int \frac{15z+9}{z^3-9z}dz = 2\pi i[3-1] = 4\pi i$$

محاسبهٔ برخی انتگرالهای حقیقی با استفاده از انتگرالهای مختلط:

$$\int_0^{2\pi} R[\cos\theta, \sin\theta]\, d\theta$$ (انتگرال توابعی به فرم مقابل):

مثال:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\sin\theta+\sin 2\theta}d\theta \quad , \quad \int_0^{2\pi} \frac{5}{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}d\theta$$

نحوهٔ تبدیل این انتگرال حقیقی به یک انتگرال مختلط:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left[e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right] \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left[e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right]$$

با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ خواهیم داشت:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left[z+\frac{1}{z}\right]$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left[z-\frac{1}{z}\right]$$

$$R[\cos\theta, \sin\theta] = f(z)$$

$$z=e^{i\theta} \longrightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} R\left[\cos\theta,\sin\theta\right]d\theta = \int_c f(z)\,\frac{dz}{iz}$$

مثال:
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{25-24\cos\theta}\,d\theta = \int_c \frac{1}{25-12(z+\frac{1}{z})}\cdot\frac{dz}{iz} \quad , \quad c: |z|=1$$

$$= \frac{1}{i}\int_c \frac{1}{-12z^2+25z-12}\,dz = \frac{1}{-12i}\int_c \frac{1}{z^2-\frac{25}{12}z+1}\,dz$$

$$= \frac{i}{12}\int \frac{1}{(z-\frac{4}{3})(z-\frac{3}{4})}\,dz = \frac{i}{12}\,2\pi i\cdot\frac{1}{z-\frac{4}{3}}\Big|_{z=\frac{3}{4}} = \frac{+2\pi}{7}$$

نکته مهم: نتیجه این محاسبات حتماً یک مقدار حقیقی است.

مثال ۲:
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}\,d\theta \qquad 0<p<1$$

$$= \int_c \frac{1}{1-p(z+\frac{1}{z})+p^2}\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_c \frac{1}{z-pz^2+p^2z-p}\,dz$$

$$= \frac{1}{i}\int_c \frac{1}{-pz^2+(1+p^2)z-p}\,dz = \frac{1}{i}\int_c \frac{1}{(1-pz)(z-p)}\,dz$$

ریشه‌های مخرج $\begin{cases} z_1 = p \\ z_2 = \frac{1}{p}\end{cases}$

$$= \frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{1-pz}\Big|_{z=p} = \frac{2\pi}{1-p^2}$$

مثال ۳:
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{\frac{5}{4}-\sin\theta}\,d\theta = \int_c \frac{1}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2i}\left[z-\frac{1}{z}\right]}\,\frac{dz}{iz}$$

$$= \int_c \frac{1}{\frac{5i}{4}z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}}\,dz = \int_c \frac{1}{(i-\frac{1}{2}z)(z-\frac{i}{2})}\,dz \qquad \begin{cases} z_1 = \frac{i}{2} \\ z_2 = 2i\end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{\frac{5}{4}-\sin\theta}\,d\theta = 2\pi i\cdot\frac{1}{i-\frac{1}{2}z}\Big|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{8\pi}{3}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) = \frac{1}{4z^3+20z}\Big|_{z=3i} = \frac{-1}{48i}$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = 2\pi i\left[\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i}\right] = \frac{\pi}{12}$$

نکته: در مثال ۱ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

مثال ۳: $\displaystyle A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2}\cos\omega x\,dx \quad , \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2}\sin\omega x\,dx$

برای محاسبه انتگرالهای بالا انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم: $\displaystyle C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2} e^{i\omega x}\,dx$

$$\longrightarrow A = \operatorname{Re}[C] \quad , \quad B = \operatorname{Im}[C]$$

نقاط تکین $f(z)$: $\displaystyle f(z) = \frac{1}{k^2+z^2} \longrightarrow k^2+z^2=0 \longrightarrow z = \pm ik$

لذا فقط مانده را به ازای $z=ik$ محاسبه می‌کنیم:

$$\operatorname*{Res}_{z=ik} g(z) = \operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{e^{i\omega z}}{(z+ik)(z-ik)} = \lim_{z\to ik} \frac{e^{i\omega z}}{z+ik} = \frac{e^{i\omega\cdot ik}}{2ik} = \frac{e^{-\omega k}}{2ik}$$

