# فضای حقیقی $n$ـ بعدی

ریاضیات کلاسیک بر دو رکن اساسی "عدد" و "فضا" بنا شده است. علوم حساب و جبر از عدد نشأت می‌گیرند و هندسه، به مفهوم سنتی آن، علم فضا و اشکال و اجسام موجود در فضا است. بسیاری اوقات می‌توان با یک پدیده دو برخورد متمایز ریاضی، یکی جبری‌ـ عددی، و دیگری هندسی، داشت. در برخورد جبری یک چارچوب نمادین ارائه می‌شود که اغلب برای حل مسائل دیگری نیز قابل استفاده است و گاهی نیز منجر به فراهم ساختن یک الگوریتم یا دستورالعمل زنجیره‌ای برای حل این‌گونه مسائل می‌شود. در برخورد هندسی، که ریشه در نیروی باصرهٔ انسان دارد، سعی بر این است که جمیع روابط موجود بین اجزاء پدیده یکجا جمع گردند، خصوصیات برجسته شناسایی شوند، و حل مسأله از این مشاهدات دیده شود. به ذکر دو مثال ابتدایی می‌پردازیم:

**مثال ۱.** می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی که از ۱ شروع شود یک مجذور کامل است. در واقع:

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲ \qquad (۱)$$

یک روش جبری‌ـ عددی برای اثبات این ادعا، استقراء است. حکم برای $n = ۱$ صحیح است و اگر فرض کنیم (۱) برای $n$ برقرار است، نشان می‌دهیم برای $(n + ۱)$ نیز برقرار است:

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) + (۲n + ۱) = n^۲ + (۲n + ۱) = (n + ۱)^۲$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

برخورد هندسی با همین حکم در شکل ۱ دیده می‌شود. توجه کنید که اعداد فرد به صورت لایه‌هایی از گوشهٔ چپ پایین افزوده می‌شوند و همواره یک مربع به ضلع $n$ پدید می‌آید:

شکل ۱

**مثال ۲.** می‌خواهیم در مورد تعداد جواب‌های دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر بحث کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2+y^2+x+y=4 \end{cases} \tag{2}$$

نخست مسأله را از دیدگاه جبری بررسی می‌کنیم. با تفریق دو رابطه داریم $x+y=2$. اگر $y=2-x$ را در معادلهٔ اول جایگزین کنیم نتیجه می‌شود که $2x^2-4x+2=0$ یا $x^2-2x+1=0$، پس $x=1$. با جایگزینی در معادلهٔ اول داریم $y=\pm 1$ ولی فقط جواب $y=1$ در معادله دوم صدق می‌کند؛ پس تنها جواب مسأله $(x,y)=(1,1)$ است. یک دیدگاه هندسی برای بررسی این مسأله می‌تواند توجه به مکان هندسی دو معادله در صفحه $xy$ باشد. دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{2} \end{cases}$$

معادله اول دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ به مرکز $(0,0)$ را نمایش می‌دهد و معادله دوم، معادله یک دایره به شعاع $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ به مرکز $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. حال فاصله مرکز دایره‌ها برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است، پس تنها نقطهٔ دایرهٔ اول به فاصله $\frac{3}{\sqrt{2}}$ از مرکز دایرهٔ دوم، نقطهٔ $(1,1)$ است، که تنها جواب مسأله می‌باشد.

توجه کنید که هرچند در راه حل هندسی نیز عملیات جبری انجام شد، لیکن این عملیات در راستای هدف‌های خاص هندسی بودند که شناخت شکل مدور مکان‌های هندسی القاء می‌کرد. برای اشکال نامأنوس یا وقتی که مقایسهٔ طول شعاع‌ها و فواصل آسان نباشد، تحلیل جبری اجتناب‌ناپذیر است، ولی هرجا که دیدگاه هندسی مقدور باشد، معمولاً یک بینش یا تعبیر روشن‌کننده ایجاد می‌شود.

نکته مهم دیگر در مورد مسأله بالا این که تعداد متغیرهای مسأله در اینجا ۲ است که بررسی هندسی آن را در صفحهٔ $xy$ ممکن می‌سازد. برای مسائل سه متغیری نیز می‌توان از تجسم هندسی

بهره جست. اما در بسیاری مسائل ریاضی و کاربردی، تعداد متغیرهای ذی دخل بیش از ۳ است که ظاهراً مانعی چاره‌ناپذیر در راه ارائه دیدگاه هندسی است زیرا که انسان به عنوان موجود سه بعدی هیچ گونه برداشت ادراکی مستقیم از ابعاد بالاتر از سه ندارد. یک هدف مهم ما در این جلسه و چند جلسهٔ آینده فراهم آوردن نوعی هندسه $n$ـ بعدی است که در آن $n$ به اعداد کوچکتر یا مساوی ۳ محدود نباشد. این هندسه را می‌توان یک زبان ریاضی مناسب برای تعمیم شهود هندسی به فرای ابعاد ۲ و ۳ تلقی کرد که همانند نیروی باصره در سوق دادن تفکر ریاضی به یافتن روش مناسب برای حل مسائل کارساز است. در اینجا هیچ‌گونه ادعایی برای "وجود" فیزیکی فضای $n$ـ بعدی مطرح نیست؛ بلکه یک نظام دقیق ریاضی مطرح خواهد شد که بستر مناسبی برای نوعی تجسم و شهود، هرچند مجازی و نمادین، در ابعاد بالاتر از ۳ است.

رهنمود ما برای ساختن فضای $n$ـ بعدی ارتباط جبر و هندسه در هندسهٔ تحلیلی است. دیده‌ایم که اولین ارتباط جبر و هندسه از نسبت دادن یک عدد (یعنی "طول") به پاره‌خط‌ها آغاز می‌شود؛ یعنی در تناظر قرار دادن نقاط یک خط راست با مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$. در هندسهٔ تحلیلی، نقاط یک صفحه با زوج‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر $\mathbb{R}^2$، و نقاط فضا با سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر $\mathbb{R}^3$، مدرج می‌شوند. تا اینجا جبر و هندسه مستقل از یکدیگر در ذهن ما وجود دارند و هندسهٔ تحلیلی یک پل ارتباطی است. برای $n \geq 4$، $n$ـ تایی‌های مرتب اعداد حقیقی معنی دارند ولی هندسه‌ای فرای فضای عادی سه بعدی نمی‌شناسیم. با الهام گرفتن از ارتباط فوق برای $n \leq 3$، مفاهیم هندسی را برای $\mathbb{R}^n$، یعنی مجموعهٔ $n$ـ تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، تعریف می‌کنیم. به این ترتیب نوعی هندسه در $\mathbb{R}^n$ بنا می‌شود.

با این مقدمه، $\mathbb{R}^n$، مجموعهٔ $n$ تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی اشیاء ریاضی $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$، $x_i \in \mathbb{R}$، را در نظر می‌گیریم و هر چنین $x$ را یک **نقطهٔ** $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم. نخست یک عمل جمع در $\mathbb{R}^n$ مشابه جمع بردارها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌کنیم. برای $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$، $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad (۳)$$

**(۱—۱) خواص جمع**

(۱—۱—۱) خاصیت تعویض‌پذیری (جابجایی): $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$.

(۱—۱—۲) خاصیت شرکت‌پذیری $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$.

(۱—۱—۳) عنصر بی‌اثر: $n$ تایی $\underline{0}=(0,\dots,0)$ (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$x+\underline{0}=\underline{0}+x=x$$

(۱—۱—۴) عنصر قرینه: برای $n$ تایی داده شده $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$، $n$ تایی "$-\mathbf{x}$" که به صورت $-\mathbf{x}=(-x_1,\dots,-x_n)$ تعریف می‌شود (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$x+(-x)=(-x)+x=\underline{0}$$

خواص فوق همه به سادگی از تعریف نتیجه می‌شوند.

تعریف جمع $n$ تایی‌ها و خواص بالا عیناً از حالت دو بعدی و سه بعدی برگرفته شده‌اند. اگر به نقاط $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ و $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ در $\mathbb{R}^3$، بردارهای ساطع از $\underline{0}$ به این نقاط را منسوب کنیم، $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ مفهوم مجموع برداری معمول را دارد یعنی رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی که سه رأس دیگر آن نقاط $\underline{0}$، $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ هستند.

شکل ۳

برای بردارها در صفحه و فضای سه بعدی، حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در بردار نیز تعریف شده است. این عمل را می‌توان در $\mathbb{R}^n$ نیز تعریف کرد. برای نقطهٔ $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ و عدد حقیقی $r\in\mathbb{R}$، نقطهٔ $r\mathbf{x}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$rx=(rx_1,\dots,rx_n) \qquad (۴)$$

یعنی همهٔ مؤلفه‌های $\mathbf{x}$ در $r$ ضرب می‌شوند. تعبیر این عمل در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را یادآوری می‌کنیم. اگر بردار واصل از $0$ به $\mathbf{x}$ را در نظر بگیریم، $r\mathbf{x}$ برداری در همان راستاست که اگر $r$ مثبت باشد همجهت با $\mathbf{x}$ و اگر $r$ منفی باشد در جهت مقابل است

شکل ۴

خواص ابتدایی زیر را در مورد ضرب در اعداد و ارتباط آن با عمل جمع ثبت می‌کنیم. همهٔ این احکام نتیجهٔ سرراست تعریف هستند:

(۱—۲) خواص ضرب در اعداد

(۱—۲—۱) برای هر نقطهٔ $\mathbf{x}$، $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

(۱—۲—۲) اگر $r, s$ اعداد حقیقی باشند و $\mathbf{x}$ یک نقطه، $(rs)\mathbf{x} = r(s\mathbf{x})$.

(۱—۲—۳) اگر $r, s$ اعداد حقیقی باشند و $\mathbf{x}$ یک نقطه، $(r+s)\mathbf{x} = (r\mathbf{x}) + (s\mathbf{x})$.

(۱—۲—۴) اگر $r$ عدد حقیقی باشد و $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ دو نقطه، $r(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (r\mathbf{x}) + (r\mathbf{y})$.

با این تعاریف اکنون آماده هستیم مفاهیم هندسه را در $\mathbb{R}^n$ پیاده کنیم. ساده‌ترین مفهوم هندسی پس از نقطه، "خط راست" است. برای تعریف خط راست در هندسهٔ تحلیلی دو بعدی و سه بعدی راه‌های گوناگون هست. باید تعریفی را مبنا قرار دهیم که بتوان با صرفاً مفاهیم جمع نقاط و ضرب در یک عدد حقیقی آن را بیان کرد، در این صورت چون این مفاهیم در $\mathbb{R}^n$ معنی دارند همان تعریف را می‌توان در $\mathbb{R}^n$ اتخاذ کرد. چنین تعریفی از خط راست را می‌توان در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ در نظر گرفت.

فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{A}$ دو نقطه در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ باشند به طوری که $\mathbf{A} \neq 0$. $\mathbf{a}$ را به صورت یک نقطه و $\mathbf{A}$ را به صورت یک بردار (ساطع از مبدأ) تصور کنید. چون $\mathbf{A} \neq 0$ فرض شده است مضارب حقیقی $\mathbf{A}$ یک راستا تعریف می‌کنند. حال خط راستی را در نظر بگیرید که از $\mathbf{a}$ می‌گذرد و موازی این راستا است. شرط لازم و کافی برای این که یک نقطه روی این خط باشد این است که بتوان آن را به صورت $\mathbf{a} + t\mathbf{A}$، برای عدد حقیقی مناسب $t$، نوشت (شکل ۵).

شکل ۵

در تعریف نقاط این خط به شکل $\mathbf{a} + t\mathbf{A}$، فقط دو عمل ذکر شده، ضرب در عدد حقیقی و جمع، به‌کار رفته است پس می‌توان آن را مبنای تعریف خط راست در $\mathbb{R}^n$ قرارداد.

**(۱—۳) تعریف.** فرض کنید $\mathbf{a}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$، $\mathbf{A} \neq \underline{\circ}$، داده شده باشند، در این صورت مجموعهٔ زیر یک **خط راست در** $\mathbb{R}^n$ خوانده می‌شود:

$$\langle a; A\rangle = \{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad (۵)$$

$\langle a; A\rangle$ را به مناسبت مقدمهٔ بالا اصطلاحاً **خط راست گذرا از a به موازات A** نیز می‌نامیم هرچند که هنوز مفهوم "موازی" تعریف نشده است. بدین ترتیب هر نقطهٔ $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ از مجموعهٔ بالا باید به شکل زیر باشد:

$$\begin{aligned} x &= a + tA \\ (x_۱, \ldots, x_n) &= (a_۱, \ldots, a_n) + t(A_۱, \ldots, A_n) \\ &= (a_۱ + tA_۱, \ldots, a_n + tA_n) \end{aligned}$$

پس برای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{A}$ داده شده، خط راست $\langle \mathbf{a}; \mathbf{A}\rangle$ متشکل از نقاط $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x_۱ = a_۱ + tA_۱ \\ \vdots \\ x_n = a_n + tA_n \end{cases} \qquad (٦)$$

که در اینجا $t$ همهٔ مقادیر حقیقی را اتخاذ می‌کند. (٦) را **نمایش پارامتری خط راست** $\langle \mathbf{a}; \mathbf{A}\rangle$ نیز می‌نامند. توجه کنید که هر خط راست، به مفهوم تعریف شده، همان‌طور که انتظار می‌رود، در تناظر یک به یک با اعداد حقیقی است. هر نقطهٔ $\langle \mathbf{a}; \mathbf{A}\rangle$، به شکل $\mathbf{a} + t\mathbf{A}$، یعنی متناظر با $t$ است، و این $t$ منحصر به فرد است زیرا که اگر $\mathbf{a} + t\mathbf{A} = \mathbf{a} + t'\mathbf{A}$، با جمع کردن "$-\mathbf{a}$" با دو طرف نتیجه می‌شود که $t\mathbf{A} = t'\mathbf{A}$ و $(t - t')\mathbf{A} = \underline{\circ}$. حال چون $\mathbf{A} \neq \underline{\circ}$ فرض شده است، لزوماً $t - t' = \circ$ یا $t = t'$.

**مثال (محورهای مختصات).** $n$ تایی‌های $\mathbf{e}_۱, \ldots, \mathbf{e}_n$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$e_۱ = (۱, \circ, \ldots, \circ) \quad , \quad e_۲ = (\circ, ۱, \circ, \ldots, \circ) \quad , \ldots , \quad e_n = (\circ, \ldots, \circ, ۱)$$

بدین ترتیب $\mathbf{e}_i$ آن $n$ تایی است که مؤلفه $i$ام آن ۱ و سایر مؤلفه‌هایش صفر است. حال

$$\langle \circ; e_i\rangle = \{(\circ, \ldots, \circ, t, \circ, \ldots, \circ) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

یک خط راست است که محور مختصاتی $i$ـ ام یا محور $x_i$ خوانده می‌شود. تعداد محورهای مختصات در $\mathbb{R}^n$ برابر $n$ است.

اگر $l = \langle \mathbf{a}; \mathbf{A} \rangle$ یک خط راست باشد، خط راست $\langle \underline{\circ}; \mathbf{A} \rangle$ را **انتقال یافتهٔ $l$ به مبدأ** می‌نامیم و با نمادهای $l^\circ$ یا $\langle \mathbf{A} \rangle$ نیز نمایش می‌دهیم. داریم

$$l^\circ = \langle A \rangle = \{tA \mid t \in \mathbb{R}\}$$

**(۱ــ۴) گزاره.** برای هر $\mathbf{B} \in l^\circ$ که $\underline{\circ} \neq \mathbf{B}$ و هر $\mathbf{b} \in l$ داریم:

$$\langle b; B \rangle = \langle a; A \rangle$$

اثبات. اگر $\underline{\circ} \neq \mathbf{B} \in l^\circ$، داریم $\mathbf{B} = t_\circ \mathbf{A}$ برای عدد حقیقی مناسب $t_\circ \neq \circ$، و اگر $\mathbf{b} \in l$، $\mathbf{b} = \mathbf{a} + t_1 \mathbf{A}$ برای عدد حقیقی مناسب $t_1$، پس برای هر عنصر $\mathbf{b} + s\mathbf{B}$، $s \in \mathbb{R}$، در $\langle \mathbf{b}; \mathbf{B} \rangle$ داریم:

$$b + sB = a + t_1 A + s(t_\circ A) = a + (t_1 + st_\circ)A$$

پس $\langle \mathbf{b}; \mathbf{B} \rangle \subset \langle \mathbf{a}; \mathbf{A} \rangle$. بالعکس اگر نقطه‌ای $\mathbf{a} + t\mathbf{A}$ در نظر بگیریم، می‌توان $t_1 + st_\circ = t$ را برای $s$ حل کرد چون فرض کرده‌ایم $t_\circ \neq \circ$ و هر نقطهٔ $\langle \mathbf{a}; \mathbf{A} \rangle$ به $\langle \mathbf{b}; \mathbf{B} \rangle$ متعلق است. پس $\langle \mathbf{b}; \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{a}; \mathbf{A} \rangle$. □

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که مفهوم "خط راست" به صورتی که تعریف شد تا چه حد به خط راستی که در فضای مأنوس سه بعدی می‌شناسیم نزدیک است؟ از آنجا که خط راست در $\mathbb{R}^n$ در واقع انتقال یافتهٔ همهٔ مضارب حقیقی یک $\mathbf{A}$ ثابت به وسیلهٔ یک بردار ثابت $\mathbf{a}$ است، انتظار داریم همان خواص اساسی برقرار باشند. به عنوان نمونه یک انتظار ابتدایی را ثابت می‌کنیم:

**(۱ــ۵) گزاره.** دو خط راست که دو نقطهٔ مشترک متمایز داشته باشند بر هم منطبقند.

اثبات. فرض کنید $\langle \mathbf{a};\mathbf{A}\rangle$ و $\langle \mathbf{b};\mathbf{B}\rangle$ دو خط راست باشند، و $\mathbf{P}\neq\mathbf{Q}$ دو نقطه که متعلق به هر دو خط است. طبق $(۱-۴)$ $\langle \mathbf{a};\mathbf{A}\rangle=\langle \mathbf{P};\mathbf{A}\rangle$ و $\langle \mathbf{b};\mathbf{B}\rangle=\langle \mathbf{P};\mathbf{B}\rangle$ چون $\mathbf{P}$ روی هر دو خط قرار دارد، پس:

$$Q=P+tA \quad \text{برای } t\in\mathbb{R} \text{ مناسب}$$

$$Q=P+sB \quad \text{برای } s\in\mathbb{R} \text{ مناسب}$$

پس $t\mathbf{A}=s\mathbf{B}$. ضمناً $s\neq ۰$ و $t\neq ۰$ زیرا که فرض کرده‌ایم $\mathbf{P}\neq\mathbf{Q}$. بنابراین از $t\mathbf{A}=s\mathbf{B}$ نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{B}$ مضربی ناصفر از $\mathbf{A}$ است. طبق $(۱-۴)$ خط راست $\langle \mathbf{a};\mathbf{A}\rangle=\langle \mathbf{P};\mathbf{A}\rangle$ برابر می‌شود با $\langle \mathbf{P};\mathbf{B}\rangle$ که همان $\langle \mathbf{b};\mathbf{B}\rangle$ است و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

دو خط راست $l_۱, l_۲$ را موازی می‌نامیم در صورتی که نقطهٔ مشترک نداشته باشند و انتقال یافته آنها به مبدأ یکی باشد، $l_۱^\circ=l_۲^\circ$. بنابراین برای هر خط $l$ که از ۰ نگذرد، $l$ موازی $l^\circ$ است. توازی دو خط $l_۱, l_۲$ را به $l_۱\|l_۲$ نمایش می‌دهیم.

