می‌شوند و بالعکس. حال فرض کنید a یک نقطهٔ درونی I است، پس $b=f(a)$ یک نقطهٔ درونی دامنهٔ f^{-1} می‌باشد. بنابراین اگر $|k|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، $b+k$ نیز یک نقطهٔ درونی دامنهٔ تعریف f^{-1} است. ولی دامنهٔ f^{-1} از نقاط $f(x)$ تشکیل شده است که x در دامنهٔ f است، پس داریم $b+k=f(a+h)$ برای h مناسب. بنابراین:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}\frac{f^{-1}(b+k)-f^{-1}(b)}{k} &= \lim_{k\to 0}\frac{f^{-1}(f(a+h))-f^{-1}(f(a))}{f(a+h)-f(a)}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{h}{f(a+h)-f(a)}\end{aligned}$$

از آنجا که f^{-1} پیوسته است نتیجه می‌گیریم که وقتی $k\longrightarrow 0$، آنگاه $h\longrightarrow 0$، بنابراین حد بالا برابر است با:

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{f(a+h)-f(a)}=\frac{1}{f'(a)}$$

و حکم مورد نظر به اثبات می‌رسد. □

(۱۵—۵) چند مثال مهم

(۱۵—۵—۱) $\mathbb{R}^+$ را مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت بگیرید و فرض کنید n یک عدد صحیح ناصفر است. تابع $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت $f(x)=x^n$ تعریف می‌شود مشتق‌پذیر است و $f'(x)=nx^{n-1}$. برای $x\in\mathbb{R}^+$ داریم $f'(x)>0$ اگر $n>0$ و $f'(x)<0$ اگر $n<0$. بنابراین تابع $f^{-1}:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت

$$f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}}$$

تعریف می‌شود طبق قضیهٔ بالا مشتق‌پذیر است. از (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x^n) &= \frac{1}{f'(x)}\\ &= \frac{1}{n}x^{1-n}\end{aligned}$$

و اگر به جای x^n، مقدار x را جایگزین کنیم:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \qquad (۱۳)$$

پس فرمول $\frac{d(x^p)}{dx} = px^{p-1}$ هم برای اعداد صحیح p و هم برای اعداد به شکل $\frac{1}{n}$ برقرار است. در واقع اکنون نتیجه می‌شود که فرمول برای توان گویا برقرار است زیرا تابع $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ،$h(x) = x^{\frac{m}{n}}$ را می‌توان به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ و $g(x) = x^m$ نوشت، $h = g \circ f$، پس طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (\tfrac{1}{n})x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \tfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

(۱۵−۵−۲) دیدیم که اگر تابع مثلثاتی سینوس را به دامنهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود کنیم، وارون ترکیبی آن، $\sin^{-1}$، وجود دارد و پیوسته است. حال $\sin' x = \cos x$ در درون بازهٔ تعریف، یعنی در $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ همواره مثبت است، پس $\sin^{-1}$ در $]-1, 1[$ مشتق‌پذیر است. اگر با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای از $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$ مشتق بگیریم، حاصل می‌شود:

$$\sin'(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1})'(x) = 1$$

$$\cos(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1})'(x) = 1$$

برای x در $]-1, 1[$، $\sin^{-1}(x)$ در $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ مقدار می‌گیرد، پس $\cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$، در نتیجه:

$$(\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (14)$$

ضمناً توجه کنید که چون:

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

نتیجه می‌شود که:

$$(\cos^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (15)$$

(۱۵—۵—۳) تابع $\tan^{-۱}$ را در نظر می‌گیریم که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است و در $]-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}[$ مقدار می‌گیرد. از آنجا که $\tan' x = ۱ + \tan^{۲} x > ۰$، طبق قضیه، $\tan^{-۱}$ مشتق‌پذیر است. به علاوه با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای: اگر از $\tan(\tan^{-۱}(x)) = x$ مشتق بگیریم حاصل می‌شود:

$$\tan'(\tan^{-۱} x) \cdot (\tan^{-۱})'(x) = ۱$$

$$(۱ + \tan^{۲}(\tan^{-۱}(x))) \cdot (\tan^{-۱})'(x) = ۱$$

پس

$$(\tan^{-۱})'(x) = \frac{۱}{۱ + x^{۲}} \qquad (۱۶)$$

مجدداً از اینکه $\tan^{-۱} x + \cot^{-۱} x = \frac{\pi}{۲}$، نتیجه می‌گیریم که

$$(\cot^{-۱})'(x) = \frac{-۱}{۱ + x^{۲}} \qquad (۱۷)$$

تقریب خطی

از بدو بررسی مشتق دیدیم که از میان همهٔ خطوط راستی که از یک نقطهٔ نمودار یک تابع مشتق‌پذیر می‌گذرند، خط مماس به معنایی "نزدیکترین" این خطوط به نمودار تابع است. به طور دقیق، برای نقاط نزدیک نقطهٔ داده شده، تفاضل مقدار y روی نمودار و روی خط مماس آنقدر کوچک است که این تفاضل به سرعت مضاعف (مانند $\Delta x\phi(\Delta x)$) به صفر میل می‌کند. طبیعی است که کوشش کنیم از این نزدیکی برای تقریب مقدار تابع استفاده کنیم چه محاسبهٔ y برای خط راست که معادله درجه یک دارد کاری بسیار ساده است. اگر تابع f در نقطهٔ درونی a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد، تقریب زدن مقدار f در نزدیکی a را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$f(a-h) \simeq f(a) + f'(a)h \qquad (۱)$$

با نوشتن $h = \Delta x$ و $\Delta y = f(a-h) - f(a)$، (۱) به صورت

$$\Delta y \simeq f'(a)\Delta x \qquad (۲)$$

نیز نوشته می‌شود. به نماد لایب‌نیتس، اگر نمو متغیر تقریب خطی، یعنی dx را به‌اندازهٔ Δx بگیریم، (۲) به صورت زیر در می‌آید

$$Dy \simeq dy \qquad (۳)$$

در نوشتگان گوناگون ممکن است به هر یک از سه صورت بالا برخورد کنید، که همه یک معنی دارند. چند مثال محاسباتی ارائه می‌کنیم.

مثال ۱. مقداری تقریبی برای $\sqrt[3]{۱/۰۱۲}$ ارائه کنید.

در این نوع مسایل باید تابعی مناسب محاسبهٔ مورد نظر ارائه کنیم، مثلاً در اینجا $f(x) = \sqrt[3]{x}$؛ سپس عددی a، نزدیک متغیر مورد محاسبه که برای آن محاسبهٔ مقدار تابع، یعنی $f(a)$، ساده باشد، در اینجا $a = ۱$؛ و بالاخره h را برابر تفاضل عدد داده شده و عدد a بگیریم، در اینجا $h = ۰/۰۱۲$. بدین ترتیب تقریب (۱) در اینجا به شکل زیر در می‌آید

$$\sqrt[3]{۱/۰۱۲} \simeq \sqrt[3]{۱} + f'(۱) \cdot (۰/۰۱۲)$$

با مشتق‌گیری از $f(x) = x^{\frac{۱}{۳}}$ داریم $f'(x) = \frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$، پس $f'(۱) = \frac{۱}{۳}$ و داریم

$$\sqrt[3]{۱/۰۱۲} \simeq ۱ + (\frac{۱}{۳})(۰/۰۱۲) = ۱/۰۰۴$$

مثال ۲. گفته می‌شود که برای مقادیر کوچک $|\theta|$، برحسب رادیان، $\sin\theta \sim \theta$. نشان می‌دهیم مبنای این ادعا، تقریب خطی است. می‌نویسیم $f(x) = \sin x$، پس $f'(x) = \cos x$، و $a = ۰$، پس $f(a) = ۰$ و $f'(a) = ۱$. بنابراین با قراردادن θ به جای h در (۱) داریم

$$\sin\theta \simeq ۰ + ۱ \cdot \theta = \theta$$

مثال ۳. ظرف قیف شکل طبق شکل ۱ را در نظر می‌گیریم که ارتفاع آن ۲۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده آن ۱۰ سانتی‌متر است و طوری قرار گرفته که رأس آن در پایین و محور مخروط در راستای قائم قرار دارد. مقداری آب در این ظرف ریخته شده است و ارتفاع آب از رأس قیف برابر ٦ سانتی‌متر با خطای ممکن $\pm ۰/۱$ سانتی‌متر اندازه‌گیری شده است. اگر حجم آب موجود در این ظرف را بر اساس ارتفاع اندازه‌گیری شده محاسبه کنیم، خطای ممکن در محاسبه حجم حداکثر چه‌قدر است؟

اگر ارتفاع سطح آب را به h و شعاع سطح آب را به r نمایش دهیم، از تشابه مثلث‌ها داریم $r = \frac{h}{۲}$. حال اگر حجم آب را به V نمایش دهیم، داریم

$$V = \frac{\pi}{۱۲}h^{۳}$$

با مشتق‌گیری نتیجه می‌شود که

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{۴}h^{۲}$$

با استفاده از (۲) داریم

$$\Delta V \sim (\frac{\pi}{۴}(۶^{۲}))\Delta h = (۹\pi)(\Delta h)$$

خطای محاسبهٔ ارتفاع سطح آب ۰/۱ = سانتی‌متر فرض شده است، یعنی $|\Delta h| \leq ۰/۱$، بنابراین $|\Delta V|$ حدوداً از $\frac{۹}{۱۰}\pi$ یعنی حدوداً ۲٫۸۳ سانتی‌متر مکعب کوچکتر است.

مثال‌های بالا را باید از نظر علمی بدوی تلقی کرد زیرا که در کاربردهای مختلف درجه دقت‌های متفاوت مورد نظر است و تقریبی که در یک کاربرد پذیرفتنی است در کاربردی دیگر ممکن است منجر به خطاهای غیرقابل قبول شود. برای هر روش تقریب باید قاعده‌ای عملی برای تخمین حدود خطا نیز ارائه شود که به کمک آن بتوانیم به یک ارزیابی در مورد قابل قبول بودن روش تقریب دست یابیم. در مورد تقریب خطی به زودی به چنین روشی برای تخمین خطا دست خواهیم یافت ولی در حال حاضر موضوع "خطای نسبی" را مطرح می‌کنیم که از نظر عملی اغلب ضابطه‌ای سودمندتر از خطای مطلق است. به طور کلی، خطای نسبی برابر نسبت خطا به مقدار واقعی تعریف می‌شود. بدین ترتیب اگر نمو کوچک متغیر، یعنی Δx، را به عنوان خطا در اندازه‌گیری مقدار x متغیر فرض کنیم، خطای نسبی $\frac{\Delta x}{x}$ خواهد بود؛ و نیز خطای نسبی متناظر برای مقدار تابع، $\frac{\Delta y}{y}$ می‌شود.

مثال ۴. در مثال ۳ بالا، اگر ارتفاع آب ۶ سانتی‌متر با خطای نسبی حداکثر یک درصد اندازه‌گیری شده باشد، حداکثر خطای نسبی حاصل در محاسبهٔ حجم متناظر چیست؟

در اینجا داریم $|\frac{\Delta h}{h}| \leq \frac{۱}{۱۰۰}$ و می‌خواهیم کران بالایی برای $|\frac{\Delta V}{V}|$ به‌دست آوریم. داشتیم

$$\Delta V \simeq f'(a)\Delta h$$

با تقسیم کردن بر V نتیجه می‌شود

$$\frac{\Delta V}{V} \sim (\frac{\pi}{۴}h^{۲})\frac{\Delta h}{\frac{\pi}{۱۲}h^{۳}} = ۳\frac{\Delta h}{h}$$

بنابراین $|\frac{\Delta V}{V}| \le \frac{۳}{۱۰۰}$، یعنی خطای نسبی متناظر در محاسبهٔ حجم حداکثر ۳ درصد است.

مثال ۵. مثال بالا را می‌توان به این صورت تعمیم داد. فرض کنید $y = kx^n$ که در آن k ثابت است. اگر در محاسبه یا اندازه‌گیری x حداکثر خطای نسبی r درصد باشد، حداکثر خطای نسبی در محاسبهٔ y چیست؟

داریم $\frac{dy}{dx} = nkx^{n-۱}$، پس

$$\Delta y \simeq nkx^{n-۱}\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{y} \simeq \frac{nkx^{n-۱}}{kx^n}\Delta x = n\frac{\Delta x}{x}$$

بدین ترتیب اگر کمیت y متناسب با توان nــ ام کمیت x باشد خطای نسبی در y حدوداً n برابر خطای نسبی در x خواهد بود. به یک مثال آشنا در این زمینه توجه کنید. مربعی به ضلع a با خطای $\pm h$ داده شده است. می‌خواهیم خطای احتمالی حادث در محاسبهٔ مساحت مربع را تخمین بزنیم. داریم

$$(a \pm h)^۲ - a^۲ = \pm ۲ah - h^۲$$

اگر h کوچک باشد، $h^۲$ در مقایسه بسیار کوچکتر است و معمولاً "قابل صرف‌نظر" تلقی می‌شود. $h^۲$ برابر مساحت گوشهٔ کوچک هاشورزده در شکل ۲ است. بنابراین داریم

$$(a \pm h)^۲ - a^۲ \simeq \pm ۲ah$$

این دقیقاً برابر نتیجه‌ای است که از تقریب خطی تابع $f(x) = x^۲$ حاصل می‌شود، با تقسیم بر $a^۲$ نتیجه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{(a \pm h)^۲ - a^۲}{a^۲} \simeq \pm ۲\frac{h}{a}$$

در اینجا $\frac{h}{a}$ خطای نسبی در محاسبهٔ طول ضلع مربع است و طرف چپ خطای نسبی در محاسبهٔ مساحت مربع.

اکنون به بررسی تخمین خطا در تقریب خطی می‌پردازیم. چهار نمونهٔ تقریب خطی در نمودارهای شکل ۳ را در نظر بگیرید.

در همه موارد به وضوح مشاهده می‌شود که هر چه $|h|$ کوچکتر باشد، فاصلهٔ بین خط مماس و نمودار تابع کوچکتر است. تفاوت دیگری که میان شکل‌های (الف) و (ب) از یک سو با (ج) و (د) در سوی دیگر وجود دارد این است که با رشد $|h|$ در شکل‌های (الف) و (ب)، میزان خطا، یعنی اختلاف مقدار y میان نمودار تابع و تقریب خطی، به شدت افزایش می‌یابد در حالی که در شکل‌های (ج) و (د)، نمو خطا به نسبت کند است. در (ج) و (د) نمودار تا فاصلهٔ زیادی نسبت $(a, f(a))$ نزدیک به خط راست می‌ماند در حالی که در (الف) و (ب)، انحراف نمودار از "راست بودن" بسیار شدید است. چگونه می‌توان این تفاوت را به صورت ریاضی صورت‌بندی کرد؟ اگر فرض کنیم تابع f در سراسر دامنه، یا دست‌کم در بازه‌ای حول a، مشتق‌پذیر است، یعنی خط مماس بر تابع در همهٔ نقاط نمودار یا دست‌کم نقاط نزدیک به $(a, f(a))$ وجود دارد، آنگاه مشاهده می‌کنیم که شیب مماس در شکل‌های (الف) و (ب) سریعاً تغییر می‌کند در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) شیب مماس آهنگ تغییر کندی دارد. ولی شیب مماس برابر مشتق تابع است. پس در شکل‌های (الف) و (ب) آهنگ تغییر مشتق تابع در قدرمطلق بزرگ است، در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) آهنگ تغییر مشتق کوچک می‌باشد. بنابراین اگر مشتق تابع f، یعنی f'، را به عنوان یک تابع در نظر بگیریم، و اگر این تابع خود مشتق‌پذیر باشد، از آنجا که آهنگ تغییر به وسیله مشتق سنجیده می‌شود، اندازهٔ مشتق f' باید نشان‌دهندهٔ شدت انحراف نمودار از یک خط راست باشد، مشتق f' را که به f'' نمایش می‌دهند، "مشتق دوم f" می‌نامند. در زیر تعریف دقیق را بررسی می‌کنیم:

(۱۷ – ۱) $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ **یک تابع است و** f **در نقاط زیرمجموعه‌ای** S' **از** S **مشتق‌پذیر است، یعنی** $f' : S' \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده است. برای نقطهٔ درونی a از S'، اگر مشتق f' در نقطهٔ a وجود داشته باشد، آن را مشتق دوم f در نقطهٔ a خوانده و به $f''(a)$ نمایش می‌دهیم.

اگر بنویسیم $y = f(x)$، در نمادگذاری لایب‌نیتس، $f''(x)$ به $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ یا اختصاراً $\frac{d^2y}{dx^2}$ نمایش داده می‌شود.

اکنون می‌توانیم به کمک مشتق دوم f، تخمینی برای خطای تقریب خطی ارائه کنیم.

(۱۷—۲) (تخمین خطای تقریب خطی) فرض کنید تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در یک بازهٔ باز شامل نقطهٔ درونی a از S دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم است. در این صورت اگر نقطهٔ $a+h$ در این بازه باشد داریم

$$f(a+h) = [f(a) + f'(a)h] = \frac{1}{2} f''(c)h^2 \qquad (4)$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و $a+h$ است.