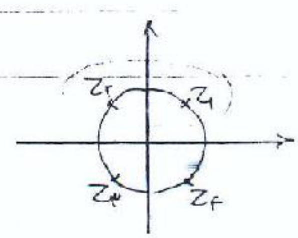
$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{k^2+x^2}\,dx = 2\pi i \frac{e^{-\omega k}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-\omega k}$$

$$\longrightarrow A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega x}{k^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{k} e^{-\omega k} \quad , \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega x}{k^2+x^2}\,dx = 0$$

مثال ۴: $\displaystyle A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{1+x^4}\,dx = ?$

$$A = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{1+x^4}\,dx\right]$$

$$g(z) = \frac{e^{i3z}}{z^4+1}$$



مثال ۱: چون $f(x)$ دارای شرایط لازم است $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$

پس: z_i نقاط تکین نیم صفحهٔ بالا , $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx = 2\pi i \sum_{z=z_i} \operatorname{Res} f(z)$

$$f(z)=\frac{1}{z^4+1} \longrightarrow z^4+1=0 \longrightarrow z^4=-1=e^{i(\pi+2k\pi)}$$

$$\longrightarrow z_k=e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, \quad k=0,1,2,3 \longrightarrow \begin{array}{ll} k=0, & z_1=e^{i\frac{\pi}{4}} \\ k=1, & z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ k=2, & z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ k=3, & z_4=e^{i\frac{7\pi}{4}} \end{array}$$

پس نقاط مانده فقط به ازای z_1 و z_2 محاسبه می‌شوند

$$\longrightarrow \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\operatorname{Res}_{z=e^{i3\pi/4}} \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx = \frac{2\pi i}{4}\left[e^{-i\frac{3\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right] = \frac{2\pi i}{4}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{4}\cdot\sqrt{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۲: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

$$\longrightarrow f(z)=\frac{1}{z^4+10z^2+9} \longrightarrow z^2+1=0 \begin{cases} z_1=i \checkmark \\ z_2=-i \end{cases}$$

$$z^2+9=0 \begin{cases} z_3=3i \checkmark \\ z_4=-3i \end{cases}$$

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{4z^3+20z}\Big|_{z=i} = \frac{1}{16i}$$

$$\longrightarrow \left|\int_{C_r} f(z)dz\right| \leqslant \pi r \cdot \frac{K}{r^2} = \frac{K\pi}{r} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \quad \longrightarrow \int_{C_r} f(z)dz = 0$$

محاسبهٔ بعضی انتگرالهای حقیقی با استفاده از تئوریهای محاسبهٔ انتگرالهای مختلط:

$$\int_0^{2\pi} R\left[\cos\theta, \sin\theta\right]d\theta = \int_C \frac{f(z)}{iz}dz \quad , \quad C: |z|=1 \qquad -1$$

۲- اگر $f(x)$ دارای شرایط زیر باشد:

الف:
$$f(x) = \frac{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}$$

ب: n حداقل دوتا از m بیشتر باشد.

ج: مخرج هیچ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد.

در اینصورت
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z=z_i} \operatorname{Res} f(z)$$

که z_i نقاط تکین نیم صفحهٔ بالا هستند.

۳- اگر $f(x)$ دارای شرایط گفته شده در بند ۲ باشد در آن صورت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i \sum_{z=z_i} \operatorname{Res} g(z)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 2\pi i \sum_{z=z_i} \operatorname{Res} h(z)$$

که z_i نقاط تکین نیم صفحهٔ بالا هستند.

محاسبهٔ انتگرال ناسرهٔ توابع گویا :

$$f(x)=\frac{x^4+3x^2+2x+1}{x^4+1} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

شرط لازم برای اینکه از انتگرال مختلط استفاده کنیم

۱- مخرج $f(x)$ هیچ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد.

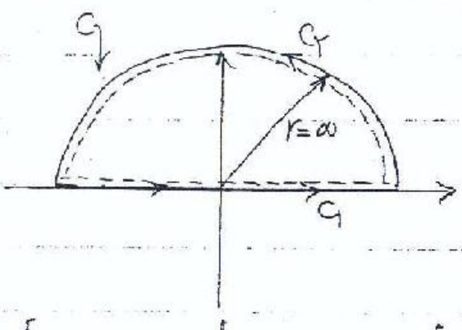
۲- درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت حداقل دوتا بیشتر باشد.

