بدین ترتیب برای تابع $\frac{1}{x}$ و $a = 1$، نتیجهٔ زیر در مورد (الف) و (ب) حاصل می‌شود: سری تیلور در بازهٔ $]0, 2[$ همگراست و در این بازه به خود تابع میل می‌کند. از آنجا که تابع $\frac{1}{x}$ در $x = 0$ تعریف نشده است، واگرایی سری تیلور به‌ازای $x = 0$ شاید عجیب به نظر نرسد، ولی برای $x \geq 2$ تابع $\frac{1}{x}$ تعریف شده است و در عین حال سری تیلور در $a = 1$ همگرا نیست.

(۳۳–۱–۴) یک تابع چندجمله‌ای در نظر بگیرید:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$$

داریم $f^{(n)}(x) = 0$ اگر $n > k$. دیده‌ایم که اگر به جای x، $a + (x - a)$ جایگزین کنیم، نتیجه می‌شود که:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

پس در واقع سری تیلور f در نقطه a برابر چندجمله‌ای تیلور تابع در نقطهٔ a و برابر خود تابع است.

(۳۳–۱–۵) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

برای $x \neq 0$ با استفاده مکرر از قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توان ملاحظه کرد که این تابع از هر مرتبه مشتق دارد. در واقع ادعا می‌کنیم که به‌ازای $x = 0$ نیز تابع از هر مرتبه مشتق دارد و $f^{(n)}(0) = 0$ برای هر n. اگر این ادعا ثابت شود نتیجه می‌شود که همه ضرایب سری تیلور، $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$، در $a = 0$ صفر هستند. پس سری تیلور f در $a = 0$ به صورت:

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots$$

است. پس سری تیلور به‌ازای هر x همگراست ولی به‌جای اینکه به تابع f میل کند، به تابع ثابت صفر میل می‌کند! در واقع تقریب درجهٔ n تابع f در صفر، برای هر n، تابع ثابت صفر است. برای اثبات

ادعا، به طور استقرایی ثابت می‌کنیم که

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} c\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^p} \text{ مجموع جملات به شکل } & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در عبارت بالا، c یک عدد حقیقی و p یک عدد صحیح مثبت است. نخست توجه کنید که حکم برای $n = 1$ درست است زیرا که برای $x \neq 0$ داریم

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)$$

و

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

اگر $\frac{1}{x}$ را برابر t قرار دهیم حد بالا برابر $\lim_{t \to \pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}}$ می‌شود که صفر است. حال فرض می‌کنیم حکم تا n ثابت شده است و حکم را برای $(n+1)$ ثابت می‌کنیم. طبق فرض، مشتق nـام تابع f در $x \neq 0$ مجموع جملاتی هر یک به شکل $c\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^p} = ce^{-x^{-2}}x^{-p}$ است پس مشتق $(n+1)$ـام در $x \neq 0$ مجموع جملاتی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(ce^{-x^{-2}}x^{-p} &= c[2e^{-x^{-2}}x^{-p-3} + e^{-x^{-2}}(-p)x^{-p-1}] \\ &= (2c)\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+3}} - p\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+1}} \end{aligned}$$

پس مشتق $(n+1)$ـام نیز همچنان مجموع جملاتی به شکل مورد نظر است. حال برای مشتق $(n+1)$ـام در صفر باید حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x}$$

که در آن $f^{(n)}(x)$ مجموع جملاتی به شکل $ce^{-x^{-2}}x^{-p}$ است. برای هر چنین چندجمله‌ای داریم:

$$\frac{ce^{-x^{-2}} \cdot x^{-p}}{x} = c\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+1}} = c\frac{t^{p+1}}{e^{t^2}}$$

که در اینجا t را جایگزین $\frac{1}{x}$ کرده‌ایم. وقتی $x \longrightarrow 0$ داریم، $t \longrightarrow \pm\infty$ و حد بالا صفر است. بدین ترتیب ادعا به اثبات می‌رسد.

مثال‌های متنوع بالا نشان داد که اولاً جواب سؤال (الف) ممکن است به‌ازای بعضی x ها منفی باشد، یعنی سری تیلور تابع f در نقطهٔ a از دامنهٔ f ممکن است به‌ازای بعضی x ها همگرا نباشد، و ثانیاً در جواب (ب)، حتی اگر سری تیلور به‌ازای x همگرا باشد، ممکن است مجموع سری برابر خود تابع نشود. در مقابل دیدیم که در مورد بعضی توابع مأنوس و مهم مانند e^x، $\sin x$، $\cos x$، $\sinh x$ و $\cosh x$، سری تیلور در $a = 0$ به‌ازای هر x به خود تابع میل می‌کند. برای درک بهتر نظام حاکم بر این امر، به یک بحث جامع‌تر می‌پردازیم.

فرض کنید c یک عدد حقیقی یا مختلط باشد و c_0، c_1، c_2، ... اعداد حقیقی یا مختلط داده شده برای هر z مختلط، سری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$c_0 + c_1(z-c) + c_2(z-c)^2 + \cdots \qquad (10)$$

سری (۱۰) را یک سری توانی در c (یا حول c، یا به مرکز c) می‌نامند. از آنجا که مجموعهٔ اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط است، بحث بعدی را در مورد اعداد مختلط انجام خواهیم داد، که در واقع روشن‌کننده‌تر است، ولی خواننده می‌تواند c_i ها، c و z را حقیقی فرض کند و هیچ تغییری در بحث حاصل نخواهد شد. اگر سری بالا به‌ازای z هایی همگرا باشد، مجموع سری تابعی به دامنهٔ این z ها تعریف می‌کند. شباهت (۱۰) را به نمایش اعداد حقیقی در یک مبنا، مثلاً مبنای ۱۰، ملاحظه کنید. هر عدد مثبت را می‌توانیم به صورت:

$$a_0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots \qquad (11)$$

بنویسیم که در آن a_0 یک عدد صحیح مثبت است و a_1، a_2، ... ارقامی از میان ۰ تا ۹. همان طور که اعداد (مثبت) را به صورت (۱۱) نمایش می‌دهیم، جالب خواهد بود اگر بتوانیم تابع‌ها، یا دست‌کم دستهٔ بزرگی از تابع‌ها، را به صورت واحد (۱۰) نمایش دهیم. در این صورت چندجمله‌ای‌ها متناظر کسرهای اعشاری مختومه می‌شوند. قضیهٔ سادهٔ زیر کلید بحث‌های بعدی است.

(۳۳–۲) قضیه. اعداد مختلط c، c_0، c_1، c_2، ... داده شده‌اند. در این صورت ρ وجود دارد، $0 \le \rho \le \infty$، به طوری که:

الف) به‌ازای هر z که $|z-c| < \rho$، سری توانی (۱۰) همگرای مطلق است.

ب) به‌ازای هر z که $|z-c| > \rho$، سری توانی (۱۰) واگراست.