توجه کنید که این حکم با انتظارات ما سازگار است. از یک طرف هر قدر $|h|$ کوچکتر باشد، خطای منتظره کوچکتر است (در واقع طرف راست (۴) با مجذور h متناسب است)، و از طرفی دیگر اندازهٔ مشتق دوم بین a و $a+h$ می‌تواند بر مقدار خطا اثر بگذارد. ظهور مجذور h بدین معنی است که در مبنای عددنویسی اعشاری اگر اندازه‌گیری a یک رقم اعشار دقیق‌تر شود، می‌توان انتظار داشت که خطای محاسبه تا دو رقم اعشار کاهش یابد زیرا اگر به جای h از $\frac{h}{10}$ استفاده کنیم، طرف راست (۴) بر ۱۰۰ تقسیم خواهد شد. در اثبات ۱۷—۲ خواهیم دید که حکم آن در واقع همتای قضیهٔ میانگین برای تابع‌های دوبار مشتق‌پذیر است. در واقع اثبات ما به تبعیت از اثبات قضیهٔ میانگین با ارائه همتایی از قضیهٔ رل شروع خواهد شد.

(۱۷—۳) (همتای قضیهٔ رل برای مشتق دوم) I یک بازهٔ باز است، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم در I، a و b دو نقطهٔ I که $a < b$، $f(a) = f(b) = 0$ و $f'(a) = 0$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $f''(c) = 0$.

برهان. شرایط قضیهٔ رل معمول برای $[a, b]$ برقرار است، پس نقطه‌ای c_1 وجود دارد، $a < c_1 < b$، که $f'(c_1) = 0$.

حال شرایط قضیهٔ رل معمولی برای تابع f' در $[a, c_1]$ برقرار می‌شود زیرا که $f'(a) = f'(c_1) = 0$. پس نقطه‌ای c وجود دارد $a < c < c_1$، که $f''(c) = (f')'(c) = 0$. $\square$

(۱۷ ـ ۴) (همتای قضیهٔ میانگین برای مشتق دوم) I یک بازهٔ باز است، $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم در I، a و b و نقطهٔ I که $b > a$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که:

$$f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)] = \frac{1}{2} f''(c)(b-a)^2 \qquad (۵)$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم $b = a + h$، (۵) به (۴) تبدیل می‌شود و پس از اثبات ۱۷ـ۴، صحت ۱۷ـ۲ نیز نتیجه می‌شود.

برهان ۱۷ـ۴. مشابه شیوه‌ای که از قضیهٔ رل معمولی، قضیهٔ میانگین را نتیجه گرفتیم، عمل می‌کنیم. در آنجا با کم کردن مقدار y خط واصل از $(a, f(a))$ به $(b, f(b))$ از $y = f(x)$ دیدیم که تفاضل در قضیهٔ رل صدق می‌کند. در اینجا چون شیب خط راست فوق لازم نیست برابر $f'(a)$ باشد، این تفاضل شرط لازم برای مشتق در نقطهٔ آغازی را برآورده نمی‌کند. بنابراین تابعی یک درجه پیچیده‌تر از تابع درجه یک (با نمودار خط راست) باید جستجو کنیم که در نقطهٔ a مقدار تابع و مقدار مشتق آن برابر به ترتیب $f(a)$ و $f'(a)$ باشند، و در نقطهٔ b، مقدار تابع برابر $f(b)$. برای برآورده کردن این سه شرط یک تابع درجه ۲ کفایت می‌کند. تابعی کمکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2$$

برای اینکه $\phi(a) = f(a)$، باید داشته باشیم $A = f(a)$. اگر یک بار از ϕ مشتق بگیریم حاصل می‌شود:

$$\phi'(x) = B + 2C(x-a)$$

برای اینکه $\phi'(a) = f'(a)$، باید داشته باشیم $B = f'(a)$، پس

$$\phi(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + C(x-a)^2 \qquad (۶)$$

برای تعیین ضریب C، از شرط $\phi(b) = f(b)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + C(b-a)^2$$

یا

$$C = \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^{۲}} \qquad (۷)$$

بدین ترتیب با این مقدار برای C، تابع ϕ در (۶) در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\phi(a) = f(a) \quad , \quad \phi'(a) = f'(a) \quad , \quad \phi(b) = f(b) \qquad (۸)$$

حال تابع g را به صورت

$$g(x) = f(x) - \phi(x)$$

تعریف می‌کنیم. از (۸) نتیجه می‌شود که

$$g(a) = g(b) = ۰ \quad , \quad g'(a) = ۰$$

بنابراین طبق (۱۷ ـ ۳) نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $g''(c) = ۰$، ولی:

$$g''(c) = f''(c) - ۲C = ۰$$

یا

$$f''(c) = (۲)\frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^{۲}}$$

و با طرفین ـ وسطین حکم (۵) نتیجه می‌شود. □

بدین ترتیب همان طور که قبل از ارائه برهان اشاره شد، تخمین خطای تقریب خطی، یعنی فرمول (۴) و گزاره ۱۷ ـ ۲ از ۱۷ ـ ۴ نتیجه می‌شوند.

مثال ۶. تقریب خطی $\sqrt[۳]{۱/۰۱۲} \simeq ۱/۰۰۴$ را که در مثال ۱ آوردیم بررسی می‌کنیم. در این مثال داشتیم $f(x) = \sqrt[۳]{x}$، پس $f'(x) = \frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$ و $f''(x) = -\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}$. بنابراین طبق ۱۷—۲

$$\sqrt[۳]{۱/۰۱۲} - ۱/۰۰۴ = (\frac{۱}{۲})(-\frac{۲}{۹})\frac{۱}{c^{\frac{۵}{۳}}}(\frac{۱۲}{۱۰۰۰})^{۲} \qquad (۹)$$

که در اینجا c بین ۱ و ۱/۰۱۲ است. ۱۷−۲ اطلاع دقیق‌تری در مورد c نمی‌دهد و اصولاً نباید انتظار داشت که بتوان میزان خطا را به راحتی و دقت به‌دست آورد زیرا در این صورت با افزودن این مقدار به مقدار تقریبی، مقدار دقیق به‌دست می‌آمد. آنچه در اینجا مطلوب است یافتن حدود یا یک کران بالایی برای قدرمطلق خطاست. اگر بتوانیم کرانی بالایی برای خطا به‌دست آوردیم که در کاربرد خاص مورد نظر قابل قبول باشد، تقریب مطرح شده نیز پذیرفتنی است. در اینجا چون $1 < c < 1/012$ و c در مخرج طرف راست (۹) است، با قرار دادن $c = 1$، قدرمطلق طرف راست (۹) یک کران بالایی برای قدرمطلق خطا به‌دست می‌دهد:

$$|\sqrt[3]{1/012} - 1/004| < \frac{16}{10^6}$$

بنابراین اگر مثلاً دقت 10^{-4} مورد نظر باشد، تقریب بالا قابل قبول است. اگر از قاعده روند کردن استفاده کنیم، چون $\frac{16}{10^6} < \frac{1}{2}10^{-4}$، تقریب ۱/۰۰۴۰ تا چهار رقم اعشار درست است. محاسبه با یک ماشین حساب به نسبت قوی می‌دهد $\sqrt[3]{1/012} \sim 1/0039841$ که اگر به چهار رقم پس از اعشار روند شود به همان ۱/۰۰۴۰ می‌رسد.

ذکر یکی دو نکته در مورد مثال بالا لازم است. اول اینکه علامت منفی طرف راست (۹) نشانگر این است که تقریب ۱/۰۰۴ از مقدار واقعی بزرگتر است. در واقع با توجه به علامت منفی $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ برای $x > 0$، مشاهده می‌کنیم که $\frac{1}{2}f''(c)h^2 < 0$ و طبق (۴) نمودار تابع همواره زیر خط مماس قرار دارد (شکل ۵).

نکته دوم که از $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ و نیز نمودار تابع $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$، $x > 0$، مشاهده می‌شود این است که $|f''(x)|$ به $+\infty$ میل می‌کند وقتی $x \longrightarrow 0^+$، در حالی که $|f''(x)|$ به صفر میل می‌کند وقتی $x \longrightarrow +\infty$. در نمودار این نکته به این صورت ظاهر می‌شود که شیب خط مماس بر نمودار وقتی $x \longrightarrow 0^+$ به شدت تغییر می‌کند در حالی که تغییر شیب وقتی $x \longrightarrow +\infty$ بسیار کندتر است. بنابراین می‌توان انتظار داشت که مثلاً مقداری که تقریب خطی در نقطهٔ $a = 1$ برای $\sqrt[3]{1+h}$ به‌دست می‌دهد، یعنی $1 + \frac{h}{3}$، برای $h > 0$ دقیق‌تر از $h < 0$ با همان $|h|$ باشد. مثلاً برای $h = 0/21$ مقدار تقریبی ۱/۰۷ به‌دست می‌آید که تا دو رقم اعشار با روند کردن درست است (ماشین حساب به نسبت قوی

مقدار ۱/۰۶۵۶ را می‌دهد که با روند کردن به ۱/۰۷ تبدیل می‌شود). این در حالی است که برای $h = -$۰/۲۱ تقریب ۰/۹۳ با مقدار ارائه شده توسط ماشین حساب به صورت ۰/۹۲۴۴۳ تا دو رقم پس از اعشار، پس از روند کردن، مطابقت ندارد. برای $|h|$ بزرگتر تفاوت فاحش‌تر می‌شود. برای $h = 1$، اختلاف تقریب خطی ۱/۳۳۳۳۳۳ $= 1 + \frac{1}{3}$ با مقدار ۱/۲۵۹۹۲۱ ماشین حساب حدوداً ۰/۰۷۳۴۱۲ است در حالی که برای $h = -1$، تقریب خطی $\frac{2}{3}$ با مقدار واقعی ۰، ۰/۶۶۶۶۶۶ $= \frac{2}{3}$ اختلاف دارد.

نمودار تابع و کاربردهای آن

بحث جلسهٔ قبل اهمیت مشتق دوم را در تخمین خطای تقریب خطی نشان داد. در اینجا نخست به بررسی بیشتر کاربردهای مشتق دوم می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر تابع f در بازهٔ باز I دوبار مشتق‌پذیر باشد و a و $a+h$ در این بازه باشند، آنگاه:

$$f(a+h) - [f(a) + f'(a)h] - \frac{1}{2}f''(c)h^2 \qquad (1)$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و $a+h$ است. از (۱) بلافاصله نتیجه می‌شود که:

(۱۸–۱) گزاره. فرض کنید I یک بازهٔ باز است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر که مشتق دوم آن در سراسر بازهٔ I مثبت (به ترتیب منفی) است. در این صورت برای هر نقطهٔ درونی a از I، نمودار تابع به‌ازای هر $x \neq a$ در بالا (به ترتیب پایین) خط مماس در نقطهٔ a قرار می‌گیرد. به بیان دیگر:

$$x \neq a \quad : \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (2)$$

$$(x \neq a \quad : \quad f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{به ترتیب}) \qquad (3)$$

□

ضمناً در وضعیت $f'' > 0$، مشتق اول، یعنی شیب مماس، صعودی، و در وضعیت $f'' < 0$، شیب مماس نزولی خواهد بود. اگر $a < b < c$ طوری باشند که f'' روی $]a,b[$ و $]b,c[$ علامت مختلف داشته باشد، نقطهٔ b را یک نقطه عطف می‌نامند. اگر f'' پیوسته باشد در این نقطه که f'' تغییر علامت

می‌دهد باید داشته باشیم $f''(b) = 0$. در شکل ۱ (الف) تابعی با $f'' > 0$، در شکل ۱ (ب) تابعی با $f'' < 0$، و در شکل ۱ (ج) یک نقطهٔ عطف نمایش داده شده است.

از شکل‌های ۱ (الف) و ۱ (ب) به نظر می‌رسد که وقتی $f'' > 0$، خط واصل بین هر دو نقطهٔ نمودار باید در بالای نمودار قرار گیرد، و بالعکس وقتی $f'' < 0$، خط واصل بین دو نقطهٔ نمودار در زیر نمودار تابع واقع می‌شود. این حدس در واقع درست است:

(۱۸–۲) گزاره. I یک بازهٔ باز است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر. فرض کنید f'' در سراسر I مثبت (به ترتیب منفی) است. در این صورت برای هر دو نقطه a و b از I که $a < b$، خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ بالای (به ترتیب پایین) نمودار f روی $]a, b[$ قرار می‌گیرد.

برهان. مطلب را برای $f'' > 0$ ثابت می‌کنیم، حالت $f'' < 0$ مشابه است و نیز با تعویض f به $-f$ به‌دست می‌آید. توجه کنید که نقاط بازهٔ $[a, b]$ را می‌توان به صورت $(1-t)a + tb$ نوشت که در آن $0 < t < 1$. همچنین هر نقطهٔ پاره‌خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ به صورت $((1-t)a + tb, (1-t)f(a) + tf(b))$، $0 \leq t \leq 1$، نمایش داده می‌شود. در واقع باید ثابت کنیم:

$$0 < t < 1 \quad : \quad f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b) \qquad (۴)$$

فرض می‌کنیم به‌ازای یک t، $0 < t < 1$، نامساوی (۴) برقرار نیست و به تناقض می‌رسیم. بدین ترتیب فرض کنید t وجود دارد که

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

پس

$$(1-t)f((1-t)a + tb) + tf((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

بنابراین

$$(1-t)(f((1-t)a + tb) - f(a)) \geq t(f(b) - f((1-t)a + tb))$$

اگر دو طرف را بر $t(1-t)(b-a)$ تقسیم کنیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{t(b-a)} \geq \frac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{(1-t)(b-a)}$$

یا:

$$\frac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{(1-t)a+tb-a} \geq \frac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{b-((1-t)a+tb)}$$

برای سهولت در نوشتن، نقطهٔ $(1-t)a+tb$ را به c نمایش دهید. پس داریم:

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \geq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

کسر سمت چپ شیب خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(c, f(c))$ است. طبق قضیهٔ میانگین نقطه‌ای c_1 بین a و c وجود دارد که کسر سمت چپ برابر $f'(c_1)$ است. به همین ترتیب نقطه‌ای c_2 وجود دارد، $c < c_2 < b$، که $f'(c_2)$ برابر کسر سمت راست است. بنابراین

$$f'(c_1) \geq f'(c_2)$$

ولی چون $f'' > 0$، f' صعودی است، پس $f'(c_1) < f'(c_2)$ و به تناقض مورد نظر رسیده‌ایم. □

به طور کلی تابع‌هایی که برای آنها خط واصل بین دو نقطهٔ نمودار در بالای نمودار تابع قرار گیرد تابع‌های محدب (محدب رو به پایین، یا مقعر رو به بالا)، و تابع‌هایی که برای آنها خط واصل بین دو نقطهٔ نمودار در زیر نمودار تابع قرار گیرد تابع‌های مقعر (مقعر رو به پایین، یا محدب رو به بالا) می‌نامند. بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که:

(۱۸–۳) نتیجه. فرض کنید I یک بازهٔ باز و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر است. اگر f'' در سراسر I مثبت (به ترتیب منفی) باشد، تابع f در I محدب (به ترتیب مقعر) است. □

با توجه به این نتیجه می‌توان در رسم نمودار تابع‌ها، با توجه به علامت مشتق دوم بازه‌های تحدب و تقعر تابع را منظور نمود.

حال فرض کنید تابع f در بازه‌ای حول نقطهٔ درونی a از بازهٔ خود مشتق‌پذیر است و در نقطهٔ a دارای مشتق دوم، $f''(a)$، است. آیا علامت $f''(a)$ در تک نقطهٔ a اطلاعی در مورد این نقطه

به‌دست می‌دهد؟ در بخش ۱۵، احکام ۱۵—۴—۱ و ۱۵—۴—۲ نشان دادند که اگر برای تابعی g داشته باشیم $g'(a) > 0$ (به ترتیب $g'(a) < 0$)، آنگاه برای x های نزدیک a و بزرگتر از a داریم $g(x) > g(a)$ (به ترتیب $g(x) < g(a)$)، و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $g(x) < g(a)$ (به ترتیب $g(x) > g(a)$). حال اگر به جای g تابع f' را جایگزین کنیم، نتیجه می‌شود که به فرض $f''(a) > 0$ (به ترتیب $f''(a) < 0$)، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $f'(x) > f'(a)$ (به ترتیب $f'(x) < f'(a)$)، و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) < f'(a)$ (به ترتیب $f'(x) > f'(a)$). بالاخص اگر $f'(a) = 0$، یعنی a یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد نتیجه می‌شود که:

- اگر $f''(a) > 0$، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $f'(x) > 0$ و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) < 0$.
- اگر $f''(a) < 0$، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $f'(x) < 0$ و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) > 0$.

پس در وضعیت $f'(a) = 0$ و $f''(a) > 0$، تابع در سمت راست a صعودی، در سمت چپ آن نزولی است، در نتیجه a یک نقطهٔ کمینهٔ موضعی خواهد بود. به همین ترتیب، وقتی $f'(a) = 0$ و $f''(a) < 0$، نقطهٔ a یک بیشینهٔ موضعی است. بنابراین "آزمون مشتق دوم" به شرح زیر ثابت شده است.

(۱۸—۴) آزمون مشتق دوم. فرض کنید تابع f در یک بازه حول نقطه درونی a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر است و در نقطهٔ a، مشتق دوم f، $f''(a)$، وجود دارد. به علاوه فرض کنید $f'(a) = 0$. در این صورت:

الف) اگر $f''(a) > 0$، نقطهٔ a یک کمینه (مینیمم) موضعی است.