قضیه این شرایط :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{z=z_i} \operatorname{Res} f(z)$$

z_i نقاط تکین نیم صفحهٔ بالا هستند.

اثبات قضیه :



$$\int_C f(z)\,dz$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \leqslant m \cdot l$$

طول مسیر انتگرال گیری

حداکثر مقدار $|f(z)|$

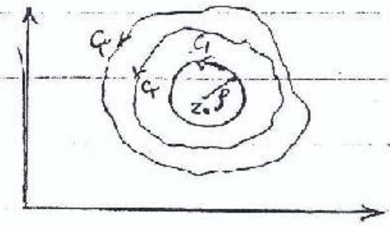
$$l=\pi r \quad , \quad m=\frac{K}{r^2}$$ (اگر مخرج فقط دو درجه بیشتر باشد)

d

یادآوری یک مثال :

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

$C: \ |z-z_0| < \rho$ ، در جهت عکس عقربه های ساعت



$$\int_{C_1} \frac{1}{z-z_0} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z-z_0} dz = \int_{C_3} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$$

نتیجهٔ کلی : تابع کسری $\frac{1}{z-z_0}$ را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از این تابع روی یک منحنی بسته که نقطهٔ z_0 را دور نمی زند انتگرال بگیریم مقدار انتگرال طبق قضیهٔ انتگرال کوشی برابر صفر است. ولی اگر بخواهیم از این تابع روی یک منحنی بسته که نقطهٔ z_0 را دور می زند انتگرال بگیریم (جهت عکس عقربه های ساعت) مقدار انتگرال برابر $2\pi i$ می باشد.

مثال : (در جهت عکس عقربه های ساعت)

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2+z} dz$$

الف : $C: |z| = \frac{1}{2}$ ب : $C: |z-1| = \frac{1}{2}$ ج : $C: |z| = 1$

$$\frac{2z-1}{z^2+z} = \frac{3}{z+1} - \frac{1}{z}$$

حل الف :

$$\int_C f(z)dz = \underbrace{3\int \frac{1}{z+1} dz}_{\text{طبق قضیهٔ انتگرال کوشی صفر است.}} - \underbrace{\int_C \frac{1}{z} dz}_{\text{طبق نتیجهٔ کلی برابر } 2\pi i}$$

$$\longrightarrow \int f(z)dz = -2\pi i$$

حل ب: $\int_c \frac{2z-1}{z^2+z}dz = \int \frac{3dz}{z+1} - \int \frac{1}{z}dz = 0$

حل ج: $\int_c \frac{2z-1}{z^2+z}dz = 3\underbrace{\int \frac{dz}{z+1}}_{2\pi i} - \underbrace{\int \frac{1}{z}dz}_{2\pi i} = 4\pi i$

دو قضیهٔ دیگر:

۱ـ اگر تابع $f(z)$ در حوزهٔ همبند D تحلیلی باشد و بخواهیم از این تابع از نقطهٔ z_1 تا z_2 انتگرال بگیریم (اثبات شد که این انتگرال به مسیر بستگی ندارد) در آن صورت یک تابع $F(z)$ (تابع اولیهٔ $f(z)$) وجود دارد که اولاً $F'(z)=f(z)$ و ثانیاً

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

مثال ۱: $\int_0^{\pi i} e^z dz = ?$ $\qquad f(z)=e^z \longrightarrow F(z)=e^z$

$$\longrightarrow \int_0^{\pi i} e^z dz = e^z\Big|_0^{\pi i} = e^{\pi i} - 1 = -1-1 = -2$$

مثال ۲: $\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3}z^3\Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{1}{3}2i(i+1)$

$$= -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$$

مثال ۳: $\int_0^{i} (z^2+z^3)dz = \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4\Big|_0^{i} = \frac{1}{4} - i\frac{1}{3}$

مثال ۴: $\int_0^{i+1} \sin z\, dz = -\cos z\Big|_0^{1+i} = 1 - \cos(1+i)$

۲ـ چنانچه $f(z)$ در حوزهٔ D تحلیلی باشد و z_0 یک نقطهٔ متعلق به D و C یک منحنی بسته درون D که z_0 را دور می‌زند باشد در آن صورت:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

تعریف ۱: دنباله Z_n را کراندار نامند چنانچه بتوان دایره‌ای به شعاع R (R عددی است به طور دلخواه بزرگ ولی مخالف صفر) رسم کرد که تمام جملات در درون آن قرار گیرند.