قبل از ارائه اثبات ۳۳–۲، نتایج حکم آن را مختصراً تشریح می‌کنیم. نخست توجه کنید که به‌ازای $z = c$ تمام جملات سری (۱۰) از اندیس ۱ به بعد صفر می‌شوند و سری به c_0 همگراست. اگر $\rho = 0$، (الف) مصداقی ندارد و هر $z \neq c$ در $|z-c| > 0$ صدق می‌کند، پس سری (۱۰) به‌ازای هر $z \neq c$ واگراست. بالعکس اگر $\rho = +\infty$، حکم (ب) مصداقی ندارد و به‌ازای هر z، سری (۱۰) همگرای مطلق است. در حالت $0 < \rho < \infty$، اگر دایرهٔ به شعاع ρ و مرکز c را در نظر بگیریم، طبق حکم قضیه، سری (۱۰) به‌ازای هر z در درون دایره همگرای مطلق و به‌ازای هر z در بیرون این دایره واگراست. قضیه حکمی در مورد نقاط روی دایره ارائه نمی‌کند و در واقع بررسی این نقاط را باید جداگانه در هر مورد خاص انجام داد. بدین ترتیب نظام مشخصی بر مجموعهٔ نقاط همگرایی و واگرایی یک سری مانند (۱۰) حکمفرماست. در حالتی که همهٔ داده‌ها، یعنی c، c_0، c_1، ... حقیقی باشند و نظر خود را فقط به z های حقیقی محدود کنیم، $z = x$، قضیهٔ ۳۳–۲ نتیجه می‌دهد که بازه‌ای به شعاع ρ حول c وجود دارد به طوری که برای هر x در $]c-\rho, c+\rho[$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ همگرای مطلق است و به‌ازای هر x که $|x-c| > \rho$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ واگرا می‌باشد. در مورد دو نقطهٔ انتهایی بازه، یعنی $x = c+\rho$ و $x = c-\rho$، قضیه حکمی نمی‌کند و در واقع بستگی به مورد خاص دارد. توجه کنید که سری تیلور یک تابع f در نقطهٔ a، یک سری توانی حول a است. بدین ترتیب دامنهٔ همگرایی سری تیلور نیز از نظام خاص برخوردار است یعنی بازه‌ای متقارن به مرکز a وجود دارد که سری در تمام نقاط داخل این بازه همگرای مطلق و در همهٔ نقاط بیرون بازه واگراست. مثلاً در مثال ۳۳—۱—۳، تابع $\frac{1}{x}$ حول $a = 1$، دیدیم که $\rho = 1$ و سری تیلور مربوط بیرون $]0, 2[$ واگراست هرچند که $\frac{1}{x}$ برای همه $x > 2$ تعریف شده است.

برهان ۳۳—۲. کافی نشان دهیم اگر (۱۰) به‌ازای $z = z_1$ همگرا باشد، آنگاه به‌ازای هر z که $|z-c| < |z_1-c|$، یعنی به‌ازای هر z نزدیکتر از z_1 به c، نیز سری همگرا و در واقع همگرای مطلق

است. پس فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - c)^n$ همگراست. در این صورت کرانی K برای قدرمطلق جملات این سری وجود دارد، یعنی عددی $K > 0$ هست که:

$$|c_n(z_1 - c)^n| \leq K \quad : \quad \text{برای هر } n$$

حال z را طوری در نظر بگیرید که $|z - c| < |z_1 - c|$ و $\frac{|z-c|}{|z_1-c|}$ را برابر σ قرار دهید. که $\sigma < 1$. داریم

$$|c_n(z - c)^n| = |c_n(z_1 - c)^n| \cdot |\frac{z - c}{z_1 - c}|^n \leq K \cdot \sigma^n$$

مقایسه با سری هندسی $K \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n$، $0 \leq \sigma < 1$ نشان می‌دهد که $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - c)^n|$ همگراست. یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - c)^n$ همگرای مطلق است و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

عدد ρ را شعاع همگرایی سری (۱۰) می‌نامند و گوی باز $|z - c| < \rho$ (یا در حالت حقیقی بازهٔ باز $]c - \rho, c + \rho[$) ناحیه همگرایی سری خوانده می‌شود. محاسبهٔ ρ بسیاری اوقات ساده است. در واقع می‌توان بر اساس هر آزمون همگرایی مطلق روشی برای محاسبهٔ ρ ارائه کرد. مثلاً آزمون نسبت را در نظر بگیرید. فرض کنید $\lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ وجود دارد و برابر L است ($0 \leq L \leq +\infty$). در این صورت ادعا می‌کنیم که:

$$\rho = \frac{1}{L} \tag{۱۲}$$

در واقع حد نسبت قدرمطلق دو جملهٔ توانی (۱۰) عبارت است از:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}(z - c)^{n+1}|}{|c_n(z - c)^n|} = \lim_{n\to+\infty} (\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}|z - c|) = L \cdot |z - c|$$

اگر این حد کوچکتر از ۱ باشد، یعنی $|z - c| < \frac{1}{L}$، سری همگرای مطلق است، و اگر بزرگتر از ۱ باشد، یعنی $|z - c| > \frac{1}{L}$، سری واگراست، پس $\frac{1}{L}$ شعاع همگرایی سری است.

به همین ترتیب با استفاده از آزمون ریشه، چنانچه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ وجود داشته و برابر L باشد، مجدداً $\rho = \frac{1}{L}$ شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - c)^n$ خواهد بود.

(۳۳—۳) چند مثال

(۳۳—۳—۱) در مورد سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$، قبلاً دیدیم (مثال ۳۳—۱—۱) به‌ازای هر x حقیقی این سری به e^x میل می‌کند. حال چون هر z مختلط نزدیکتر از یک x حقیقی به ۰ است (مثلاً نزدیکتر از $|z|$۲)، از قضیه نتیجه می‌شود که $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ به‌ازای هر z همگرا (ی مطلق) است. مجموع این سری را به تبعیت از حالت حقیقی e^z یا $\exp z$ می‌نامیم. بدون استفاده از مطالب چندجمله‌ای تیلور و باقیمانده نیز می‌توان شعاع همگرایی این سری را به‌دست آورد. مثلاً از آزمون نسبت، داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$، پس $\rho=+\infty$.

(۳۳—۳—۲) سری‌های توانی طرف راست (٦)، (۷)، (۸) و (۹) را با جایگزینی z مختلط به‌جای x در نظر بگیرید. از آنجا که هر یک از این سری‌ها به‌ازای هر x حقیقی همگراست، از قضیه نتیجه می‌شود که این سری‌ها به‌ازای هر z مختلط نیز همگرا می‌شوند. در واقع $\sin z$، $\cos z$، $sinh\ z$ و $cosh\ z$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad ; \quad \cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad (13)$$

$$sinh\ z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k-1)!} \quad ; \quad cosh\ z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad (14)$$

سایر توابع مثلثاتی و هذلولوی برای مقادیر مختلط نیز برحسب $\sin z$، $\cos z$، $sinh\ z$ و $cosh\ z$ تعریف می‌شوند. مجدداً می‌توان مستقیماً نشان داد شعاع همگرایی هر یک از سری‌های توانی بالا $+\infty$ است. مثلاً برای $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$ داریم $c_n=0$ اگر n فرد باشد و $c_n=\frac{(-1)^k}{(2k)!}$ اگر $n=2k$. برای n فرد $\sqrt[n]{|c_n|}=0$ و برای n زوج، $n=2k$، $a_n=\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. چون برای هر عدد صحیح مثبت m، $\sqrt[n]{m}\geq 1$، داریم

$$\frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}}<\frac{1}{\sqrt[2k]{2k}}\cdots\cdots\frac{1}{\sqrt[2k]{k+1}}<(\frac{1}{\sqrt[2k]{k+1}})^k=\frac{1}{\sqrt{k-1}}$$

و حد جملهٔ طرف راست صفر است وقتی $k\to+\infty$.

(۳۳–۳–۳) برای سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}(n!)z^n$، از آنجا که $\frac{(n+1)!}{n!} \longrightarrow +\infty$ وقتی $n \longrightarrow +\infty$، داریم $\rho = 0$.

(۳۳–۳–۴) برای عدد حقیقی و نامنفی دادهٔ شدهٔ p، سری توانی p را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$$

از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^p$ برابر ۱ است، داریم $\rho = 1$، p هر چه باشد. بدین ترتیب برای هر z با $|z| < 1$ این سری همگرا و به‌ازای هر z با $|z| > 1$ این سری واگراست. برای مقادیر مختلف p، رفتار این سری روی دایرهٔ $|z| = 1$ متفاوت است. برای $p > 1$، چون $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{z^n}{n^p}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ به‌ازای هر z با $|z| = 1$ همگراست. برای $p = 1$، سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ که به‌ازای $z = 1$ به‌دست می‌آید واگراست و لیکن سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$، برای $z = -1$، همگراست. برای $p = 0$، سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ به‌ازای هر z با $|z| = 1$ واگراست.