ب) اگر $f''(a) < 0$، نقطهٔ a یک بیشینه (ماکسیمم) موضعی است. □

آزمون مشتق دوم نیز در رسم نمودار تابع‌ها گاهی مؤثر واقع می‌شود. اگر علاوه بر $f'(a) = 0$، داشته باشیم $f''(a) = 0$، اطلاعی در مورد ماهیت نقطهٔ a حاصل نمی‌شود. در شکل (۴) چهار نمونه با

$f'(a) = f''(a) = ۰$، نمایش داده شده‌اند که چهار وضعیت مختلف دارند.

چند مثال زیر شکل‌های ۱ و ۳ بخش ۱۵ را توجیه می‌کنند.

مثال ۱. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = x^۴ - x^۳$ را رسم کنید.

داریم $f'(x) = ۴x^۳ - ۳x^۲$، $f''(x) = ۱۲x^۲ - ۶x$. در جدول زیر علامت تابع و علامت مشتق‌های اول و دوم آن را در بازه‌های گوناگون نمایش داده‌ایم:

x		۰		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۴}$		۱	
$f(x)$	+	۰	−	⋮	−	⋮	−	۰	+
$f'(x)$	−	۰	−	⋮	−	۰	−	⋮	+
$f''(x)$	+	۰	−	۰	+	⋮	−	⋮	+

با توجه به داده‌های بالا، شکل ۳ (الف) به‌دست می‌آید.

مثال ۲. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = x - \sin x$ را رسم کنید.

داریم $f'(x) = ۱ - \cos x$ و $f''(x) = \sin x$. این تابع صعودی است زیرا که فقط در مجموعه‌ای گسسته از نقاط، یعنی $x = ۲k\pi$ مشتق صفر می‌شود و در سایر نقاط مشتق مثبت است. پس بین هر دو مضرب متوالی ۲π تابع صعودی است. مشتق دوم تابع در مضارب π صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد، پس این نقاط همه نقاط عطف هستند. ضمناً داریم $f(۰) = ۰$، و از صعودی بودن تابع نتیجه می‌شود که $f(x) > ۰$ برای $x > ۰$ و $f(x) < ۰$ برای $x < ۰$. با در نظر گرفتن علامت f'' در بازه‌های مختلف، شکل ۳ (ب) به‌دست می‌آید.

مثال ۳. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را که به صورت زیر تعریف شده است رسم کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

برای $x \neq ۰$ تابع داده شده ترکیب و حاصل‌ضرب تابع‌های مشتق‌پذیر است پس برای $x \neq ۰$ مشتق‌پذیر می‌باشد. در $x = ۰$ مشتق‌پذیر بودن تابع را مستقیماً از تعریف تحقیق می‌کنیم:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{h^۲ \sin \frac{۱}{h} - ۰}{h} = \lim_{h \to ۰} (h)(\sin \frac{۱}{h})$$

از آنجا که $|\sin\frac{1}{h}|$ کراندار با کران ۱ است و $\lim_{h\to 0} h = 0$ حد بالا وجود دارد و برابر صفر است. پس خط مماس بر نمودار در $x = 0$ وجود دارد و افقی است. ضمناً فرمول مشتق f به‌ازای $x \neq 0$ از فرمول لایب‌نیتس و قاعدهٔ زنجیره‌ای محاسبه می‌شود:

$$x \neq 0 \quad : \quad f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \qquad (5)$$

ادعا می‌کنیم دنباله‌ای از نقاط (x_n) وجود دارد که $x_n \longrightarrow 0$ و $f'(x_n) = f'(-x_n) = 0$. در واقع با قرار دادن $f'(x) = 0$ داریم:

$$\tan\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$$

اگر قرار دهیم $t = \frac{1}{x}$، باید نشان دهیم دنباله‌ای t_n وجود دارد که $t_n \longrightarrow +\infty$ و $\tan t_n = \frac{1}{2}t_n$. این مطلب با توجه به شکل ۴ بدیهی است زیرا که نمودار تابع $\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ همهٔ شاخه‌های نمودار تابع تناوبی $\beta(t) = \tan t$ را قطع می‌کند.

با قرار دادن $x_n = \frac{1}{t_n}$ حکم مورد نظر به‌دست می‌آید. ضمناً $f'(x)$ در همهٔ این نقاط تغییر علامت می‌دهد زیرا که اگر بنویسیم

$$f'(x) = (2x\cos\frac{1}{x})(\tan\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x})$$

در نقاط x_n پرانتز دوم صفر شده تغییر علامت می‌دهد زیرا که خط راست $\alpha(t) = \frac{t}{2}$ متناوباً در بالا و پایین نمودار $\beta(t) = \tan t$ قرار می‌گیرد و $2x\cos\frac{1}{x}$ در $x = x_n$ تغییر علامت نمی‌دهد. نتیجه اینکه نقاط (x_n) یکی در میان ماکسیمم و مینیمم موضعی هستند. نهایتاً اینکه چون $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$، نمودار تابع $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ بین نمودارهای $y = x^2$ و $y = -x^2$ محصور می‌ماند. این نمودار در شکل ۵ نمایش داده شده است.

توجه کنید که $f'(0) = 0$ ولی نقطهٔ ۰ نه کمینهٔ موضعی، نه بیشینهٔ موضعی و نه نقطهٔ عطف معمولی آن است. در واقع چون تابع f' در ۰ پیوسته نیست (عبارت (۵) حد ندارد وقتی $x \longrightarrow 0$ در حالی که $f'(0) = 0$)، f' نمی‌تواند در ۰ مشتق‌پذیر باشد، یعنی $f''(0)$ موجود نیست.

مثال ۴. شکل ۱ بخش ۱۵ نمودار تابعی f را نشان می‌دهد که $f'(\circ) > \circ$ ولی f در هیچ بازهٔ حول $\circ$ صعودی نیست. با اندک تغییری در مثال ۳ می‌توان فرمولی برای چنین تابعی ارائه کرد. می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲} + x^۲ \sin \frac{۱}{x} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

از محاسبات مثال ۳ نتیجه می‌شود که f همه‌جا مشتق‌پذیر است و $f'(\circ) = \frac{۱}{۲} > \circ$. طبق ۱۵—۴—۱، این تابع برای $x > \circ$ کوچک مقدار مثبت و برای $x < \circ$ با قدرمطلق کوچک، مقدار منفی دارد. برای $x \neq \circ$ داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲} + ۲x \sin \frac{۱}{x} - \cos \frac{۱}{x}$$

ادعا می‌کنیم دنباله‌ای (x_n) وجود دارد که $x_n \longrightarrow \circ$، $f'(x_n) = f'(-x_n) = \circ$، و f' در این نقاط تغییر علامت می‌دهد. در واقع چون $۲x \sin \frac{۱}{x} \longrightarrow \circ$ وقتی $x \longrightarrow \circ$ و $\cos \frac{۱}{x}$ با کوچک شدن x بی‌نهایت نوسان بین -۱ و $+۱$ دارد، $f'(x) = \circ$ بی‌نهایت جواب در نزدیکی $\circ$ دارد. در این نقاط f' تغییر علامت می‌دهد زیرا نمودار $\cos \frac{۱}{x}$ خطوط نزدیک ارتفاع $-\frac{۱}{۲}$ را در گذر بین -۱ و $+۱$ قطع می‌کند. در شکل ۶ تقاطع نمودارهای تابع با مقدار $۲x \sin \frac{۱}{x} - \cos \frac{۱}{x}$ و تابع با مقدار ثابت $-\frac{۱}{۲}$ به طور تقریبی رسم شده است. بدین ترتیب شکل ۱ بخش ۱۵ توجیه می‌شود.

آنچه تا این مرحله از خواص مشتق اول و دوم آموخته‌ایم ابزاری نیرومند و مؤثر برای صورت‌بندی و حل بسیاری مسایل عملی در اختیار ما قرار می‌دهد. در باقیماندهٔ این بحث و در جلسهٔ آینده چند نمونه از این مسایل را بررسی خواهیم کرد. نخست در این جلسه مثال‌هایی مطرح می‌کنیم در آنها می‌توان به کمک شکل اطلاعات کیفی سودمند کسب کرد و در بخش آینده تعدادی مثال کمی بهینه‌یابی مطرح خواهیم ساخت.

مثال ۱. گلدانی به صورت شکل ۷ (الف) داده شده است. در این گلدان با آهنگ ثابت آب می‌ریزیم تا گلدان پر شود. نمودار تغییر ارتفاع آب در گلدان را برحسب زمان رسم کنید.

زمان را به t و ارتفاع آب را به h نمایش می‌دهیم. هدف در اینجا رسم نمودار h نسبت به t است. ارتفاع‌های حساس، مربوط به برآمدگی‌ها و تورفتگی‌های گلدان را به a، b و c نمایش داده‌ایم و

$h = 0$ را کف گلدان می‌گیریم. قطعاً با ریختن آب در گلدان ارتفاع سطح آب افزایش می‌یابد؛ پس h تابعی صعودی از t خواهد بود. به فرض مشتق‌پذیری، مشتق اول h نسبت به t مثبت است. عامل دیگری که در شکل نمودار مؤثر است علامت مشتق دوم h نسبت به t است. اگر مشتق اول، یعنی آهنگ افزایش h در زمان، خود صعودی باشد، مشتق دوم مثبت و نمودار محدب است، ولی اگر آهنگ افزایش h نسبت به t، نزولی باشد، مشتق دوم منفی و نمودار مقعر خواهد بود. پس لازم است تغییر ارتفاع را در بازه‌های مختلف بررسی کنیم. در بازهٔ $0 \leq h \leq a$، ضخامت بدنهٔ گلدان رو به افزایش است، بنابراین آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب به تدریج کندتر می‌شود؛ پس مشتق دوم h نسبت به t وقتی $0 < h < a$، منفی است. بالعکس برای $a \leq h \leq b$، تنگ‌تر شدن مقطع گلدان موجب می‌شود که آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب فزونی یابد و در نتیجه در $a < h < b$، مشتق دوم h نسبت به t مثبت خواهد بود. و بالاخره در $b < h < c$، نیز، مانند $0 < h < a$، آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب نزولی است و $h''(t)$ منفی می‌باشد. یکی دو نکتهٔ دیگر در اینجا حائز اهمیت است. در هر دو بازهٔ $0 \leq h \leq a$ و $b \leq h \leq c$، داریم $0 < h'(t)$ و $0 > h''(t)$، ولی شکل مقطع گلدان در دو مورد متفاوت است، این اختلاف شکل گلدان را چگونه می‌توان در نمودار $h(t)$ منعکس کرد؟ اگر فرض کنیم طول بازه‌های $[0, h]$ و $[b, c]$ برابر است و مقطع گلدان در ارتفاع‌های 0 و b برابر و نیز در ارتفاع‌های a و c برابر است، می‌بینیم که حجم گلدان بین 0 و a، به سبب برآمدگی، بیشتر از حجم گلدان بین b و c است. بنابراین، توجه به اینکه آب با آهنگ ثابت وارد گلدان می‌شود، مدت زمان لازم برای پرکردن ارتفاع 0 تا a بزرگتر از مدت زمان لازم برای پرکردن ارتفاع b تا c است. این نکته در نمودار منظور شده است؛ توجه کنید که بازه $[t_b, t_c]$ کوچکتر از $[0, t_a]$ منظور شده است.

تمرین. همین بررسی را برای گلدان‌های شکل زیر انجام دهید. علاوه بر شکل کیفی، با توجه به داده‌های تصاویر فرمولی برای h برحسب t به‌دست آورید و مشتق‌های اول، دوم و سوم h نسبت به t را مطالعه کنید.

مثال ۲. نمودار مصرف $\frac{\text{لیتر}}{\text{ساعت}}$ بنزین یک نوع اتومبیل برحسب سرعت اتومبیل در شکل ۹ آمده است. چگونه می‌توان سرعتی را پیدا کرد که در آن بهترین راندمان $\frac{\text{لیتر}}{\text{کیلومتر}}$ حاصل می‌شود؟

سرعت اتومبیل را به v نمایش می‌دهیم. برای هر سرعت v، p متناظر در نمودار، مصرف بنزین اتومبیل به لیتر است اگر اتومبیل یک ساعت با سرعت ثابت v حرکت کند، یا به بیان دیگر $p = \frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}$ اگر اتومبیل با سرعت ثابت v حرکت کند. در شکل می‌بینیم که بهترین راندمان نسبت به زمان، یعنی کمترین مصرف در ساعت، به‌ازای $v = 50$ کیلومتر در ساعت به‌دست می‌آید. مجهولی که مطرح است، بهترین راندمان مصرف بنزین نسبت به مسافت است. اگر $\frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{مسافت به کیلومتر}}$ را به q نمایش دهیم، در سرعت ثابت v داریم:

$$q = \frac{\frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}}{\frac{\text{مسافت به کیلومتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}} = \frac{p}{v}$$

بنابراین مسأله یافتن مینیمم q مطرح است. توجه کنید که شهوداً نباید انتظار داشت که مینیمم q و مینیمم p لزوماً در یک سرعت حاصل شوند. بهترین راندمان سوخت بنزین در ساعت از نظر حفظ و نگاهداری موتور بهینه است ولی ممکن است برای رسیدن به یک مقصد دوردست کمترین مصرف بنزین را متضمن نباشد. در واقع اگر منحنی p برحسب v، طبق شکل ۹ باشد (این منحنی از آزمایش‌های واقعی گرفته شده است)، هدف ما مینیمم کردن $\frac{p}{v}$ است نه مینیمم کردن p. توجه کنید که برای هر سرعت v، q متناظر برابر شیب خط راستی است که از ۰ به نقطهٔ (v, p) روی نمودار رسم می‌شود. بنابراین باید نقطه‌ای را روی نمودار پیدا کرد که شیب این خط راست برای آن حداقل ممکن باشد. واضح است که این حداقل برای خط مماسی که از ۰ به نمودار رسم شود به‌دست می‌آید و این سرعتی v_0 بالاتر از نقطهٔ مینیمم p به‌دست می‌دهد (در شکل ۹، $v = v_0$). به عنوان یک تقریب محاسباتی، فرض کنید $p = \frac{1}{100}(v-50)^2 + 5$ که به‌ازای $v = 50$ مینیمم دارد. داریم $\frac{dp}{dv} = \frac{1}{50}v - 1$ و

$$\frac{dq}{dv} = \frac{\frac{dp}{dv}\cdot v - p}{v^2} = \frac{\frac{1}{50}v^2 - v - \frac{1}{100}(v-50)^2 - 5}{v^2}$$

برای یافتن مینیمم q، قرار می‌دهیم $\frac{dq}{dv} = 0$ (از ماهیت نمودار v روشن است که q باید دارای مینیمم در یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف باشد) که نتیجه می‌دهد $\frac{1}{100}v^2 - 30 = 0$، یا $v \simeq 54/8$ کیلومتر بر ساعت.

بهینه سازی

یکی ازکاربردهای بسیار معمول مشتق در مسایل بهینه‌سازی است. مقصود از بهینه سازی یافتن ماکسیمم یا مینی‌موم یک تابع با تنظیم مناسب متغیرهای تابع است. در اینجا ما با تابع یک متغیری سروکار داریم یعنی تابعهای به شکل $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ که S زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ ست. نمونه‌هایی از مسایل بهینه‌سازی که در عمل به آن بر می‌خوریم مسایل زیرند: یافتن سرعتی که اتومبیل با آن سرعت، بهترین راندمان $\frac{\text{کیلومتر}}{\text{لیتر}}$ را د شته باشد (مثال جلسهٔ قبل)، یافتن میزان تولید یک کالا به‌طوری که سود حاصل از فروش حداکثر ممکن باشد، یافتن مناسبترین ابعاد برای یک قوطی حلبی استوانه شکل با حجم ثابت به‌طوری‌که کمترین مقد ر حلبی در ساخت آن به کار گرفته شود. ... معمولاً دامنهٔ تابع f یک بازه از عداد حقیقی است که بسته به نوع مساله ممکن است یک بازهٔ کراندار یا بی‌کرن باشد و نقاط انتهایی بازهٔ کرندار ممکن است مطرح باشند یا نبشند.

نخست حالتی را در نظر بگیرید که یک تابع به شکل $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ د ده شده است. می‌دانیم که اگر f پیوسته باشد، تابع f د ری ماکسیمم و مینی‌موم روی $[a,b]$ ست. در ین حالت انجام موفقیت‌آمیز سه‌گام زیر منجر به یافتن ماکسیمم مینی‌موم می‌شود:

(۱۹ـ۱) گامهای یافتن ماکسیمم و مینی‌موم روی $[a,b]$

(الف) محاسبهٔ $f(a)$ و $f(b)$.

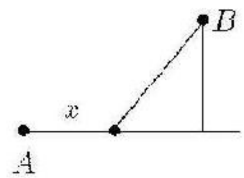
(ب) یافتن مقدار f در نقاط درونی باز، که در آن مشتق وجود دارد و مشتق در آن نقاط صفر است. ین نقاط شامل همهٔ نقاط ماکسیمم مینی‌موم موضعی می‌شود که تابع در آن نقاط مشتقپذیر است. این نقاط را نقاط بحرانی می‌نامند.

(ج) یافتن مقدار f در نقاطی که در آن f مشتقپذیر نیست. این نقاط را نقاط تکین می‌نامند.

این سه نوع نقطه همهٔ نامزدهای ممکن برای نقاط ماکسیمم و مینی‌موم ر در بر می‌گیرند. با مقایسهٔ مقدار f در این سه دسته نقطه می‌توان ماکسیمم و مینی‌موم تابع f را در $[a,b]$ پیدا کرد.