نمایش دیگری برای خطوط راست نمایش متقارن است که بدین صورت به‌دست می‌آید. اگر هر یک از روابط (٦) را برای $t$ حل کرده نتایج را برابر قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{x_۱-a_۱}{A_۱}=\frac{x_۲-a_۲}{A_۲}=\cdots=\frac{x_n-a_n}{A_n} \qquad (۷)$$

از آنجا که فرض شده است $\mathbf{A}\neq\underline{۰}$، همهٔ $A_i$ ها نمی‌توانند صفر شوند. صفر شدن بعضی $A_i$ ها در (۷) به منزلهٔ تقسیم بر صفر نیست، بلکه اگر به (٦) نگاه کنیم می‌بینیم که $A_i=۰$ به معنی این است که $x_i$ ثابت و همواره برابر $a_i$ می‌باشد.

مثال. فرض کنید $A_۱\neq ۰$ و $A_۲=\cdots=A_n=۰$. در این صورت $\mathbf{A}=(A_۱,۰,\ldots,۰)$، یعنی $\mathbf{A}$ متعلق به محور $x_۱$ است. نتیجه این که خط راست $\langle \mathbf{a};\mathbf{A}\rangle$ یا موازی محور $x_۱$ است یا خود آن است. به همین ترتیب اگر $A_i\neq ۰$ و سایر $A_i$ ها صفر باشند، خط $\langle \mathbf{a};\mathbf{A}\rangle$ موازی محور $x_i$ یا منطبق بر آن خواهد بود.

# اعداد حقیقی (۱)

اعداد اولین بار در رابطه با امر شمارش ظاهر شدند. اعداد طبیعی:

$$۱, ۲, ۳, \ldots$$

وسیلهٔ سنجش تعدد اشیاء در یک مجموعهٔ مشخص‌اند. از آنجا که کمیت‌های مورد اندازه‌گیری همیشه به صورت گسسته و مجزا ظاهر نمی‌شوند، انسان از دیرباز دریافت که برای سنجش میزان کمیت، شمارش و اعداد طبیعی کفایت نمی‌کنند، بلکه باید نسبت دو کمیت از یک جنس را نیز نوعی عدد تلقی کرد. مقایسهٔ وزن اجسام و طول پاره‌خط‌ها از این جمله‌اند. برای انجام مقایسهٔ دو کمیت، شیئی همجنس با دو شیء مورد مقایسه ولی کوچکتر از آنها در نظر گرفته می‌شود که اندازهٔ هر شیء مضرب صحیحی از اندازهٔ آن باشد. در شکل ۱ دو پاره‌خط $L_۰$ و $L_۱$ نمایش داده شده‌اند و پاره‌خطی $L$ که ۵ بار در $L_۰$ و ۳ بار در $L_۱$ می‌گنجد. در این صورت نسبت طول $L_۰$ به طول $L_۱$ را به $\frac{۵}{۳}$ نمایش می‌دهند. نسبت‌های $\frac{m}{n}$ که در آن $m$ و $n$ عدد طبیعی باشند امروزه اعداد گویا یا کسرهای متعارف می‌نامیم. ریاضیدان یونانی یودوکسوس[۱] حدود ۴ قرن قبل از میلاد کسرها را به طور جامع بررسی کرد و نظریهٔ او در فصل پنجم کتاب اصول اقلیدس (قرن سوم قبل از میلاد) نقل شده است. هرگاه پاره‌خطی $L$ به عنوان مرجع یا واحد در نظر گرفته شود، $n$ یک عدد طبیعی باشد، و $L'$ پاره‌خطی که $L$ دقیقاً $n$ بار در آن می‌گنجد، نسبت طول $L'$ به طول $L$ برابر $\frac{n}{۱}$ است. از آنجا که طول $L'$ را می‌توان نتیجهٔ $n$ بار شمارش طول $L$ در نظر گرفت، تمایزی میان $\frac{n}{۱}$ و $n$ قایل نمی‌شویم و از این رو مجموعهٔ اعداد گویا را گسترشی از مجموعهٔ اعداد طبیعی تلقی می‌کنیم.

[۱] Eudoxus

به طور کلی دو کمیت از یک جنس را همسنگ می‌نامیم در صورتی که کمیتی از همان جنس (به عنوان "واحد" یا "سنگه") وجود داشته باشد که اندازهٔ هر یک از کمیت‌های داده شده مضرب صحیحی از اندازهٔ سنگه باشد. در شکل ۱، طول پاره‌خط‌های $L_0$ و $L_1$ همسنگ هستند و می‌توان از طول $L$ به عنوان سنگه استفاده کرد. در عمل به نظر می‌آید باید بتوان برای مقایسهٔ هر دو کمیت همجنس، واحدی به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب کرد که هر دو کمیت مضرب صحیحی از آن واحد باشند، یا به عبارتی دیگر، به نظر می‌آید که هر دو کمیت همجنس، همسنگ باشند. برای تأکید بر اهمیت مسأله، موضوع را به صورت یک سؤال مطرح می‌کنیم:

**سؤال.** آیا هر دو کمیت همجنس، همسنگ نیز هستند؟

اینکه جواب این سؤال منفی است ظاهراً در قرن پنجم پیش از میلاد توسط هیپاسوس[۲] کشف شد و بحرانی در فلسفه و علم باستان پدید آورد. فیثاغورسیان اعتقاد داشتند که اعداد (صحیح) به نوعی منشاء و عنصر ساخت همهٔ هستی‌اند و این کشف هیپاسوس که دو پاره‌خط وجود دارد که نمی‌توان هر دو را با یک واحد مشترک شمرد بنیاد تفکر آنها را متزلزل ساخت. استدلال هیپاسوس را بعداً خواهیم آورد ولی استدلال ساده زیر که دو قرن بعد در جزوهٔ دهم کتاب اصول اقلیدس ظاهر می‌شود اندکی بعد کشف شد. در اینجا نشان داده می‌شود که طول ضلع مربع و طول قطر آن همسنگ نیستند، یا به زبان امروزی نسبت این دو طول یک عدد گویا نیست. اگر طول ضلع مربع را $l$ بگیریم، طول قطر آن طبق قضیهٔ فیثاغورس برابر $l\sqrt{2}$ است و نسبت طول قطر به طول ضلع برابر $\sqrt{2}$ می‌شود. روش ارائه شده در کتاب اقلیدس برای اثبات ناگویا بودن $\sqrt{2}$، برهان خلف است. فرض می‌کنیم $\frac{M}{N} = \sqrt{2}$ که در آن $M$ و $N$ عدد صحیح هستند. کسر $\frac{M}{N}$ را تا حد ممکن با حذف مقسوم‌علیه‌های مشترک ساده می‌کنیم تا به صورت $\frac{m}{n}$ در آید. پس $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ در وضعیتی است که $m$ و $n$ مقسوم‌علیه مشترک ندارند. با مجذور کردن دو طرف داریم $m^2 = 2n^2$، پس $m^2$ زوج است پس $m = 2k$ و نتیجه می‌گیریم که $n^2 = 2k^2$. باز به ترتیب بالا $n$ باید خود زوج باشد، $n = 2l$. حال $m$ و $n$ هر دو زوج هستند، یعنی هر دو بر ۲ قابل قسمت‌اند در حالی که فرض شده بود $m$ و $n$ مقسوم‌علیه مشترک ندارند. این تناقض نشان می‌دهد که

[۲] Hippasus

بیان $\sqrt{2}$ به صورت $\frac{m}{n}$ ممکن نیست، یعنی $\sqrt{2}$ گویا نیست. و به بیانی دیگر طول ضلع و طول قطر مربع همسنگ نیستند.

در واقع می‌توان به سادگی ثابت کرد که اگر $n$ خود مجذور کامل نباشد $\sqrt{n}$ گویا نیست. در قطعهٔ ۱۴۷ کتاب تئه‌تتوس افلاطون[3] (قرن چهارم پیش از میلاد) اشاره می‌شود که ریاضیدان یونانی تئودروس این مطلب را تا $n = 17$ به اثبات رسانده است. در جای دیگری از آثار افلاطون یکی از مناظره‌کنندگان از جهل آتنی‌ها نسبت به اعداد ابراز شرمساری کند و بالاخص اینکه اکثر مردم به وجود کمیت‌های ناهمسنگ آگاهی نداشتند.

در اینجا آنچه به ظن قوی کشف هیپاسوس از نسبت‌های ناگویا بوده است نقل می‌کنیم. علامت ویژهٔ فیثاغورسیان موسوم به پنتاگرام یک پنج‌ضلعی منتظم بود. در یک چنین پنج‌ضلعی با رسم قطرها پنج‌ضلعی منتظم دیگری در داخل ساخته می‌شود و می‌توان این کار را همواره ادامه داد (شکل ۲). نشان می‌دهیم چگونه مقایسهٔ نسبت طول قطر پنج‌ضلعی منتظم به طول ضلع آن یک کمیت ناگویا به‌دست می‌دهد. به طور کلی فرض کنید $a_0$ و $a_1$ دو کمیت همجنس باشند (مثلاً طول‌های دو پاره‌خط) و $a_0 > a_1$. اگر $a_1$ دقیقاً $n_1$ بار در $a_0$ بگنجد، $n_1$: عدد طبیعی، آنگاه $a_0$ و $a_1$ همسنگ هستند و داریم $n_1a_1 = a_0$. در هر صورت $n_1$ را بزرگترین عدد طبیعی می‌گیریم که $n_1a_1$ از $a_0$ تجاوز نکند و داریم

$$a_0 = n_1a_1 - a_2 \quad , \quad 0 < a_2 < a_1 \tag{1}$$

ملاحظه کردیم که اگر $a_2 = 0$، $a_1$ خود سنگهٔ مناسب برای مقایسه $a_0$ و $a_1$ است. حال فرض کنید $a_2 \neq 0$. در اینجا $a_2$ را به حداکثر دفعات ممکن در $a_1$ می‌گنجانیم یعنی بزرگترین عدد طبیعی $n_2$ را انتخاب می‌کنیم که $n_2a_2 \leq a_1$. پس:

$$a_1 = n_2a_2 - a_3 \quad , \quad 0 \leq a_3 < a_2 \tag{2}$$

اگر $a_3 = 0$، آنگاه $a_1$ مضرب صحیحی از $a_2$ است. از (۱) می‌بینیم که در این صورت $a_0$ نیز مضرب صحیحی از $a_2$ خواهد شد و بدین ترتیب $a_2$ سنگهٔ مناسب برای سنجش $a_0$ و $a_1$ است. اگر $a_3 \neq 0$،

[3] دورهٔ آثار افلاطون (جلد پنجم و هفتم)، ترجمه محمدحسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۵۷).

این فرایند را ادامه داده می‌نویسیم:

$$a_2 = n_3 a_3 + a_4 \quad , \quad 0 \le a_4 < a_3 \tag{۳}$$

که در آن $n_3$ یک عدد طبیعی است. مجدداً اگر $a_4 = 0$ با دنبال کردن (۳)، (۲) و (۱) می‌بینیم که $a_3$ سنگه‌ای برای سنجش $a_1$ و $a_0$ است و گرنه ادامه می‌دهیم. ادعا می‌کنیم:

**(۱—۱) گزاره.** $a_0$ و $a_1$ همسنگ هستند اگر و تنها اگر فرایند بالا در تعدادی متناهی گام به باقیماندهٔ صفر برسد، یعنی عدد طبیعی $k$ وجود داشته باشد که $a_{k-1} = n_k a_k$، $n_k$: عدد طبیعی. در این صورت $a_k$ سنگه‌ای برای سنجش $a_0$ و $a_1$ است.

**اثبات.** اگر فرایند فوق در $k$ گام به صفر برسد داریم:

$$\begin{cases} a_0 = n_1 a_1 + a_2, & 0 < a_2 < a_1 \qquad \text{عدد طبیعی} : n_1 \\ a_1 = n_2 a_2 + a_3, & 0 < a_3 < a_2 \qquad \text{عدد طبیعی} : n_2 \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{k-2} = n_{k-1} a_{k-1} + a_k, & 0 < a_k < a_{k-1} \qquad \text{عدد طبیعی} : n_{k-1} \\ a_{k-1} = n_k a_k & \qquad\qquad\qquad \text{عدد طبیعی} : n_k \end{cases} \tag{۴}$$

رابطهٔ آخر نشان می‌دهد $a_{k-1}$ مضرب صحیحی از $a_k$ است، پس از رابطه یکی به آخر $a_{k-2}$ مضربی از $a_k$ است، و به همین ترتیب با صعود به دو رابطهٔ اول نتیجه می‌شود که $a_0$ و $a_1$ هر دو مضرب صحیحی از $a_k$ هستند. یعنی $a_k$ سنگه‌ای برای سنجش $a_0$ و $a_1$ است. بالعکس فرض کنید $a_0$ و $a_1$ همسنگ باشند، در این صورت عددی $u > 0$ به عنوان سنگه وجود دارد که $a_0$ و $a_1$ هر دو مضرب صحیحی از $u$ هستند. از رابطهٔ اول بالا نتیجه می‌شود که $a_2$ نیز مضربی صحیح از $u$ است، سپس از رابطه بعد $a_3$ مضربی صحیح از $u$ است، و به همین ترتیب اگر ثابت شده باشد که $a_0, a_1, \ldots, a_p$ مضرب صحیح $u$ هستند و رابطهٔ بعدی به شکل

$$a_{p-1} = n_p a_p + a_{p+1}$$

باشد. نتیجه می‌گیریم که $a_{p+1} = a_{p-1} - q_p a_p$ مضرب صحیحی از $u$ است. حال اگر این فرایند به باقیماندهٔ صفر نرسد، دنباله باقیمانده‌ها به صورت نزولی زیر است:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$$

که در اینجا همهٔ $a_p$ ها مضرب صحیحی از عدد مثبت $u$ می‌باشند. چنین وضعیتی غیرممکن است زیرا که بین دو عدد $u$ و $a_1$ فقط تعدادی متناهی مضرب صحیح $u$ می‌گنجد. این امر نشان می‌دهد که اگر $a_0$ و $a_1$ همسنگ باشند، فرایند بالا بالاخره به باقیمانده صفر می‌رسد و آخرین مقسوم‌علیه به‌دست آمده سنگه لازم است. $\square$

با اتکاء به مطلب بالا و استدلالی هندسی، هیپاسوس نشان داد نسبت‌های قطر و ضلع پنج‌ضلعی منتظم همسنگ نیستند بدین ترتیب که اگر فرایند فوق برای آنها پیاده شود هیچگاه به باقیمانده صفر نمی‌رسیم. به شکل (۲) توجه کنید. از تساوی زوایای داخلی و اضلاع پنج‌ضلعی منتظم مشاهده می‌کنیم که هر قطر موازی ضلعی است که از هیچ یک از دو انتهای آن نمی‌گذرد: $AC \| ED$، $BE \| CD$، ... . بنابراین مثلث‌های $ABC$ و $EB'D$ به اضلاع دو به دو موازی متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB'}{ED}$$

طول قطر پنج‌ضلعی را $a_0$ و طول ضلع آن را $a_1$ می‌نامیم. از آنجا که زوایای داخلی پنج‌ضلعی باز هستند ($108°$) داریم $a_0 > a_1$. چون چهارضلعی $ABCB'$ متوازی‌الاضلاع است داریم $EB' = a_0 - a_1$. پس

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_0 - a_1}{a_1}$$

$a_0 - a_1$ را به $a_2$ نمایش می‌دهیم. داریم $a_2 < a_1$ زیرا که در مثلث $EB'D$ هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. پس:

$$a_0 = 1 \cdot a_1 + a_2 \quad , \quad 0 < a_2 < a_1$$

حال $a_1 - a_2$ را به $a_3$ نمایش می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که $a_3$ برابر طول پنج‌ضلعی منتظم کوچک $A'B'C'D'E'$ است زیرا که طول $AB'$ برابر $a_1$ و طول $AC'$ برابر $a_2$ است. از طرفی دیگر طول قطر

$A'B'C'D'E'$ برابر $a_2$ است زیرا که اگر از $A'$ به $D'$ و $C'$ وصل کنیم متوازی الاضلاعی ایجاد می‌شود ($A'D'$ و $AD$ هر دو موازی $BC$ هستند: $A'C'$ و $AC$ هر دو موازی $DE$) بنابراین $a_3 < a_2$ و داریم:

$$a_1 = 1 \cdot a_2 + a_3 \quad , \quad 0 < a_3 < a_2$$

حال اگر پنج‌ضلعی منتظم $A'B'C'D'E'$ به ضلع $a_3$ و قطر $a_2$ را در نظر بگیریم، مجدداً وضعیت پنج‌ضلعی متشابه $ABCDE$ با طول ضلع و طول قطر به ترتیب $a_1$ و $a_0$ تکرار می‌شود، یعنی خواهیم داشت

$$a_2 = 1 \cdot a_3 + a_4 \quad , \quad 0 < a_4 < a_3$$

$$a_3 = 1 \cdot a_4 + a_5 \quad , \quad 0 < a_5 < a_4$$

به طور کلی اگر $a_i$ ها تا $a_n$ تعریف شده باشند، با تعریف $a_{n+1} = a_{n-1} - a_n$ و با توجه به اینکه همواره با رسم کردن قطرهای پنج‌ضلعی منتظم یک پنج‌ضلعی منتظم دیگر در درون پنج‌ضلعی پدید می‌آید خواهیم داشت:

$$a_{n-1} = 1 \cdot a_n + a_{n+1} \quad , \quad 0 < a_{n+1} < a_n$$

بدین ترتیب در وضعیت گزاره ۱-۱ هستیم و در شقی که هرگز باقیمانده به صفر نمی‌رسد، پس $a_0$ و $a_1$ همسنگ نیستند. یا به عبارت دیگر $\frac{a_0}{a_1}$ ناگویا است!

تمرین ۱. نشان دهید $\frac{a_0}{a_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. این نسبت به نسبت طلایی معروف است و خواص ریاضی جالب توجهی دارد که بعضی از دوران باستان شناخته شده بودند. بالاخص یونانیان "زیباترین" مستطیل از نظر تناسب اضلاع را، مستطیلی می‌دانستند که نسبت طول به عرض آن برابر نسبت طلایی باشد. نشان دهید این مستطیل‌ها، و فقط این مستطیل‌ها، این ویژگی را دارند که اگر از آنها یک مربع به ضلع عرض مستطیل داده شده برداشته شود، مستطیل باقیمانده متشابه با مستطیل اولیه است.

تمرین ۲. نشان دهید اگر عدد طبیعی $n$ مجذور کامل نباشد، $\sqrt{n}$ ناگویا است. (راهنمایی: از تجزیه اعداد طبیعی به عوامل اول استفاده کنید.)