سری تیلور و سری توانی (۲)

در جلسه قبل نخست سری تیلور و سپس به طور کلی سری توانی را در نظر گرفتیم. هر سری تیلور یک سری توانی است. یکی از دستاوردهای بحث این جلسه این خواهد بود که هر سری توانی با شعاع همگرایی مثبت، خود سری تیلور تابعی است که در ناحیه همگرایی سری به آن میل می‌کند. در این جلسه بحث را به سری‌های توانی حقیقی محدود خواهیم کرد هر چند که همین ملاحظات در حالت مختلط نیز معتبر است. دلیل محدود کردن بحث این است که مفاهیم مشتق و انتگرال را که در اینجا به‌کار گرفته خواهد شد در حال حاضر فقط برای تابع‌های حقیقی در اختیار داریم. در یکی دو جا اشاراتی به حالت مختلط نیز خواهد شد. بدین ترتیب سری توانی

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن a، a_0، a_1، a_2، ... اعداد حقیقی داده شده‌اند و x منغیر حقیقی است. طبق قضیهٔ جلسهٔ قبل، ρ وجود دارد، $0 \leq \rho \leq +\infty$ که سری فوق برای هر x با $|x-a| < \rho$ همگرای مطلق است و برای هر x با $|x-a| > \rho$ واگرا. ρ را شعاع همگرایی سری توانی خواندیم. قضیهٔ اساسی زیر که در اینجا ثابت نخواهیم کرد جمع‌بندی خواص مهم (۱) است:

فرض کنید $\rho > 0$، پس $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ برای x با $|x-a| < \rho$ به عددی میل می‌کند که آن را $f(x)$ می‌نامیم. بدین ترتیب تابعی $f:]a-\rho, a+\rho[\longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود. داریم:

(۳۴–۱) قضیه. الف) f در $]a-\rho, a+\rho[$ مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر x در این بازه داریم

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \qquad (۲)$$

ب) به‌ازای هر x در بازهٔ $]a-\rho, a+\rho[$، انتگرال $\int_a^x f$ وجود دارد و:

$$\int_a^x f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \qquad (۳)$$

تذکر چند نکته در اینجا ضروری است:

(۳۴—۲) یادداشت

(۳۴—۲—۱) توجه کنید که (۲) و (۳) بیانگر این مطلب هستند که برای مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری از f می‌توانیم از تک تک جملات سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ مشتق و انتگرال گرفته و سپس مجموع سری مشتق‌ها یا انتگرال‌ها را در نظر بگیریم. این مطلب ممکن است واضح به نظر برسد، و در واقع برای مجموع‌های متناهی درست است، ولی برای مجموع یک سری (که در واقع یک حد است) به طور کلی درست نیست. به زودی در بررسی سری فوریه خواهیم دید که مجموع یک سری تابع‌های مشتق‌پذیر ممکن است اصلاً پیوسته نباشد. بدین ترتیب قضیه ۳۴—۱ تعمیم قضیه مجموع مشتق = مشتق مجموع، و مجموع انتگرال = انتگرال مجموع، به جملات تشکیل‌دهندهٔ یک سری توانی است.

(۳۴—۲—۲) حکم (الف) نشان می‌دهد که شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ دست‌کم ρ (= شعاع همگرایی سری توانی اولیه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$) است زیرا که برای x در $]a-\rho, a+\rho[$ سری بالا به عدد $f'(x)$ میل می‌کند. در واقع شعاع همگرایی سری مشتق‌ها دقیقاً برابر ρ است زیرا که طبق (ب) شعاع همگرایی سری تابع‌های اولیه نیز دست‌کم ρ است. بدین ترتیب شعاع‌های همگرایی سری‌های توانی $\sum a_n(x-a)^n$، $\sum na_n(x-a)^{n-1}$ و $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ هر سه برابرند. رفتار این سری‌ها در نقاط انتهایی $a \pm \rho$ ممکن است متفاوت باشد همچنان که مثال‌های آینده نشان خواهد داد.

(۳۴—۳) چند مثال

(۳۴—۳—۱) در مثال ۳۱—۱—۳ دیدیم که سری توانی (هندسی) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x-1)^n$ در

$|x-1| < 1$، یعنی $0 < x < 2$، به تابع $\frac{1}{x}$ همگراست:

$$0 < x < 2 \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n = \frac{1}{x} \tag{۴}$$

با مشتق‌گیری طبق قسمت (الف) قضیهٔ ۳۴–۱ حاصل می‌شود:

$$0 < x < 2 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (x-1)^{n-1} = \frac{-1}{x^2} \tag{۵}$$

با مشتق‌گیری مجدد از این سری توانی داریم:

$$0 < x < 2 \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)(x-1)^{n-2} = \frac{2}{x^3} \tag{۶}$$

و به این ترتیب می‌توان با مشتق‌گیری مکرر یک نمایش سری توانی برای تابع $\frac{1}{x^k}$ در $0 < x < 2$ به‌دست آورد.

(۳۴–۲–۲) اگر قسمت (ب) قضیهٔ ۳۴–۱ را در مورد (۴) به‌کار گیریم حاصل می‌شود:

$$0 < x < 2 \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1} = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

یا

$$0 < x < 2 \quad , \quad (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \cdots = \ln x \tag{۷}$$

مقایسهٔ (۴) و (۷) در نقاط انتهایی بازهٔ همگرایی قابل توجه است. سری توانی (۴) که یک سری هندسی است در هیچ‌یک از دو نقطهٔ انتهایی $x = 0, 2$ همگرا نیست. سری توانی سمت چپ (۷) در $x = 0$ برابر منفی سری هارمونیک است و همگرا نمی‌باشد ولی به‌ازای $x = 2$ سری متناوب زیر به‌دست می‌آید:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

که همگراست. سؤالی که به طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا مجموع این سری را می‌توان با جایگزینی $x = 2$ در سمت راست (۷) به‌دست آورد، یعنی آیا $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$؟ قضیهٔ زیر از آبل (که در اینجا ثابت نخواهد شد) گویای این مطلب در حالت کلی است:

(۳۴–۴) قضیه. فرض کنید سری توانی (۱) دارای شعاع همگرایی ρ است، $0 < \rho < +\infty$ و در $|x-a| < \rho$ به تابع f میل می‌کند. اگر به‌ازای نقطهٔ انتهایی $x = a - \rho$ (به ترتیب نقطهٔ انتهایی $x = a - \rho$) سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n$ (به ترتیب $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\rho^n$) همگرا باشد، آنگاه داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n = \lim_{x\to(a-\rho)^-} f(x) \quad \text{(به ترتیب} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\rho^n = \lim_{x\to(a-\rho)^+} f(x)) \tag{۸}$$

در مورد مثال بالا، از آنجا که $\ln x$ در $x = 2$ پیوسته است، حد آن همان مقدار $\ln 2$ می‌باشد و

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \ln 2 \tag{۹}$$

اکنون به بهره‌برداری از قضیهٔ ۳۴–۱ ادامه می‌دهیم. همان طور که در یادداشت ۳۴–۲–۲ و در مثال ۳۴–۳–۱ دیدیم، سری مشتق یک سری توانی، یعنی (۲)، خود در $|x-a| < \rho$ همگراست (به تابع f')، پس با استفاده مکرر از قضیه، می‌توان نتیجه گرفت که تابع $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$، $|x-a| < \rho$، دارای مشتق از هر مرتبه در بازهٔ $]a-\rho, a+\rho[$ است و