اگر $a=-\infty$، $b=+\infty$، هردو، و یا اگر باز ۰ به شکل $[a,b[$، $]a,b]$ یا $]a,b[$ باشد، طبیعی است که به جای گام (الف)، باید رفتار تابع ر وقتی مقدار متغیر به هر نتهای مشمول نشده در دامنهٔ تعریف f نزدیک می‌شود بررسی کنیم. به هر صورت در مسایل عملی از این نوع، نقطهٔ آغاز حل مساله، طرح دقیق تابع مورد نظر و مشخص کردن دامنهٔ آن ست. چنانچه بتوان یک شکل تقریبی از این تابع رسم نمود، معمولاً شکل رهنمای خوبی برای پیشگیری از اشتباه در حل مساله و برخورد با جوبهای نامعقول است.

مثال ۱. برای رسیدن به جزیرهٔ B که در فاصله مستقیم ۳ کیلومتری ساحل قرار د رد، فردی در نقطهٔ A در ساحل که ۵ کیلومتر از نزدیکترین نقطهٔ ساحل به جزیره فاصله دارد و می‌تونند از قایق موتوری و نیز یک اتوسبیل بری حرکت در جادهٔ ساحلی استفاده کند.



سرعت قایق موتوری $20\,km/hr$ و سرعت اتومبیل در جادهٔ ساحلی $40\,km/hr$ است. تعین کنید که برای رسیدن به جزیره در حداقل زمان ممکن، باید چه مساحتی را نخست با اتومبیل طی کرد و سپس از قایق استفاده نمود.

در این مساله، زمان، t، باید مینی‌موم شود. زمان لازم برای رسیدن به نقطهٔ B مجموع دو زمان t_1, t_2 ست، $t = t_1 + t_2$، که در آن t_1 زمان استفاده از اتومبیل و t_2 مدت زمان استفاده از قایق می‌باشد. گر مسافت x کیلومتر نخست در جادهٔ ساحلی با اتومبیل طی شود، داریم:

$$t_1 = \frac{x}{40}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{3^2 + (5-x)^2}}{20}$$

بنابراین تابعی که باید مینی‌موم آن پیدا میشود عبارت ست از:

$$t = \frac{x}{۴۰} + \frac{\sqrt{۹ + (۵ - x)^۲}}{۲۰}$$

لازم ست که د منهٔ ین تابع، یعنی حدود x، نیز مشخص شود. در اینجا $۰ \leq x \leq ۵$ زیرا که اگر فرد مستقیماً از نقطهٔ A به سوی B ب قایق حرکت کند داریم $x = ۰$، و از سوی دیگر حداکثر استفادهٔ معقول از اتومبیل راندن تا پای نزدیکترین نقطه ساحل به جزیره، یعنی $x = ۵$، و استفاده ز قایق پس از آن است. بنابراین گامهای (الف)، (ب) و (ج) را به‌صورت زیر پیاده می‌کنیم:

(لف) در $x = ۰$ داریم (ساعت)، $t = \frac{\sqrt{۳۴}}{۲۰} \approx ۰/۲۷۵$، و برای $x = ۵$، ساعت $t = ۰/۱۲۵ + ۰/۱۵ = ۰/۲۵$

(ب) و (ج). t به‌عنون تابع x در د خل بازهٔ $[۰, ۵]$ مشتقپذیر است زیر تابع جذر فقط در نقطهٔ ۰ مشتقپذیر نیست واینجا زیر رادیکان حد قل ۹ است. بنابراین کافی است گام (ب) اجرا شود، یعنی $\frac{dt}{dx}$ برابر صفر قرر داده شده نقاط بحرانی و مقد ر f در آنها مشخص شود. داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= \frac{۱}{۴۰} + \frac{-۲(۵ - x)}{۴۰\sqrt{۹ - (۵ - x)^۲}} = ۰ \\
\sqrt{۹ - (۵ - x)^۲} &= ۲(۵ - x) \\
۹ - (۵ - x)^۲ &= ۴(۵ - x)^۲ \\
(۵ - x)^۲ &= \tfrac{۹}{۵} \\
۵ - x &= \pm\frac{۳}{\sqrt{۵}}
\end{aligned}$$

چون $۰ \leq x \leq ۵$ تنها جو ب عبارت است از

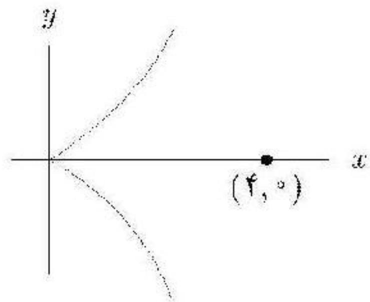
$$x = ۵ - \frac{۳}{\sqrt{۵}} \approx ۳/۶۵۸$$

و در این نقطه:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{۵ - \frac{۳}{\sqrt{۵}}}{۴۰} + \frac{\sqrt{۹ + \frac{۹}{۵}}}{۲۰} \\
&\approx ۰/۰۹۱ + ۰/۱۶۴ = ۰/۲۵۵ \quad \text{(ساعت)}
\end{aligned}$$

در مقایسهٔ این مقدار با دو مقدار انتهایی، ملاحظه می‌کنیم که مینی‌موم به‌ازای $x \approx ۳/۶۵۸^{km}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲. می‌خواهیم نزدیکترین نقطهٔ منحنی $x^۳ = y^۲$ را به‌نقطهٔ $(۴,۰)$ پیدا کنیم. این مسالهٔ ساده را از سه‌راه مختلف حل می‌کنیم، و طبعاً در هر سه راه حل به یک جواب خواهیم رسید ولی مقایسهٔ روشها آموزنده است.



راه اول منحنی داده شده اجتماع نمودارهای دو تابع $y = x^{۳/۲}$ و $y = -x^{۳/۲}$ هر دو با دامنهٔ $[۰,+\infty)$ است. بنابر تقارن دو شاخه نسبت به نقطهٔ $(۴,۰)$ کافی است مساله را برای یک شاخه حل کنیم و قرینهٔ نقطه به دست آمده در شاخهٔ دیگر را نیز منظورکنیم. بنابرین فقط $y = x^{۳/۲}$ روی $[۰,\infty)$ را در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $(۴,۰)$ از نقطه‌ای (x,y) روی این منحنی برابر است با $\sqrt{(x-۴)^۲ + y^۲}$. از آنجاکه مینی‌موم کردن یک کمیت مثبت مطرح است، می‌توان مجذور همین عبارت یعنی $(x-۴)^۲ + y^۲$ را در نظرگرفت که فاقد نماد $\sqrt{\ }$ است و محاسبه با آن سر راست‌تر. ضمناً برای نقاط منحنی، $y^۲ = x^۳$، پس باید مینی‌موم تابع زیر را به‌دست آورد:

$$D(x) = (x-۴)^۲ + x^۳,\ ۰ \le x < +\infty$$

در نقطهٔ انتهایی $x = ۰$ داریم $D(۰) = ۱۶$. رفتار تابع وقتی $x \longrightarrow +\infty$ را نیز باید در نظر بگیریم که $D(x) \longrightarrow +\infty$ وقتی $x \longrightarrow +\infty$. تابع D به‌عنوان تابع x در $۰ < x < +\infty$ مشتق‌پذیر

است، پس باید $\frac{dD}{dx}$ را برابر صفر قرار داده مینی‌مومهای موضعی را پید کنیم.

$$\frac{dD}{dx} = ۲(x-۴)+۳x^{۲}$$

معادله $۳x^{۲}+۲x-۸=۰$ دری ریشه‌های -۲، $\frac{۴}{۳}$ است که -۲ در دامنهٔ تابع ما نیست، بنابرین فقط $x=\frac{۴}{۳}$ نیاز به بررسی دارد. داریم $D(\frac{۴}{۳})=\frac{۲۵۶}{۲۷}$. با توجه به ینکه $D(\frac{۴}{۳})<D(۰)$، جواب مساله به زای $\frac{۴}{۳}$ به‌دست می‌آید و نقاط منحنی که حداقل فاصله را می‌دهند عبارتند از $(\frac{۴}{۳}, \pm\frac{۸}{۳\sqrt{۳}})$.

راه دوم. می‌توانیم بجای اینکه y را تابعی از x روی منحنی بگیریم، x را تابعی ز y فرض کنیم، $x=y^{۲/۳}$ و در اینصورت به جای تابع D بالاکه برحسب x نمایش داده شده، مجذور فاصله را برحسب y بررسی می‌کنیم:

$$E(y)=(y^{۲/۳}-۴)^{۲}+y^{۲},\quad -\infty<y<+\infty$$

توجه کنید که در اینجا فقط یک تابع مطرح ست و دامنهٔ آن تمام $\mathbb{R}$ می‌باشد. وقتی $y\longrightarrow\pm\infty$، داریم $E\longrightarrow+\infty$. تابع داده شده در $y=۰$ مشتق‌پذیر نیست بنابراین باید مقدار تابع را در این نقطه به‌طور جداگانه بررسی کرد. داریم $E(۰)=۱۶$. در سایر نقاط تابع مشتق‌پذیر است و با قرار د دن $\frac{dE}{dy}=۰$ نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\frac{dE}{dy}=\frac{۴}{۳}\frac{۱}{y^{۱/۳}}(y^{۲/۳}-۴)+۲y$$

با قرار دادن $\frac{dE}{dy}=۰$ مضرب کردن در $\frac{۳}{۲}y^{۱/۳}$ (توجه کنید که $y=۰$ قبلاً بررسی شد.) نتیجه می‌شود.

$$۳y^{۴/۳}+۲y^{۲/۳}-۸=۰$$

که یک معادله درجه ۲ برحسب $y^{۲.۳}$ است. از حل این معادله نتیجه می‌شود $y^{۲/۳}=-۲/\frac{۴}{۳}$ که جوب منفی قابل قبول نیست، پس $y^{۲/۳}=\frac{۴}{۳}$، یا $y=\pm\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}$ و در نتیجه $x=\sqrt[۳]{y^{۲}}=\frac{۴}{۳}$. مجدداً $E(\pm\frac{۸}{۳\sqrt{۳}})<E(۰)$ و همان جواب راه ول نتیجه می‌شود.

راه سوم. وقتی از رابطهٔ $f(x,y) = 0$ نتوان یکی از y یا x را به‌صورت تابعی ساده از دیگری نوشت، ممکن است کوشش کنیم هر دو متغیر x, y را برحسب متغیر جدیدی t بنویسیم. با تجسم t به‌عنوان زمان می‌توان فرض کرد که منحنی داده شده مسیر حرکت نقطه‌ای (x,y) برحسب زمان است. برای منحنی $y^{2} = x^{3}$، می‌توان نوشت:

$$x = t^{2},\ y = t^{3},\ -\infty < t < +\infty$$

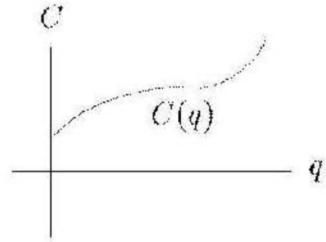
در اینصورت مجذور فاصله (x,y) از $(4,0)$ به‌صورت تابعی از t ارائه می‌شود:

$$F(t) = (t^{2} - 4)^{2} + t^{6},\ \ -\infty < t < +\infty$$

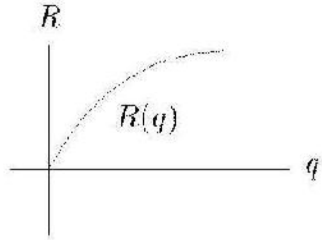
داریم $F(t) \longrightarrow +\infty$ وقتی $Ft \longrightarrow \pm\infty$ به‌عنوان تابعی از t همه‌جا مشتق‌پذیر است، مشتق آن نسبت به t را برابر صفر قرار می‌دهیم که نتیجه می‌شود $6t^{5} + 4t^{3} - 16t = 0$، یا $t(3t^{2} + 2t - 8) = 0$ که جوابهای $t = 0$، $t^{2} = \frac{4}{3}$ و $t^{2} = -2$ (غیر قابل قبول) را می‌دهد. داریم $F(0) = 16$ و $F(\sqrt{\frac{4}{3}}) = \frac{256}{27}$ و جواب مساله همان نقاط $(\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3\sqrt{3}})$ هستند.

نکته قابل مقایسه در این سه راه حل وضعیت نقطهٔ $(0,0)$ روی منحنی $y^{2} = x^{3}$ است که یک ماکسیمم موضعی برای فاصله از نقطه $(4,0)$ می‌باشد. از راه حل اول، این نقطه به‌صورت یک انتهای بازهٔ تابع ظاهر می‌شود، در راه حل دوم به عنوان یک نقطه تکین که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست، و در راه حل سوم به‌عنوان یک نقطه که در آن مشتق وجود دارد و صفر است. بنابراین بسته به اینکه مساله چگونه صورتبندی شود، ماهیت یک نقطه ممکن است به صورتهای گوناگون دیده شود.

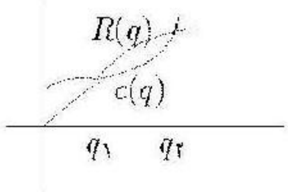
(۲ـ۱۹) کاربرد در مسایل اقتصاد فرض کنید یک شرکت تولیدی کالایی تولید می‌کند که می‌توان میزان تولید آن کالا را عملاً کمیتی پیوسته فرض کرد. مثلاً تولید شکر برحسب تن یا کیلوگرم، ولی نه تولید هواپیما یا زیردریایی که در موارد اخیر میزان تولید با عدد صحیح سنجیده می‌شود. هزینه تولید برحسب مقدار تولید نوعاً یک منحنی مانند شکل ۳ است. اگر هزینه تولید q مقدار از کالا را به $C(q)$ نمایش دهیم (مثلاً برحسب ریال)، شکل نمودار شکل ۳



شکل ۳



شکل ۴



شکل ۵

به‌صورت زیر توجیه می‌شود. بری ره‌اندازی تولید، مقداری سرمایه‌گذاری اولیه لازم است، بنابر در آغاز (یعنی $q = 0$) به هر حال مبلغی هزینه شده است که به صورت $C(0) >> 0$ ظاهر می‌شود. با فزایش تولید، چون سرمایه‌گذاری اولیه جدیدی لازم نیست هزینهٔ نسبی تولید کاهش می‌یابد، یعنی $C(q)$ پایین‌تر ز یک خط رست خواهد بود. مثلاً در چاپ یک کتاب، هزینه‌ای که صرف تهیهٔ فیلم و زینک می‌شود و به نسبت بالاست تکرار نمی‌شود و هرچه تولید بیشتر باشد هزینهٔ سبی، یعنی $\frac{C(q)}{q}$ کاهش می‌یابد. ین واقعیت به‌صورت تقعر نمودار $C(q)$ تا مقدار قابل ملاحظه‌ای از q نمایش داده شده است. ولی وقتی تولید از حد معینی تجاوز کند ممکن است نیاز به افزیش ماشین‌آلات و نیروی کار باشد که در اینصورت ین افزایش برحسب تغییر جهت تقعر $C(q)$ می‌شود، همچنان که در شکل نمایش داده شده است. برای تولید بعضی محصولات ممکن است این تغییر جهت صورت نگیرد تا خیلی دیر به‌وقوع بپیوندد. در مقابل هزینهٔ تولید، در شکل ۴ درآمد حاصل از فروش q مقدار کالا، $R(q)$، نمایش داده شده است. در اینجا $R(0) = 0$، یعنی قبل از فروش درآمدی وجود ند رد. در آغاز فروش R حدوداً خطی ست، یعنی به تناسب فروش q واحد، درآمدی که بربر حاصلضرب q در قیمت فروش یک واحد است حاصل می‌شود. ولی با فزایش تولید نوعاً به سبب برآورده شدن نیاز و اشباع بازار، یا به سبب ظهور واحدهای رقیب و اُفت قیمت، تدریجاً افزایش تولید موجب فزایش متناسب درآمد نمی‌شود و نمود ر $R(q)$ رو به‌پایین مقعر می‌شود. در شکل ۵ دو منحنی روی هم قرار د ده شده‌اند. روی بازهٔ $]q_1, q_2[$ میزان درآمد از هزینه بالاتر است و برای ینکه تولید سود ده باشد، باید مقدار تولید در بازهٔ $]q_1, q_2[$ بماند. در واقع تولید کننده مایل است که سود خود، یعنی $p(q) = R(q) - C(q)$ را

به حد کثر ممکن برساند، یعنی باید میزانی از تولید، q، را در بازهٔ $]q_1, q_2[$ انتخاب کند که برای آن $P(q)$ ماکسیمم شود. برای ینکه بتوانیم از ابزار حساب دیفرانسیل استفاده کنیم، فرض می‌کنیم تابعهای $C(q)$، $R(q)$ عملاً علاوه بر پیوسته بودن، مشتق‌پذیر نیز باشند. در ینصورت ماکسیمم سود حتماً در میزانی q از تولید حادث می‌شود که در آن $\frac{dp}{dq} = 0$. برای درک اقتصادی ین مطلب باید برداشتی قتصادی از مفهوم مشتق ارائه کنیم.