در اینجا باید به این مطلب اشاره شود که نظام عددنویسی متداول امروز به صورت اعشاری (یا هر مبنای دیگر) در زمان یونان باستان وجود نداشت. یک نسبت گویا که مطابق (۱ ۱) در $k$ گام به سنگه می‌رسد به صورت زیر نمایش داده می‌شد:

$$n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\ddots_{n_{k-1}} + \frac{1}{n_k}}}} \qquad (۵)$$

چنین عبارتی را یک کسر مسلسل متناهی (یا مختومه) می‌نامند. توجه کنید که طبق (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a_1} &= n_1 + \frac{a_2}{a_1} = n_1 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} \\ &= n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{a_3}{a_2}} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} \end{aligned}$$

و با ادامهٔ استفاده از (۴) به (۵) می‌رسیم. در مورد نسبت‌های ناگویا کسر مسلسل مختومه نمی‌شود. مثلاً در مورد نسبت طلایی نمایش زیر به‌دست می‌آید:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots 1 + \cdots}}} \qquad (۶)$$

کسرهای مسلسل امروزه نیز در ریاضیات کاربردهای مهم دارند، نه برای نمایش روزمرهٔ اعداد، بلکه به منظور محاسبات تقریبی دقیق و نیز در پاره‌ای مقولات نظری.

با روش امروزی عددنویسی (به پایهٔ ۱۰ یا هر پایهٔ دیگر) می‌توان رهیافت ساده‌ای برای اثبات وجود نسبت‌های ناگویا مشاهده کرد. فرض کنید می‌خواهیم نسبت $\frac{m}{n}$، $m$ و $n$ دو عدد طبیعی، را به صورت اعشاری بنویسیم. به روش معمولی تقسیم اگر $m$ بر $n$ بخش‌پذیر باشد که به یک عدد طبیعی می‌رسیم. و گرنه، پس از استفاده از همهٔ ارقام $m$، باقیمانده‌ای حاصل می‌شود که از $n$ کوچکتر و از صفر بزرگتر است. در این صورت با افزودن یک صفر به طرف راست باقیمانده به عمل تقسیم ادامه می‌دهیم. هر بار عددی کوچکتر از به عنوان باقیمانده به‌دست می‌آید. اگر این باقیمانده زمانی صفر شود به عددی به شکل $c_0/c_1c_2\ldots c_k$ رسیده‌ایم به معنای

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k}$$

است. اگر باقیمانده هیچگاه صفر نشود، هر باقیمانده باید یکی از اعداد ۱ − $n$ ,... ,۲ ,۱ باشد. بنابراین قطعاً با $n$ بار تکرار، باقیمانده‌ای برای بار دوم ظاهر خواهد شد. از آن پس ارقام اعشاری به صورت اولین ظهور این باقیمانده تکرار خواهند شد. بنابراین اگر نمایش اعشاری $\frac{m}{n}$ مختومه نشود، ارقام پس از اعشار مالاً به صورت تناوبی تکرار خواهند شد. بنابراین هر کسر اعشاری که مالاً تناوبی نباشد نمی‌تواند نمایشگر یک عدد گویا باشد. بدین ترتیب، مثلاً:

$$۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱...$$

که در آن طول بلوک‌های صفر هر بار یکی نسبت به قبلی افزایش می‌یابد و امکان تناوب در آن وجود ندارد برابر هیچ کسر $\frac{m}{n}$ نیست. تنها سؤالی که می‌ماند این است که آیا عبارت بالا واقعاً یک "عدد" است؟ یا به طور کلی، آیا می‌توان هر عبارت به شکل

$$c_۰/c_۱c_۲c_۳...$$

که در آن $c_۰$ یک عدد صحیح نامنفی و بقیهٔ $c_i$ ها رقم (یعنی اعداد ۰ تا ۹) هستند یک "عدد" تلقی کرد؟ برای پاسخ به این سؤال لازم است که مفهوم "عدد" به طور دقیق‌تر بررسی شود و این در جلسه آینده انجام خواهد شد.

# تابع‌های پیوسته: مثال‌های ابتدایی

مفهوم پیوستگی یا پایداری محاسبه در بخش قبل معرفی شد. خواننده ممکن است شباهتی میان استدلال‌هایی که در بحث مثال‌های ۹−۱−۲ و ۹−۱−۳ به‌کار رفت و استدلال همگرایی حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت دنباله‌های همگرا مشاهده کرده باشد. این شباهت تصادفی نیست. در واقع می‌توان پیوستگی را با ضابطه‌ای بر اساس همگرایی دنباله‌ها بیان کرد.

(۱−۱۰) گزاره. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است که $S$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است و $a \in S$. در این صورت $f$ در $a$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ $(a_n)$ از نقاط $S$ که $a_n \longrightarrow a$ داشته باشیم $f(a_n) \longrightarrow f(a)$.

دنباله همگرا به $a$ را می‌توان سلسله‌ای از اندازه‌گیری‌های تدریجاً دقیق‌تر یک داده تلقی کرد و محتوای این گزاره این است که در صورت پیوستگی $f$ در $a$، اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر ورودی $a$، نتیجه‌های دقیق‌تر خروجی را فراهم می‌آورند.

برهان. فرض کنید $f$ در $a$ پیوسته است و $a_n \longrightarrow a$. می‌خواهیم ثابت کنیم $f(a_n) \longrightarrow f(a)$. پس برای $\epsilon > 0$ داده شده، می‌خواهیم $N$ را طوری تعیین کنیم که اگر $n > N$، آنگاه $|f(a_n) - f(a)| < \epsilon$. بنابر پیوستگی $f$ در $a$، برای همین $\epsilon$، $\delta$ وجود دارد که اگر $|x - a| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. حال چون $a_n \longrightarrow a$، برای این $\delta > 0$، $N$ وجود دارد که اگر $n > N$، آنگاه $|a_n - a| < \delta$. بنابراین این $N$ شرط مورد نظر را ارضاء می‌کند.

بالعکس فرض کنید برای هر دنبالهٔ $(a_n)$ که $a_n \longrightarrow a$ داریم $f(a_n) \longrightarrow f(a)$. نشان می‌دهیم $f$ در $a$ پیوسته است. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. اگر $f$ در $a$ پیوسته نباشد هیچ $\delta > 0$ نمی‌توان یافت که برای هر نقطهٔ دامنه با $|x-a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. مثلاً برای $\delta = 1$، نقطه‌ای $x_1$ در دامنه وجود دارد که $|x_1 - a| < 1$ و $|f(x_1) - f(a)| \geq \epsilon$. به همین ترتیب برای هر عدد صحیح مثبت $n$، نقطه‌ای $x_n$ در دامنه یافت می‌شود که $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ و $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$. حال توجه کنید که دنبالهٔ به‌دست آمده از نقاط دامنه، یعنی $(x_n)$ به $a$ همگراست. اگر $\rho > 0$ داده شده باشد، عدد $N$ را طوری می‌گیریم که $\frac{1}{N} < \rho$، پس اگر $n > N$، داریم

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \rho$$

پس $x_n \longrightarrow a$. طبق فرض باید داشته باشیم $f(x_n) \longrightarrow f(a)$، پس برای $\epsilon > 0$ بالا، باید $N$ وجود داشته باشد که $n > N$ نتیجه دهد $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$، در حالی که داریم $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ برای هر $n$. این تناقض نشان می‌دهد که فرض ناپیوستگی $f$ در $a$ درست نیست. $\square$

به کمک گزارهٔ بالا می‌توان پیوستگی مجموع، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت تابع‌های پیوسته را نتیجه گرفت.

(۱۰–۲) گزاره. فرض کنید تابع‌های $f$ و $g$ دارای دامنهٔ مشترک تعریف $S$ هستند، $a \in S$، و هر دو تابع در نقطهٔ $a$ پیوسته‌اند. در این صورت:

الف) تابع $f+g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ تعریف می‌شود در $x = a$ پیوسته است.

ب) تابع $f \cdot g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ تعریف می‌شود در $x = a$ پیوسته است.

ج) فرض کنید مضافاً $g(a) \neq 0$ و $S' = \{x \in S \mid g(x) \neq 0\}$. در این صورت تابع $\frac{f}{g} : S' \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ تعریف می‌شود در $x = a$ پیوسته است.

برهان. اثبات این احکام همه به سادگی از احکام مشابه برای دنباله‌ها، گزارهٔ ۶—۴، و گزاره ۱۰—۱ نتیجه می‌شوند. به عنوان نمونه، اثبات (ج) را ارائه می‌کنیم. فرض کنید $(x_n)$ دنباله‌ای در $S'$ است که $x_n \longrightarrow a$ باید نشان دهیم $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$. بنابر پیوستگی $f$ و $g$ در نقطهٔ $a$ داریم $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ و $g(x_n) \longrightarrow g(x)$ و $g(a) \neq 0$. طبق گزاره (۶—۴) نتیجه می‌شود که $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$. $\square$

به کمک گزارهٔ بالا می‌توان دستهٔ بزرگی از تابع‌های پیوسته را شناسایی کرد. نشان می‌دهیم تابع‌های گویا، یعنی تابع‌هایی که مقدار آنها برابر نسبت دو چندجمله‌ای است:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n} \tag{۱}$$

در هر نقطه که مخرج صفر نباشد پیوسته‌اند.

**گام اول.** هر تابع ثابت پیوسته است. این واضح است زیرا که برای هر $\epsilon > 0$، $\epsilon > 0 = |f(x) - f(a)|$ مستقل از $x$.

**گام دوم.** "تابع همانی"، یعنی تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = x$، همه‌جا پیوسته است. برای $a \in \mathbb{R}$ و $\epsilon > 0$ داده شده، با گرفتن $\delta = \epsilon$، $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \epsilon$.

**گام سوم.** هر تابع تک‌جمله‌ای، $f(x) = cx^k$ پیوسته است، زیرا که حاصل‌ضرب متوالی تابع‌های با مقدار $c$، $x$، ...، $x$ است.

**گام چهارم.** هر تابع چندجمله‌ای $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_p x^p$ پیوسته است زیرا که مجموع تابع‌های پیوسته گام سوم می‌باشد.

**گام پنجم.** در نقاطی که مخرج (۱) صفر نباشد. طبق قسمت (ج) گزاره (۱۰—۲) خارج‌قسمت دو تابع از نوع گام چهارم پیوسته است.

بدین ترتیب با اتکاء به گزارهٔ ۱۰—۲ می‌توان با استفاده از عملیات جبری از تابع‌های پیوستهٔ داده شده تابع‌های پیوستهٔ جدید ساخت. حربهٔ دیگری برای تولید تابع‌های پیوسته، استفاده از ترکیب

تابع‌های پیوسته است:

(۱۰–۳) گزاره. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع‌های داده شده‌اند، $a \in S$، $b = f(a)$ در $T$ قرار دارد، $f$ در $a$ پیوسته است و $g$ در $b$ پیوسته. در این صورت تابع $g \circ f$ در $a$ پیوسته است.

**برهان.** قبل از ارائه اثبات لازم است یادآوری کنیم که دامنهٔ تعریف $g \circ f$ زیرمجموعهٔ زیر از $S$ است:

$$S' = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

بدین ترتیب $a$ در $S'$ است و $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ معنی دارد. برای $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ را جستجو می‌کنیم به طوری که اگر $x \in S'$ و $|x - a| < \delta$، آنگاه $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \epsilon$. نخست چون $g$ در نقطهٔ $b = f(a)$ پیوسته است، $\delta' > 0$ وجود دارد که اگر $y \in T$ و $|y - b| < \delta'$، آنگاه $|g(y) - g(b)| < \epsilon$. حال چون $f$ در $a$ پیوسته است و $f(a) = b$، برای $\delta' > 0$ بالا، $\delta > 0$ متناظری وجود دارد که اگر $x \in S$ و $|x - a| < \delta$ آنگاه $|f(x) - f(a)| < \delta'$. بالاخص چون $S' \subset S$، همین حکم برای عناصر $x$ از $S'$ که $|x - a| < \delta$ نیز برقرار است. بنابراین برای $x \in S'$ که $|x - a| < \delta$ داریم $|f(x) - f(a)| < \delta'$ و طبق انتخاب $\delta'$، آنگاه $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$ و پیوستگی $g \circ f$ در $x = a$ به اثبات می‌رسد. $\square$

در اینجا ضمن یادآوری توابع مثلثاتی، خواص پیوستگی آنها را بررسی می‌کنیم. برای بیان "اندازه زاویه" به طریق زیر عمل می‌کنیم. دایرهٔ واحد $x^{2} + y^{2} = 1$ را در نظر بگیرید. همهٔ زوایا به صورت قطبی با رأس در مبدأ مختصات و نیم‌خط مثبت محور $x$ به عنوان ضلع آغازی در نظر گرفته می‌شوند. اندازهٔ زاویه همواره به "رادیان" است، یعنی نسبت طول کمان مقابل به زاویه روی دایره، به شعاع دایره (که در اینجا واحد فرض شده است). از آنجا که این اندازه به صورت نسبت دو کمیت همجنس (هر دو طول) است، اندازهٔ زاویه به رادیان یک "عدد" حقیقی است. جهت مثلثاتی را جهت مثبت و جهت عقربهٔ ساعت را منفی قرارداد می‌کنیم. بدین ترتیب برای هر عدد حقیقی یک زاویه منظور می‌شود که به معنای طی کردن مسافتی روی محیط دایره (در جهت مثبت یا منفی، بسته به این که عدد داده شده مثبت یا منفی باشد) برحسب رادیان به اندازهٔ آن عدد است. بدین ترتیب برای هر عدد حقیقی $\theta$، نقطهٔ

مشخصی روی دایرهٔ واحد به‌دست می‌آید. مختصهٔ $x$ این نقطه را $\cos\theta$ و مختصهٔ $y$ این نقطه را $\sin\theta$ می‌نامیم. توابع مثلثاتی دیگر به صورت $\tan = \frac{\sin}{\cos}$، $\cot = \frac{\cos}{\sin}$، $sec = \frac{1}{\cos}$ و $csc = \frac{1}{\sin}$ تعریف می‌شوند که البته دامنهٔ تعریف این چهار تابع حقیقی همهٔ $\mathbb{R}$ نیست، بلکه مجموعهٔ نقاطی از $\mathbb{R}$ است که در آن مخرج عبارت تعریف‌کننده صفر نباشد. اتحادهای مربوط توابع مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا مانند $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$ همان طور که در بررسی اعداد مختلط دیدیم، همه از ضرب اعداد مختلط نتیجه می‌شوند و در اینجا دانسته فرض می‌شوند.

**(۱۰—۴) گزاره.** هر شش تابع مثلثاتی در دامنهٔ تعریف خود پیوسته‌اند.

**برهان.** کافی است پیوستگی $\sin$ و $\cos$ ثابت شود زیرا سایر توابع از ضرب و تقسیم این دو به‌دست می‌آیند و هر جا که مخرج صفر نباشد، طبق ۱۰—۲ پیوسته خواهند شد. به عنوان نمونه پیوستگی $\cos$ را ثابت می‌کنیم، پیوستگی $\sin$ مشابه است و نیز می‌توان با توجه به $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$، پیوستگی آن را به عنوان ترکیب دو تابع پیوسته $\theta \longmapsto \frac{\pi}{2} - \theta$ و $\cos$ نتیجه گرفت. نخست نشان می‌دهیم کسینوس در ۰ پیوسته است. چون $\cos 0 = 1$، باید ثابت کنیم که برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta$ وجود دارد که هرگاه $|\theta| = |\theta - 0| < \delta$، آنگاه $|\cos\theta - 1| < \epsilon$. برای $|\theta|$ کوچک و مثبت طول $OH$ برابر $\cos\theta$ است و برای $|\theta|$ کوچک منفی طول $OK$ برابر $\cos\theta$ می‌باشد. بنابراین $|\cos\theta - 1| = 1 - \cos\theta$ برابر طول $HT$ (یا $KT$) در حالت $\theta$ مثبت (به ترتیب در حالت $\theta$ منفی) می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویه $AHT$ (به ترتیب $BKT$) طول ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از طول وتر کوچکتر است، یعنی $0 < 1 - \cos\theta < AT$ (به ترتیب $0 < 1 - \cos\theta < BT$). از طرفی دیگر طول وتر $AT$ (به ترتیب $BK$) از طول کمان $AT$ (به ترتیب $BT$) کوچکتر است، پس

$$0 \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta| \qquad (2)$$

حال اگر برای $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta$ را برابر $\epsilon$ بگیریم، از $|\theta - 0| < \delta$ نتیجه شود که $|\cos\theta - 1| < \epsilon$ و پیوستگی $\cos$ در $\theta = 0$ به اثبات می‌رسد. به همین ترتیب پیوستگی $\sin$ در $\theta = 0$ را می‌توان ثابت کرد. در واقع توجه کنید که $|\sin\theta|$ برابر طول $AH$ یا $BK$ است که هر یک به دلیل مشابه فوق از $|\theta|$ کوچکتر

است، بنابراین

$$0 < |\sin\theta| < |\theta| \qquad (۳)$$

یا $|\sin\theta - \sin 0| \le |\theta - 0|$ و مجدداً با گرفتن $\epsilon = \delta$ می‌توان پیوستگی $\sin$ در $\theta = 0$ را نتیجه گرفت.

**حال نشان می‌دهیم $\cos$ در هر نقطه $\theta_0$ پیوسته است. برای $\epsilon > 0$ داده شده، می‌خواهیم $\delta > 0$ پیدا** کنیم که $|h| < \delta$ نتیجه دهد $|\cos(\theta_0 + h) - \cos\theta_0| < \epsilon$ داریم

$$\begin{aligned}
|\cos(\theta_0 + h) - \cos\theta_0| &= |\cos\theta_0 \cos h - \sin\theta_0 \sin h - \cos\theta_0| \\
&\le |\cos\theta_0(\cos h - 1)| + |\sin\theta_0||\sin h| \\
&< |\cos h - 1| + |\sin h| \qquad (\text{چون } |\cos\theta_0| < 1, |\sin\theta_0| < 1) \\
&\le 2|h| \qquad (\text{طبق (۲) و (۳)})
\end{aligned}$$

بنابراین با گرفتن $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

بدین ترتیب اکنون با توجه به گزاره‌های ۱۰–۲، ۱۰–۳ و ۱۰–۴، می‌توان در مورد پیوستگی انواع آمیزه‌های توابع گویا و توابع مثلثاتی بحث کرد.

# خواص تابع‌های پیوسته (۱)

در دو بخش قبل کوشش کردیم بر مفهوم پیوستگی به عنوان "پایداری محاسبه" تأکید کنیم و خواننده را از اینکه پیوستگی را نوعی اتصال و یکپارچگی نمودار تابع تلقی کند بر حذر کنیم. در واقع اگر دامنهٔ یک تابع پیوسته یک بازه باشد، نمودار تابع برخی خواص "اتصال و یکپارچگی" را خواهد داشت. بعضی احکام این بخش در تأیید این ادعا هستند.

(۱۱—۱) قضیهٔ مقدار بینی. فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، $A = f(a)$ و $B = f(b)$. در این صورت برای هر عدد حقیقی $C$ بین $A$ و $B$، نقطه‌ای $c$ در $[a,b]$ وجود دارد که $f(c) = C$.

اگر نمودار $f$ را یک ریسمان فرض کنیم که بین نقطهٔ $(a,A)$ و $(b,B)$ کشیده شده است، طبق حکم این قضیه، ریسمان برای گذر از ارتفاع $A$ به ارتفاع $B$ باید از هر ارتفاع بینابینی $C$ نیز گذر کند که تأییدی بر به هم بستگی و یکپارچگی ریسمان است. در شکل ۱، نمودار تابع سه بار، به‌ازای مقادیر $c_1$، $c_2$ و $c_3$ در $[a,b]$، از ارتفاع $C$ عبور می‌کند.