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k} \quad , \quad a-\rho < x < a+\rho \tag{۱۰}$$

در نقطهٔ $x = a$ نتیجه می‌شود که:

$$f^{(k)}(a) = (k!)a_k \tag{۱۱}$$

زیرا که به‌ازای $n > k$ جملات $(x-a)^{n-k}$ صفر می‌شوند. این نتیجه رابطهٔ تنگاتنگ سری توانی (۱) و تابعی را که توسط آن تعریف می‌شود نشان می‌دهد. در واقع می‌توان نوشت:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

یعنی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ در واقع سری تیلور تابع f در نقطهٔ a است! بدین ترتیب نه تنها هر سری تیلور یک سری توانی است، بلکه هر سری توانی، سری تیلور تابعی است که آن سری توانی در $|x-a| < \rho$ تعریف می‌کند. قضیه زیر آخرین قضیه از دنباله قضایایی است که بدون اثبات به ذکر صورت آن خواهیم پرداخت. ساده‌ترین و طبیعی‌ترین روش اثبات قضایایی که در این جلسه بدون

اثبات ذکر شدند گذر به صفحهٔ مختلط و استفاده از مشتق و انتگرال تابعی مختلط است که این کار زمینه‌سازی قابل توجهی نیاز دارد. می‌توان این قضایا را در محدودهٔ اعداد حقیقی ثابت کرد ولی اثبات‌ها به نسبت دشوارند.

فرض کنید تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. f را در نقطهٔ درونی a از S تحلیلی می‌نامیم در صورتی که f دارای مشتق از هر مرتبه در a باشد و عددی σ وجود داشته باشد که بازهٔ $]a-\sigma, a+\sigma[$ در S بوده و سری تیلور f در a به‌ازای هر x در $]a-\sigma, a+\sigma[$ به $f(x)$ میل کند.

به عنوان مثال، در جلسه قبل دیدیم که توابع e^x، $\sin x$، $\cos x$، $sinh\ x$، $cosh\ x$ در $a = \circ$ تحلیلی هستند (و در واقع $\sigma = +\infty$)، تابع $\frac{1}{x}$ در $a = ۱$ تحلیلی است با $\sigma = ۱$، و تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-۲}} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

در $a = \circ$ تحلیلی نیست. حال داریم:

(۳۴—۵) قضیه. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی a از S تحلیلی است و سری تیلور آن در نقطهٔ a، یعنی $\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$، در $|x-a| < \sigma$ به $f(x)$ میل می‌کند. در این صورت برای هر b در $]a-\sigma, a+\sigma[$، تابع f در b نیز تحلیلی است و شعاع همگرایی سری تیلور f به تابع f در b دست‌کم به اندازهٔ حداقل فاصلهٔ b از دو انتهای $]a-\sigma, a+\sigma[$ است. $\square$

(۳۴—۶) چند مثال

(۳۴—۶—۱) در مورد پنج تابع e^x و سینوس و کسینوس مثلثاتی و هذلولوی، دیدیم که تابع‌ها در $a = \circ$ تحلیلی هستند و $\sigma = +\infty$. پس به‌ازای هر b حقیقی، تابع‌ها در b تحلیلی هستند و سری تیلور در b به‌ازای همهٔ مقادیر x به تابع میل می‌کند. در مورد این پنج تابع، به سبب سادگی ضرایب، می‌توان موضوع را مستقیماً بدون استفاده از قضیهٔ بالا تحقیق کرد و این کار را به خواننده واگذار می‌کنیم. در اینجا سری تیلور e^x و $\sin x$ را در نقاطی غیر از $a = \circ$ می‌نویسیم. برای e^x، نقطهٔ دلخواه a را در نظر

بگیرید. داریم

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x)|_{x=a} = e^a$$

پس سری تیلور e^x در نقطهٔ a به شکل زیر است:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n \tag{۱۲}$$

البته این فرمول، با فاکتورگیری از e^a، چیزی جز $e^x = e^a \cdot e^{x-a}$ نیست.

سری تیلور $\sin x$ را در $x = \frac{\pi}{2}$ می‌نویسیم. داریم

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin x)|_{x=\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 0 & n \text{ فرد} \\ (-1)^k & n \text{ زوج} \end{cases}$$

بنابراین

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x - \frac{\pi}{2})^{2k} \tag{۱۳}$$

می‌توان (۱۲) را از بسط $\sin((x-\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{2})$ و سری تیلور $\cos x$ در $a = 0$ نیز نتیجه گرفت.

(۳۴ــ۶ــ۲) نشان می‌دهیم تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در هر نقطهٔ $a \neq 0$ تحلیلی است و سری تیلور آن در شعاع $|x-a| < |a|$ به خود تابع میل می‌کند. در حالت $a = 1$، این همان مثال ۳۳ــ۱ــ۳ جلسهٔ قبل است. داریم:

$$\frac{1}{x} = (\frac{1}{a})\frac{1}{1 + \frac{x-a}{a}}$$

برای $|\frac{x-a}{a}| < 1$، یا $|x-a| < |a|$، کسر $\frac{1}{1+\frac{x-a}{a}}$ برابر مجموع سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-a}{a})^n$ است پس:

$$|x-a| < |a| \quad , \quad \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n \tag{۱۴}$$

با مشتق‌گیری متوالی از این عبارت می‌توان سری تیلور $\frac{1}{x^k}$، برای عدد صحیح مثبت k، را در $a \neq 0$ نوشت. توجه کنید که نمی‌توان انتظار داشت شعاع همگرایی سری از $|a|$ تجاوز کند زیرا نقطهٔ O که در آن f تعریف نشده است در فاصله $|a|$ از a قرار دارد.

(۳۴—٦—۳) به روال مثال قبل، با استفاده از سری هندسی، سری تیلور $\frac{1}{1+x}$ را در $|x| < 1$ داریم:

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots \qquad (15)$$

در اینجا نیز چون تابع سمت چپ در $x = -1$ تعریف نشده است. شعاع همگرایی سری توانی سمت راست نمی‌تواند از ۱ تجاوز کند. ولی برای $|x| < 1$، داریم $|x^2| < 1$، پس با جایگزینی:

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots$$

نکتهٔ جالب توجه در مورد این سری اینکه طرف راست، که یک سری هندسی است، فقط در $|x| < 1$ همگراست، ولی طرف چپ به‌ازای هر x تعریف شده است و در واقع می‌توان نشان داد در هر نقطه a تحلیلی است. در اینجا شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{1}{1+x^2}$ در $a = 0$ برابر ۱ است در حالی که تابع در سراسر $\mathbb{R}$ تعریف شده است. در پس این مطلب اعداد مختلط نهفته‌اند. توجه کنید که $\frac{1}{1+z^2}$ به‌ازای $z = \pm i$ تعریف شده نیست، بنابراین شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{1}{1+z^2}$ حول $a = 0$ نمی‌تواند از $\rho = 1$ تجاوز کند!

(۳۴—٦—۴) فرض کنید $a > 0$. با انتگرال‌گیری از (۱۴)، سری تیلور $\ln x$ را در a به‌دست می‌آوریم:

$$|x - a| < a \quad , \quad \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1} \qquad (16)$$

این سری را قبلاً به‌ازای $a = 1$ دیده‌ایم. با قرار دادن $a = 1$ و $t = x - 1$، شکل معمول‌تری از (۱٦) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} |t| < 1 \quad , \quad \ln(1+t) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1} \\ &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - + \cdots \end{aligned} \qquad (17)$$

(۳۴—٦—۵) انتگرال‌گیری از (۱۵) نتیجه می‌دهد:

$$|x| < 1 \quad , \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots \qquad (18)$$

در دو نقطهٔ انتهایی بازهٔ همگرایی، یعنی $x = \pm ۱$، سری‌های متناوب همگرا حاصل می‌شوند و طبق قضیهٔ آبل داریم:

$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \cdots \qquad (۱۹)$$

سری تیلور و سری توانی (۳)

یکی از پراستفاده‌ترین نمایش‌های تابعی به صورت سری تیلور، نمایش تابع $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$، $|x| < 1$، α عدد حقیقی دلخواه، است. این نمایش را نیوتن در آغاز تحقیقات خود در حساب دیفرانسیل و انتگرال کشف کرد و تعمیمی از اتحاد $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ است.