تعریف ۲: دنباله Z_n را همگرا نامند چنانچه برای این دنباله یک عدد C وجود داشته باشد که به ازای هر ع دلخواه (ع به اندازهٔ دلخواه کوچک ولی مخالف صفر) بتوان یک N تعریف کرد که:

به ازای: $n > N$ $\quad |Z_n - C| < \varepsilon \quad , \quad C = \lim\limits_{n \to \infty} Z_n$

مثال ۱: $1, \frac{1}{۲}, \frac{1}{۳}, \frac{1}{۴}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

$$C = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = ۰ \quad , \quad \varepsilon = ۰٫۰۰۱ \longrightarrow |Z_n - C| = \left|\frac{1}{n} - ۰\right| = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < ۰٫۰۰۱ \longrightarrow n > \underbrace{۱۰۰۰}_{N}$$

مثال ۲: $1 + ۳i, \frac{۳}{۲} + i\frac{۵}{۲}, \dots, (۲ - \frac{1}{n}) + i(۲ + \frac{1}{n}), \dots$

$$C = \lim_{n \to \infty} \left[(۲ - \tfrac{1}{n}) + i(۲ + \tfrac{1}{n})\right] = ۲ + ۲i \quad , \quad \varepsilon = ۰٫۰۱$$

$$|Z_n - C| = \left|(۲ - \tfrac{1}{n}) + i(۲ + \tfrac{1}{n}) - ۲ - i۲\right| < ۰٫۰۱ \longrightarrow \left|\frac{-1}{n} + i\frac{1}{n}\right| < ۰٫۰۱$$

$$\longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{n} < ۰٫۰۱ \longrightarrow n > \frac{\sqrt{۲}}{۰٫۰۱} \approx \underbrace{۱۴۱}_{N}$$

مثال: دنباله مقابل واگرا است. $i, -1, -i, 1, i, \dots, (i)^n, \dots$

نکته: هر دنبالهٔ همگرا، کراندار است و لذا هر دنبالهٔ بی‌کران، واگرا است.

قضیه: هر دنباله مختلط Z_n از دو دنباله حقیقی x_n و y_n تشکیل شده است.

$$Z_n = x_n + i y_n$$

و دنباله مختلط Z_n همگرا است اگر و فقط اگر دنباله های x_n ، y_n همگرا باشد.

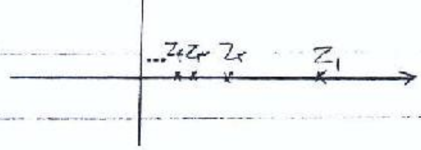
بحث‌های باقیمانده از ریاضیات مهندسی: مطالبی منتخب از فصول ۱۵ و ۱۶.

اولین بحث فصل ۱۵: تعریف و قضایای دنباله‌ها

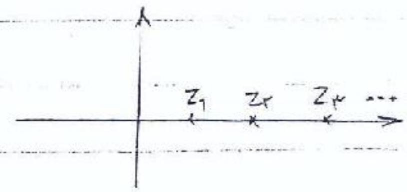
دنباله: چنانچه به هر عدد صحیح و مثبت n یک عدد مختلط z_n نسبت دهیم:

$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ در آن صورت یک دنباله تعریف کرده‌ایم.