طبعاً برای اثبات این قضیه فقط می‌توان از تعریف تابع پیوسته و احکام دیگری که از این تعریف نتیجه شده باشد استفاده کرد. نخست حالتی خاص از این قضیه را به صورت زیر به اثبات می‌رسانیم. سپس نشان می‌دهیم حالت کلی به سادگی از این حالت خاص نتیجه می‌شود:

(۱۱—۲) (حالت خاص) فرض کنید $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که $g(0) < 0$ و $g(1) > 0$. در این صورت نقطه‌ای $r$ در $[0,1]$ وجود دارد که $g(r) = 0$.

برهان. نقاط بازهٔ $[0, 1]$ در مبنای ۲ می‌نویسیم. بدین ترتیب هر عدد نمایشی به شکل $0/n_1n_2n_3\ldots$ دارد که در آن $n_i$ برابر صفر یا یک است. بالاخص نقطهٔ ۱ به صورت $0/1111\ldots$ نمایش داده می‌شود. ما در جستجوی نقطه‌ای

$$r = 0/r_1r_2r_3\ldots$$

هستیم که $g(r) = 0$. ارقام پس از ممیز چنین عددی را متوالیاً محاسبه خواهیم کرد. $g(\frac{1}{2})$ را در نظر می‌گیریم. اگر $g(\frac{1}{2}) = 0$ عددی با خاصیت مطلوب در بازهٔ $[0, 1]$ پیدا شده است و $\frac{1}{2} = 0/1000\ldots$ (طرف راست به مبنای ۲) جواب مورد نظر است. اگر $g(\frac{1}{2}) \neq 0$ یکی از دو حالت $g(\frac{1}{2}) > 0$ یا $g(\frac{1}{2}) < 0$ برقرار است. قرار می‌دهیم:

$$r_1 = \begin{cases} 0 & g(\frac{1}{2}) > 0 \text{ اگر } \\ 1 & g(\frac{1}{2}) < 0 \text{ اگر } \end{cases}$$

اگر $g(\frac{1}{2}) > 0$ بازهٔ $[0, \frac{1}{2}]$ را $I_1$ می‌نامیم و از این پس جستجو را در این بازه ادامه می‌دهیم زیرا که همانند بازهٔ اولیه $[0, 1]$، تابع در انتهای چپ این بازه منفی و در انتهای راست مثبت است. چون نمایش نقاط بازهٔ $[0, \frac{1}{2}]$ در مبنای ۲ با رقم ۰ شروع می‌شود قرار دادیم $r_1 = 0$. همین طور اگر $g(\frac{1}{2}) < 0$، بازهٔ $[\frac{1}{2}, 1]$ را $I_1$ خوانده و جستجو برای $r$ را در این بازه ادامه می‌دهیم که $g$ در انتهای چپ آن منفی و در انتهای راست آن مثبت است. چون نمایش نقاط این بازه در مبنای ۲ با رقم ۱ شروع می‌شود قرار دادیم $r_1 = 1$. در هر صورت حال به بازهٔ $I_1$ توجه می‌کنیم و مجدداً این بازه را به دو زیربازهٔ بسته چپ و راست تجزیه می‌کنیم. اگر $m_1$ نقطهٔ میانی (مکان تجزیه) باشد به علامت $g(m_1)$ نگاه می‌کنیم. اگر $g(m_1) = 0$، $m_1$ ویژگی مورد نظر را دارد و کار تمام است؛ در غیر این صورت $g(m_1)$ باید مثبت یا منفی باشد. اگر $g(m_1) > 0$ آنگاه نیمهٔ چپ $I_1$ دارای این ویژگی است که در انتهای چپ آن تابع $g$ منفی و در انتهای راست آن $g$ مثبت است. از این پس جستجو برای $r$ را در این بازه پیگیری می‌کنیم و قرار می‌دهیم $r_2 = 0$ زیرا در نمایش مبنای ۲ نیمهٔ چپ $I_1$ رقم دوم پس از ممیز ۰ است. بالعکس اگر $g(m_1) < 0$، نیمه راست $I_1$ دارای این ویژگی است که در دو انتهای چپ و راست تابع $g$ به ترتیب منفی و مثبت است و این زیربازه را برای ادامهٔ جستجو انتخاب می‌کنیم.

در این صورت طبعاً قرار می‌دهیم $r_2 = 1$. در هر صورت بازهٔ انتخاب شده را به $I_2$ نمایش می‌دهیم. حال مجدداً علامت نقطهٔ وسط $I_2$، $m_2$ را در نظر می‌گیریم و عمل بالا را تکرار می‌کنیم. به طور کلی بسته به این که علامت $g(m_k)$ مثبت یا منفی باشد رقم $k$ـام پس از ممیز را به ترتیب ۰ یا ۱ می‌گیریم. و اگر $g(m_k) = 0$، عدد مورد نظر به صورت $r = 0/r_1 \ldots r_k$ به‌دست آمده است. وقتی هیچ $g(m_k)$ صفر نشود، هر رقم پس از اعشار محاسبه می‌شود و عددی $r = 0/r_1r_2r_3\ldots$ به‌دست می‌آید. ادعا می‌کنیم $g(r) = 0$. مبنای شهودی این ادعا این است که دنباله‌ای از بازه‌های تودرتو در نظر گرفته‌ایم $[0,1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ که طول آنها به ترتیب $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ است و تابع $g$ در انتهای چپ هر یک از این بازه‌ها منفی و در انتهای راست آن مثبت است. عدد $r$ در همهٔ این بازه‌ها قرار دارد، پس دنباله‌ای از چپ به آن میل می‌کند که در همهٔ نقاط دنباله تابع $g$ منفی است و دنباله از طرف راست به آن میل می‌کند که در تمام نقاط آن $g$ مثبت است. از پیوستگی تابع $g$ نتیجه خواهیم گرفت که $g(r) = 0$.

به روش برهان خلف عمل می‌کنیم. نشان می‌دهیم $g(r) \neq 0$ به تناقض منجر می‌شود. اگر $g(r) \neq 0$، $g(r)$ باید مثبت یا منفی باشد. حالت $g(r) > 0$ را در نظر می‌گیریم، مورد $g(r) < 0$ کاملاً مشابه است. اگر $g(r) > 0$، نشان می‌دهیم بازه‌ای $]r-\delta, r+\delta[$ حول $r$ وجود دارد که برای هر نقطهٔ $x$ از $[0,1]$ که در این بازه قرار گیرد داریم $g(x) > 0$. دلیل، پیوستگی $g$ در $r$ است (و این در واقع تنها استفاده ما از پیوستگی در اثبات است). زیرا اگر $\epsilon > 0$ را کوچکتر یا مساوی $g(r)$ بگیریم، طبق تعریف پیوستگی $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر عنصر دامنهٔ $g$ (یعنی $[0,1]$) که در فاصله کوچکتر از $\delta$ از $r$ قرار گیرد داریم:

$$-\epsilon < g(r) - g(x) < \epsilon$$

چون $0 < \epsilon \leq g(r)$، از نامساوی طرف راست نتیجه می‌گیریم که $g(x) > 0$. حال توجه کنید که طول بازهٔ $I_n$ برابر $\frac{1}{2^n}$ است و اگر $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد $\frac{1}{2^n} < \delta$. از آنجا که $r$ عضو $I_n$ هست و طول $I_n$ کوچکتر از $\delta$، نتیجه می‌شود که $I_n$ به تمامی در $]r-\delta, r+\delta[$ قرار دارد. بنابراین در هر نقطهٔ $I_n$، $g$ باید مثبت باشد، در حالی که در انتهای چپ $I_n$ تابع $g$ همواره منفی بود. این تناقض نشان می‌دهد که $g(r) > 0$ ممکن نیست. مشابهاً $g(r) < 0$ نیز منجر به تناقض می‌شود. پس لزوماً $g(r) = 0$. □

اکنون نشان می‌دهیم که حالت کلی قضیه ۱۱—۱ به سادگی از ۱۱—۲ نتیجه می‌شود. فرض کنید در صورت ۱۱—۱ داریم $A < B$. حالت $B < A$ را می‌توان با در نظر گرفتن تابع $f$– نتیجه گرفت. پس $A < C < B$. ایدهٔ اثبات این است که از یک سو با کم کردن مقدار ثابت $C$ از $f(x)$، تابعی پیوسته به‌دست می‌آوریم که در انتهای چپ منفی و در انتهای راست مثبت است؛ و از سویی دیگر با تعییر مقیاس و انتقال $[a,b]$ به $[\circ,\text{۱}]$، مسأله را به ۱۱—۲ تبدیل می‌کنیم. برای این کار، تابع $g : [\circ,\text{۱}] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = f((\text{۱} - t)a + tb) - C$$

توجه کنید که وقتی متغیر $t$ بازهٔ $[\circ,\text{۱}]$ را طی می‌کند، عبارت درجه یک $(\text{۱} - t)a + tb$ بازهٔ $[a,b]$ را می‌پیماید.

تابع $\phi$ که به صورت $\phi(t) = (\text{۱} - t)a + tb$ تعریف می‌شود پیوسته است چون از درجه ۱ نسبت به $t$ است؛ داریم $g(t) = f(\phi(t)) - C$. چون ترکیب تابع‌های پیوسته، پیوسته است $f \circ \phi$ پیوسته است و افزودن تابع ثابت $C$– نیز پیوستگی را حفظ می‌کند، پس $g$ پیوسته است. ولی $g(\circ) = A - C < \circ$ و $g(\text{۱}) = B - C > \circ$، پس طبق ۱۱—۲، نقطه‌ای $r$ در $[\circ,\text{۱}]$ وجود دارد که $g(r) = \circ$، یعنی

$$f((\text{۱} - r)a + rb) - C = \circ$$

حال $c = (\text{۱} - r)a + rb$ نقطهٔ متناظر $r$ در $[a,b]$ است و داریم $f(c) = C$ چنان که حکم بود.

تعدادی از احکام مربوط به تابع‌های پیوسته که حدس صحت آنها مبتنی بر شهود اتصال نمودار تابع پیوسته است از قضیهٔ مقدار بینی نتیجه می‌شوند. در باقیمانده این بخش دو نمونه از این احکام را بررسی خواهیم کرد. یک مورد استفادهٔ سادهٔ این قضیه در اثبات وجود ریشه برای معادلات است.

مثال ۱. نشان دهید معادلهٔ $\sin x - x^\text{۲} + x + \text{۳} = \circ$ دارای دست‌کم دو ریشه در $[-\pi,\pi]$ است. عبارت $f(x) = \sin x - x^\text{۲} + x + \text{۳}$ یک تابع پیوسته تعریف می‌کند زیرا که مجموعی از تابع‌های پیوسته است. می‌خواهیم نشان دهیم دست‌کم دو $x$ متمایز در $[-\pi,\pi]$ وجود دارند که $f(x) = \circ$. توجه

کنید که:

$$f(-\pi) = -\pi^{2} - \pi + 3 < 0$$

$$f(\pi) = -\pi^{2} + \pi + 3 < 0$$

ولی $f(0) = 3 > 0$. بنابر قضیهٔ مقدار بینی $f(x) = 0$ هم در $[-\pi, 0]$ و هم در $[0, \pi]$ ریشه دارد، که بنابراین دو ریشهٔ متمایزاند.

مثال ۲. فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ یک تابع پیوسته است، یعنی در واقع می‌توان $f$ را یک تابع پیوسته از $[a,b]$ به $\mathbb{R}$ تصور کرد که برای هر $x$ در دامنه، $f(x) \in [a,b]$. نشان می‌دهیم نقطه‌ای $x_0$ در $[a,b]$ وجود دارد که $f(x_0) = x_0$. چنین نقطهٔ $x_0$ را یک نقطهٔ ثابت برای تابع $f$ می‌نامند. برای این کار، تابع کمکی $\phi(x) = x - f(x)$ را در نظر بگیرید، $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. $\phi$ نیز پیوسته است زیرا که تفاضل دو تابع پیوسته می‌باشد. چون $f(a) \in [a,b]$، داریم $f(a) \geq a$، پس $\phi(a) \leq 0$. همچنین $f(b) \in [a,b]$ نتیجه می‌دهد $f(b) \leq b$، پس $\phi(b) \geq 0$. اگر داشته باشیم $\phi(a) = 0$ یا $\phi(b) = 0$، داریم $f(a) = a$، یا به ترتیب $f(b) = b$، و وجود نقطهٔ ثابت به‌دست آمده است، پس فرض کنید $\phi(a) < 0$ و $\phi(b) > 0$. از قضیهٔ مقدار بینی نتیجه می‌گیریم نقطه‌ای $c$ در $[a,b]$ هست که $\phi(c) = 0$، یا $f(c) = c$ و حکم به اثبات می‌رسد. نمایش هندسی این مطلب را می‌توان به صورت زیر به خاطر سپرد. چون برای هر $x$ در $[a,b]$، $f(x)$ نیز در $[a,b]$ است، نمودار $f$ در مربع $[a,b] \times [a,b]$ محصور است. خط $y = x$ از گوشه چپ پایین این مربع به گوشهٔ راست بالا رسم شده است. نمودار $f$ ضلع چپ مربع را به ضلع راست مربع وصل می‌کند. حکم مسأله این است که این نمودار لزوماً خط $y = x$ را قطع می‌کند (شکل ۳).

اکنون به تشریح دو کاربرد قضیهٔ مقدار بینی که قبلاً اشاره کردیم می‌پردازیم.

(۱۱—۳) گزاره. فرض کنید $I$ یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و یک به یک. در این صورت $f$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

برهان. فرض کنید $x_0$ یک نقطهٔ درونی $I$ است. در این صورت ادعا می‌کنیم یک و تنها یکی از دو وضعیت زیر برقرار است:

**الف)** برای هر $x > x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$ و برای هر $x < x_0$ داریم $f(x) < f(x_0)$.

ب) برای هر $x > x_0$ داریم $f(x) < f(x_0)$ و برای هر $x < x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$.

برای اثبات فرض کنید $x_1 > x_0$. از آنجا که $f$ یک به یک است یا $f(x_1) > f(x_0)$ و یا $f(x_1) < f(x_0)$. نخست فرض کنید $f(x_1) > f(x_0)$. نشان می‌دهیم وضعیت (الف) برقرار است. اگر $x_2 < x_0$ باید داشته باشیم $f(x_2) < f(x_0)$ زیرا اگر $f(x_2) > f(x_0)$ و $f(x_1) > f(x_0)$، از یک به یک بودن $f$ نتیجه می‌گیریم که $f(x_1) \neq f(x_2)$. حال هر یک از $f(x_1)$ و $f(x_2)$ که بزرگتر باشد، مثلاً $f(x_1)$، تابع پیوستهٔ $f$ باید در گذر از $f(x_0)$ به $f(x_2)$ مقدار $f(x_1)$ را یک بار دیگر در بازهٔ بین $x_0$ و $x_2$ اتخاذ کند که خلاف یک به یک بودن $f$ است. حال فرض کنید $x_2 > x_0$، نشان می‌دهیم $f(x_2) > f(x_0)$. اگر $f(x_2) < f(x_0)$، آنگاه داریم $f(x_2) < f(x_0) < f(x_1)$. پس تابع پیوستهٔ $f$ باید در گذر از مقدار $f(x_2)$ به $f(x_1)$ دست‌کم یک بار مقدار $f(x_0)$ را بین $x_1$ و $x_2$ اتخاذ کند خلاف یک به یک بودن $f$ است زیرا که $x_0$ در یک طرف $x_1$ و $x_2$ قرار دارد. به همین ترتیب اگر برای یک نقطهٔ $x_1$ با $x_1 > x_0$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_0)$، می‌توانیم استدلال کنیم که وضعیت (ب) برقرار است.

برای ادامه اثبات، نقطه دلخواه درونی $x_0$ از $I$ را در نظر می‌گیریم. نسبت به $x_0$، یکی از دو شرط (الف) یا (ب) بالا برقرار است. در حالت (الف) نشان می‌دهیم $f$ لزوماً صعودی است و در حالت (ب) لزوماً نزولی. مثلاً فرض کنید وضعیت (ب) برقرار است. نشان می‌دهیم $f$ نزولی است. دو نقطه $x_1$ و $x_2$ در $I$ در نظر بگیرید که $x_1 < x_2$. باید ثابت کنیم $f(x_1) > f(x_2)$. وضعیت نسبی سه نقطهٔ $x_0$، $x_1$ و $x_2$ روی $I$ به یکی از سه صورت زیر است که در هر مورد استدلال لازم را ارائه می‌کنیم:

$x_0 < x_1 < x_2$ طبق (ب) داریم $f(x_1) < f(x_0)$ و $f(x_2) < f(x_0)$. حکم نخست برهان (برقرار بودن (الف) یا (ب)) برای هر نقطهٔ درونی درست است، پس اگر این حکم را برای نقطهٔ درونی $x_1$

به‌کار بریم. چون $f(x_1) < f(x_\circ)$، نتیجه می‌شود که $f(x_1) < f(x_2)$، همان گونه که می‌خواستیم.

$x_1 < x_\circ < x_2$ چون در وضعیت (ب) برای $x_\circ$ هستیم، داریم $f(x_1) > f(x_\circ)$ و $f(x_2) < f(x_\circ)$. پس $f(x_2) < f(x_1)$.

$x_1 < x_2 < x_\circ$ در اینجا حکم نخست برهان را برای نقطهٔ درونی $x_2$ به‌کار می‌گیریم. چون طبق (ب) $f(x_2) > f(x_\circ)$، نتیجه می‌شود که $f(x_1) > f(x_2)$ و حکم به اثبات می‌رسد.

استدلال در حالتی که (الف) برای $x_\circ$ برقرار باشد، کاملاً مشابه است و به خواننده واگذار می‌شود. □

کاربرد مهم دیگر قضیهٔ مقدار بینی که ارائه می‌کنیم پیوستگی وارون یک تابع پیوسته است. اگر $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، قرار می‌دهیم:

$$T = \{f(x) \mid x \in S\}$$

$T$ را مجموعهٔ مقادیر $T$ می‌نامند. اگر $f$ یک به یک باشد، به‌ازای هر $y \in T$ یک و تنها یک $x$ در $S$ وجود دارد که $y = f(x)$. به این ترتیب تابعی $f^{-1} : T \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود که $f^{-1}(y) = x$. $f^{-1}$ را وارون یا معکوس (ترکیبی) $f$ می‌نامند. دو حکم زیر برقرارند:

برای هر $x$ در $S$: $\quad f^{-1}(f(x)) = x$

برای هر $y$ در $S$: $\quad f(f^{-1}(y)) = y$

لازم به ذکر است که چون $f^{-1}$ نقش $x$ و $y$ نسبت به $f$ را تعویض می‌کند، نمودار $f^{-1}$ در واقع قرینهٔ نمودار $f$ نسبت به خط $y = x$ است (شکل ۴).

(۱۱–۴) گزاره. فرض کنید $I$ یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع یک به یک و پیوسته. در این صورت $f^{-1}$ نیز پیوسته است.