(۳۵–۱) سری دوجمله‌ای فرض کنید α یک عدد حقیقی داده شده است. تابع:

$$f(x) = (1 + x)^{\alpha} = \exp(\alpha \ln(1 + x))$$

برای $x > -1$ تعریف شده است و ترکیب بالا نشان می‌دهد که در این دامنه دارای مشتق از هر مرتبه است. نخست سری تیلور f را در $a = 0$ می‌نویسیم و سپس نشان می‌دهیم این سری در $|x| < 1$ به خود تابع همگراست. مشتقات f به سادگی محاسبه می‌شوند:

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha - 1}, \ldots, f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - k + 1)(1 - x)^{\alpha - k} \qquad (1)$$

بنابراین سری تیلور f در $a = 0$ به صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \cdots \qquad (2)$$

ضریب $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ را گاهی به $\binom{\alpha}{n}$ نمایش می‌دهند زیرا که در واقع برای عدد صحیح $\alpha > n$، داریم $\frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. شعاع همگرایی سری توانی (۲) را محاسبه می‌کنیم. از آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\binom{\alpha}{n+1}|}{|\binom{\alpha}{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - n|}{n + 1} = 1$$

پس شعاع همگرایی برابر ۱ است. مجموع سری فوق را در $|x| < ۱$ به $g(x)$ نمایش می‌دهیم. باید ثابت کنیم $f(x) = g(x)$. برای این کار از روشی غیر مستقیم استفاده می‌کنیم که در موارد مشابه دیگر نیز گاهی مورد استفاده قرار می‌گیرد. طبق قضیهٔ (۳۴−۱)، قسمت (الف)، می‌توان از g در $[-۱, ۱]$ جمله به جمله مشتق گرفت و داریم:

$$g'(x) = \alpha + \alpha(\alpha - ۱)x + \frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)}{۲!}x^{۲} + \cdots$$

$$xg'(x) = \alpha x + \alpha(\alpha - ۱)x^{۲} + \frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)}{۲!}x^{۳} + \cdots$$

پس با جمع جملات هم مرتبه داریم:

$$\begin{aligned}(۱ + x)g'(x) &= \alpha + \alpha((\alpha - ۱) + ۱)x + \alpha(\frac{(\alpha-۱)(\alpha-۲)}{۲!} + (\alpha - ۱))x^{۲} + \cdots \\ &= \alpha[۱ + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-۱)}{۲!}x^{۲} + \cdots] \\ &= \alpha g(x)\end{aligned}$$

بدین ترتیب تابع g در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$|x| < ۱ \quad , \quad (۱ - x)g'(x) = \alpha g(x) \qquad (۳)$$

اگر بنویسیم $y = g(x)$، با توجه به اینکه در $|x| < ۱$: $۱ + x \neq ۰$، می‌توان نوشت:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \alpha\frac{y}{۱ + x} \qquad (۴)$$

طبق قضیهٔ اساسی وجود و یگانگی جواب معادلهٔ دیفرانسیل عادی، این دستگاه به‌ازای شرط آغازی ($x = ۰$، $y = ۱$) جواب یگانه دارد. از طرفی دیگر تابع $f(x) = (۱ - x)^\alpha$ واجد این شرط آغازی است و با مشتق‌گیری ملاحظه می‌شود که در (۴) صدق می‌کند، پس در واقع ثابت کرده‌ایم که:

$$|x| < ۱ \quad , \quad g(x) = (۱ + x)^\alpha$$

یعنی سری تیلور تابع $f(x) = (۱ + x)^\alpha$ در $|x| < ۱$ به خود تابع میل می‌کند.

(۳۵—۲) چند مثال

(۳۵—۲—۱) اگر $\alpha = p$ یک عدد صحیح مثبت باشد، برای $f(x) = (۱ + x)^p$ مشتقات از مرتبهٔ بزرگتر از p صفر می‌شوند و در واقع بسط دوجمله‌ای مأنوس

$$(۱ + x)^p = \sum_{k=۰}^{p} \binom{p}{k} x^k$$

به‌دست می‌آید. این نمایش در واقع برای هر x حقیقی برقرار است.

(۳۵—۲—۲) برای $\alpha = -p$، n عدد صحیح مثبت، داریم

$$\begin{aligned} |x| < ۱ \quad , \quad \frac{۱}{(۱+x)^p} &= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{p(p+۱)\cdots(p+n-۱)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \binom{n+p-۱}{n} x^n \end{aligned} \qquad (۵)$$

که $\frac{(n+p-۱)!}{(p-۱)!n!} = \binom{n+p-۱}{n}$. سری (۵) در محاسبهٔ تقریبی عبارتی به صورت $\frac{۱}{(a+h)^p}$ که در آن $|h|$ نسبت به $|a|$ کوچک است مؤثر واقع می‌شود. برای $|h| < |a|$ داریم $|\frac{h}{a}| < ۱$، پس:

$$\begin{aligned} \frac{۱}{(a+h)^p} &= \left(\frac{۱}{a^p}\right) \frac{۱}{(۱+\frac{h}{a})^p} \\ &= \left(\frac{۱}{a^p}\right) \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \binom{n+p-۱}{n} \left(\frac{h}{a}\right)^n \end{aligned}$$

یا:

$$|h| < |a| \quad , \quad \frac{۱}{(a+h)^p} - \frac{۱}{a^p} - \frac{ph}{a^{p+۱}} + \frac{p(p+۱)h^۲}{۲a^{p+۲}} - + \cdots \qquad (۶)$$

برای $|h|$ بسیار کوچک، حتی تقریب خطی

$$\frac{۱}{(a+h)^p} - \frac{۱}{a^p} \simeq \frac{ph}{a^{p+۱}} \qquad (۷)$$

برای بسیاری مقاصد بسنده می‌کند.

لازم به ذکر است که این مثال خاص، یعنی $\alpha = -p$، را می‌توانستیم از مشتق‌گیری مکرر سری هندسی مربوط به تابع $\frac{۱}{۱+x}$ نیز به‌دست آوریم.

(۳۵—۲—۳) حالت $\alpha = -\frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \times 2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1 \times 2 \times 3}x^3 + \cdots$$

با جایگزینی $-x$ به جای x داریم:

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + (\frac{1}{2})x - \frac{(1 \times 3)}{(2 \times 4)}x^2 + \frac{(1 \times 3 \times 5)}{(2 \times 4 \times 6)}x^3 - \cdots$$

و اگر x^2 را جایگزین x کنیم

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - (\frac{1}{2})x^2 + \frac{(1 \times 3)}{(2 \times 4)}x^4 - \frac{(1 \times 3 \times 5)}{(2 \times 4 \times 6)}x^6 - \cdots \qquad (8)$$

حال با استفاده از انتگرال‌گیری جمله به جمله، قضیهٔ ۳۴—۱، ب، داریم:

$$|x| < 1 \quad , \quad \sin^{-1} x = x + (\frac{1}{2})\frac{x^3}{3} + (\frac{(1 \times 3)}{(2 \times 4)})\frac{x^5}{5} + \cdots \qquad (9)$$

که سری تیلور $\sin^{-1} x$ در $a = 0$ است.