$\frac{dC}{dq}$ و $\frac{dR}{dq}$ چه معنایی دارند؟ طبق تعریف، برای میزان q_0 از تولید، داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) = \lim_{q \to q_0} \frac{C(q) - C(q_0)}{q - q_0}$$

پس در واقع برای q نزدیک q_0 داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) \approx \frac{C(q) - C(q_0)}{q - q_0}$$

در عمل میزان تولید واقعاً پیوسته نیست، مثلاً برای تولید شکر، حداقل معنی داری از تغییر متغیر، یک تُن شکر است، یا در مورد تولید هر کالای دیگر نیز، یک کوچکترین واحد معنی‌داری به‌عنوان حداقل افزیش یا کاهش تولید مطرح ست. بنابراین کوچکترین مقدار مثبت $q - q_0$ را می‌توان واحد فرض کرد و داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) \approx \frac{C(q_0+1) - C(q_0)}{1} = C(q_0 + 1) - C(q_0) \quad (1)$$

به بیان دیگر، تعبیر اقتصادی $\frac{dC}{dq}(q_0)$ هزینه تولید یک واحد اضافی از کالاست وقتی تولید به q_0 رسیده باشد. در اصطلاح اقتصاد، $\frac{dC}{dq}(q_0)$ را هزینه نهایی می‌نامند (دلیل ستفاده از لغت نهایی را خوهیم دید). با عیناً همین استدلال می‌توان گفت که:

$$\frac{dR}{dq}(q_0) \approx R(q_0 + 1) - R(q_0) \quad (2)$$

یعنی $\frac{dR}{dq}(q_0)$ درآمد حاصل از فروش یک واحد اضافی از کالاست وقتی تولید به q_0 رسیده باشد. $\frac{dR}{dq}(q_0)$ را در آمد نهایی می‌نامند.

حال به مسالهٔ ماکسیمم کردن سود باز می‌گردیم. اگر به‌ازای مقدار q_0 در $]q_1, q_2[$ ماکسیمم سود حاصل شود، داریم $\frac{dR}{dq}(q_0) - \frac{dC}{dq}(q_0) = 0$، پس بنابر (۱) و (۲):

$$R(q_0 + 1) - R(q_0) \approx C(q_0 + 1) - C(q_0) \quad (3)$$

یعنی درجایی ماکسیمم حاصل می‌شود که درآمد ناشی از فروش یک واحد اضافی زکالا برابر هزینهٔ تولید یک واحد ضافی ازکالاست. ین مطلب را می‌تون به‌طور شهودی نیز توجیه کرد. برای ینکه q_0 یک نقطهٔ ماکسیمم باشد باید برای q نزدیک q_0 و کوچکتر از q_0، تابع $P = R - C$ صعودی باشد یعنی تولید بیشتر، سود بیشتر یجاد کند، یا به عبارت دیگر در آمد فروش هر وحد بیش ز هزینهٔ تولید همان وحد باشد. بالعکس بری q نزدیک q_0 و بزرگتر از q_0، تابع $P = R - Q$ باید نزولی باشد، یعنی تولید بیشتر، سود کمتر یجاد کند، یا معادلاً درآمد فروش هر واحد بیشتر کمتر ز هزینهٔ تولید همان واحد باشد. بنابرین در نقطه‌گذر از صعود به‌نزول P، باید هزینهٔ تولید یک وحد ضافی با درآمد ناشی از فروش ‌ن برابر شود. حال می‌توان به‌دلیل استفاده از لغت نهایی پی‌برد. مقدار q_0 که در آن ماکسیمم سود حاصل می‌شود، در واقع میزان نهایی تولید مطلوب است زیراکه پس ز آن سود تولید کاهش خواهد یافت.

به‌عنوان تمرینی در ین مفاهیم، به‌عنوان مثال، روشی ترسیمی بری محاسبه هزینهٔ نهایی راکه در اقتصاد معمول است ارائه می‌کنیم.

مثال فرض کنید هزینهٔ تولید یک واحد ازکالا را وقتی که مقد ر تولید کالا q باشد به $a(q)$ نمایش دهیم. در اینصورت داریم:

$$C(q) = q.a(q) \qquad (۳)$$

نمودار $a(q)$ بسیاری اوقات مانند شکل ۶ است، یعنی تولید هرچه بیشتر باشد (تا حد معقولی)، هزینهٔ تولید هر وحد ارزانتر می‌شود. بری یافتن $\frac{dC}{dq}(q_0)$ می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد. در نقطهٔ $(q_0, a(q_0))$ مماس نمود ر $a(q)$ را رسم می‌کنیم تا محور قائم را در نقطهٔ S قطع کند. ز S خط راستی با ضریب زاویهٔ دو برابر ضریب زاویه خط مماس فوق رسم می‌کنیم تا خط قائم $q = q_0$ را در نقطه‌ای T قطع کند. مختصه قائم T برابر $\frac{dC}{dq}(q_0)$ ست. توجیه این مطلب یک محاسبهٔ سر راست است. با مشتقگیری ز ربطهٔ (۳) داریم.

$$\frac{dC}{dq}(q_0) = a(q_0) + q_0 \frac{da}{dq}(q_0) \qquad (۴)$$

از طرفی دیگر معادلهٔ خط مماس بر نمودار $a(q)$ در نقطهٔ $(q_\circ, a(q_\circ))$ هست:

$$y - a(q_\circ) = \frac{da}{dq}(q_\circ).(q - q_\circ)$$

این خط محور قائم، y، را در $q = \circ$ قطع می‌کند، پس $S = (\circ, a(q_\circ) - \frac{da}{dq}(q_\circ).q_\circ)$. معادله خط راست گذرا از S با شیب $\text{۲}\frac{da}{dq}(q_\circ)$ هست:

$$y - a(q_\circ) + \frac{da}{dq}(q_\circ).q_\circ = \text{۲}\frac{da}{dq}(q_\circ).q$$

اشتراک این خط رست با $q = q_\circ$ با قرر دادن $q = q_\circ$ حاصل می‌شود که بنابراین مقدر y آن هست:

$$\begin{aligned} y &= a(q_\circ) - \tfrac{da}{dq}(q_\circ).q_\circ + \text{۲}\tfrac{da}{dq}(q_\circ).q_\circ \\ &= a(q_\circ) + \tfrac{da}{dq}(q_\circ).q_\circ \end{aligned}$$

که در مقایسه با (۴) نتیجه می‌دهد:

$$y = \frac{dC}{dq}(q_\circ)$$

همانطور که ادعا شده بود.

اعداد حقیقی (۲)

صحبت جلسه گذشته با این سؤال به پایان رسید که اگر $c_۰$ یک عدد طبیعی یا صفر باشد و هر c_i، $i = ۱, ۲, \ldots$، یک رقم، یعنی عددی از مجموعهٔ $\{۰, ۱, \ldots, ۹\}$، آیا می‌توان عبارت:

$$c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots \qquad (۱)$$

را یک "عدد" تلقی کرد؟ برای اینکه این سؤال معنی داشته باشد باید دو چیز روشن شود:

الف) مقصود از عبارت بالا چیست؟

ب) مقصود از یک عدد چیست؟

در مورد سؤال (ب)، جواب ریاضیدانان باستان را می‌دانیم و فعلاً همین جواب را مبنا قرار می‌دهیم. مقصود از یک عدد، نسبت طول‌های دو پاره‌خط است. بالاخص اگر پاره‌خطی را به عنوان واحد انتخاب و تثبیت کنیم، طول‌های همهٔ پاره‌خط‌های ممکن، مجموعهٔ اعداد (مثبت) را تشکیل می‌دهند. به این ترتیب اگر نیم‌خطی H انتخاب کنیم، مبدأ آن را ۰ بنامیم و نقطه‌ای دیگر را به عنوان نقطهٔ واحد، ۱، اختیار کنیم، تناظری یک به یک میان نقاط این نیم‌خط و اعداد (مثبت) منظور می‌شود. بدین ترتیب که هر نقطهٔ c روی این نیم‌خط، پاره‌خطی از ۰ تا c تعریف می‌کند (شکل ۱) که طول این پاره‌خط نسبت به واحد اختیار شده عدد متناظر است. البته در اینجا ادراک هندسی، شهودی قابل اعتماد تلقی می‌گردد. بدین ترتیب فرض می‌کنیم در مورد مفهوم خط راست و طول مناقشه‌ای نیست، برداشت همهٔ انسان‌ها از این مفاهیم یکسان است، و کارکردن با این مفاهیم به مشکل منطقی منجر

نمی‌شود. باید توجه داشت که از نظر دانشمندان باستان، هندسه یک شاخهٔ علم طبیعی بود و اصول متعارف متکی بر ادراک انسان مجاز شمرده می‌شدند.

در مورد (الف)، اکنون کوشش خواهیم کرد برای (۱) معنایی قایل شویم. اگر به جای سه نقطه (ادامه نامحدود) در (۱) عبارت $c_0/c_1\ldots c_n$ را در نظر بگیریم، این عبارت مفهومی دقیق و روشن دارد:

$$C_n = c_0/c_1\ldots c_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_n}{10^n}$$

یک n خاص تثبیت می‌کنیم. اگر عبارت (۱) یک عدد باشد، این عدد قطعاً باید دست کم به اندازهٔ C_n باشد زیرا که افزودن ارقام c_{n+1} به بعد نمی‌تواند آن را کوچکتر سازد. ولی عددی که ممکن است توسط (۱) بیان شود حداکثر چقدر بزرگتر از C_n می‌تواند باشد؟ این عدد نمی‌تواند از $\frac{1}{10^n}$ بزرگتر از C_n باشد زیرا که در آن صورت می‌بایست رقم nام پس از اعشار از c_n بزرگتر شود. بنابراین:

$$C_n \leq c_0/c_1c_2c_3\ldots \leq C_n + \frac{1}{10^n} \qquad (2)$$

رابطهٔ (۲) باید به‌ازای هر n برقرار باشد. بدین ترتیب $c_0/c_1c_2c_3\ldots$، در صورت وجود، عددی است که در نامساوی (۲) به‌ازای هر n صدق می‌کند، $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(۲–۱) **لم.** حداکثر یک عدد ممکن است در نامساوی (۲) به‌ازای هر n صدق کند.

اثبات. اگر دو عدد c و c' وجود داشته باشند که به‌ازای هر n در بازهٔ $[C_n, C_n + \frac{1}{10^n}]$ قرار گیرند، فاصلهٔ این دو عدد از هر $\frac{1}{10^n}$ کوچکتر است. چون با بزرگ گرفتن n، $\frac{1}{10^n}$ را می‌توان به دلخواه کوچک ساخت، فاصله c و c' باید از هر عددی کوچکتر باشد، پس $c = c'$. □

اکنون می‌بینیم که وجود عددی با ویژگی (۲) متضمن چیست. چنین عددی باید در همهٔ بازه‌های $[C_n, C_n + \frac{1}{10^n}]$ قرار گیرد. توجه کنید که چون

$$C_0 \leq C_1 \leq C_2 \leq \cdots$$

$$C_0 + 1 \geq C_1 + \frac{1}{10} \geq C_2 + \frac{1}{10^2} \geq \cdots$$

این بازه‌ها تو در تو هستند:

$$\cdots \subset [C_2, C_2 + \frac{1}{10^2}] \subset [C_1, C_1 + \frac{1}{10}] \subset [C_0, C_0 + 1]$$

هر بازهٔ طولی $\frac{1}{10}$ بازهٔ سمت راست خود دارد و عدد فرضی $c_0/c_1c_2\ldots$ باید در همهٔ این بازه‌ها قرار گیرد. شهود ما از "پیوسته بودن" نیم‌خط H حکم می‌کند که این دنبالهٔ انقباضی بازه‌های بسته باید به یک تک نقطه روی نیم‌خط H متقارب شود که باید به ناچار همان نقطهٔ $c_0/c_1c_2\ldots$ باشد که در همهٔ این بازه‌ها قرار دارد. این تصور هندسی قابل اثبات نیست بلکه جزیی از ادراک ما از پیوسته بودن خط راست است. به این دلیل این حکم را به عنوان یک اصل وضع می‌کنیم:

(۲—۲) اصل تمامیت (صورت اول). عددی (منحصر به فرد) وجود دارد که در همهٔ نامساوی‌های (۲)، به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، صدق می‌کند. (در واقع به زودی خواهیم دید که، بالعکس، هر نقطهٔ روی H نمایشی به شکل $c_0/c_1c_2c_3\ldots$، مختوم یا نامختوم، دارد).

بدین ترتیب، طبق اصل تمامیت، $c_0/c_1c_2c_3\ldots$ نمایشگر یک عدد (و فقط یک عدد، طبق لم ۲—۱) است. همچنان که در جلسهٔ قبل دیدیم در میان این اعداد فقط آنهایی که مختومه هستند، یعنی $c_n = 0$ از یک n به بعد، و آنهایی که مآلاً متناوب می‌شوند نمایشگر اعداد گویا، یعنی کسرهای $\frac{m}{n}$، m, n عدد طبیعی، هستند. سایر اعداد را ناگویا یا اصم می‌نامند. بنابراین با اتکاء به اصل تمامیت می‌توان اعداد ناگویای فراوانی ارائه کرد.

نکتهٔ زیر، که به عنوان مثال ارائه می‌شود، نتیجه مستقیم اصل تمامیت و لم ۲—۱ است:

مثال. می‌خواهیم عدد زیر را بررسی کنیم:

$$1/999\ldots$$

پس در اینجا $c_0 = 1$ و $c_i = 9$ به‌ازای هر $i \geq 1$. طبق اصل تمامیت این قطعاً یک عدد است و در همهٔ نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$1/\underbrace{9\ldots9}_{n} \leq 1/999\ldots \leq 1/\underbrace{9\ldots9}_{n} + \frac{1}{10^n} = 2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

از طرفی دیگر عدد ۲ نیز در همین نامساوی به‌ازای هر n صدق می‌کند. بنابراین طبق ۲—۱ داریم:

$$۱/۹۹۹\ldots = ۲$$

تمرین. فرض کنید ۹ > c_n و ۹ = c_i به‌ازای هر $i > n$، به روش مثال قبل ثابت کنید عدد

$$c_۰/c_۱\ldots c_n۹۹۹\ldots$$

برابر $c_۰/c_۱\ldots c_{n-۱}(c_n+۱)$ است.

در اینجا لازم است برای تکمیل بحث نشان دهیم هر عدد، یعنی هر عضو H، به صورت اعشاری مختوم یا نامختوم قابل نمایش است. اگر c عضوی از H باشد، دو عدد صحیح متوالی $c_۰$ و $c_۰+۱$ می‌توان یافت که $c_۰ \leq c < c_۰+۱$. اگر بازهٔ $[c_۰, c_۰+۱[$ را به صورت زیر به ۱۰ زیربازهٔ مجزا تجزیه کنیم:

$$[c_۰, c_۰+\frac{۱}{۱۰}[\cup[c_۰+\frac{۱}{۱۰}, c_۰+\frac{۲}{۱۰}[\cup\cdots\cup[c_۰+\frac{۹}{۱۰}, c_۰+۱[$$

عدد c در یک و تنها یکی از این ۱۰ بازه قرار دارد، مثلاً c عضو $[c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}, c_۰+\frac{c_۱+۱}{۱۰}[$، $c_۱ = ۰, ۱, \ldots, ۹$، است. که در این صورت می‌توان نوشت:

$$c_۰+\frac{c_۱}{۱۰} \leq c \leq c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}$$

به همین ترتیب بازهٔ $[c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}, c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}[$ را به ۱۰ بازهٔ به طول $\frac{۱}{۱۰۰}$ تجزیه کرده و نتیجه می‌گیریم که رقمی $c_۲$ وجود دارد به طوری که:

$$c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}+\frac{c_۲}{۱۰۰} \leq c \leq c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}+\frac{c_۲}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰}$$

با ادامهٔ این عمل، اگر در گامی، c دقیقاً برابر نقطهٔ انتهایی سمت چپ شود، مثلاً $c = c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}+\cdots+\frac{c_k}{۱۰^k}$، داریم $c = c_۰/c_۱\ldots c_k$. در غیر این صورت این فرایند متوقف نمی‌شود و خواهیم داشت:

$$c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}+\cdots+\frac{c_n}{۱۰^n} \leq c \;<\; c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}+\cdots+\frac{c_n}{۱۰^n}+\frac{۱}{۱۰^n} \quad n = ۰, ۱, ۲, \ldots \text{ به‌ازای هر}$$

$$\leq\; c_۰+\frac{c_۱}{۱۰}+\cdots+\frac{c_n}{۱۰^n}+\frac{۱}{۱۰^n}$$

عددی که در هر همهٔ این نامساوی‌ها صدق کند، طبق تعریف به $c_0/c_1c_2c_3\dots$ نمایش دادیم.