برهان. طبق گزارهٔ ۱۱–۳ تابع $f$ صعودی یا نزولی است. حکم را در حالتی که $f$ صعودی است ثابت می‌کنیم و حالت $f$ نزولی را که مشابه است به خواننده واگذار می‌کنیم. نخست توجه کنید که مجموعهٔ

تصویر، یعنی:

$$J = \{f(x) \mid x \in I\}$$

یک بازه است، بدین معنی که اگر $y_1$ و $y_2$ دو نقطهٔ $J$ باشند که $y_2 > y_1$، آنگاه $[y_1, y_2]$ به تمامی در $J$ قرار دارد. این مطلب را به این صورت توجیه می‌کنیم. چون $y_1$ و $y_2$ در $J$ هستند، $x_1$ و $x_2$ یگانه در $I$ وجود دارند که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. چون $f$ صعودی است، $x_1 < x_2$. حال اگر نقطه‌ای $y$ در $[y_1, y_2]$ باشد، چون $f$ روی $[x_1, x_2]$ پیوسته است، طبق قضیهٔ مقدار بینی باید عددی $x$ در $[x_1, x_2]$ یافت شود که $y = f(x)$، پس $y \in J$.

برای اثبات پیوستگی $f^{-1}$، طبق گزاره ۱۰—۱ بخش پیشین کافی است نشان دهیم که برای هر دنباله $(y_n)$ از نقاط $J$ (دامنهٔ $f^{-1}$) که $y_n \longrightarrow y$، $y \in J$، داریم $f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y)$. اول فرض کنید $y$ یک نقطهٔ درونی $J$ است و $f(x) = y$. ادعا می‌کنیم که در این صورت $x$ نیز یک نقطهٔ درونی $I$ است. برای این منظور، چون $y$ نقطهٔ درونی است، $\delta > 0$ وجود دارد که $[y - \delta, y + \delta]$ به تمامی در $J$ قرار دارد. پس $f(x_1) = y - \delta$ و $f(x_2) = y + \delta$، و از آنجا که $f$ صعودی است $x_1 < x < x_2$. پس بازهٔ $[x_1, x_2]$ حول $x$ به تمامی در $I$ قرار دارد و $x$ یک نقطهٔ درونی است. اکنون به اثبات $f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y)$ می‌پردازیم. قرار می‌دهیم $x_n = f^{-1}(y_n)$، یا معادلاً $f(x_n) = y_n$. دو نقطهٔ $x - \rho$ و $x + \rho$، $\rho > 0$، حول $x$ در $I$ در نظر بگیرید. باید ثابت کنیم $N$ به قسمی وجود دارد که برای $n > N$ داریم $x_n \in ]x - \rho, x + \rho[$. قرار دهید $\underline{y} = f(x - \rho)$ و $\overline{y} = f(x + \rho)$. چون $y_n \longrightarrow y$، $N$ وجود دارد که برای $n > N$ داریم $y_n \in ]\underline{y}, \overline{y}[$. نتیجه این که برای $n > N$ داریم $x_n \in ]x - \rho, x + \rho[$ و حکم به اثبات می‌رسد. وقتی $y$ یک نقطهٔ انتهایی $J$ باشد، و این تنها در صورتی است $J$ از یک طرف بسته باشد، $I$ نیز در طرف متناظر بسته است (به علت صعودی بودن $f$) و استدلال بالا با استفاده از بازه‌هایی که یک انتهای آنها بسته است تکرار می‌شود. $\square$

**مثال ۱.** فرض کنید $\mathbb{R}^+$ مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی است. تابع $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را به صورت $f(x) = x^n$ تعریف می‌کنیم که در آن $n \geq 1$ یک عدد صحیح است. این تابع یک به یک و پیوسته و صعودی است، بنابراین وارون آن نیز باید پیوسته باشد. از آنجا که مجموعهٔ تصویر نیز برابر $\mathbb{R}^+$ است،

تابع وارون به دامنهٔ $\mathbb{R}^+$ است. این تابع عبارت است از $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

**مثال ۲** (وارون توابع مثلثاتی) شش تابع مثلثاتی که تعریف کرده‌ایم همه تناوبی هستند، پس یک به یک نیستند و وارون به مفهوم معمول ندارند. ولی اگر دامنهٔ هر یک از این توابع را طوری محدود کنیم که در آن دامنه، تابع یک به یک باشد، می‌توان از وارون تابع مثلثاتی صحبت کرد. برای این کار انتخاب‌های متنوعی به عنوان دامنهٔ هر یک از تابع‌ها وجود دارد ولی قراردادهای زیر، قراردادهای متداول‌اند:

الف) برای سینوس، دامنه را به $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود می‌کنیم که در این بازه سینوس همهٔ مقادیر $[-1, 1]$ را به طور یک به یک اتخاذ می‌کند. بنابراین $\sin^{-1}$ روی $[-1, 1]$ تعریف می‌شود و مقادیر آن در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ منظور می‌شوند. $\sin^{-1}$ را گاهی به $Arcsin$ (با "$A$" بزرگ) نمایش می‌دهند.

ب) برای کسینوس، دامنه به $[0, \pi]$ محدود می‌شود که کسینوس این بازه را به طور یک به یک بر $[-1, 1]$ می‌نگارد. بدین ترتیب $\cos^{-1}$ روی $[-1, 1]$ تعریف شده و در $[0, \pi]$ مقدار می‌گیرد. $\cos^{-1}$ را به $Arccos$ نیز نمایش می‌دهند.

ج) برای تانژانت، از $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ استفاده می‌کنیم. تانژانت این بازه را به طور یک به یک بر تمام $\mathbb{R}$ می‌نگارد. $\tan^{-1}$ یا $Arctan$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است و در $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ مقدار می‌گیرد.

تمرین. ثابت کنید مجموعهٔ تصویر تانژانت همه $\mathbb{R}$ است.

د) برای $\cot\theta$، $sec\theta$ و $csc\theta$، به ترتیب دامنه‌های $]0, \pi[$، $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ و $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$ را منظور می‌کنند.

# مفهوم حد

در بخش‌های ۶ تا ۸ مفهوم حد دنباله و سری را بررسی کردیم. در واقع دنباله، تابعی بود که روی یک مجموعهٔ گسسته از نقاط (اعداد صحیح از یک مقدار $k$ به بعد) تعریف شده و مقداری حقیقی یا مختلط می‌گرفت. حد دنباله وقتی وجود داشت که با سیر کردن دامنهٔ تابع، یعنی با گذر به اعداد صحیح بزرگتر و بزرگتر، مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک می‌شد. مفهوم حد که در این بخش معرفی خواهیم کرد کاملاً مشابه است با این تفاوت که به جای دنباله، تابع‌هایی را در نظر خواهیم گرفت که دامنهٔ آنها یا یک مجموعه از نوع بازه است یا دست‌کم نقاط دامنه دارای مکان تجمع هستند، برخلاف مجموعه‌های عدد صحیح که عناصرش از فاصله معینی (واحد) به هم نزدیکتر نمی‌شوند. ایدهٔ حد زادهٔ کوشش‌هایی است که طی دو قرن برای دقیق ساختن مفهوم "مشتق"، که خود بیان کنندهٔ آهنگ لحظه‌ای تغییر یک کمیت متغیر است، صرف شد. امروزه مفهوم حد کاربردهایی خارج از محدودهٔ مشتق نیز دارد. بالاخص همچنان که خواهیم دید با مفهوم پیوستگی در رابطهٔ نزدیک است.

فرض کنید $S$ یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ باشد. نقطهٔ $a \in \mathbb{R}$ را یک نقطه حدی $S$ می‌نامیم اگر برای هر $\delta > 0$، در "بازهٔ محذوف شعاع $\delta$ حول $a$"، یعنی

$$]a-\delta, a+\delta[-\{a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

نقطه‌ای از $S$ موجود باشد. تذکر یکی دو نقطه در مورد این تعریف بجاست:

(الف) اینکه بازه را "محذوف" گرفته‌ایم، یعنی $x = a$ مطرح نیست، بدین معنی است که تعریف مستقل از این است که خود $a$ نقطه‌ای از $S$ باشد یا نباشد، هر دو صورت ممکن است رخ دهد.

(ب) تعریف در واقع نتیجه می‌دهد که در هر بازهٔ محذوف حول $a$، بی‌نهایت عضو متمایز از $S$ باید

موجود باشد زیرا اگر مثلاً $s_1 \in S$ در بازهٔ محذوف شعاع $\delta_1$ حول $a$ باشد، و $\delta_2$ را طوری بگیریم که $0 < \delta_2 < |s_1 - a|$، آنگاه باید عضو دیگری $s_2$ از $S$ در بازهٔ محذوف شعاع $\delta_2$ حول قرار داشته باشد. به همین ترتیب اگر $\delta_3$ را کوچکتر از $|s_2 - a|$ و مثبت در نظر بگیریم، نقطهٔ دیگری $s_3$ از $S$ باید در این بازهٔ محذوف باشد و همین طور با ادامهٔ این روش یک دنبالهٔ $(s_n)$ از نقاط متمایز $S$ به‌دست می‌آید که همه در بازهٔ محذوف شعاع $\delta_1$ حول $a$ قرار دارند.

در واقع با تغییر کوچکی در استدلال بالا می‌توان نشان داد اگر $a$ یک نقطهٔ حدی برای مجموعهٔ $S$ باشد، آنگاه دنباله‌ای $(s_n)$ از نقاط متمایز $S$ وجود دارد که $s_n \longrightarrow a$. اگر در استدلال بالا بگیریم $\delta_1 = 1$، نقطهٔ $s_1$ به فاصلهٔ کوچکتر از ۱ از $a$ است، اگر بگیریم $0 < \delta_2 < \min\{\frac{1}{2}, |s_1 - a|\}$، آنگاه نقطهٔ $s_2$ در فاصلهٔ کوچکتر از $\frac{1}{2}$ از $a$ است و $s_1 \neq s_2$. به همین ترتیب با گرفتن $0 < \delta_3 < \min\{\frac{1}{3}, |s_2 - a|\}$، نتیجه می‌شود که $s_3$ در فاصله کوچکتر از $\frac{1}{3}$ از $a$ قرار دارد و متمایز از $s_1$ و $s_2$ است. به طور کلی اگر به استقراء، $\delta_n$ را به صورت $0 < \delta_n < \min\{\frac{1}{n}, |s_{n-1} - a|\}$ بگیریم و عضو $s_n$ از $S$ را در بازهٔ محذوف شعاع $\delta_n$ حول $a$ اختیار کنیم، نتیجه می‌شود که $|s_n - a| < \frac{1}{n}$ و عناصر $s_1, s_2, \ldots, s_n$ همه متمایزند. دنبالهٔ عناصر متمایز $S$ که به این ترتیب ساخته می‌شود به $a$ همگراست زیرا برای هر $\delta > 0$، اگر $N$ را طوری بگیریم که $\frac{1}{N} < \delta$، آنگاه برای $n > N$ داریم $|s_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$.

بالعکس نیز اگر دنباله‌ای $(s_n)$ از نقاط متمایز $S$ به $a$ میل کند، $a$ یک نقطهٔ حدی $S$ است. برای $\delta > 0$، چون $s_n \longrightarrow a$، $N$ وجود دارد که برای $n > N$ داریم $|s_n - a| < \delta$. به علاوه چون همه نقاط $s_n$ متمایزند، حداقل یکی از آنها باید غیر از خود $a$ باشد. یعنی $s_n$ وجود دارد که $0 < |s_n - a| < \delta$. بدین ترتیب به تعریف معادلی برای نقطه حدی دست یافته‌ایم:

**(۱۳—۱) لم.** اگر $S$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد و $a \in \mathbb{R}$، $a$ یک نقطهٔ حدی برای $S$ است اگر و تنها اگر دنباله‌ای $(s_n)$ از نقاط متمایز $S$ وجود داشته باشد که $s_n \longrightarrow a$. $\square$

## (۱۳—۲) چند مثال

(۱۳—۲—۱) فرض کنید $S$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح، است. در این صورت هیچ نقطهٔ $\mathbb{R}$ یک نقطهٔ حدی برای $\mathbb{Z}$ نیست زیرا که اگر بازهٔ محذوفی به شعاع کوچکتر از $\frac{1}{2}$ حول این نقطه بگیریم، حداکثر یک نقطهٔ $S$ می‌تواند در این بازه قرار گیرد.

(۱۳—۲—۲) فرض کنید $S$ بازهٔ $]a,b[$ است. در این صورت همهٔ نقاط $[a,b]$، نقاط حدی $]a,b[$ هستند زیرا که در هر بازهٔ محذوف به شعاع مثبت حول $c\in[a,b]$ نقطه‌ای از $]a,b[$ یافت می‌شود. به علاوه اگر $c\notin[a,b]$، $c$ نقطهٔ حدی $]a,b[$ نیست زیرا اگر $c<a$، آنگاه برای $0<\delta<a-c$، و اگر $c>b$، برای $0<\delta<c-b$، در بازهٔ شعاع $\delta$ حول $c$ هیچ نقطه از $]a,b[$ یافت نمی‌شود. به همین ترتیب مجموعهٔ نقاط حدی $[a,b]$، $]a,b]$، $[a,b[$ و $]a,b[$ همهٔ برابر $[a,b]$ هستند.

(۱۳—۲—۳) $S$ را برابر مجموعهٔ $\{\frac{1}{n}\mid n=1,2,3,\ldots\}$ می‌گیریم. تنها نقطهٔ حدی $S$ نقطهٔ $0$ است. هر گوی محذوف شعاع $\delta$ حول $0$ شامل بی‌نهایت نقطهٔ $S$ است (همهٔ $a_n$ ها که $\frac{1}{n}<\delta$). برای نقطهٔ $\frac{1}{n}$، بازهٔ محذوف شعاع $(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$ حول این نقطه شامل هیچ نقطهٔ $S$ نیست. برای $a>1$، بازه شعاع $\delta=a-1$، برای $a<0$، بازهٔ شعاع $-a$، و برای $\frac{1}{n+1}<a<\frac{1}{n}$، بازهٔ شعاع $\delta=\min\{\frac{1}{n}-a,a-\frac{1}{n+1}\}$ فاقد نقاط $S$ هستند. اکنون آماده‌ایم تعریف حد را ارائه کنیم.

(۱۳—۳) **تعریف.** فرض کنید $S$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است، $a$ یک نقطهٔ حدی $S$، و $f:S\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع. می‌گوییم حد تابع $f$ وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند برابر $L$ است، و می‌نویسیم $\lim_{x\to a}f(x)=L$ در صورتی که برای هر $\epsilon>0$، وجود داشته باشد $\delta>0$ که هرگاه $x\in S$ و $0<|x-a|<\delta$، آنگاه $|f(x)-L|<\epsilon$.

نکات شباهت و تمایز تعریف حد و تعریف پیوستگی از تعریف مشهودند. در مورد پیوستگی، نقطهٔ $a$ باید در دامنهٔ تعریف $f$ باشد ولی در مورد حد کافی است $a$ یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $S$ باشد و اساساً به دلیل شرط $0<|x-a|$، مقدار $f$ در نقطهٔ $a$ اصلاً مطرح نیست. از طرفی دیگر پیوستگی در همهٔ

نقاط دامنهٔ $f$ قابل طرح کردن است، در حالی که برای مطرح ساختن $\lim_{x\to a} f(x)$ لازم است که $a$ یک نقطهٔ حدی دامنه باشد. مثلاً برای تابعی که دامنهٔ آن $\mathbb{Z}$ باشد، حد در هیچ نقطه‌ای تعریف نشده است در صورتی که دیدیم هر تابع با دامنهٔ $\mathbb{Z}$ در همهٔ نقاط دامنه پیوسته است. قرابت حد و پیوستگی را می‌توان در گزاره زیر که نتیجهٔ فوری تعریف است خلاصه کرد:

(۱۳–۴) گزاره. فرض کنید $S$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است و $a$ یک نقطهٔ $S$ که نقطهٔ حدی $S$ نیز می‌باشد. در این صورت $f$ در $a$ پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته و برابر $f(a)$ باشد. $\square$

در واقع اگر $a$ یک نقطه حدی $S$ باشد و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع، حد $f$ وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند مقداری است که اگر $f(a)$ را برابر آن تعریف کنیم، تابع $f$ در $a$ پیوسته می‌شود.

گزارهٔ زیر نیز عیناً مانند گزارهٔ مشابه در مورد پیوستگی ثابت می‌شود و اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

(۱۳–۵) گزاره. فرض کنید $S$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، $a$ یک نقطهٔ حدی $S$، و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر برای هر دنباله $(a_n)$ از عناصر $S$ که $a_n \longrightarrow a$، داشته باشیم $f(a_n) \longrightarrow L$. $\square$

به کمک این گزاره، همچنان که در مورد مجموع، حاصل‌ضرب و خارج قسمت تابع‌های پیوسته عمل کردیم، گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود:

(۱۳–۶) گزاره. فرض کنید $S$ یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ است، $a$ یک نقطهٔ حدی $S$، و $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع که $\lim_{x\to a} f(x) = L_۱$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_۲$. در این صورت:

الف) حد $f + g$ وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند وجود دارد و برابر $L_۱ + L_۲$ است.

ب) حد $f \cdot g$ وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند وجود دارد و برابر $L_۱ L_۲$ است.

ج) اگر مضافاً $L_۲ \neq ۰$ و $a$ یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $\{x \in S \mid g(x) \neq ۰\}$ باشد، آنگاه حد $\frac{f}{g}$ وقتی

$x$ به $a$ میل می‌کند وجود دارد و برابر $\frac{L_1}{L_2}$ است.

در (ج) توجه کنید که مجموعه $\{x \in S \mid g(x) \neq 0\}$ درواقع دامنهٔ تعریف $\frac{f}{g}$ است و برای اینکه $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ مطرح شود، لازم است که $a$ یک نقطهٔ حدی این مجموعه باشد. اثبات گزارهٔ بالا که عیناً مانند گزارهٔ مشابه در مورد تابع‌های پیوسته است به خواننده واگذار می‌شود.

## (۱۳—۷) چند مثال حد

**(۱۳—۷—۱)** فرض کنید در مورد وجود، و در صورت وجود، مقدار $\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ سؤال شده است که در آن $n$ یک عدد صحیح مثبت است. چون $f(x) = x - 1$ یک تابع پیوسته است، حد آن وقتی $x \to 1$ برابر مقدار $f(1)$، یعنی $0$، است. پس نمی‌توان از قضیهٔ خارج‌قسمت در این مورد استفاده کرد. ولی از آنجا که وجود حد و مقدار آن هیچ‌گونه ارتباطی با مقدار یک تابع در نقطهٔ مورد نظر ندارد، می‌توان با شرط $x \neq 1$، یعنی در دامنهٔ $S = \mathbb{R} - \{1\}$، تابع $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ را در نظر گرفت. چون $x = 1$ یک نقطهٔ حدی $S$ است، می‌توان به هر حال $\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ را مطرح کرد. حال در نقاط دامنه که $x \neq 1$، داریم $\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1$. بنابراین $\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x^{n-1} + \cdots + 1)$ که چون چندجمله‌ای $x^{n-1} + \cdots + x + 1$ یک تابع پیوسته تعریف می‌کند، حد آن وقتی $x \to 1$ برابر مقدار تابع یعنی $n$ است.

تعداد زیادی از حدهای مقدماتی را می‌توان به روش بالا محاسبه کرد. در واقع همچنان که در بررسی مفهوم مشتق خواهیم دید، تعریف حد و تمایز آن از مقدار تابع، از بررسی عبارت‌هایی که صورت و مخرج هر دو به صفر میل می‌کنند وقتی متغیر به نقطه‌ای حدی از دامنه میل می‌کند، سرچشمه گرفته است.