در اینجا لازم است به عملیات جبری بین سری‌های توانی اشاره‌ای داشته باشیم. فرض کنید دو سری توانی حول a، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ به شعاع همگرایی ρ_1 و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ به شعاع همگرایی ρ_2 داده شده باشند. فرض کنید سری اول در $|x-a| < \rho_1$ به $f(x)$ و سری دوم در $|x-a| < \rho_2$ به $g(x)$ میل می‌کند. برای $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ و $|x-a| < \rho$، هر دو سری همگرا هستند، پس با توجه به اینکه سری مجموع جملات متناظر دو سری همگرا، به مجموع حد دو سری میل می‌کند، داریم:

$$|x-a| < \rho \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x-a)^n = f(x) + g(x) \qquad (10)$$

برای به‌دست آوردن یک سری توانی که به $f(x)g(x)$ میل کند به طریق زیر عمل می‌کنیم. توجه کنید که برای اینکه حاصل‌ضرب دو جملهٔ سری‌های توانی داده شده از درجهٔ n باشد لازم و کافی است که مجموع اندیس‌های ضرایب برابر n شود. تعریف می‌کنیم:

$$c_0 = a_0b_0, c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 \qquad (11)$$

سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ را حاصل‌ضرب کوشی دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ می‌نامند.

(۳−۳۵) گزاره. برای $|x-a| < \rho$، که $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$، حاصل‌ضرب کوشی به $f(x)g(x)$ همگراست.

برهان. داریم $|c_n| \le |a_0||b_n| + \cdots + |a_n||b_0|$، پس:

$$|c_0| + |c_1||x-a| + \cdots + |c_n||x-a|^n \le (|a_0| + \cdots + |a_n||x-a|^n)(|b_0| + \cdots + |b_n||x-a|^n)$$

از طرفی دیگر سری‌های $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ به‌ازای $|x-a| < \rho$ همگرای مطلق هستند. پس طرف راست نامساوی بالا کراندار است. نتیجه اینکه مجموع‌های جزیی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ نیز به طور مطلق همگرا هستند. بنابراین می‌توان مجموع جملات $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ را جابجا کرد بدون اینکه در مجموع تغییری حاصل شود. $\square$

می‌توان ثابت کرد که اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ در $|x-a| < \rho_1$ و $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ در $|x-a| < \rho_2$، و $g(x) \neq 0$ به‌ازای هر x در $|x-a| < \rho_2$، آنگاه $\rho > 0$ وجود دارد که $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$ در $|x-a| < \rho$ تحلیلی است. در این صورت با نوشتن $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ و با استفاده از حاصل‌ضرب کوشی، می‌توان با مقایسهٔ ضرایب دو طرف $f(x) = g(x)h(x)$، ضرایب c_n را محاسبه کرد. این مطلب را با یک مثال نشان می‌دهیم.

مثال. فرض کنید می‌دانیم $\tan x$ در $a = 0$ تحلیلی است، چند ضریب اول سری تیلور آن را در $a = 0$ محاسبه کنید. محاسبهٔ مستقیم از طریق مشتق‌گیری و محاسبهٔ ضرایب $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ به سرعت افزایش n پیچیده می‌شود. به جای آن می‌نویسیم

$$\sin x = (\cos x)(\tan x)$$

پس اگر $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ بسط تیلور $\tan x$ در $a = 0$ باشد داریم:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots)(t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \cdots)$$

با محاسبهٔ حاصل‌ضرب کوشی طرف راست و برابر قرار دادن ضرایب آن با ضرایب متناظر طرف چپ داریم:

$$\begin{aligned}
0 &= t_0 \\
1 &= t_1 \\
0 &= t_2 - \tfrac{1}{2}t_0 \\
-\tfrac{1}{6} &= t_3 - \tfrac{1}{2}t_1 \\
0 &= t_4 - \tfrac{1}{2}t_2 - \tfrac{1}{24}t_0 \\
\tfrac{1}{120} &= t_5 - \tfrac{1}{2}t_3 - \tfrac{1}{24}t_1 \\
\vdots & \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

می‌توان این دستگاه را از بالا به پایین حل کرد و متوالیاً ضرایب t_n را به‌دست آورد:

$$t_0 = 0 \, , \, t_1 = 1 \, , \, t_2 = 0 \, , \, t_3 = \frac{1}{3} \, , \, t_4 = 0 \, , \, t_5 = \frac{2}{15} \, , \, \cdots$$

توجه کنید که چون $\tan x$ یک تابع فرد است، مشتقات آن از مرتبهٔ زوج همه فرد هستند و در $a = 0$ برابر صفر می‌شوند، بنابراین در سری تیلور $\tan x$ در $a = 0$ فقط جملات درجهٔ فرد ظاهر می‌شوند. در بالا ضرایب را تا درجهٔ ۵ محاسبه کردیم:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \tag{۱۲}$$

(۴—۳۵) محاسبهٔ حد به کمک سری تیلور

بسیاری از محاسبات حدی که در مباحث مقدماتی از طریق استفادهٔ مکرر از روش‌هایی مانند قاعدهٔ هوپیتال حل می‌شوند می‌توان به سادگی با توجه به سری تیلور انجام داد. به مثال زیر توجه کنید

مثال. می‌خواهیم $\lim_{x\to 0} \frac{x^6\cos x - x^5\sin x}{x^8}$ را محاسبه کنیم. محاسبه این حد از طریق قاعدهٔ هوپیتال هشت بار مشتق‌گیری می‌طلبد ولی توجه کنید که:

$$\begin{aligned} x^6\cos x - x^5\sin x &= x^6(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots) - x^5(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots) \\ &= (-\frac{1}{2} + \frac{1}{6})x^8 + (\text{جملات توان } 10 \text{ در } x \text{ به بالا}) \end{aligned}$$

بنابراین برای $x \neq 0$ داریم:

$$\frac{x^6\cos x - x^5\sin x}{x^8} = (-\frac{1}{3}) + (\text{جملات توان } 2 \text{ در } x \text{ به بالا})$$

بنابراین حد عبارت بالا وقتی x به 0 میل کند برابر $-\frac{1}{3}$ است.

سری فوریه

تا این مرحله با چندجمله‌ای‌های تیلور به عنوان حربهٔ تقریب توابع و سری تیلور به عنوان روش نمایشی برای خانوادهٔ بزرگی از توابع آشنایی پیدا کرده‌ایم. هر یک از این دو، از مجموع عناصر ساختی $(x-a)^n$ با ضرایب مناسب تشکیل شده‌اند. یک خصوصیت مهم تقریب به وسیلهٔ چندجمله‌ای تیلور "موضعی" بودن آن است بدین معنی که هرچه x به a نزدیک‌تر باشد، تقریب دقیق‌تر است و با دور شدن x از a باید معمولاً تعداد جملات را به شدت افزایش داد تا تقریب معقولی حاصل شود. روش‌های تقریب و روش‌های نمایش دیگری نیز برای توابع موجود است که در اینجا به مهمترین آنها موسوم به چندجمله‌ای فوریه و سری فوریه می‌پردازیم. دو ویژگی متمایزکنندهٔ این روش در مقابل روش چندجمله‌ای و سری تیلور به این شرح‌اند:

یکی اینکه تقریب به وسیله چندجمله‌ای‌های فوریه به نوعی سرتاسری است یعنی معمولاً هیچ نقطهٔ خاصی از دامنه، "مرکز تقریب" نیست، بلکه فاصلهٔ عمومی بین نمودار تابع و نمودار تقریب به مفهومی که ذکر خواهد شد کوچک می‌شود، و نکته دوم اینکه این روش حربهٔ مهمی برای بررسی پدیده‌های تناوبی و تقریباً تناوبی مانند پدیده‌های موجی است.