معمولاً اصل تمامیت به شکل معادل دیگری ارائه می‌شود که مجردتر است، کلی‌تر به نظر می‌رسد و وابستگی ظاهری (۲−۲) به مبنای عددنویسی ۱۰ را ندارد. ضمن ارائه این صورت اصل تمامیت، نشان خواهیم داد که در واقع دو صورت معادل‌اند. توجه داشته باشید که تصویر هندسی ما از مجموعه اعداد، اکنون نقاط روی یک نیم‌خط H است. نقطهٔ آغازی این نیم‌خط را ۰ نامیدیم و امتداد نیم‌خط را معمولاً به طرف راست می‌گیریم (شکل ۱). به این ترتیب رابطهٔ ترتیبی $a < b$ از نظر هندسی بدین معنی است که b در طرف راست a قرار دارد. از این پس از نماد متداول برای بازه‌ها نیز استفاده خواهیم کرد. بدین ترتیب اگر a و b در H باشند، $[a,b] = \{x \in H \mid a \leq x \leq b\}$، $[a,b[= \{x \in H \mid a \leq x < b\}$ و به همین ترتیب $]a,b]$ و $]a,b[$ تعریف می‌شوند. اگر S زیرمجموعه‌ای از H باشد، عدد M را یک کران بالا برای S می‌نامیم در صورتی که:

$$M \geq s \text{ برای هر عضو } s \text{ از } S$$

بعضی زیرمجموعه‌های S دارای کران بالایی هستند و بعضی نیستند. مثلاً برای هر یک از دو بازه $[a,b]$ و $]a,b[$، هر عدد M که $M \geq b$ یک کران بالایی برای مجموعه است؛ ولی مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{1,2,3,\dots\}$ کران بالایی ندارد. عدد M_0 را کوچکترین کران بالایی برای مجموعهٔ S می‌نامیم در صورتی که:

الف) M_0 یک کران بالا برای S باشد.

ب) به‌ازای هر کران بالای M برای مجموعهٔ S داشته باشیم $M_0 \leq M$.

توجه کنید که، در صورت وجود، کوچکترین کران بالا منحصر به فرد است زیرا که اگر M_0 و M_1 هر دو کوچکترین کران بالا برای مجموعهٔ S باشند باید داشته باشیم $M_0 \leq M_1$ و $M_1 \leq M_0$؛ پس $M_1 = M_0$.

(۲−۳) اصل تمامیت (صورت دوم). اگر برای زیرمجموعهٔ ناتهی S از H کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای S یک کوچکترین کران بالایی (منحصر به فرد) وجود دارد.

لازم به تذکر است که کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ S ممکن است عضو S باشد یا نباشد. مثلاً برای هر دو مجموعهٔ $[۱,۲]$ و $]۱,۲]$، عدد ۲ کوچکترین کران بالا است که عضو $[۱,۲]$ می‌باشد ولی عضو $]۱,۲]$ نیست.

اکنون نشان می‌دهیم که دو صورت اصل تمامیت معادل هستند به این مفهوم که اگر هر یک را بپذیریم، دیگری از اصل پذیرفته شده قابل اثبات است.

نخست نشان می‌دهیم صورت اول، صورت دوم را نتیجه می‌دهد. بدین ترتیب S را مجموعه‌ای ناتهی از H می‌گیریم که کران بالایی دارد و برای آن کوچکترین کران بالایی را ارائه می‌کنیم. هر عضو S را به صورت اعشاری نمایش می‌دهیم. چون S کران بالا دارد، در بین اجزاء صحیح این نمایش‌های اعشاری بزرگترین وجود دارد (در غیر این صورت برای هر عدد طبیعی n، S عضوی بزرگتر از n خواهد داشت و S دارای کران بالایی نخواهد بود). بزرگترین جزء صحیح در میان اعضای S را $c_۰$ می‌نامیم. حال $S_۱$ را زیرمجموعهٔ S می‌گیریم که از اعضای با جزء صحیح $c_۰$ تشکیل شده است و به رقم اول پس از اعشار اعضای $S_۱$ نگاه می‌کنیم. این رقم باید یکی از اعداد $۹, \ldots, ۱, ۰$ باشد. بزرگترین رقم اول پس از اعشار موجود میان اعضای $S_۱$ را $c_۱$ می‌نامیم. حال $S_۲$ را زیرمجموعهٔ $S_۱$ می‌گیریم که اعضایش با $c_۰/c_۱$ شروع می‌شوند و به رقم دوم پس از اعشار در میان عناصر $S_۲$ نگاه می‌کنیم. بزرگترین رقم موجود را $c_۲$ می‌نامیم و عمل بالا را ادامه می‌دهیم. حال $c = c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ طبق اصل تمامیت یک عدد است و از روش ساخت c مشخص است که:

$$c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_n}{۱۰^n} \leq c \leq c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_n}{۱۰^n} + \frac{۱}{۱۰^n} \quad n = ۰, ۱, ۲, \ldots \text{ برای هر}$$

ادعا می‌کنیم c کوچکترین کران بالایی برای مجموعهٔ S است. اینکه c کران بالایی برای S است از نامساوی‌های سمت چپ نتیجه می‌شود، در واقع در هر مرحله رقم n ام c بزرگترین رقم موجود در بین عناصر S انتخاب شد. به علاوه کران بالایی کوچکتری از c برای S وجود ندارد زیرا که اگر $c' = c'_۰/c'_۱c'_۲\ldots$ کوچکتر از $c = c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ باشد، در یک مرحله رقم متناظر، c'_n، باید کوچکتر از c_n باشد. اگر این رویداد برای اولین بار به‌ازای $n = k$ رخ دهد، عناصری از S وجود دارند که رقم k ام آنها بزرگتر از c'_k است، پس c' از بعضی عناصر S کوچکتر است و نمی‌تواند کران بالا برای S

باشد.

بالعکس ثابت می‌کنیم صورت دوم اصل تمامیت، صورت اول را نتیجه می‌دهد. یعنی ثابت می‌کنیم هرگاه c_0 یک عدد صحیح از مجموعه $\{0, 1, 2, \ldots\}$ باشد و c_i ها یک مجموعهٔ ارقام، یعنی اعضای مجموعهٔ $\{0, 1, \ldots, 9\}$، آنگاه عددی c وجود دارد که:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \quad \text{(۳) برای هر } n = 0, 1, 2, \ldots$$

برای این کار، مجموعهٔ T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \{c_0, c_0/c_1, c_0/c_1c_2, \ldots\}$$

این مجموعه کران بالا دارد (مثلاً $c_0 + 1$)، پس طبق صورت دوم اصل تمامیت، دارای کوچکترین کران بالایی است که به c نمایش می‌دهیم. باید ثابت کنیم این عدد c در نامساوی‌های (۳) صدق می‌کند. اینکه c کران بالایی برای S است نشان می‌دهد c از هیچ یک از $c_0/c_1 \ldots c_n$ها کوچکتر نیست، یعنی نامساوی‌های سمت چپ برقرارند. حال اگر نامساوی‌های سمت راست برقرار نباشند عدد صحیحی k وجود دارد که

$$c_0 - \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} < c$$

ولی $c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}$ از همهٔ عناصر T بزرگتر است (توجه کنید که $0/0\ldots0c_{k+1}\ldots c_n < \frac{1}{10^k}$) بنابراین یک کران بالایی برای T کوچکتر از c یافت شده است که خلاف انتخاب c به عنوان کوچکترین کران بالایی T است. بدین ترتیب صورت اول اصل تمامیت از صورت دوم نتیجه می‌شود.

در اینجا لازم است از "اعداد منفی" نیز صحبت شود. از نظر تاریخی پذیرفتن اعداد منفی به عنوان عدد قرن‌ها طول کشید و در واقع اعداد منفی کمابیش همراه با "اعداد موهومی" که در جلسات بعد مطرح خواهند شد در قرن شانزدهم میلادی طی توسعه بیشتر علم جبر به عنوان "عدد" پذیرفته شدند. ساده‌ترین راه معرفی اعداد منفی تداوم نیم‌خط H به سوی چپ به یک خط راست کامل است. قرینهٔ

هر عضو x در H را به "$-x$" نمایش می‌دهیم، عملیات جبری مأنوس را اعمال می‌کنیم و رابطهٔ ترتیب $a < b$ به معنای a در طرف چپ b قرار دارد را منظور می‌کنیم. مجموعهٔ اعداد مثبت، منفی و صفر که بدین طریق به‌دست می‌آیند مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌نامیم و به $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. صورت دوم اصل تمامیت را می‌توان عیناً برای اعداد حقیقی نوشت:

(۲—۴) اصل تمامیت برای $\mathbb{R}$. اگر برای زیرمجموعهٔ ناتهی S از $\mathbb{R}$ کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای S یک کوچکترین کران بالایی وجود دارد.

اینکه (۲—۴) از (۲—۳) نتیجه می‌شود به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. به علاوه می‌توان مفهوم کران پایین و بزرگترین کران پایین را نیز با وارونه کردن نامساوی‌ها تعریف کرد و حکم زیر را نتیجه گرفت:

(۲—۵) اگر برای زیرمجموعهٔ ناتهی S از $\mathbb{R}$ کران پایینی وجود داشته باشد، آنگاه برای S بزرگترین کران پایینی وجود دارد.

تمرین. (۲—۵) را از (۲—۴) نتیجه بگیرید (راهنمایی. مجموعهٔ S' را در نظر بگیرید که از کلیهٔ "$-x$" ها، به‌ازای $x \in S$، تشکیل شده است).

تمرین. نشان دهید کران بالایی A برای مجموعهٔ S کوچکترین کران بالایی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر عدد طبیعی n عضوی از s از S وجود داشته باشد که $s > A - \frac{1}{10^n}$.

هرگاه a و b اعداد حقیقی باشند، بازه‌های $[a,b]$، $[a,b[$، $]a,b]$ و $]a,b[$ عیناً مانند قبل تعریف می‌شوند. مقصود از $[a,\infty[$ مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ و مقصود از $]-\infty,a]$ مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ است. به همین ترتیب مجموعه‌های $]a,\infty[$ و $]-\infty,a[$ تعریف می‌شوند.

چند جمله‌ای تیلور و تقریب‌های مرتبهٔ بالا

یادآوری می‌کنیم که اگر تابع f در نقطهٔ a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد، تقریب خطی f در نقطهٔ a تابعی از درجهٔ یک است، در واقع تابع با مقدار $A(x) = f(a) + f'(a).(x-a)$، که مقدار آن به‌ازای $x = a$ برابر مقدار تابع f در آن نقطه است و وقتی x از a دور می‌شود، $f(x)$ به کندی از $A(x)$ فاصله می‌گیرد. این نزدیکی ترتیب خطی به تابع اصلی برای xهای نزدیک a ناشی از این است که تقریب خطی در وقع مقدار تابع درجه یک مماس بر تابع f است یعنی نه‌تنها $A(a) = f(a)$، بلکه مشتق A و f نیز در $x = a$ برابرند، $A'(a) = f'(a)$. هدف ما در این بخش رائه یک دنباله تقریبهای به‌طور فزینده دقیقتر از یک تابع حول نقطه‌ی a از دامنهٔ تابع است. در مقابل دقیقتر شدن تقریب، محاسبه ین توبع تدریجاً دشورتر می‌شود. به‌طور کلی بری اینکه یک روش تقریب از ارزش و اعتبار برخوردار باشد، شرایط زیر ضروری است:

(۱) محاسبهٔ نامزد تقریب باید ساده‌تر از محاسبهٔ تابع صلی باشد.

(۲) نامزد تقریب باید واقعاً به‌تبع داده شدهٔ «نزدیک» باشد.

در مورد (۱)، تقریب خطی نمونهٔ بارز تابعی است که محاسبه آن ساده است. پس از تابعهای ثابت، تابعهای خطی که نمودار آنها یک خط راست ست ساده‌ترین توبع محسوب می‌شوند. در ین بخش تابعهایی که به‌عنوان تقریب مطرح می‌کنیم چند جمله یهای از درجات گوناگون هستند. به‌طور کلی چندجمله یها نیز که ز جمع و ضرب اعداد حقیقی به‌دست می‌آیند توابع به‌نسبت ساده محسوب می‌شوند. هر چه درجهٔ چندجمله‌ی کوچکتر باشد، محاسبهٔ چند جمله‌ی ساده‌تر است. چند جمله‌ایهای درجه صفر، توابع ثابت هستند، چند جمله‌ایهای درجه یک به‌عنوان تقریب خطی به کار می‌روند، و غیره.

در مورد (۲)، نزدیک بودن تقریب به تابع ر چگونه باید ارزیابی کرد؟ در وقع برای سودمند بودن یک روش تقریب، باید بتوانیم اطمینان خاطر حاصل کنیم که خطای استفاده ز این تقریب در حد قابل قبول برای بکارگیری در کاربرد مورد نظر است. به این منظور باید یک روش تخمین خطا همراه را با روش تقریب در دست باشد که بتون به کمک آن یک کران بالایی برای قدر مطلق خطا رائه کرد. در

مورد تقریب خطی دیدیم که اگر تابع f دوبار مشتق‌پذیر باشد، خطا از $\frac{1}{2}M.(x-a)^{2}$ تجاوز نمی‌کند که در اینجا M یک کران بالایی برای مشتق دوم تابع در بازهٔ بین a و x است. بنابراین با محاسبهٔ $\frac{1}{2}M(x-a)^{2}$ می‌توان ملاحظه کرد که حد کثر خطای احتمالی در حد قابل قبولی هست یا نیست. به‌همین ترتیب، برای روشهای کلی‌تری که در این جلسه عرضه خواهیم کرد، یک روش تخمین خطا نیز به همراه خواهیم آورد که کرانی برای حداکثر خطای ممکن ارئه می‌کند.

به تعریف مشتق دوم یک تابع باز می‌گردیم. اگر a نقطه‌ای در دامنهٔ تعریف f باشد و اگر مشتق f در سرسر یک بازهٔ باز حول a تعریف شده باشد، آنگاه a یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف f' است و می‌توان وجود مشتق برای f' در نقطهٔ a را مطرح ساخت، که در صورت وجود آن را به $f''(a)$ یا $f^{(2)}(a)$ نمایش می‌دهیم. همینطور اگر $f''(x)$ در همهٔ نقاط یک بازهٔ باز حول a وجود داشته باشد، می‌توان مشتق‌پذیری f'' در نقطهٔ a را مطرح ساخت، که در صورت وجود آن را به $f'''(a)$ یا $f^{(3)}(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق سوم f در نقطهٔ a می‌نامیم. به‌طور کلی، اگر مشتق nـام تابع f در سراسر یک بازهٔ باز حول a تعریف شده باشد، می‌توان مشتق‌پذیری $f^{(n)}$ را در نقطهٔ a مورد بررسی قرار دارد که در صورت وجود آن را به $f^{(n+1)}(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق (مرتبهٔ) $(n+1)$ـام f در نقطهٔ a می‌نامیم. تابع $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ را k بار مشتق‌پذیر می‌نامیم اگر f در همهٔ نقاط دامنه دارای مشتق از مرتبهٔ kـم باشد. اگر f در یک نقطه a یا در زیر مجموعهٔ T از دامنهٔ خود دارای مشتق از هر مرتبه باشد، f را بینهایت بار مشتق‌پذیر در نقطهٔ a یا در مجموعهٔ T می‌نامیم.

مثال. یک تابع چند جمله‌ای در نظر بگیرید:

$$p(x) = c_{0} + c_{1}x + \ldots + c_{n}x^{n}$$

از آنجا که مشتق p نیز یک چند جمله ی است (از درجهٔ یکی پایین‌تر)، مشتق p نیز برای هر x مشتق‌پذیر است و با ادامهٔ مشتقگیری می‌بینیم که p در سراسر $\mathbb{R}$ بینهایت بار مشتق‌پذیر است. به‌علاوه توجه کنید که به‌سبب تقلیل درجه در مشتقگیری، برای $k > n$ داریم $p^{(k)}(x) = 0$.

مثال ۲. تابع $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. داریم $\sin' = \cos$ و $\sin'' = -\sin$، بنابرین می‌توان مشتقگیری را همواره ادامه داد و پس از چهار بار مشتقگیری تابع سینوس مجدداً ظاهر می‌شود، $\sin^{(4)} = \sin$. تابع کسینوس وضعیت مشابهی دارد. چهار تابع مثلثاتی دیگر نیز در دامنهٔ تعریف خود بینهایت بار مشتقپذیرند.

مثال ۳. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ -x^n & x < 0 \end{cases}$$

در اینجا n یک عدد صحیح مثبت داده شده است. برای $n = 1$، داریم $f(x) = |x|$ که در هر نقطهٔ $x \neq 0$ مشتقپذیر است ولی در $x = 0$ مشتقپذیر نیست. حال $n > 1$ را در نظر می‌گیریم. اگر $a \neq 0$، در یک بازهٔ باز حول a، تابع f همان مقدار x^n یا $-x^n$ را دارد که یک چند جمله‌ای ست، بینهایت بار مشتقپذیر است، و $f^k(a) = 0$ برای $k > n$. برای $n > 1$ داریم

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & x > 0 \\ -nx^{n-1} & x < 0 \end{cases}$$

در $a = 0$ از تعریف استفاده می‌کنیم:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\pm h^n - 0}{h} = \pm h^{n-1}$$

با توجه به $n > 1$، حد عبارت بالا صفر است، پس $f'(0) = 0$ و فرمول (۱) را می‌توان به $x \geq 0$ یا $x \leq 0$ تعمیم داد. به‌طور کلی به ستقرا فرض کنید که برای $k < n$ ثابت کرده‌ایم:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-(k-1))x^{n-k} & x \geq 0 \\ -n(n-1)\ldots(n-(k-1))x^{n-k} & x < 0 \end{cases}$$

آنگاه برای مشتق مرتبهٔ $(k+1)$ در a کسر زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f^{(k)}(0+h) - f^{(k)}(0)}{h} = \pm n(n-1)\ldots(n-(k-1))h^{n-k-1}$$

تا زمانی که $n < k+1$، حد عبارت بالا همچنان صفر است ولی برای $n = k+1$، یا $k = n-1$ داریم

$$\frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(0)}{h} = \pm n!$$

که علامت $\pm$ بستگی به این دارد که $h > 0$ یا $h < 0$، بنابراین $f^{(n)}(0)$ وجود ندارد. خلاصه ینکه تابع f در همهٔ نقاط $\mathbb{R}$ به ستثنای $x = 0$ بینهایت بار مشتق‌پذیر است ولی در ۰ فقط $(n-1)$ بار مشتق‌پذیر با مشتقهای صفر می‌باشد.