**(۱۳—۷—۲)** (دو حد اساسی مثلثاتی) در مورد وجود و مقدار حدهای زیر بحث می‌کنیم:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \quad , \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \qquad (\theta \text{ برحسب رادیان})$$

توجه کنید که دامنه تعریف هر دو تابع بالا، یعنی $\frac{\sin \theta}{\theta}$ و $\frac{1 - \cos \theta}{\theta}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی ناصفر،

$\mathbb{R}-\{0\}$ است، و نقطهٔ ۰ نقطهٔ حدی دامنه است، پس مفهوم حد مطرح شدنی است.

برای $\theta \neq 0$، و $|\theta| < \frac{\pi}{2}$، با توجه به شکل ۱ داریم:

$$(\theta > 0) \quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

$$(\theta < 0) \quad \tan\theta < \theta < \sin\theta$$

بنابراین برای $\theta \neq 0$:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

در بخش ۱۰ دیدیم که $\cos\theta$ تابعی پیوسته از $\theta$ است، پس $\frac{1}{\cos\theta}$ به ۱ میل می‌کند وقتی $\theta \to 0$. تابع ثابت ۱ نیز دارای حد ۱ است وقتی $\theta \to 0$. به سادگی دیده می‌شود که چون $\frac{\theta}{\sin\theta}$ بین ۱ و $\frac{1}{\cos\theta}$ قرار دارد و هردوی این توابع به مقدار واحدی، در اینجا ۱، میل می‌کنند، $\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$. بنابراین طبق گزاره ۱۳—۶، ج، داریم $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.

از طرفی دیگر $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$، پس:

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

چون تابع سینوس در صفر پیوسته است $\lim_{\theta\to 0}\sin\frac{\theta}{2} = \lim_{\frac{\theta}{2}\to 0}\sin\frac{\theta}{2} = 0$ و نیز $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = \lim_{\frac{\theta}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = 1$ پس طبق ۱۳—۶، ب، $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$.

(۱۳—۷—۳) آیا می‌توان نوشت $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\frac{1}{\theta}}{\sin\frac{1}{\theta}} = 1$؟ سؤال اساسی در اینجا این است که آیا $\theta = 0$ یک نقطهٔ حدی دامنه تعریف است یا نه؟ اگر چنین باشد، و اگر در دامنهٔ تعریف داشته باشیم $\sin\frac{1}{\theta} \neq 0$، آنگاه با یک تابع ثابت با مقدار ۱ سروکار داریم که حد آن در هر نقطه حدی برابر ۱ خواهد بود. تابع داده شده فقط در نقاطی که مخرج صفر شود قابل تعریف شدن نیست و اینها عبارتند از مقادیر:

$$\theta = 0, \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \ldots$$

بنابراین دامنهٔ تعریف عبارت است از

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq \frac{\pm 1}{n\pi}, n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

توجه کنید که ۰ یک نقطهٔ حدی $S$ است زیرا که مثلاً دنبالهٔ متمایز نقاط $S$:

$$a_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

به ۰ میل می‌کند. بنابراین با تعریف ارائه شده از حد می‌توان نوشت $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\frac{1}{\theta}}{\sin\frac{1}{\theta}} = 1$. در واقع اگر در همهٔ نقاط $\mathbb{R}$ که خارج از $S$ هستند، مقدار تابع را برابر ۱ تعریف کنیم، تابع ثابت ۱ روی همهٔ $\mathbb{R}$ به‌دست می‌آید.

(۱۳–۷–۴) فرض کنید $f,g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده‌اند، $a$ یک نقطهٔ حدی $S$ است، $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ و $g$ یک تابع کراندار است، یعنی عددی $M > 0$ وجود دارد که $|g(x)| \le M$ برای هر $x \in S$. در این صورت ادعا می‌کنیم

$$\lim_{x\to a}((f\cdot g)(x)) = 0$$

فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده است. چون $\lim_{x\to a} f(x) = 0$، $\delta > 0$ وجود دارد که هرگاه $x \in S$ و $0 < |x-a| < \delta$، آنگاه:

$$|f(x) - 0| < \frac{\epsilon}{M}$$

پس با این شرط روی $x$ داریم $|f(x)g(x)| < \epsilon$ و حکم به اثبات می‌رسد.

(۱۳–۷–۵) در مورد $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ بحث کنید. عبارت $\sin\frac{1}{x}$ به‌ازای هر $x \neq 0$ تعریف شده است. پس $x = 0$ یک نقطهٔ حدی دامنه است و $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ قابل طرح کردن است. اگر $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ وجود داشته باشد و برابر $L$ باشد، باید برای هر دنبالهٔ $(a_n)$ از اعداد حقیقی ناصفر (داخل دامنه) که $a_n \longrightarrow 0$ داشته باشیم $\sin\frac{1}{a_n} \longrightarrow L$. اگر $a_n$ را برابر $\frac{1}{n\pi}$، $n = 1, 2, \ldots$ بگیریم، داریم $\sin\frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \sin n\pi = 0 \longrightarrow 0$، پس اگر حد وجود داشته باشد برابر ۰ است. از طرفی دیگر، اگر بگیریم $a_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$، داریم $\sin a_n = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ و دنبالهٔ ثابت ۱ به ۰ میل نمی‌کند. پس حد وجود ندارد.

(۱۳—۷—۶) علیرغم عدم وجود $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$، چون $\sin\frac{1}{x}$ برای $x\neq 0$ کراندار است، اگر $n$ یک عدد صحیح مثبت باشد، طبق ۱۳ـ۷ـ۴ داریم $\lim_{x\to 0} x^n\sin\frac{1}{x}=0$.

در باقیماندهٔ این بخش تعمیم‌هایی از مفهوم حد را در نظر می‌گیریم. بالاخص به توصیف نمادهایی مانند نمادهای زیر می‌پردازیم:

$$\ldots,\ \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=L,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

(۱۳—۸) تعریف $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ کاملاً مشابه تعریف حد دنباله‌ای است با این تفاوت که در مورد دنباله‌ها متغیر $x$ فقط مقادیر عدد صحیح از یک $k$ به بعد را سیر می‌کند، ولی در اینجا دامنهٔ تعریف $f$، یعنی $x$ های مجاز، یک بازهٔ به شکل $]A,+\infty[$ یا $[A,+\infty[$ را تشکیل می‌دهند. فرض کنید دامنهٔ تعریف $f$ بازه‌ای به شکل $[A,+\infty[$ یا $]A,+\infty[$ باشد. در این صورت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ بدین معنی است که برای هر $\epsilon>0$ داده شده، وجود داشته باشد عدد حقیقی $M$ به طوری که برای هر $x$ در دامنهٔ $f$ که $x>M$ داشته باشیم $|f(x)-L|<\epsilon$. مشابهاً $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ برای تابع‌های $f$ تعریف می‌شود که دامنه‌های آنها به شکل $]-\infty,A]$ یا $]-\infty,A[$ باشد و در اینجا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ به این معنی است که برای هر $\epsilon>0$، عدد حقیقی $M$ وجود داشته باشد که برای هر $x$ در دامنه $f$ با $x<M$ داشته باشیم $|f(x)-L|<\epsilon$.

برای دنبالهٔ اعداد حقیقی $(a_n)$، می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ در صورتی که برای هر $M>0$، وجود داشته باشد عدد صحیح $N$ که هرگاه $n>N$، آنگاه $a_n>M$. تمرین زیر اثباتی مشابه قضیهٔ متناظر برای حد معمولی دارد.

تمرین. فرض کنید $f$ روی $]A,+\infty[$ تعریف شده است. نشان دهید $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ اعداد حقیقی $(a_n)$ که $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ داشته باشیم $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=L$.

(۱۳—۹) حال فرض کنید تابعی $f$ روی دامنه $]a,b[$ تعریف شده است که در آن $b\in\mathbb{R}$ و $a$ می‌تواند یک عدد حقیقی کوچکتر از $b$ یا $-\infty$ باشد. مفهوم $\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ ( تابع $f$

به $+\infty$ میل می‌کند وقتی $x$ از سمت چپ به $b$ میل کند) این است که برای هر $M > 0$، وجود دارد $\delta > 0$ که هرگاه $x$ در دامنه $f$ بوده و در بازه $]b-\delta, b[$ باشد، آنگاه $f(x) > M$. مشابهاً $\lim_{x\to b^+} f(x) = +\infty$، $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to b^+} f(x) = -\infty$ تعریف می‌شوند. وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ مقصود این است که دامنهٔ تعریف شامل یک بازهٔ محذوف $]x-\rho, x+\rho[$، $\rho > 0$، است و برای هر $M > 0$، $\delta > 0$ وجود دارد که هرگاه $x$ در دامنه $f$ بوده و در بازه محذوف $]x-\delta, x+\delta[-\{x\}$ قرار گیرد، آنگاه $f(x) > M$. به سادگی مشاهده می‌شود که این معادل برقراری دو شرط $\lim_{x\to b^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ است.

(۱۳—۱۰) بالاخره این تذکر لازم است که مفاهیم حد راست و چپ به طور کلی در چارچوب ارائه شده برای حد قابل بیان است. وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$، یعنی در واقع دامنهٔ تعریف $f$ را به آن $x$ های دامنهٔ $f$ که بزرگتر از $a$ هستند محدود کرده‌ایم و حد تابع محدود شده را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $D$ دامنهٔ تعریف $f$ باشد. برای اینکه $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ قابل طرح شدن باشد اولاً باید $a$ یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $D\cap]a, +\infty[$ باشد. سپس برای هر $\epsilon > 0$، باید $\delta > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in D$ که $a < x < a+\delta$ داشته باشیم $|f(x) - L| < \epsilon$. مفهوم حد چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

# مفهوم مشتق

یکی از دو رکن اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم مشتق است. متبلور شدن ایدهٔ مشتق و به‌کارگیری مؤثر آن پاسخگوی چند نیاز ریاضی و علمی ریشه‌دار است. پس از رواج فرمول‌بندی مسایل ریاضی به صورت جبری و به خصوص پیدایش زمینهٔ هندسهٔ تحلیلی، مفهوم مشتق در طی قرن هفدهم میلادی در آثار ریاضیدانان مختلف ظاهر شد و در کارهای ریاضی نیوتن و لایب‌نیتس به صورت‌بندی جامعتری رسید و ارتباط آن با مفهوم "انتگرال" که به اعتباری سابقهٔ تاریخی دیرینه‌تر داشت روشن گردید. تعریف مشتق که در آغاز از دقت ریاضی مرسوم برخوردار نبود، مدت‌ها مورد انتقاد و نارضایتی تعدادی از دانشمندان و فلاسفه قرار داشت و حتی گاهی موجب مناقشات جدی ریاضی می‌شد. این مشکلات به مدت دو قرن همچنان دامنگیر حساب دیفرانسیل و انتگرال بود تا با شکل گرفتن مفهوم حد، صورت امروزی خود را یافت. در زیر ما با استفاده از مفهوم حد، به معرفی مشتق می‌پردازیم. می‌توان نیازهایی را که به پیدایش مفهوم مشتق منجر شد حول دو محور "آهنگ تغییر لحظه‌ای" و "مسالهٔ مماس" مطرح کرد. از نظر تاریخی مسأله مماس بود که منجر به تعریف مشتق شد ولی پس از چندی کاربرد مشتق در تعیین آهنگ تغییر لحظه‌ای نیز معلوم شد و مشتق به عامل تعیین کننده‌ای در رشد علم مکانیک مبدل گردید. جای تعجب است که نیوتن که خود حدود پانزده سال پس از مطالعاتش در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مکانیک کلاسیک را نیز پایه گذاشت، در کتاب بزرگ مکانیک خود Principia Mathematica از مفهوم مشتق استفاده نکرده است و به‌کارگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال در مکانیک، برخلاف تصوری که طبیعی نیز به نظر می‌رسد، سال‌ها بعد در میان ریاضیدانان سوییس، فرانسه و آلمان رایج شد.

(۱۴–۱) **آهنگ تغییر لحظه‌ای.** شاید ساده‌ترین مثال از این نوع مسأله، صورت‌بندی دقیق مفهوم سرعت یک متحرک است. در ساده‌ترین حالت یک متحرک نقطه‌ای را در نظر بگیرید که روی یک خط راست جهت‌دار و مدرج حرکت می‌کند. مکان متحرک در زمان $t$ به صورت تابعی از زمان، $t$، $s = f(t)$، داده شده است (شکل ۱).

می‌خواهیم مفهوم "سرعت" (= آهنگ تغییر مکان) را برای این حرکت بررسی کنیم. برای خط راست داده شده جهت قایل شده‌ایم، بدین ترتیب مثلاً حرکت به طرف راست، تغییر مکان در جهت مثبت و حرکت به سمت چپ، تغییر مکان در جهت منفی تلقی می‌شود. سرعت متوسط یا میانگین سرعت متحرک از زمان $t_1$ تا زمان $t_2$، به صورت نسبت $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ تعریف می‌شود که در واقع متوسط مسافت طی شده (با منظور کردن جهت) در واحد زمان است. اگر حرکت به صورت یکنواخت در یکی از دو جهت صورت گیرد، نسبت $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ همواره مقدار ثابتی است؛ یعنی نه به زمان شروع اندازه‌گیری، نه به زمان پایان اندازه‌گیری، و نه به طول مدت اندازه‌گیری، بستگی نخواهد داشت. در این وضعیت است که مسافت پیموده شده حاصل‌ضرب این سرعت ثابت (یکنواخت) در طول بازهٔ زمانی حرکت است. موضوع وقتی پیچیده می‌شود که حرکت یکنواخت نباشد، یعنی سرعت متغیر باشد. در این صورت سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[t_1, t_2]$ ممکن است اطلاع قابل استفاده‌ای در مورد شیوهٔ حرکت در یک بازهٔ خاص زمانی کوچکتر ندهد به خصوص اگر $[t_1, t_2]$ به نسبت بزرگ باشد. برای کسب اطلاع دقیق‌تر در مورد سرعت حرکت در حوالی زمان $t$ بهتر است دو بازهٔ زمانی $t_1$ و $t_2$ نزدیک به $t$ در نظر بگیریم که $t_1 < t < t_2$ و به سرعت متوسط $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ نگاه کنیم. هر چه $t_1$ و $t_2$ به $t$ نزدیکتر باشند، سرعت متوسط به‌دست آمده انعکاس دقیق‌تری از کیفیت حرکت حوالی زمان $t$ است. آیا می‌توان به "سرعت در لحظه $t$" معنی دقیقی نسبت داد؟ اگر طول بازهٔ زمانی را صفر بگیریم، یعنی $t_1 = t = t_2$، آنگاه $f(t_1) = f(t_2)$ و صورت و مخرج کسر $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ هر دو صفر می‌شوند و این عبارت معنی ندارد. راه گریز این است که سرعت در لحظهٔ $t$ را در واقع یک حد تلقی کنیم، یعنی حد سرعت متوسط وقتی طول بازهٔ زمانی به صفر میل می‌کند. به بیان دیگر، حد زیر، در صورت وجود، به

سرعت متحرک در زمان $t$ تعبیر می‌شود:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \qquad (۱)$$

ممکن است این کسر متقارن به نظر نرسد، یعنی تصور شود که فقط تغییر مسافت در یک طرف بازهٔ زمانی نسبت به $t$ دخیل می‌شود. در واقع چون نزدیک شدن $h$ به ۰ هم از طرف راست و هم از طرف چپ منظور می‌شود، تقارن خود به خود اعمال می‌شود. تمرین زیر این ادعا را به طور قاطع‌تر ثابت می‌کند.

تمرین. اگر حد (۱) وجود داشته باشد، ثابت کنید حد زیر نیز موجود است و برابر حد (۱) می‌باشد:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h} \qquad (۲)$$

اگر به جای تغییر مکان و مسافت، کمیت متغیر دیگری نسبت به زمان را به $f(t)$ نمایش دهیم، مجدداً می‌توان آهنگ تغییر لحظه‌ای $f$ در زمان $t$ را به صورت (۱) تعریف کرد. از این کلی‌تر، اگر دو کمیت $x$ و $y$ با رابطهٔ تابعی $y=f(x)$ به هم مربوط باشند، آهنگ تغییر $y$ نسبت به $x$ به صورت حد زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (۳)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

(۱۴–۲) مسألهٔ مماس. همهٔ ما ایده‌ای شهودی و کاملاً روشن از تمایز میان مماس بودن و متقاطع بودن دو منحنی داریم ولی بیان دقیق ریاضی این تمایز آسان به نظر نمی‌رسد. در عهد باستان ریاضیدانان خط مماس بر منحنی را برای هر یک از تعداد محدود منحنی‌هایی که در آن دوران مورد بررسی عمیق قرار گرفته بود به کمک ویژگی‌های خاصی تعریف می‌کردند. مثلاً خط $L$ بر دایرهٔ $C$ در نقطهٔ $T$ مماس محسوب می‌شد اگر شعاع $OT$ بر خط $L$ عمود باشد. همین طور خط $L$ بر بیضی $E$ در نقطهٔ $T$ مماس محسوب می‌شد اگر زاویه‌های بین $L$ و خطوط واصل از $T$ به دو کانون بیضی برابر

باشند (اگر بیضی را مقطع یک سطح صیقل تصور کنیم و قانون فیزیکی زاویهٔ تابش = زاویهٔ بازتاب، را اعمال کنیم اشعهٔ نور ساطع از یک کانون پس از برخورد با بیضی از کانون دیگر خواهد گذشت)، و به همین ترتیب خط مماس بر سهمی و هذلولی نیز تعریف می‌شد. این تعریف‌ها همه برخاسته از دانش و شناخت دقیق منحنی‌های خاص بودند و یک تعریف کلی برای مماس بودن یک خط راست بر یک منحنی نامشخص، یا مماس بودن دو منحنی، وجود نداشت. پس از آنکه هندسهٔ تحلیلی امکان ارائه کردن بی‌شمار منحنی متنوع را ممکن ساخت، ضرورت یک تعریف کلی و قابل استفاده از "مماس بودن" در مسایل هندسی نمایان‌تر گردید. راه‌حل زیر برای تعریف خط مماس بر یک منحنی $\mathcal{C}$ در نقطهٔ $T$ از منحنی در قرن هفدهم کاملاً متداول شده بود.