فرض کنید $T > 0$ داده شده است، قرار می‌دهیم $\omega = \frac{2\pi}{T}$. تابع‌های $\sin m\omega x$ و $\cos m\omega x$، m: عدد صحیح، همه دورهٔ تناوب T دارند. اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع با دورهٔ تناوب T باشد، هدف ما نمایش f به صورت یک سری با عناصر ساختی $\sin m\omega x$ و $\cos m\omega x$. مقصود از یک سری مثلثاتی با دورهٔ تناوب T، عبارتی به شکل زیر است:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega x + b_m \sin m\omega x) \qquad (1)$$

جملهٔ ثابت را به جای a_0 به $\frac{a_0}{2}$ نمایش داده‌ایم که بعداً هماهنگی کاملی در فرمول محاسبهٔ a_m ها ایجاد شود. فرض کنید بتوان مقدار تابع f را به صورت مجموع بالا نمایش داد:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega x + b_m \sin m\omega x) \tag{۲}$$

سعی می‌کنیم با یک "بحث اکتشافی" رابطهٔ a_m ها و b_m ها را با f مشخص کنیم. از فرمول‌های انتگرالی زیر که به سادگی از فرمول‌های مثلثاتی حاصل‌ضرب سینوس با سینوس، سینوس با کسینوس و کسینوس با کسینوس نتیجه می‌شوند استفاده خواهیم کرد:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos m\omega x)(\sin n\omega x)dx = 0 \tag{۳}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos m\omega x)(\cos n\omega x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases} \tag{۴}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sin m\omega x)(\cos n\omega x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases} \tag{۵}$$

توجه کنید که اگر به‌جای بازهٔ انتگرال‌گیری $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ از هر بازهٔ دیگر به طول دورهٔ تناوب، مثلاً $[0, T]$، نیز استفاده کنیم همان نتایج (۳)، (۴) و (۵) به‌دست می‌آیند. استفاده از بازهٔ متقارن $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ این حسن را دارد که در موارد خاص که بعداً به تابع‌های فرد یا زوج برمی‌خوریم بعضاً انتگرال‌گیری ساده‌تر می‌شود. همچنین توجه کنید که داریم:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos m\omega x dx = 0 \quad , \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin m\omega x dx = 0 \tag{۶}$$

محاسبهٔ a_m ها و b_m ها را اکنون بدین طریق پیش می‌بریم. نخست از دو طرف (۲) روی بازهٔ $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{a_0}{2}T + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)dx$$

در طرف راست بالا انتگرال مجموع یک سری مطرح است. همان طور که قبلاً در بحث سری‌های تیلور بحث شد، به طور کلی نمی‌توان نوشت $\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$ ولی در اینجا چون فقط یک بحث اکتشافی را دنبال می‌کنیم، این جابجایی انتگرال و مجموع نامتناهی را انجام می‌دهیم. نهایتاً قضیه‌ای ذکر خواهیم کرد که نتیجهٔ به‌دست آمده را توجیه می‌کند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{a_0}{2}T + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega x + b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega x)dx)$$

طبق (۶) مقدار هر یک از انتگرال‌های سمت راست صفر است، پس:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \qquad (۷)$$

چون طول بازهٔ $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ برابر T است، اگر این محاسبه توجیه‌پذیر باشد، نتیجه گرفته‌ایم که جملهٔ ثابت یعنی $\frac{a_0}{2}$، برابر میانگین تابع f در یک دوره تناوب است. این نتیجه را با مقدار جملهٔ ثابت سری تیلور مقایسه می‌کنیم. درمورد سری تیلور $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$، جملهٔ ثابت، یعنی a_0 برابر $f(a)$ است. تمایز بین سری تیلور و سری فوریه در همین گام آشکار می‌شود. در مورد سری تیلور، a_0 به عنوان تقریب درجه ۰ تابع، فقط به مقدار تابع در نقطهٔ a توجه دارد، در حالی که در مورد سری فوریه، جملهٔ ثابت میانگین همهٔ مقادیر تابع در یک بازهٔ به طول T (دورهٔ تناوب f) می‌باشد.

با همین روش به مقادیری آزمایشی برای سایر ضرایب دست می‌یابیم. اگر برای $n > 0$ ثابت، دو طرف (۲) را در $\cos n\omega x$ ضرب کرده و روی $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ از دو طرف انتگرال بگیریم، مجدداً با جابجایی انتگرال و $\sum_{m=1}^{\infty}$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega x dx + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos m\omega x)(\cos n\omega x)dx) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}(b_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sin m\omega x)(\cos n\omega x)dx)\end{aligned}$$

با توجه به فرمول‌های (۳)، (۴) و (۶) نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x dx = a_n \cdot \frac{T}{2}$$

یا معادلاً

$$a_n = \frac{۲}{T}\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(x)\cos n\omega x dx \tag{۸}$$

توجه کنید که (۷) حالت خاص (۸) به‌ازای $n = ۰$ است. به این دلیل بود که جمله ثابت را به $\frac{a_۰}{۲}$ نمایش دادیم. همین طور اگر دو طرف (۲) را در $\sin n\omega x$ ضرب کرده و روی $[-\frac{T}{۲}, \frac{T}{۲}]$ انتگرال‌گیری کنیم، با جابجایی مشابه و با استفاده از فرمول‌های (۳)، (۵) و (٦)، نتیجه می‌گیریم که

$$b_n = \frac{۲}{T}\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(x)\sin n\omega x dx \tag{۹}$$

قضیه‌ای در زیر خواهیم آورد، که اثبات آن از بحث ما خارج است، ولی تحت شرایط مناسب صحت فرمول‌های (۸) و (۹) را توجیه می‌کند. تابع $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ را قطعه قطعه $C^۱$ می‌نامیم در صورتی که شرط زیر برقرار باشد: افرازی $a = a_۰ < a_۱ < \cdots < a_k = b$ وجود دارد که تحدید f به هر $]a_{i-۱}, a_i[$ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است و به علاوه در هر a_i، تابع f و مشتق آن، تابع f'، دارای حد چپ و راست هستند (در نقطهٔ $a = a_۰$ فقط حد راست، و در نقطهٔ $b = a_k$، فقط حد چپ مطرح است).

(۳٦–۱) قضیه. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تناوبی با دورهٔ تناوب T و در بازهٔ تناوب خود قطعه قطعه $C^۱$ است و $\omega = \frac{۲\pi}{T}$ در این صورت سری:

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

که در آن a_n و b_n طبق فرمول‌های (۸) و (۹) تعریف شده‌اند دارای ویژگی زیر است.

الف) در هر نقطهٔ x که تابع f پیوسته باشد، مجموع سری بالا برابر $f(x)$ است.

ب) در هر نقطهٔ ناپیوستگی x برای تابع f، مجموع سری بالا برابر میانگین حد چپ و راست تابع f است. ⌐

سری بالا را سری فوریهٔ تابع f می‌نامد. مجموع متناهی

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{N}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \tag{۱۰}$$

تقریب فوریهٔ مرتبهٔ N تابع f خوانده می‌شود.

(۳۶–۲) چند مثال

(۳۶–۲–۱) تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & (2k-1)\pi < x < 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

در هر $x = m\pi$، $m \in \mathbb{Z}$، مقدار $f(x)$ را برابر مقدار ثابت دلخواهی c قرار می‌دهیم. این مقدار اثری بر بحث نخواهد داشت. این تابع تناوبی با دورهٔ 2π است و در شکل ۱ نمایش داده شده است:

?