(۱ـ۲۰) چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k

اکنون آماده‌ایم که تقریب درجهٔ k یک تابع ر معرفی کنیم. فرض کنیم I یک بازه ست، a یک نقطهٔ درونی بازه، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی $(k-1)$ بار مشتق‌پذیر در سرسر I و k بار مشتق‌پذیر در نقطهٔ a است، نشان می‌دهیم یک (و تنها یک) چند جمله‌ای $p(x)$ از درجهٔ k وجود دارد که

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a), \dots, p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad (۱)$$

یعنی این چند جمله ی و مشتقات آن تا مرتبهٔ k با تابع f و مشتقات متناظر آن تا مرتبهٔ k در نقطهٔ a تطابق دارند. چند جمله ی درجهٔ k مورد نظر $p(x)$ به شکل $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$ است. با نوشتن $x = (x-a) + a$ و به‌توان رساندن، می‌تونیم $p(x)$ را به‌صورت زیر مرتب کنیم:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_k(x-a)^k \qquad (۲)$$

مشتقات $p(x)$ تا مرتبهٔ kـام به‌صورت زیر در می‌آیند:

(۳)

$$\begin{cases} p'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + ka_k(x-a)^{k-1} \\ \vdots \\ p^{(i)}(x) = i!a_i + \ldots + k(k-1)\ldots(k-(i-1))a_k(x-a)^{k-i} \\ \vdots \\ p^{(k)}(x) = k!a_k \end{cases}$$

بنابراین در مقایسهٔ (۲) و (۳) با شرط (۱) داریم:

$$a_0 = f(a),\ a_1 = f'(a), a_2 = \frac{1}{2!}f''(a), \ldots, a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$$

پس ضرایب چند جمله ی (۲) از شرط (۱) به‌طور منحصر به‌فرد تعین می‌شوند و داریم:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}}{k!}(x-a)^k. \qquad (۴)$$

این چند جمله ی یگانه چند جمله ی درجه k است که خود و مشتقات آن تا مرتبهٔ k با f و مشتقات آن تا مرتبهٔ k در نقطهٔ a برابرند $p(x)$ را اینک چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع f در نقطهٔ a یا تقریب درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a می‌نامند. توجه کنید که برای $k = 1$، تقریب خطی f در نقطهٔ a حاصل می‌شود. نکته این است که برابری مشتقات f با مشتقات p در نقطهٔ a، تا مرتبهٔ k، موجب خوهد شد که به معنایی که در زیر خواهد آمد $f(x)$ و $p(x)$ در نزدیکی نقطهٔ a بسیار هم نزدیک باشند.

(۲ـ۲۰) قضیه اگر $p(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a باشد داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^k} = 0 \qquad (۵)$$

توجه کنید که برای $k = 1$، این همان تعریف خط مماس یا تقریب خطی است. هرچه k بزرگتر باشد $(x-a)^k$ سریعتر کوچک می‌شود وقتی $x \longrightarrow a$، بنابراین تقریب درجهٔ k باید به‌تابع خیلی نزدیک باشد که نسبت $\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^k}$ به‌صفر میل کند.

برهان (۲۰ـ۲) حکم را با ستقراء روی k ثابت می‌کنیم. همانطور که اشاره شد، برای $k = 1$، تعریف مشتقپذیری یا خط مماس حاصل می‌شود. فرض کنید حکم تا مرتبهٔ $(k-1)$ ثابت شده است، بدین مفهوم که اگر تابعی g در نقطهٔ a، $(k-1)$ بار مشتقپذیر باشد و $q(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجه $(k-1)$ آن در نقطهٔ a باشد داریم

$$\lim_{x\longrightarrow a} \frac{g(x)-q(x)}{(x-a)^{k-1}} = 0$$

به بیان دیگر، هرگاه $\epsilon > 0$ داده شده باشد، $\delta > 0$ وجود دارد که:

$$|x-a| < \delta \longrightarrow |g(x)-q(x)| < \epsilon.|x-a|^{k-1} \qquad (6)$$

اگر صورت کسر (۵) را به $\varphi(x)$ نمایش دهیم، $\varphi(x) = f(x) - p(x)$، داریم

$$\varphi(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k] \qquad (7)$$

چون f و چند جمله ی $p(x)$ مشتقپذیرند، φ نیز مشتقپذیر است و د ریم:

$$\varphi'(x) = f'(x) - [f'(a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}] \qquad (8)$$

چون f در نقطهٔ a، k بار مشتقپذیر است، f' در نقطهٔ a، $(k-1)$ بار مشتقپذیر می‌شود. به‌علاوه عبارت داخل کروشه چند جمله‌ای تیلور درجهٔ $(k-1)$ تابع f' در a است، پس طبق فرض ستقراء، برای $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود د رد که طبق (۶):

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |\varphi'(x)| = |f'(x)-[f'(a)+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}]| < \epsilon|x-a|^{k-1}$$

از طرف دیگر طبق قضیهٔ مقد ر میانگین برای تابع مشتقپذیر φ داریم:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c).(x-a)$$

ولی طبق (۷)، $\varphi(a) = 0$،

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |\varphi(x)| < \epsilon|c-a|^{k-1}|x-a|$$

و چون c بین a و x ست، $|c-a|<|x-a|$ و در نتیجه:

$$\circ < |x-a| < \delta \longrightarrow |\varphi(x)| < \epsilon|x-a|^k$$

بنابراین با کوچک گرفتن $|x-a|$ می‌تون $\frac{|\varphi(x)|}{|x-a|^k}$ به‌دلخواه کوچک کرد و حکم به اثبات می‌رسد. □

قضیهٔ ۲.۲۰ معقول بودن چند جمله‌ای تیلور درجه k به‌عنون تقریبی برای تابع f برای xهای نزدیک a را توجیه می‌کند. قبل از ادامهٔ بحث به چند مثال توجه می‌کنیم.

مثال ۱ چند جمله‌ایهای تیلور درجهٔ k توبع سینوسی و کسینوسی ر در $a=\circ$ می‌نویسیم. برای سینوس داریم:

$\sin(\circ)=\circ, \sin'(\circ)=\cos(\circ)=۱, \sin''(\circ)=$ و $\sin'''(\circ)=-\cos(\circ)=-۱$
$-\sin(\circ)=\circ$

و چون مشتق چهارم سینوس همان سینوس می‌شود، از این پس مشتقهای ۰، ۱، ۰ و ۱ − تکرار می‌شوند، بنابراین اگر $\sum_{j=\circ}^{k} a_j x^j$ چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k سینوس در $a=\circ$ باشد، د ریم:

$$a_j = \begin{cases} \circ & \text{زوج } j \\ +۱ & \text{فرد } j \end{cases}$$

مثلاً چند جمله‌ای تیلور درجه ۱ و درجه ۲ سینوس عبرتند از $p(x)=x$، چند جمله‌ای تیلور درجه ۳ و درجه ۴ سینوس برابر $p(x)=x-\frac{1}{۶}x^۳$، و چند جمله ی تیلور درجه ۵ و درجهٔ ۶ سینوس برر $x-\frac{1}{۶}x^۳+\frac{1}{۱۲۰}x^۵$ می‌شوند. به‌همین ترتیب برای کسینوس چند جمله‌ای تیلور زیر در $a=\circ$ به‌دست می‌آیند:

۱	چندجمله‌ای تیلور درجه ۱
$۱-\frac{1}{۲}x^۲$	چند جمله‌ای تیلور درجه ۲ و ۳
$۱-\frac{1}{۲}x^۲+\frac{1}{۲۴}x^۴$	چند جمله‌ای تیلور درجه ۴ و ۵

و غیره.

مثال ۲. چند جمله ی تیلور درجه k تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در $a = 1$ بنویسید. ین چند جمله‌ای به‌شکل $\sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(1)}{j!}(x-1)^j$ خوهد بود. برای محاسبه مشتقها داریم $f(x) = x^{-1}$، پس $f'(x) = -x^{-2}$، $f''(x) = 2x^{-3}$، و به‌طور استقرایی می‌بینیم که $f^{(j)}(x) = (-1)^j j! x^{-j-1}$، پس $\frac{f^{(j)}(1)}{j!} = (-1)^j$، و چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع در $a = 1$ می‌شود.

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 \pm \ldots + (-1)^k (x-1)^k$$

در اینجا این نکته باید تذکر داده شود که نزدیکی چند جمله‌ای بالا به $\frac{1}{x}$ حوالی $a = 1$ معتبر است ولی، مثلاً وقتی x به 0 میل کند، $\frac{1}{x}$ بی‌کران می‌شود در حالی که چند جمله‌ای بالا به $(k+1)$ نزدیک می‌شود. همینطور وقتی x به 2 میل کند، $\frac{1}{x}$ به $\frac{1}{2}$ میل می‌کند ولی چند جمله‌ای بالا بسته به اینکه k فرد یا زوج باشد به 0 یا 1 میل می‌کند (که میانگین آنها $\frac{1}{2}$ ست!).

مثال ۳ چند جمله‌ای تیلو تابع $f(x) = 1 - x + x^4$ ز درجات مختلف ر در $a = -1$ بنویسید. وقتی تابع داده شده یک چند جمله ی باشد لازم نیست از مشتقگیری استفاده کنیم. اگر به‌جای x قرار دهیم $x = (x-a) + a$ و جملات ر به‌توانهای داده شده بسط د ده به ترتیب درجه مرتب کنیم، چند جمله‌ایها تیلور درجات مختلف ظاهر می‌شوند. توجه کنید که روش یافتن ضرایب چند جمله‌ای تیلور این بود که چند جمله‌ای تیلور ر برحسب توانهای $(x-a)$ مرتب کردیم و با مشتقگیری متوالی دریافتیم که ضریب جمله $(x-a)^j$ همان $\frac{f^{(j)}(a)}{j!}$ ست. بنابرین در این مثال:

$$f(x) = 1 - ((x+1) - 1) + ((x+1) - 1)^4$$

$$f(x) = 3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4 \qquad (9)$$

بنابرای چند جمله‌ایهای تیلور درجه ۱، ۲ و ۳ تابع در $a = -1$ عبارتند از به‌ترتیب $3 - 5(x+1)$، $3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2$، و $3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3$. چند جمله یهای تیلور درجه ۴ به بالای تابع، همان طرف راست عبارت (۹) هستند که دقیقاً برابر خود تابع می‌شوند.

بالاخره برای استفاده از تقریب درجهٔ k، همانطورکه در حالت خاص تقریب خطی عمل کردیم، باید دستوری برای تخمین خطا ارائه کنیم. قضیهٔ زیر تعمیم و ضعیت تقریب خطی است.

(۳ـ۲۰) قضیه فرض کنید تابع f در سرسر بازهٔ باز I، $(k+1)$ بار مشتقپذیر ست و $a \in I$. اگر $p(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a باشد، برای هر x در I داریم:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}.(x-a)^{k+1} \qquad (10)$$

که در اینجا c نقطه ی بین a و x ست.

توجه کنید که به زای $k = 1$، دقیقاً تخمین خطای تقریب خطی به‌دست می‌آید. عبارت طرف راست (۱۰) ر گاهی باقیماندهٔ لاگرانژ سری تیلور می‌نامند.

اثبات ۲۰ـ۳ دقیقاً مانند حالت $k = 1$ است. نخست تعمیم زیر از قضیهٔ رُل را بیان می‌کنیم که اثبات آن به خواننده و گذار می‌شود:

(۴ـ۲۰) فرض کنید تابع f در بازهٔ I، $(k+1)$ بار مشتقپذیر باشد، $a < b$ دو نقطهٔ I باشند، و دشته باشیم:

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k)}(a) = f(b) = 0$$

در ینصورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $f^{(k+1)}(c) = 0$. □

حال همانطور که در حالت $k = 1$ عمل کردیم، یک چند جمله‌ای درجه $(k+1)$ در نظر می‌گیریم.

$$Q(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_k(x-a)^k + c_{k+1}(x-a)^{k+1}$$

که $Q(a) = (a)$، $Q'(a) = f'(a), \ldots, Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ و $Q(b) = f(b)$. مقایسه f و Q با مشتقگیری نتیجه می‌دهد که $c_0 = f(a)$، $c_1 = f'(a)$، $\ldots$، $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$، و $c_{k+1} = \frac{f(b)-p(b)}{(b-a)^{k+1}}$.

حال با به‌کارگرفتن (۴ـ۲۰) در مورد تابع $f(x) - Q(x)$، حکم (۱۰) نتیجه می‌شود. جزئیات کاملاً مشابه اثبات در حالت $k = 1$ است و به‌خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۴ اگر بری تقریب $\sin\frac{۱}{۱۰}$ (البته $\frac{۱}{۱۰}$ به‌رادیان) از تقریب $\sin x \approx x - \frac{۱}{۳!}x^۳$ استفاده کنیم، کرانی بالایی برای خطا به‌دست آورید.

توجه کنید که $x - \frac{۱}{۳!}x^۳$ هم تقریب درجه ۳ و هم تقریب درجه ۴ تابع $\sin$ در $a = ۰$ است. اگر ین چندجمله ی را تقریب درجهٔ ۴ محسوب می‌کنیم تخمین دقیقتری به‌دست خواهد آمد زیرا که در طرف راست (۱۰)، کمیت کوچک $x - a = \frac{۱}{۱۰}$ به‌توان بالاتری رسانده می‌شود. طبق (۱۰) داریم:

$$\text{خطا} = \frac{۱}{۵!}f^{(۵)}(c).(\frac{۱}{۱۰})^۵$$

مشتق پنجم سینوس برابر کسینوس است که در بازه $]۰, \frac{۱}{۱۰}[$ از ۱ کوچکتر است، پس

$$\text{خطا} = \frac{۱}{۵!}.۱۰^{-۵} = \frac{۱}{۱/۲}۱۰^{-۷}$$

اگر از قرار داد روند کردن ستفاده کنیم، با توجه به اینکه $\frac{۱}{۵!}۱۰^{-۵} < \frac{۱}{۲}۱۰^{-۶}$، بسط اعشاری تقریب تا ۶ رقم پس از اعشار با مقدار واقعی تطابق دارد.

مثال ۵. فرض کنید می‌خواهیم از چند جمله ی تیلور درجه k به‌دست آمده در مثال ۲ بری $\frac{۱}{x}$ استفاده کنیم. $\frac{۱}{۱/۰۱}$ را به صورت

$$۱ - \frac{۱}{۱۰^۲} + \frac{۱}{۱۰^۴} + \ldots + (-۱)^k\frac{۱}{۱۰^{۲k}}$$

تقریب می‌زنیم. خطای این تقریب را تخمین بزنید.

این مثال را از دو طریق بررسی خواهیم کرد. از روش باقیماندهٔ لاگرانژ طبق (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned}\text{خطا} &= \tfrac{۱}{(k+۱)!}f^{(k+۱)}(c).(\tfrac{۱}{۱۰۰})^{k+۱}\\ &= \tfrac{۱}{(k+۱)!}(k+۱)!(-۱)^{k+۱}\tfrac{۱}{c^{k+۲}}\cdot\tfrac{۱}{(۱۰)^{۲k+۲}}\end{aligned}$$

که c بین ۱ و ۱/۰۱ است. برای یافت کران بلایی، c را که در مخرج است برابر ۱ می‌گیریم، پس

$$\text{خطا} < ۱۰^{-۲k-۲}$$

در این مثال خاص می‌توان خطا را که یک سری هندسی است به‌طور دقیق محاسبه کرد. توجه کنید که

$$\frac{۱}{۱/۰۱} = \frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱۰۰}} = \sum_{j=۰}^{\infty}(-۱)^j \frac{۱}{۱۰۰^j}$$

بنابراین تقریب ارئه شده جملات این سری تا $k - j$ هستند و باقیمانده (=خطا) می‌شود:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k+۱}^{\infty} (-۱)^j(۱۰۰)^{-j} &= (-۱)^{k+۱}(۱۰۰)^{-k-۱}\sum_{j=۰}^{\infty}(-۱)^j(۱۰۰)^{-j} \\
&= (-۱)^{k+۱}(۱۰۰)^{-k-۱}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱۰۰}} \\
&= (-۱)^{k+۱}\frac{(۱۰۰)^{-k}}{۱۰۱}
\end{aligned}$$

یا $\frac{(۱۰)^{-۲k-۲}}{۱/۰۱} = |\text{خطا}|$ که کمی دقیقتر از کران بالایی به‌دست آمده از باقیماندهٔ لاگرانژ است.