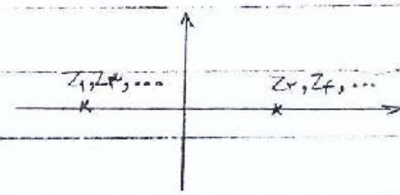
مثال ۱: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$



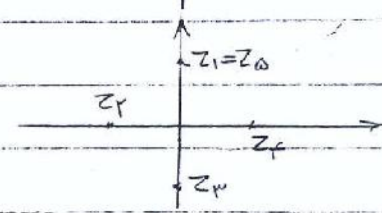
مثال ۲: $2, 3, 4, 5, \ldots, (n+1), \ldots$



مثال ۳: $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

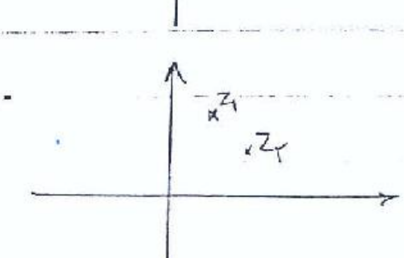


مثال ۴: $i, -1, -i, 1, i, \ldots, (i)^n, \ldots$



مثال ۵: $\frac{i}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-i}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{i}{2}\right)^n, \ldots$

مثال ۶: $1+3i, \frac{3}{2}+i\frac{5}{2}, \ldots, \left(2-\frac{1}{n}\right)+i\left(2+\frac{1}{n}\right), \ldots$



$$\operatorname*{Res}_{z=e^{i\pi/4}} g(z) = \left.\frac{e^{i3z}}{4z^3}\right|_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{e^{3i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4\,e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}}{4}\cdot e^{i\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\right]}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} g(z) = \left.\frac{e^{i3z}}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{3i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}}{4}\cdot e^{i\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$\longrightarrow A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{x^4+1}\,dx = 2\pi i\,\frac{e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}}{4}\left[e^{i\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}}{4}\left[-e^{i\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}}{4}\left[-2i\sin\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\pi e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\sin\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0.0876$$

نکته : بعضی انتگرالهای حقیقی خاص را نیز می توان بااستفاده از تئوری محاسبه انتگرالهای مختلط محاسبه نمود (با همان تکنیک قضیه ۲)

مثال : الف : $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ ب : $\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

نکته: انتگرال $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}\,dx$ تعریف شده نیست ولی می توان مقدار اصلی (PR.V) برای آن تعریف کرد:

$$PR.V.\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^3}\,dx+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^3}\,dx\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2}\left[x^{-2}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+x^{-2}\Big|_{\varepsilon}^{1}\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2}\left[\varepsilon^{-2}-1+1-\varepsilon^{-2}\right]=0$$

به طریق مشابه درمورد انتگرال $\int_C f(z)\,dz=\int_a^b f[z(t)]\,\dot{z}(t)\,dt$

اگر منحنی c از نقطه تکینی عبور کند انتگرال بالا (به فرم مشابه) تعریف شده نیست، ولی به همین شکل می توان مقدار اصلی PR.V. برای آن تعریف کرد.

سری تیلور (مک لورن) توابع کسری:

به طور کلی برای پیدا کردن سری تیلور توابع کسری از دو رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

سری هندسی:
$$\frac{1}{1-w}=1+w+w^2+w^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad , \quad |w|<1$$

رابطهٔ دوجمله‌ای:
$$\frac{1}{(1+w)^m}=1-mw+\frac{m(m+1)}{2!}w^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{2!}w^3+-\dots=\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} w^n$$
$$, \quad |w|<1$$
$$? \quad (-1)^n\binom{m+n-1}{n}$$

مثال ۱: سری تیلور $f(z)$ را حول نقطهٔ $a=1$ پیدا کرده و ناحیهٔ همگرایی آن را تعیین کنید.
$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}$$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-1)^n$$

$$=\frac{1}{2+(z-1)}+\frac{1}{3+(z-1)}=\frac{1}{2-[-(z-1)]}+\frac{1}{3-[-(z-1)]}$$

$$\longrightarrow f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left[-\frac{z-1}{2}\right]}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left[-\frac{z-1}{3}\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{z-1}{2}\right]^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{z-1}{3}\right]^n$$

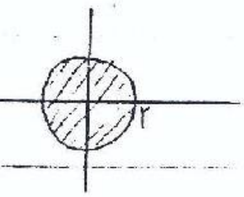
مشروط بر اینکه: $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1 \quad , \quad \left|\frac{z-1}{3}\right|<1$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)\right](z-1)^n$$

مشروط بر اینکه: $|z-1|<3 \quad , \quad |z-1|<2$

$$\longrightarrow \boxed{|z-1|<2}$$

ناحیه همگرایی:



مثال ۲: حول $a=1$ و $f(z)=\frac{2z^2+9z+5}{(z+2)^2(z+3)}$

$$\rightarrow f(z)=\underbrace{\frac{1}{(z+2)^2}}_{f_2(z)}+\underbrace{\frac{2}{z+3}}_{f_1(z)}$$

$$f_1(z)=\frac{2}{-2+(z-1)}=\frac{-1}{1-\underbrace{\frac{z-1}{2}}_{\omega}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n \quad , \quad \left|\frac{z-1}{2}\right|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^n}(z-1)^n$$

$$f_2(z)=\frac{1}{(z+2)^2}=\frac{1}{[3+(z-1)]^2}=\frac{1}{9}\,\frac{1}{\left[1+\frac{z-1}{3}\right]^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\left[1-2\cdot\frac{z-1}{3}+3\cdot\left(\frac{z-1}{3}\right)^2-4\left(\frac{z-1}{3}\right)^3+\cdots\right]=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n$$

$$, \quad \left|\frac{z-1}{3}\right|<1$$

$$\rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{\binom{-2}{n}}{3^{n+2}}-\frac{1}{2^n}\right]}_{b_n}(z-1)^n$$

ناحیه همگرایی این مثال نیز شبیه ناحیهٔ همگرایی مثال قبل است.

سری لوران:

اگر یک تابع کسری داشته باشیم و بخواهیم سری تیلور حول نقاطی که در آن نقاط تابع تحلیلی است

مشکلی نداریم و طبق روابط گفته شده سری قابل محاسبه می باشد.

اگر بخواهیم یک سری توانی حول نقطهٔ z_0 پیدا کنیم که z_0 نقطهٔ تکین تابع می باشد در آن صورت سری تیلور قابل تعریف نیست. در اینجا سری لوران را تعریف می کنیم.

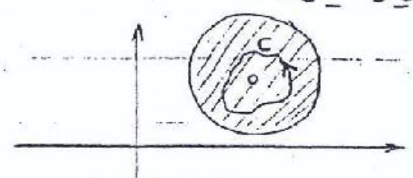
قضیهٔ سری لوران:

اگر تابع $f(z)$ در حوزهٔ $0<|z-z_0|<R$ تحلیلی باشد در آن صورت می توان آن را به صورت سری توانی زیر نمایش داد.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$$

$$,\ b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\ ,$$

مسیری بسته شامل z در ناحیهٔ R



محاسبهٔ ضرایب سری لوران از روشی ساده:

مثال: سری لوران $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$ حول نقطهٔ $z_0=0$ پیدا کنید.

$$g(z)\triangleq \sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\cdots$$

توانهای منفی

اگر $z\neq 0$ باشد: $0<|z|<\infty$

$$\frac{\sin z}{z^4}=z^{-3}-\frac{z^{-1}}{3!}+\frac{z}{5!}-\frac{z^3}{7!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!}\ ,\quad if\ 2n-3=m$$

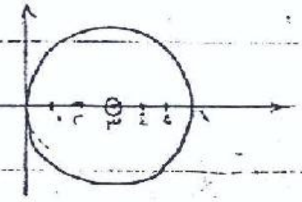
$$\longrightarrow\ =\sum_{m=-3}^{\infty}(-1)^{m+1}\cdot\frac{z^m}{(m+4)!}$$

مثال ۲: $f(z)=\frac{1}{z^3(z-3)}$, $z=3$ حول نقطهٔ

$$g(z)=\frac{1}{z^{3}}=\frac{1}{(3+z-3)^{3}}=\frac{1}{3^{3}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{z-3}{3}\right)^{3}}=\frac{1}{3^{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}\left(\frac{z-3}{3}\right)^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{-3}{n}}{3^{n+3}}(z-3)^{n}\quad,\quad\left|\frac{z-3}{3}\right|<1$$

$$\longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{-3}{n}}{3^{n+3}}(z-3)^{n-1}\quad,\quad z\neq 3$$



فصل ۱۰ کامل

۱۲ کامل

۱۳ (۱۳-۲ تا ۵ - ۱۳-۲۳)

۱۴ (۱۴-۱ تا ۱۴-۲۶)

۱۵ (۱ و ۲ و ۵)

۱۶ (۴ و ۷)

۱۷ کامل