روی منحنی در نزدیکی نقطهٔ $T$، نقطهٔ متحرکی $P$ را در نظر می‌گیریم که تدریجاً به $P$ نزدیک‌تر می‌شود. در هر وضعیت نقطهٔ $P$، وقتی هنوز به $T$ نرسیده است، خط راست گذرا از $P$ و $T$ را در نظر می‌گیریم. در شکل ۲، این خط برای وضعیت‌های گوناگون $P_1$، $P_2$، $P_3$، ... از نقطهٔ $P$ نمایش داده شده است. وقتی $P$ به $T$ نزدیک می‌شود اگر این خط راست به وضعیت مشخصی، مانند $t$ در شکل ۲، نزدیک شود. این "وضعیت حدی" را خط مماس بر $\mathcal{C}$ در نقطهٔ $T$ می‌نامیم. برای نوشتن معادلهٔ این خط کافی است شیب آن معلوم شود زیرا که یک نقطهٔ خط، یعنی $T$، داده شده است. فرض کنید قطعه‌ای از منحنی $\mathcal{C}$ که در نزدیکی $P$ قرار دارد به صورت نمودار تابعی $y = f(x)$ قابل نمایش دادن است و مختصات $T$ به صورت $(x_\circ, y_\circ) = (x_\circ, f(x_\circ))$ می‌باشد. حال اگر مختصات نقطهٔ متحرک $P$ را به $(x, y) = (x, f(x))$ نمایش دهیم، شیب خط گذرا از $P$ و $T$ برابر است با

$$\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \qquad (۴)$$

وقتی $P$ به $T$ میل کند، حد عبارت فوق، در صورت وجود، به

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \qquad (۵)$$

نمایش داده می‌شود. توجه کنید که اگر بنویسیم $x = x_\circ + h$، حد بالا را می‌توان به

$$\lim_{h \to \circ} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} \qquad (۶)$$

نمایش داد که از نوع آهنگ تغییر، یعنی (۳)، است. با توجه به شباهت عبارت‌های (۱)، (۳) و (۶)، ارائه و بررسی تعریف زیر کاملاً طبیعی به نظر می‌رسد:

**(۱۴—۳) تعریف.** فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع است و $a$ یک نقطهٔ درونی $S$، یعنی $\delta > 0$ وجود دارد که بازهٔ $]a-\delta, a-\delta[$ در $S$ قرار دارد. در این صورت $f$ را مشتق‌پذیر در $a$ می‌نامیم در صورتی که حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{۷}$$

در صورت وجود، حد بالا را به $f'(a)$ نمایش داده، آن را مشتق $f$ در نقطهٔ $a$ می‌نامیم. تابع $f$ را مشتق‌پذیر می‌نامیم در صورتی که $f$ در همهٔ نقاط دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد.

**(۱۴—۴) یادداشت.** در بالا فرض کردیم $a$ یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف $f$ است. در واقع اگر $a$ یک عضو دامنه و نیز یک نقطهٔ حدی دامنه باشد، بررسی حد (۷) معنی دارد. علت محدود کردن تعریف به نقاط درونی دامنه فقط این است که بیشتر کاربردهای مورد نظر ما به این حالت محدود می‌شوند و لزومی ندارد حالت‌های کلی‌تری که بعضاً پیچیدگی‌های نامطلوبی دارند در اینجا مطرح کنیم. دو مورد استثنایی بعضاً مورد استفاده قرار خواهند گرفت. اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد که $[a, a+\delta[$ در دامنهٔ تابع قرار گیرد، می‌توانیم $h$ را به مقادیر مثبت محدود کنیم که در این صورت "حد یک‌طرفه" $\lim_{h \to 0^+}$ بدین معنی است که فقط مقادیر $h > 0$ در نظر گرفته شده است. حد

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{۸}$$

را مشتق $f$ از راست در نقطهٔ $a$ می‌نامیم و به $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب $f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نیز که مشتق $f$ از چپ در نقطهٔ $a$ خوانده می‌شود، مطرح شدنی است.

به تعریف اصلی باز می‌گردیم و مسأله مماس را پیگیری می‌کنیم. فرض کنید تابع $f$ در نقطهٔ $a$ مشتق‌پذیر است. بدین ترتیب نمودار $f$ حول $a$ یک منحنی است که در نقطهٔ $(a, f(a))$ دارای خط

مماس به شیب $f'(a)$ می‌باشد. چون $f'(a)$ یک عدد حقیقی است، در این حالت مماس بر منحنی نمی‌تواند حالت قائم داشته باشد. معادلهٔ خط مماس عبارت است از

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \qquad (۹)$$

**(۱۴—۵) چند مثال.**

(۱۴—۵—۱) نشان می‌دهیم تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = Ax + B$، $A$ و $B$ ثابت، مشتق‌پذیر است و مشتق آن را محاسبه می‌کنیم. در نقطهٔ $x_\circ$ از دامنه داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} &= \lim_{x \to x_\circ} \frac{(Ax+B) - (Ax_\circ + B)}{x - x_\circ} \\ &= \lim_{x \to x_\circ} \frac{A(x - x_\circ)}{x - x_\circ} \end{aligned}$$

چون حد عبارت فوق وقتی $x \to x_\circ$ مطرح است، مقدار $x = x_\circ$ در نظر گرفته نمی‌شود، پس می‌توان $x - x_\circ$ را از صورت و مخرج حذف کرد و داریم $f'(x_\circ) = A$. البته نمودار $f$ خط راستی با شیب $A$ است و بدین ترتیب خط مماس بر این خط در هر نقطه، خود آن خط می‌شود. بالاخص توجه کنید که مشتق تابع ثابت $f(x) = B$ همه‌جا صفر است.

(۱۴—۵—۲) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = cx^n$ در نظر می‌گیریم که در آن، $c$ یک عدد حقیقی داده شده است و $n$ یک عدد صحیح مثبت می‌باشد. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} &= \lim_{x \to x_\circ} \frac{cx^n - cx_\circ^n}{x - x_\circ} \\ &= \lim_{x \to x_\circ} [c \frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ}] \end{aligned}$$

مجدداً برای محاسبهٔ حد، $x - x_\circ = \circ$ مطرح نیست، پس

$$\frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ} = x^{n-۱} + x^{n-۲}x_\circ + \cdots + xx_\circ^{n-۲} + x_\circ^{n-۱}$$

حال چندجمله‌ای طرف راست تابعی پیوسته نسبت به $x$ تعریف می‌کند، پس حد آن وقتی $x \to x_{\circ}$، برابر می‌شود با $cnx_{\circ}^{n-1}$، و داریم:

$$\lim_{x \to x_{\circ}} \frac{f(x) - f(x_{\circ})}{x - x_{\circ}} = cnx_{\circ}^{n-1}$$

(۱۴–۵–۳) می‌خواهیم معادلهٔ خط مماس بر بیضی $\frac{x^{۲}}{۱۶} + \frac{y^{۲}}{۹} = ۱$ را در نقطهٔ $(۲, -\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$ بنویسیم. تحقیق کنید که این نقطه روی بیضی قرار دارد. باید جزیی از بیضی شامل نقطهٔ $(۲, -\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$ را به صورت نمودار تابعی $y = f(x)$ بنویسیم و به‌ازای $x = ۲$ مشتق تابع را محاسبه کنیم تا شیب خط مماس به‌دست آید. از معادلهٔ بیضی داده شده داریم:

$$y = \pm \frac{۳}{۴}\sqrt{۱۶ - x^{۲}}$$

که از آن دو تابع استخراج می‌شود، یکی شاخهٔ بالایی بیضی و دیگری شاخهٔ پایینی آن. نقطهٔ $(۲, -\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$ روی شاخهٔ پایینی قرار دارد، بنابراین از تابع $f(x) = -\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۶ - x^{۲}}$ استفاده می‌کنیم. برای $x_{\circ} = ۲$ داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_{\circ}} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}} &= \lim_{x \to ۲} \frac{-\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۶-x^{۲}} + \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}{x-۲} \\
&= \lim_{x \to ۲} (-\frac{۳}{۴}) \frac{\sqrt{۱۶-x^{۲}} - ۲\sqrt{۳}}{x-۲}
\end{aligned}$$

وقتی $x \longrightarrow ۲$ صورت و مخرج کسر هر دو به صفر میل می‌کنند، بنابراین سعی می‌کنیم کسر را از عوامل احتمالی مشترک ساده کنیم. در عبارت‌های این گونه معمولاً ضرب کردن صورت و مخرج در "مزدوج" عبارت رادیکالی، در اینجا $\sqrt{۱۶ - x^{۲}} + ۲\sqrt{۳}$، مؤثر واقع می‌شود. داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_{\circ}} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}} &= \lim_{x \to ۲} (-\frac{۳}{۴}) \frac{(۱۶-x^{۲})-۱۲}{(x-۲)(\sqrt{۱۶-x^{۲}}+۲\sqrt{۳})} \\
&= \lim_{x \to ۲} (+\frac{۳}{۴}) \frac{x+۲}{(\sqrt{۱۶-x^{۲}}+۲\sqrt{۳})}
\end{aligned}$$

حال توجه کنید که صورت و مخرج هر دو تابع‌های پیوسته نسبت به $x$ هستند و برای محاسبهٔ حد به‌ازای $x \longrightarrow ۲$ می‌توان مقدار $x = ۲$ را جایگزین کرد، پس:

$$\lim_{x \to x_{\circ}} \frac{f(x) - f(x_{\circ})}{x - x_{\circ}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

نتیجه اینکه معادلهٔ خط مماس عبارت است از $y + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$.

(۱۴–۵–۴) تابع $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = |x|$ در نظر می‌گیریم و مشتق‌پذیری آن را در نقاط گوناگون $x_\circ$ بررسی می‌کنیم. اگر $x_\circ > \circ$، قطعهٔ کوچکی از نمودار $f(x) = |x|$ بر نمودار $g(x) = x$ منطبق است و از آنجا که مشتق فقط به مقادیر تابع برای $x$ های نزدیک $x_\circ$ (برای مشتق‌گیری) بستگی دارد، مشتق $f$ در نقطهٔ $x_\circ$ برابر مشتق $g$ در نقطهٔ $x_\circ$، یعنی ۱ است. این با انتظار طبیعی که خط مماس بر نمودار به‌ازای $x_\circ > \circ$ باید خط $y = x$ باشد سازگار است.

همین طور برای $x_\circ < \circ$، مشتق تابع برابر ۱− به‌دست می‌آید و خط $y = -x$ بر نمودار در نقطهٔ $(x_\circ, |x_\circ|)$ مماس است. حال نقطهٔ $x_\circ = \circ$ را بررسی می‌کنیم. حد زیر، در صورت وجود، مورد نظر است:

$$\lim_{x \to \circ} \frac{|x| - \circ}{x - \circ} = \lim_{x \to \circ} \frac{|x|}{x}$$

اگر دنباله‌ای از اعداد مثبت مثلاً $x_n = \frac{1}{n}$ در نظر بگیریم که $x_n \longrightarrow \circ$، اگر حد وجود داشته باشد، باید $\frac{|x_n|}{x_n}$ به آن حد میل کند. برای $x_n = \frac{1}{n} > \circ$ داریم $|x_n| = x_n$، پس $\frac{|x_n|}{x_n} = 1$، بنابراین حد، در صورت وجود باید برابر ۱ باشد. ولی اگر دنباله‌ای از اعداد منفی، مثلاً $x_n = -\frac{1}{n}$ را در نظر بگیریم که $x_n \longrightarrow \circ$، داریم $\frac{|x_n|}{x_n} = -1$ و دنبالهٔ ثابت $(-1)$ به $+1$ میل نمی‌کند. بنابراین تابع در $x_\circ = \circ$ مشتق‌پذیر نیست. توجه کنید که در این مثال مشتق راست و مشتق چپ در $x_\circ = \circ$ وجود دارند، $f'_+(\circ) = 1$ و $f'_-(\circ) = -1$.

در پیگیری مسأله مماس، سؤال طبیعی دیگری که مطرح است این است که اگر دو منحنی از یک نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ گذر کنند، در چه صورتی این دو منحنی را در آن نقطه "مماس" برهم تعریف می‌کنیم؟ در حالتی که هر دو منحنی در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ دارای خط مماس باشند، دو منحنی مماس بر هم تلقی می‌شوند در صورتی که خط مماس آنها یکی باشد. ولی می‌توان وضعیتی مانند شکل ۴ تجسم کرد که دو منحنی فاقد خط مماس در نقطهٔ مشترک $(x_\circ, y_\circ)$ هستند ولی در عین حال به‌نظر می‌آید که باید آنها را مماس بر یکدیگر تلقی کرد. در اینجا کوشش می‌کنیم تعریف جامعتری از مماس بودن ارائه کنیم که در حالت خاص تعریف خط مماس را شامل شود.

وضعیت‌های شکل‌های ۵ (الف) و ۵ (ب) را مقایسه کنید. در هر دو شکل نمودارهای دو تابع $f$ و $g$ از نقطهٔ مشترک $(x_\circ, y_\circ)$ می‌گذرند. در هر دو شکل، چون $f$ و $g$ پیوسته فرض شده‌اند، فاصلهٔ قائم بین دو نمودار وقتی $x$ به $x_\circ$ نزدیک می‌شود به صفر میل می‌کند. برداشت بعدی ما از دو شکل این است که در (الف) نمودارها متقاطع‌اند و در (ب) مماس می‌باشند.

چگونه می‌توان با یک تعریف دقیق ریاضی این دو وضعیت را از هم تمیز داد؟ در ۵ (الف) اگر قطعهٔ کوچکی از دو نمودار حول $(x_\circ, y_\circ)$ تقریباً خط راست فرض کنیم می‌بینیم که طول پاره‌خط‌های محصور میان دو نمودار به نسبت تقریباً ثابتی کوچک شده و به صفر میل می‌کند. در شکل ۵ (ب)، اگر قطعات کوچکی از نمودار حول $(x_\circ, y_\circ)$ خط راست فرض شوند، این دو خط راست را باید بر هم منطبق فرض کرد و در نتیجه فاصلهٔ عمودی بین دو نمودار در نزدیکی $(x_\circ, y_\circ)$ در مقایسه با ۵ (الف) عملاً صفر است. این برداشت شهودی را می‌توان به صورت دقیقی تعریف کرد:

**(۱۴–۶) تعریف.** فرض کنید $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هستند و $x_\circ$ یک نقطهٔ درونی $S$ است. در این صورت می‌گوییم $f$ بر $g$ در $x_\circ$ مماس است در صورتی که دو شرط زیر برقرار باشند:

**الف)** $f(x_\circ) = g(x_\circ)$.

**ب)** $\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_\circ} = \circ$.

شرط (الف) فقط بیانگر این است که نمودار دو تابع باید از یک نقطه بگذرد و در مورد نمودارهای متقاطع نیز برقرار است، ولی توضیح خواهیم داد که شرط (ب) در واقع تمیزدهندهٔ وضعیت مماس بودن است. توجه کنید که قدرمطلق $f(x) - g(x)$ فاصلهٔ قائم دو نمودار به‌ازای مقدار $x$ از متغیر است. شرط (ب) بیانگر این امر است که این فاصلهٔ قائم طوری شدید به صفر میل می‌کند که اگر بر کمیت $x - x_\circ$ که خود نیز به ۰ میل می‌کند، تقسیم شود، هنوز نسبت به صفر میل می‌کند. کسر $\frac{f(x)-g(x)}{x-x_\circ}$ نسبت فاصلهٔ دو نمودار به نزدیکی نقطهٔ $x$ از $x_\circ$ است. میل کردن این نسبت به صفر نشانگر این است که فاصلهٔ قائم دو نمودار شدیدتر از $x - x_\circ$ کوچک می‌شود.

مثال. وضعیت شکل ۴ را بررسی می‌کنیم. داریم $g(\circ) = f(\circ)$؛ پس (الف) برقرار است. برای (ب):

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - \circ} = \frac{x^{۲}|x|}{x^{۲} + ۱} < |x|$$

بنابراین وقتی $x \longrightarrow \circ$، نسبت $\frac{f(x)-g(x)}{x-\circ}$ به صفر میل می‌کند. بنابراین $f$ و $g$ در $\circ$ بر هم مماس‌اند و این در حالی است که هیچ‌یک از دو تابع در $x = \circ$ مشتق‌پذیر نیست.

## (۱۴—۷) مثال اساسی: خط مماس و تقریب خطی

فرض کنید $x_\circ$ یک نقطهٔ درونی دامنهٔ تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. می‌خواهیم خط مماس بر نمودار $f$ در نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ را از دیدگاه جدیدی بررسی کنیم. کلیه خطوط راست غیرقائم گذرا از نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ را در نظر می‌گیریم (خط قائم را مستثنی کرده‌ایم زیرا که این خط نمودار تابعی از $x$ نیست). معادلهٔ کلی این خطوط هست:

$$y = f(x_\circ) + m(x - x_\circ)$$

که $m$ ضریب زاویهٔ خط است. طرف راست کلی‌ترین عبارت تعریف‌کنندهٔ یک تابع درجهٔ یک نسبت به $x$ است که نمودار آن از $(x_\circ, f(x_\circ))$ می‌گذرد. می‌خواهیم این موضوع را بررسی کنیم که آیا از میان این توابع درجه یک، تابعی هست که به مفهومی "نزدیکترین" به نمودار $f$ در حوالی نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ باشد؟ اگر "نزدیکترین" را به مفهوم مماس بودن طبق تعریف ۱۴—۶ تعبیر کنیم، نشان می‌دهیم که حداکثر یک تابع درجه یک از این امتیاز برخوردار است. می‌نویسیم $g(x) = f(x_\circ) + m(x - x_\circ)$. شرط (الف) برقرار است و برای (ب):

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_\circ} &= \frac{f(x)-[f(x_\circ)+m(x-x_\circ)]}{x-x_\circ} \\ &= \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} - m \qquad (x \neq x_\circ \text{ به فرض}) \end{aligned}$$

برای بررسی حد این عبارت وقتی $x \longrightarrow x_\circ$، $x = x_\circ$ مطرح نیست؛ پس فرض $x \neq x_\circ$ و ساده کردن $x - x_\circ$ مجاز است. پس برای $m$ ثابت، $\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} = \circ$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ وجود داشته و برابر $m$ باشد. بنابراین در صورت وجود مشتق، $f'(x_\circ)$، خط راست با شیب $f'(x_\circ)$ یگانه

خط گذرا از $(x_\circ, f(x_\circ))$ است که به تعبیر ۱۴—٦ بر نمودار $f$ مماس است. با توضیحاتی که قبل از تعریف ۱۴—٦ دادیم، فاصلهٔ قائم بین این خط و نمودار تابع سریعتر از فاصلهٔ قائم هر خط راست دیگر به صفر میل می‌کند. بنابراین اطلاق "خط مماس" به $y = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)$، در صورت مشتق‌پذیری $f$ در $x_\circ$، توجیه تازه‌ای می‌یابد. توجه کنید که به این تعبیر، شرطی لازم و کافی برای مشتق‌پذیری $f$ در نقطهٔ $x_\circ$ وجود خط مماس غیرقائم برای نمودار در نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ است. معادلاً مشتق‌پذیری $f$ در $x_\circ$ بدین معنی است که یک تابع درجه یک مماس بر $f$ در نقطهٔ $x_\circ$ وجود داشته باشد. این تابع درجه یک، یعنی

$$g(x) = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ) \tag{۱۰}$$

را تقریب خطی $f$ در $x_\circ$ نیز می‌نامیم. با توجه به توضیحات ارائه شده، در میان همهٔ تابع‌های درجهٔ ۱، تقریب خطی نزدیک‌ترین مقدار به $f$ را در نزدیکی $x_\circ$ دارد. از این ویژگی در جلسات آینده استفاده‌هایی عملی ذکر خواهیم کرد.

این بحث را با گزارهٔ ساده زیر به اتمام می‌رسانیم:

**(۱۴—۸) گزاره.** اگر $f$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، $f$ در $x_\circ$ پیوسته است.

**برهان.** از آنجا که $\frac{f(x)-[f(x_\circ)+f'(x_\circ)(x-x_\circ)]}{x-x_\circ}$ و $(x - x_\circ)$ هر دو به صفر میل می‌کنند، حاصل‌ضرب آنها نیز به صفر میل می‌کند وقتی $x$ به $x_\circ$ میل کند، ولی

$$\lim_{x\to x_\circ} \{f(x) - [f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)]\} = \lim_{x\to x_\circ} (f(x) - f(x_\circ))$$

که صفر بودن این حد بدین معنی است که $\lim_{x\to x_\circ} f(x)$ وجود داشته و برابر $f(x_\circ)$ باشد. $\square$

# قاعدهٔ زنجیره‌ای

یکی از اساسی‌ترین قضایای ابتدایی مربوط به مشتق، مشتق‌پذیر بودن ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر و فرمول حاصل برای مشتق ترکیب دو تابع است که به "قاعده زنجیره‌ای" معروف می‌باشد. قبل از بیان این مطلب، مفهوم مشتق‌پذیری را که تاکنون به دو صورت معادل وجود یک حد، و وجود تابع درجه یک مماس، بررسی کرده‌ایم، به صورت معادل سومی ارائه می‌کنیم.

فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی $a$ از $S$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر $f'(a)$ می‌باشد. در این صورت می‌دانیم که:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]}{h} = ۰ \qquad (۱)$$

که در اینجا $f(a) + f'(a)h$ مقدار تقریب خطی $f$ در نقطهٔ $a$ به‌ازای $x = a + h$ است. اگر بنویسیم

$$\phi(h) = \frac{f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]}{h} \qquad (۲)$$

$\phi$ تابعی است که در یک بازه محذوف حول ۰ تعریف شده است، یعنی برای $|h|$ کوچک و $h \neq ۰$. زیرا $a$ یک نقطهٔ درونی $S$ است و برای $|h|$ کوچک $f(a+h)$ تعریف شده است. به علاوه $\phi(h) \longrightarrow ۰$ وقتی $h \longrightarrow ۰$. پس از طرفین ـ وسطین در (۲) می‌توان نوشت

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \phi(h)h \qquad (۳)$$

بنابراین اگر $f$ در $a$ مشتق‌پذیر باشد، عددی حقیقی $f'(a)$ وجود دارد و تابعی $\phi$ تعریف شده به‌ازای $|h|$ کوچک $\neq ۰$، به طوری که $\phi(h) \longrightarrow ۰$ وقتی $h \longrightarrow ۰$ و رابطهٔ (۳) برقرار است. بالعکس فرض کنید

برای تابعی $f$ که $a$ یک نقطهٔ درونی دامنهٔ آن است، عددی حقیقی $m$ وجود داشته باشد و تابعی $\phi$ تعریف شده برای $|h|$ کوچک $\neq \circ$ که $\circ \longrightarrow \phi(h)$ وقتی $\circ \longrightarrow h$ و داشته باشیم

$$f(a+h) = f(a) + mh + \phi(h)h$$

در این صورت

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - m = \phi(h)$$

و چون $\circ \longrightarrow \phi(h)$ وقتی $\circ \longrightarrow h$، نتیجه می‌شود که حد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود دارد وقتی $\circ \longrightarrow h$ و برابر $m$ است. بدین ترتیب می‌توان مشتق‌پذیری $f$ در $a$ را به صورت معادل زیر بیان کرد

(۱۵ — ۱) گزاره. $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و $a$ یک نقطهٔ درونی $S$ است. در این صورت $f$ در $a$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر عددی حقیقی $m$ و تابعی $\phi$ تعریف شده برای $|h|$ کوچک $\neq \circ$ وجود داشته باشند که $\circ \longrightarrow \phi(h)$ وقتی $\circ \longrightarrow h$ و داشته باشیم

$$f(a+h) = f(a) + mh + \phi(h)h$$

$\square$

البته $m$ را معمولاً به $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق $f$ در نقطهٔ $a$ می‌نامیم. رابطهٔ (۴) یا (۳) را می‌توان به صورت گویای دیگری نیز نوشت. اگر متغیر تابع $f$ را به $x$ و مقدار $f$ را به $y$ نمایش دهیم، $y = f(x)$، تغییر کوچک در مقدار $x$ را گاهی به جای $h$، به $\Delta x$، و تغییر متناظر در $y$ را به جای $f(a+h) - f(a)$ به $\Delta y$ نمایش می‌دهیم. در این صورت (۴) یا (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \Delta x \cdot \phi(\Delta x) \qquad (۴)$$

یا معادلاً

$$\Delta y - f'(a)\Delta x = \Delta x \phi(\Delta x) \qquad (۵)$$

توجه کنید که $f'(a)\Delta x$ مقدار تغییر $y$ روی خط مماس است. بنابراین مشتق‌پذیری $f$ در $a$ را می‌توان بدین صورت تعبیر کرد که خطی وجود دارد گذرا از نقطهٔ $(a, f(a))$ که اختلاف مقدار $y$ روی این خط

و مقدار $y$ تابع، در نزدیکی نقطهٔ $a$، "بسیار کوچک" است بدین معنی است که حاصل‌ضرب دو کمیت $\Delta x$ و $\phi(\Delta x)$ می‌باشد که هر یک به صفر میل می‌کنند وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$.

**(۱۵—۲) قاعدهٔ زنجیره‌ای.** فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هستند، $a$ یک نقطهٔ درونی $S$ است، $b$ یک نقطهٔ درونی $T$، و $b = f(a)$. اگر تابع $f$ در $a$ و تابع $g$ در $b$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $g \circ f$ در نقطهٔ $a$ مشتق‌پذیر است و

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) \tag{٦}$$

برهان. نخست توجه کنید که دامنهٔ $g \circ f$ عبارت است از

$$S' = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

برای اینکه مشتق‌پذیری $g \circ f$ در $a$ مطرح شود، $a$ باید یک نقطهٔ درونی $S'$ باشد. البته $a \in S'$ چون $f(a) = b$ عضو $T$ است، ولی باید نشان دهیم برای $x$ های به اندازهٔ کافی نزدیک $a$ نیز داریم $f(x) \in T$. چون $b$ یک نقطهٔ درونی $T$ است، $\epsilon > 0$ وجود دارد که $]b-\epsilon, b+\epsilon[$ به تمامی در $T$ قرار دارد. تابع $f$ در $a$ مشتق‌پذیر است، پس در $a$ پیوسته نیز می‌باشد، بنابراین $\delta > 0$ وجود دارد که هرگاه $x \in S$ و $|a-x| < \delta$، آنگاه $|f(x) - b| < \epsilon$، یعنی $f(x)$ در $T$ قرار دارد. چون $a$ یک نقطهٔ درونی $S$ است، می‌توان $\delta$ فوق را در صورت لزوم کوچکتر کرد به طوری که برای هر $x$ با $|x-a| < \delta$ داریم $x \in S$. نتیجه اینکه برای $x$ های به اندازهٔ کافی نزدیک به $a$، $f(x)$ در $T$ قرار می‌گیرد، یعنی $a$ یک نقطهٔ درونی $S'$ است.

حال به اثبات مشتق‌پذیری $g \circ f$ در $a$ و محاسبهٔ مشتق می‌پردازیم. می‌نویسیم $y = f(x)$ و $z = g(y)$. چون $f$ در $a$ مشتق‌پذیر است، تابعی $\phi$ وجود دارد که برای $|\Delta x|$ کوچک $\neq 0$ تعریف شده است، $\phi(\Delta x) \longrightarrow 0$ وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$، و داریم

$$\Delta y - f'(a)\Delta x = \Delta x \phi(\Delta x) \tag{٧}$$

همچنین چون $g$ در $b$ مشتق‌پذیر است، تابعی $\psi$ وجود دارد که برای $|\Delta y|$ کوچک $\neq 0$ تعریف شده

است، $\psi(\Delta y) \longrightarrow ۰$ وقتی $\Delta y \longrightarrow ۰$، و داریم

$$\Delta z - g'(b)\Delta y = \Delta y \psi(\Delta y) \qquad (۸)$$

با جایگزینی (۸) در (۹) حاصل می‌شود

$$\Delta z - g'(b)(f'(a)\Delta x + \Delta x \varphi(\Delta x)) = (f'(a)\Delta x + \Delta x \phi(\Delta x))\psi(\Delta y)$$

یا

$$\Delta z - (g'(b)f'(a))\Delta x = \Delta x\{g'(b)\phi(\Delta x) + [f'(a) + \phi(\Delta x)]\psi(\Delta y)\}$$

اگر نشان دهیم عبارت داخل آکلاد { } برای $|\Delta x|$ کوچک $\neq ۰$ تعریف شده است و به صفر میل می‌کند وقتی $\Delta x \longrightarrow ۰$، حکم به اثبات می‌رسد. در داخل { } کافی است نشان می‌دهیم $\psi(\Delta y)$ برای $|\Delta x|$ کوچک $\neq ۰$ تعریف شده است و به صفر میل می‌کند وقتی $\Delta x \longrightarrow ۰$، وضعیت سایر جملات روشن است. $\psi(\Delta y)$ برای $|\Delta y|$ کوچک تعریف شده است. چون $f$ در $a$ پیوسته است، اگر $|\Delta x|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، $|\Delta y|$ نیز به اندازهٔ مورد نظر کوچک خواهد شد، پس $\psi(\Delta y)$ برای $|\Delta x|$ کوچک تعریف شده است. از طرفی دیگر مجدداً بنابر پیوستگی $f$، اگر $\Delta x \longrightarrow ۰$، داریم $\Delta y \longrightarrow ۰$، پس $\psi(\Delta y) \longrightarrow ۰$ وقتی $\Delta x \longrightarrow ۰$، و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

**مثال ۱.** مشتق تابع $h(x) = (x^{۲} + x + ۱)^{۱۰}$ را به‌دست آورید. البته در اینجا تابع $h$ به وضوح مشتق‌پذیر است زیرا که اگر عبارت $x^{۲} - x - ۱$ در خود ۱۰ بار ضرب شود یک چندجمله‌ای (از درجه ۲۰) به‌دست می‌آید. اگر بنویسیم $f(x) = x^{۲} + x + ۱$ و $g(x) = x^{۱۰}$، داریم $h(x) = (g \circ f)(x)$. چون $f'(x) = ۲x - ۱$ و $g'(x) = ۱۰x^{۹}$، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= ۱۰(x^{۲} + x + ۱)^{۹}(۲x - ۱) \end{aligned}$$

**مثال ۲.** نشان دهید تابع $h(x) = \sin(\cos x)$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن را به‌دست آورید. می‌نویسیم

$f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$، پس $h(x) = (g \circ f)(x)$. بنابراین

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) \end{aligned}$$

**مثال ۳.** تابعی مشتق‌پذیر دارای این ویژگی است که $f(0) = 0$ و $f'(0) = 2$. مشتق تابع $h = f \circ f$ را در $x = 0$ به‌دست آورید. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$h'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0)$$

چون $f(0) = 0$، نتیجه می‌شود که $h'(0) = f'(0)^2$، یا $h'(0) = 4$.

## (۱۵–۳) نمادگذاری لایب‌نیتس

لایب‌نیتس برای بیان مشتق نمادی ابداع کرد که برای محاسبات طولانی بسیار سودمند است هرچند که بی‌دقتی در استفاده از آن ممکن است موجب گمراهی شود. اگر تابع $f$ را به $y = f(x)$ نمایش دهیم و $f$ مشتق‌پذیر باشد، $f'(x)$ را لایب‌نیتس به $\frac{dy}{dx}$ نمایش داد که در اینجا نماد $x$ در مخرج نمایشگر متغیر و نماد $y$ در صورت، نمایشگر مقدار تابع است. مقدار مشتق در نقطهٔ $x = a$ به این ترتیب به $\frac{dy}{dx}(a)$، $\frac{dy}{dx}|_a$ یا $\frac{dy(f(a))}{dx(a)}$ نمایش داده می‌شود هرچند که نمایش سوم کمتر به‌کار می‌رود. از آنجا که مشتق، حد یک کسر، یعنی حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$، است، این مفهوم از بعضی رفتارهای کسرگونه برخوردار است و گاهی شکل کسری $\frac{dy}{dx}$ احکام درستی را تداعی می‌کند. ولی باید توجه داشت که $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ بدین معنی نیست که $dy$ حد $\Delta y$ است و $dx$ حد $\Delta x$، زیرا که در چارچوب ما حد $\Delta x$ و $\Delta y$ هر دو صفر هستند. تعبیر درستی که در این چارچوب می‌توان از $\frac{dy}{dx}$ به عنوان یک کسر ارائه کرد به صورت زیر است. فرض کنید تابع $f$ در نقطهٔ $a$ مشتق‌پذیر است، یعنی $f'(a)$ وجود دارد. اگر به جای $f$، تقریب خطی $f$ در نقطهٔ $a$ را در نظر بگیریم که نمودار آن یک خط راست به شیب $f'(a)$ است، این تابع به هر مقدار نمو $h$ از متغیر، مقدار نمو $f'(a)h$ در مقدار تابع را نظیر می‌کند. $dx(a)$ را باید نمو متغیر تابع تقریب خطی و $dy(f(a))$ را نمو مقدار تابع تقریب خطی تلقی کرد، که در این صورت $dy(f(a)) = f'(a) \cdot dx(a)$. بدین ترتیب

پیشوند "$d$" در $dx$ و $dy$ بدین معنی است که متغیر، مربوط به تقریب خطی است، نه خود تابع. در مورد خود تابع، از $\Delta x$ و $\Delta y$ به عنوان نمو متغیر و نمو مقدار تابع استفاده می‌کنیم. شکل ۱ در توضیح این موضوع است.

با استفاده از نمادگذاری لایب‌نیتس، نتیجه قاعدهٔ زنجیره‌ای به شکلی یادماندنی در می آید. اگر در ۲—۱۵ بنویسیم $y = f(x)$ و $z = g(y)$، آنگاه $z = (g \circ f)(x)$، و (۷) صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{dz(g(b))}{dx(a)} = \frac{dz(g(b))}{dy(b)} \cdot \frac{dy(b)}{dx(a)} \tag{۹}$$

یا

$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}(b) \cdot \frac{dy}{dx}(a) \tag{۱۰}$$

که به اختصار نوشته می‌شود:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{۱۱}$$

به این شکل، وقتی تعداد ترکیب‌ها زیاد و محاسبات طولانی است، پیگیری محاسبات سریعتر می‌شود ولی باید همواره در ذهن داشت که $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dz}{dy}$ در نقاط مختلف مطرح هستند، اولی در $a$ و دومی در $b = f(a)$، در حالی که $\frac{dz}{dx}$ در نقطهٔ $a$ مطرح است.

با روش تحریر (۱۰) ممکن است این سؤال پیش آید که چرا قاعدهٔ زنجیره‌ای با حذف $dy(b)$ از صورت و مخرج نتیجه نمی‌شود؟ این کار دو اشکال دارد، اول اینکه تا مشتق‌پذیری $g \circ f$ در نقطهٔ $a$ ثابت نشود، اصلاً $\frac{dz(g(b))}{dx(a)}$ معنی ندارد، و دوم اینکه ممکن است $dy(b)$ صفر باشد که در این صورت حذف آن از صورت و مخرج مجاز نیست.

مثال ۱. ظرفی قیف شکل به ارتفاع $20cm$ و شعاع قاعدهٔ $10cm$ طوری قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و محور قیف در راستای قائم قرار دارد. اگر آب به سرعت $20 \frac{cm^3}{sec}$ در این ظرف ریخته شود، آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب $6cm$ باشد پیدا کنید.

متغیر زمان برحسب ثانیه را به $t$، ارتفاع آب در زمان $t$ را به $h$، و حجم آب در زمان $t$ را به $V$ نمایش می‌دهیم. $h$ و $V$ هر دو تابع $t$ هستند و به فرض مشتق‌پذیری، $\frac{dh}{dt}$ (آهنگ تغییر ارتفاع سطح آب) و $\frac{dV}{dt}$ (آهنگ تغییر حجم آب) معنی دارند. در واقع $\frac{dV}{dt} = 2$ داده شده است و مجهول مسأله $\frac{dh}{dt}$ است وقتی که $h = 6$. توجه کنید که می‌توان $V$ را به عنوان تابعی صرفاً از $h$ در نظر گرفت. اگر $r$ شعاع سطح آب در زمان $t$ باشد، به سبب تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{r}{h} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

پس

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

حال طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

از فرمول $V$ برحسب $h$ نتیجه می‌شود که $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4}h^2$. پس با جایگزینی در فرمول بالا داریم:

$$2 = (\frac{\pi}{4}h^2)(\frac{dh}{dt})$$

مجهول مسأله $\frac{dh}{dt}$ است وقتی $h = 6$، پس $\frac{dh}{dt} = \frac{2}{9\pi}\ \frac{cm}{sec}$.

**مثال ۲.** یک منبع نور $S$ در فاصلهٔ ۴ متر از دیواری قرار دارد. این منبع نور در داخل محفظهٔ مدوری به مرکز $S$ قرار دارد که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\frac{1}{2}$ رادیان بر ثانیه در جهت مثلثاتی می‌چرخد. روی سطح این محفظه سوراخی قرار دارد که نور از آن سوراخ بر دیوار می‌تابد و در نتیجه یک نقطهٔ نورانی روی دیوار حرکت می‌کند. تندی حرکت نقطهٔ نورانی روی دیوار را وقتی این نقطه در فاصلهٔ ۵ متری از $S$ قرار دارد پیدا کنید.

$\theta$ را زاویهٔ بین امتداد موازی دیوار از نقطهٔ $S$ به شعاع حامل به سوراخ می‌گیریم. داریم:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \quad (\frac{rad}{sec})$$

از طرفی دیگر داریم $x = ۴\cot\theta$. بنابراین طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{۴}{\sin^۲\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

که $\frac{dx}{dt}$ سرعت حرکت نقطهٔ نورانی روی دیوار است. وقتی فاصله $S$ از دیوار ۵ متر باشد داریم

$$\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta) = \frac{۴}{۵}$$

بنابراین:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{۱۰۰}{۱۶}\cdot\frac{۱}{۲} = -۳/۲۵$$

و چون تندی حرکت، یعنی قدرمطلق سرعت، مورد نظر است، نقطهٔ نورانی وقتی فاصلهٔ آن از $S$ پنج متر است با تندی ۳/۲۵ متر بر ثانیه حرکت می‌کند.

یکی از کاربردهای قاعدهٔ زنجیره‌ای یافتن مشتق تابع وارون (ترکیبی) است. فرض کنید $I$ یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوستهٔ (اکیداً) صعودی یا (اکیداً) نزولی. می‌دانیم که $f^{-۱}$ نیز پیوسته است. در زیر حالتی را در نظر می‌گیریم که $f$ مضافاً مشتق‌پذیر با مشتق مثبت یا منفی در سراسر درون بازهٔ $I$ است.

(۱۵—۴) قضیه. $I$ یک بازه است، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی که در نقاط درونی $I$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن همه‌جا مثبت یا همه‌جا منفی است. در این صورت تابع وارون ترکیبی، $f^{-۱}$، نیز در همهٔ نقاط درونی دامنهٔ خود مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر نقطهٔ درونی $b = f(a)$ از دامنهٔ $f^{-۱}$ داریم:

$$(f^{-۱})'(b) = \frac{۱}{f'(a)} \qquad (۱۲)$$

برهان. اگر مشتق‌پذیری $f^{-۱}$ ثابت شود، فرمول بالا به سادگی از به‌کارگیری قاعدهٔ زنجیره‌ای برای $(f^{-۱} \circ f)(x) = x$ نتیجه می‌شود، ولی اثبات مشتق‌پذیری که در زیر خواهد آمد خود این نتیجه را به‌دست می‌دهد. چون مشتق همه‌جا مثبت یا منفی است می‌دانیم که تابع صعودی یا نزولی است، و چون $f$ پیوسته است، می‌دانیم که نقاط درونی بازهٔ $I$ تحت $f$ به نقاط درونی بازهٔ تعریف $f^{-۱}$ نگاشته