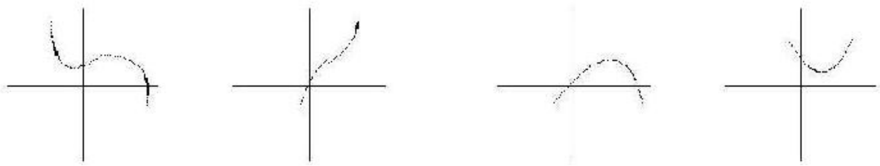
(۵ـ۲۰) کاربرد در بررسی نقاط بحرانی

آزمون مشتق دوم برای بررسی نقاط بحرانی وقتی نتیجه می‌داد که مشتق دوم تابع در نقطهٔ بحرانی ناصفر باشد. در اینجا با استفاده از ۲ـ۲۰ آزمون مشتق دوم را طوری تعمیم می‌دهیم که بسیاری حالاتی که در آن مشتق دوم نیز صفر می‌شود در بر می‌گیرد. نخست با اندکی شرط اضافی مبنای شهودی آزمونی را که ارائه خواهیم کرد ارائه می‌کنیم. فرض کنید تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ در بازهٔ I، $(k+۱)$ بار مشتق‌پذیر است، مشتقات f در نقطهٔ درونی a از بازهٔ I تا مرتبهٔ $(k-۱)$ همه صفر هستند و $f^{(k)}(a) \neq ۰$ در اینصورت چند جمله‌ی تیلور درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a به‌شکل $f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ می‌باشد. عدد $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ را به α نمایش می‌دهیم طبق (۱۰) داریم:

$$f(x) = f(a) + \alpha(x-a)^k + \frac{f^{(k+۱)}(c)}{(k+۱)!}(x-a)^{k+۱}$$

فرض کنید $|f^{(k+۱)}(c)|$ در نزدیکی نقطهٔ a دارای کرانی M است (اگر $f^{(k+۱)}(x)$ پیوسته باشد، چنین کرانی موجود است). در ینصورت بری مقادیر x نزدیک a که بری آن $|x-a|$ کوچک است. انتظار داریم $(x-a)^{k+۱}$ در قدر مطلق به‌طور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از قدر مطلق $(x-a)^k$ باشد. بنابرین انتظار داریم شکل تقریبی نمودار f در نزدیکی $x=a$ مشابه $f(a) + \alpha(x-a)^k$ باشد. در شکل

۱ وضعیت نمودار $f(a)+\alpha(x-a)^k$ را در چهار حالت ممکن، بسته به این که $\alpha > 0$ یا $\alpha < 0$، k زوج یا فرد نمایش داده‌یم. توجه کنید که اگر k زوج باشد،تابع در نقطهٔ a ماکسیمم



$\alpha > 0$، k زوج — $\alpha < 0$، k زوج — $\alpha > 0$، k فرد — $\alpha < 0$، k فرد

(الف) — (ب) — (ج) — (د)

یا مینی‌موم موضعی دارد بسته به ینکه $\alpha < 0$ یا $\alpha > 0$. وقتی k فرد باشد، نقطهٔ a نه ماکسیمم موضعی است و نه مینی‌موم موضعی زیرا که $(x-a)^k$ در $x=a$ تغییر علامت می‌دهد. در واقع این مطلب را می‌توان بدون شرط ضافی وجود مشتق $(k+1)$م مستقیماً از ۲۰ − ۲ نتیجه گرفت:

(۲۰ـ۶) آزمون مشتق kـام

فرض کنید تابع f در نقطهٔ درونی a ز دامنهٔ تعریف خود دارای مشتق تا مرتبهٔ kـم است $(k \geq 2)$، مشتقات آن در نقطهٔ a تا مرتبهٔ $(k-1)$ همه صفر هستند و $f^{(k)}(a) \neq 0$:

$$f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0$$

در ینصورت:

(لف) اگر k زوج باشد نقطهٔ a یک مینی‌موم یا ماکسیمم موضعی است بسته به ینکه $f^{(k)}(a) > 0$ یا $f^{(k)}(a) < 0$.

(ب) اگر k فرد باشد، نقطهٔ a نه ماکسیمم موضعی است و نه مینی‌موم موضعی.

برهان. چند جمله‌ای تیلورد درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a هست $f(a)+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. طبق ۱۰ـ۲:

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)-\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^k}=0$$

پس

$$\lim_{x\longrightarrow a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}-\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)\right]=0$$

جملهٔ $\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ مثبت یا منفی است و عددی ثابت است. بنابراین برای x به‌اندازه کافی نزدیک a، $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$ باید همعلامت $f^{(k)}(a)$ باشد. اگر k زوج باشد، $(x-a)^k>0$، پس $f(x)-f(a)$ همعلامت $f^{(k)}(a)$ ست (برای x نزدیک a). در نتیجه اگر $f^{(k)}(a)>0$، داریم $f(x)>f(a)$ و a یک نقطهٔ مینی‌موم موضعی است، و اگر $f^{(k)}(a)<0$، نتیجه می‌شود که $f(x)<f(a)$ و a یک نقطهٔ ماکسیمم موضعی ست. اگر k فرد باشد، $(x-a)^k$ در $x=a$ تغییر علامت می‌دهد، پس $f(x)-f(a)$ نیز باید در $x=a$ تغییر علامت دهد که علامت $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$ همانند علامت $f^{(k)}(a)$ باقی بماند. بنابراین در یک طرف a، $f(x)<f(a)$، و در طرف دیگر، $f(x)>f(a)$ و a نمی‌تواند ماکسیمم یا مینی‌موم موضعی باشد. □

مثال ۶. وضعیت نقطهٔ $x=0$ برای تابع f که به‌صورت $f(x)=x^6\cos x-x^5\sin x$ تعریف شده است بررسی کنید.

می‌نویسیم $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cos c_1$ که c_1 نقطه‌ای بین 0 و x است، و نیز $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cos c_2$، که c_2 نقطه‌ای بین 0، x است. داریم:

$$\begin{aligned}f(x)&=x^6\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cos c_2\right)-x^5\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\sin c_1\right)\\&=\left(-\frac{1}{3}\right)x^8+x^{10}\left(\frac{1}{4!}\cos c_2-\frac{1}{5!}\sin c_1\right)\end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز در قدر مطلق از $\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$ بیشتر نیست و برای $|x|$ کوچک، جملهٔ $(-\frac{1}{3})x^8$ غالب است. در واقع از تساوی بالا می‌بینیم که مشتقات f تا مرتبهٔ ۷ در $x=0$ همه صفر هستند و $f^{(8)}(0)=(-\frac{1}{3})(8!)<0$. بنابراین f در نقطهٔ صفر یک ماکسیمم موضعی دارد.

مثال ۷. نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x^۲-۲x)^{۱۰۰}$ را بررسی کنید.

داریم $f'(x)=۱۰۰(x^۲-۲x)^{۹۹}(۲x-۲)$، پس سه‌نقطهٔ بحرانی $x=۰,۱,۲$ به‌دست می‌آیند. در واقع می‌توان نوشت $f(x)=x^{۱۰۰}(x-۲)^{۱۰۰}$ و از این عبارت وضح است که $x=۰,۲$ مینی‌موم موضعی بری تابع هستند زیرا که مقدار تابع در ین نقاط صفر است و در سایر نقاط مثبت. از طرفی دیگر، این تابع، که پیوسته است، باید در $[۰,۲]$ ماکسیمم داشته باشد و در ین نقطهٔ ماکسیمم که لزوماً یک نقطهٔ درونی است، مشتق f باید صفر شود. پس لزوماً $x=۱$ نقطهٔ ماکسیمم واقع در $[۰,۲]$ ست. به این ترتیب وضعیت هر سه نقطه ر می‌توان از ملاحظات ابتدایی روشن ساخت. ولی همین نتایج ر اکنون با توجه به آزمون ۲۰_۶ به‌دست می‌آوریم. در نقطهٔ $x=۰$ تابع را به‌صورت توانهای x بسط می‌دهیم.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{۱۰۰}(x-۲)^{۱۰۰}=x^{۱۰۰}\left(\sum_{j=۰}^{۱۰۰}\binom{۱۰۰}{j}x^j(-۲)^{۱۰۰-j}\right)\\
&=\sum_{j=۰}^{۱۰۰}(-۱)^j(۲)^{۱۰۰-j}\binom{۱۰۰}{j}x^{۱۰۰+j}
\end{aligned}
$$

عبارت طرف راست لزوماً چند جمله‌ی تیلور درجه ≤ ۲۰۰ تابع f در نقطهٔ صفر است. از ین عبارت می‌بینیم که مشتقات f تا مرتبهٔ ۹۹ در ۰ همه صفر هستند و $f^{(۱۰۰)}(۰)=(۱۰۰!)۲^{۱۰۰}>۰$، پس $x=۰$ یک مینی‌موم موضعی ست. همینطور در نقطهٔ ۲:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ((x-۲)+۲)^{۱۰۰}(x-۲)^{۱۰۰}\\
&=\sum_{j=۰}^{۱۰۰}\binom{۱۰۰}{j}(x-۲)^j۲^{۱۰۰-j}(x-۲)^{۱۰۰}\\
&=\sum_{j=۰}^{۱۰۰}۲^{۱۰۰-j}\binom{۱۰۰}{j}(x-۲)^{۱۰۰+j}
\end{aligned}
$$

مجدداً در اینجا مشتقات f تا مرتبهٔ ۹۹ در $x=۲$ صفر می‌شوند و $f^{(۱۰۰)}(۲)=(۱۰۰!)۲^{۱۰۰}$ و

$x = ۲$ یک مینی‌موم موضعی ست. بالاخره برای $x = ۱$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ((x-۱)+۱)^{۱۰۰}((x-۱)-۱)^{۱۰۰} = ((x-۱)^۲-۱)^{۱۰۰} \\ &= \sum_{j=۰}^{۱۰۰} \binom{۱۰۰}{j} (-۱)^j (x-۱)^{۲j} \\ &= ۱ - ۱۰۰(x-۱)^۲ + \dots \end{aligned}$$

در ینجا مشتق دوم تابع در $x = ۱$ منفی است و یک ماکسیمم موضعی به‌دست می‌ید.

سری تیلور و سری توانی (۱)

در جلسه ۲۰ چندجمله‌ای تیلور را بررسی کردیم. اگر تابع f در نقطهٔ درونی a از دامنهٔ تعریف خود دارای مشتق تا مرتبهٔ n باشد، چندجمله‌ای تیلور درجهٔ n تابع f در نقطهٔ a، با تقریب درجهٔ n تابع f در نقطهٔ a، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n \qquad (1)$$

حال فرض کنید تابع f دارای مشتق از هر مرتبه در نقطهٔ a است، پس می‌توان $f^{(k)}(a)$ را به‌ازای هر k در نظر گرفت. بدین ترتیب می‌توان به‌ازای هر عدد x، سری زیر را تشکیل داد:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \qquad (2)$$

سری فوق را سری تیلور تابع f در نقطه a می‌نامیم. دو سؤال طبیعی در اینجا به ذهن می‌رسد.

الف) آیا سری (۲) به‌ازای هر x یا بعضی x ها همگراست؟

ب) اگر x در دامنهٔ تعریف f باشد و سری (۲) به‌ازای x همگرا، آیا حد سری برابر $f(x)$ می‌شود؟

توجه کنید که زمینه‌ای معقول برای جواب مثبت به (ب) وجود دارد. به طور کلی دیدیم که با افزایش درجهٔ تقریب تابع، یعنی افزایش n در (۱)، تقریب درجهٔ n در نزدیکی a از تابع دورتر نمی‌شود. بنابراین غیرقابل تصور به نظر نمی‌رسد که با افزایش n، حد (۱)، یعنی سری (۲)، به خود تابع میل کند. مثال‌های زیر تنوع وضعیت‌های ممکن را تا حدی بیان خواهد کرد.

(۳۳—۱) چند مثال

(۳۳—۱—۱) تابع $f(x)=e^x$ را با $a=۰$ در نظر می‌گیریم. از آنجا که $f^{(n)}(۰)=۱$ به‌ازای هر n، سری تیلور تابع در $a=۰$ به شکل زیر است:

$$۱+\frac{x}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!}+\cdots=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (۳)$$

می‌خواهیم همگرایی سری فوق را به‌ازای x های مختلف بررسی کنیم و اینکه اگر به‌ازای یک x این سری همگرا باشد، آیا مجموع سری برابر e^x است؟ در اینجا، و در بسیاری موارد دیگر، هر روشی که برای تخمین خطای تقریب درجهٔ n در اختیار داشته باشیم می‌تواند مفید واقع شود. می‌دانیم که اگر $p_n(x)$ تقریب درجهٔ n تابع f در a باشد، داریم:

$$f(x)=p_n(x)+\frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱} \qquad (۴)$$

که در اینجا c نقطه‌ای بین a و x (و البته وابسته به n) است جمله دوم سمت را باقیماندهٔ لاگرانژ نامیدیم. اگر برای x داده شده داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}=۰$$

آنگاه $\lim_{n\to\infty}(f(x)-p_n(x))=۰$، یعنی سری تیلور به‌ازای x به مقدار $f(x)$ میل می‌کند. پس در این صورت به‌ازای چنین مقدار x، جواب (الف) و (ب) هر دو مثبت می‌شود. در مورد تابع $f(x)=e^x$ و $a=۰$ داریم:

$$\frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}=\frac{e^c}{(n+۱)!}x^{n+۱}$$

که c نقطهٔ نامشخصی بین ۰ و x و وابسته به n است. x هرچه باشد می‌توان نوشت $۰<c<|x|$، پس $e^c\le e^{|x|}$. بنابراین برای x داده شده، چنانچه ثابت کنیم $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}=۰$، باقیماندهٔ لاگرانژ به صفر میل می‌کند و نتیجه خواهد شد که سری تیلور (۳) به e^x همگراست. در واقع برای x داده شده، N را بزرگتر یا مساوی $|x|$ می‌گیریم. در این صورت برای $n>N$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{|x|^{n+۱}}{(n+۱)!} &= \frac{|x|^N}{N!}\cdot\frac{|x|}{N+۱}\cdots\cdots\frac{|x|}{n+۱}\\ &< \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+۱}\right)^{n-N}\end{aligned}$$

چون نسبت ثابت $\frac{|x|}{N+۱}$ اکیداً از یک کوچکتر است، وقتی $n \to \infty$، طرف راست بالا به صفر میل می‌کند، پس باقیماندهٔ لاگرانژ به صفر میل می‌کند. بنابراین برای هر x داریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad (۵)$$

بدین ترتیب برای این مثال، سری تیلور e^x در $a = ۰$ به‌ازای هر x به خود تابع میل می‌کند. در اثبات بالا دیدیم که برای کوچک کردن باقیمانده لازم بود N را بزرگتر یا مساوی $|x|$ بگیریم. به طور کلی باید انتظار داشت که هرچه x از a دورتر شود، برای نزدیک کردن مجموع سری تیلور به $f(x)$ جملات بیشتری از سری تیلور لازم باشد. در شکل ۱ مجموع‌های ۱، $۱ + x$، $۱ + x + \frac{x^۲}{۲}$ و $۱ + x + \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳!}$ به عنوان تقریب‌های e^x نمایش داده شده‌اند. ملاحظه کنید که هرچه $|x|$ بزرگتر شود، تقریب از مقدار واقعی دورتر است هرچند که به‌ازای هر x داده شده، با افزودن جملات سری تیلور می‌توان به e^x به دلخواه نزدیک شد.

?

(۳۳–۱–۲) تابع‌های $\sin x$، $\cos x$، $sinh\ x$ و $cosh\ x$ را در نظر می‌گیریم. سری‌های تیلور این توابع در $a = ۰$ به سادگی محاسبه می‌شوند زیرا که

$$\sin^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & n \text{ زوج} \\ ۱ & n = ۴k + ۱ \\ -۱ & n = ۴k + ۳ \end{cases} \qquad \cos^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & n \text{ فرد} \\ ۱ & n = ۴k \\ -۱ & n = ۴k + ۲ \end{cases}$$

$$sinh^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & n \text{ زوج} \\ ۱ & n \text{ فرد} \end{cases} \qquad cosh^{(n)}(۰) = \begin{cases} ۰ & n \text{ فرد} \\ ۱ & n \text{ زوج} \end{cases}$$

پس سری‌های تیلور این توابع در $a = ۰$ به شرح زیرند:

$$\sin x : \quad x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + - \cdots$$

$$\cos x : \quad ۱ - \frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + - \cdots$$

$$sinh\ x : \quad x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots$$

$$cosh\ x : \quad ۱ + \frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۴}{۴!} + \frac{x^۶}{۶!} + \cdots$$

در واقع به سبب شباهت ضرایب این سری‌ها به ضرایب سری تیلور e^x، می‌توان با استفاده از باقیماندهٔ لاگرانژ به روشی مشابه آنچه در مثال قبل گذشت نشان داد که هر یک از این سری‌ها به‌ازای هر x به تابع مربوط میل می‌کند، یعنی به‌ازای هر x داریم:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots \qquad (6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots \qquad (7)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (8)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (9)$$

به عنوان مثال، چند تقریب متوالی $\sin x$ با چندجمله‌ای‌های تیلور در شکل ۲ نمایش داده شده است.

?

(۳۳–۱–۳) تابع $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم. سری تیلور این تابع را در نقطهٔ $a = 1$ از قلمرو بررسی می‌کنیم. داریم $f'(x) = -x^{-2}$، $f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$، و با استقراء $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}$، پس $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$ و $\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n$. بنابراین سری تیلور تابع در $a = 1$ به صورت زیر است:

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + - \cdots$$

ملاحظه می‌کنیم که این یک سری هندسی با قدر نسبت $-(x-1)$ است، پس شرطی لازم و کافی برای همگرایی آن این است که $|-(x-1)| < 1$ یا $0 < x < 2$. از طرفی دیگر از فرمول مجموع سری هندسی همگرا، برای $|-(x-1)| < 1$ داریم:

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - + \cdots = \frac{1}{1-(-(x-1))} = \frac{1}{x}$$