در این مثال داریم $T = 2\pi$ و $\omega = 1$. نقاط ناپیوستگی f و f' مضارب π هستند (f' در این نقاط تعریف نشده است). ضرایب a_n و b_n را از (۸) و (۹) محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx dx = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

و

$$\begin{aligned} b_n &= \tfrac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \tfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx = -\tfrac{1}{n\pi}\cos nx|_{0}^{\pi} \\ &= -\tfrac{1}{n\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین سری فوریه تابع f بدین صورت است:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots)$$

توجه کنید که هر یک از تابع‌های تشکیل‌دهندهٔ سری بالا پیوسته (در واقع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر) است ولی مجموع سری در بعضی نقاط پیوسته نیست! طبق قضیه در هر نقطهٔ $x \neq n\pi$، مجموع سری بالا برابر ۱ یا ۰ است (بسته به این که انتهای چپ باره مضرب زوج یا فرد π باشد) و در $x = n\pi$ برابر میانگین حد راست و چپ، یعنی $\frac{1}{2}$ می‌باشد. مطلب اخیر را می‌توان با توجه به اینکه $\sin n\pi = 0$ مستقیماً مشاهده کرد. اینکه چگونه مجموع بالا به یک تابع ناپیوستهٔ پله‌ای میل می‌کند می‌توان با رسم

تقریب‌های فوریهٔ متوالی f مشاهده کرد (شکل ۲).

?

(۳۶−۲−۲) تابع $\phi : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $\phi(x) = |x|$ در نظر می‌گیریم و آن را به طور تناوبی با دورهٔ تناوب ۲ به تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ادامه می‌دهیم (شکل ۳).

?

در اینجا $T = 2$ و $\omega = \pi$. تابع f زوج است، پس برای هر n، $f(x)\sin n\pi x$ فرد است و انتگرال آن روی بازهٔ $[-1, 1]$ برابر صفر می‌شود، پس $b_n = 0$ برای هر n. برای محاسبهٔ a_n ها داریم:

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} |x|\cos n\pi x dx = 2\int_{0}^{1} x\cos n\pi x dx$$

برای $n = 0$، داریم $a_0 = 1$، برای $n > 0$ از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\cos n\pi x dx &= \tfrac{1}{n\pi} x\sin n\pi x|_0^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{n\pi}\sin n\pi x dx \\
&= \tfrac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x|_0^1 \\
&= \tfrac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{زوج } n > 0 \\ -\frac{2}{n^2\pi^2} & \text{فرد } n \end{cases}
\end{aligned}$$

بنابراین سری فوریه به شکل زیر است:

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots)$$

چون این تابع پیوسته است، مجموع سری بالا همه جا برابر $f(x)$ است. بالاخص در $x = 0$ داریم:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots)$$

یا

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \qquad (11)$$

تمرین. از (۱۱) نتیجه بگیرید که $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و $\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

همان طور که در مثال بالا مشاهده کردیم اگر تابع f زوج باشد همهٔ ضرایب b_n صفر هستند. به همین ترتیب برای تابع فرد، همهٔ ضرایب a_n صفر می‌شوند. مقصود از یک سری فوریه کسینوسی سری فوریه‌ای است که همه b_n های آن صفر باشند: و یک سری فوریهٔ سینوسی، سری فوریه‌ای است که در آن $a_n=0$ برای هر n.

بحث ما تا این لحظه ممکن است این تصور را القاء کرده باشد که کاربرد سری فوریه فقط در مورد تابع‌های تناوبی است. در واقع اگر $\phi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی قطعه قطعه C^1 باشد، می‌توان سری فوریه را در مورد آن به‌کار برد. شیوهٔ عمل این است که ϕ را بیرون $[a,b]$ به طور تناوبی ادامه می‌دهیم تا تابعی تناوبی $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به‌دست آید و f را به صورت مجموع یک سری فوریه می‌نویسیم. اگر دامنهٔ این سری به $[a,b]$ محدود شود مجموع آن به صورت حکم قضیهٔ (۳۶–۱) نمایش ϕ است. در واقع ϕ را می‌توان به شیوه‌های گوناگون به طور تناوبی ادامه داد. به عنوان مثال:

(۳۶–۳) سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی $\phi:[0,A]\longrightarrow\mathbb{R}$:

فرض کنید ϕ روی $[0,A]$ قطعه قطعه C^1 باشد. اگر برای $x\in[-A,0]$ تعریف کنیم

$$\phi(x)=\phi(-x) \tag{۱۲}$$

تابعی زوج روی $[-A,A]$ به‌دست می‌آید. این تابع را با دورهٔ تناوب $T=2A$ روی $\mathbb{R}$ ادامه می‌دهیم و تابع حاصل را f می‌نامیم. f تابعی زوج است و دارای ضرایب فوریهٔ زیر می‌باشد:

$$b_n=0 \quad , \quad a_n=\frac{2}{A}\int_0^A\phi(x)\cos\frac{\pi}{A}nx\,dx \tag{۱۳}$$

سری فوریهٔ حاصل شده در $[0,A]$ نمایش ϕ است (با منظور کردن میانگین حدهای راست و چپ در نقاط ناپیوستگی).

به همین ترتیب، اگر به جای (۱۲)، تداوم ϕ به $[-A,0]$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\phi(x)=-\phi(-x) \tag{۱۴}$$

و مقدار ϕ را در ۰ نادیده بگیریم (که به هر حال اثری بر مقادیر انتگرال ندارد) ما ادامه ϕ با دورهٔ تناوب $T = ۲A$ به سرتاسر $\mathbb{R}$ یک تابع فرد به‌دست می‌آید. برای ضرایب فوریه داریم:

$$a_n = ۰ \quad , \quad b_n = \frac{۲}{A}\int_۰^A \phi(x)\sin\frac{\pi}{A}nx\,dx \qquad (۱۵)$$

سری فوریهٔ با این ضرایب در $[۰, A]$ نمایش ϕ است (البته در مضارب A، مجموع سری فوریه برابر صفر می‌شود. چرا؟). تمرین. برای $\sin x$ یک سری فوریهٔ کسینوسی روی $[۰, \pi]$ بنویسید و برای $\cos x$، یک سری فوریهٔ سینوسی روی $[۰, \pi]$.

در آغاز اشاره کردیم به این که چندجمله‌ای‌های فوریه نوعی تقریب سرتاسری برای تابع ارائه می‌کنند. در این زمینه قضایای متعددی وجود دارد که یکی از ساده‌ترین آنها را ذکر می‌کنیم. مجموع متناهی (۱۰) را به ϕ_N نمایش دهید. تحت شرایط قایل شده در قضیهٔ (۳۶ ۱) برای تابع f، می‌توان ثابت کرد که:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} |f(x) - \phi_N(x)|^۲ dx\right) = ۰ \qquad (۱۶)$$

این مطلب گویای این واقعیت است که در یک دورهٔ تناوب، مساحت بین نمودار f و نمودار تقریب‌های فوریهٔ آن به تدریج کوچکتر شده و به صفر میل می‌کند.

دنبالهٔ عددی و سری عددی (۱)

وقتی در جلسات اول مفهوم عدد حقیقی را مطرح کردیم، اشاره داشتیم به اینکه عملیات جبری را می‌توان همانند عملیاتی که برای اعداد گویا مطرح می‌شود به همهٔ اعداد حقیقی تعمیم داد. در واقع اگر چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را به صورت هندسی مطرح کنیم هیچ تفاوتی میان اعداد گویا و ناگویا مشاهده نمی‌شود. در شکل ۱ این چهار عمل نمایش داده شده‌اند. فرض کنید دو عدد حقیقی مثبت a و b داده شده‌اند. نقاط A و B در سمت راست محور حقیقی را طوری می‌گیریم که پاره‌خط‌های OA و OB طول‌های به ترتیب a و b داشته باشند. حال اگر دهانهٔ پرگاری را به اندازه OA باز کنیم و به مرکز B و این شعاع دایره‌ای رسم کنیم، نقطهٔ تقاطع دایره در سمت راست نقطهٔ B، یعنی نقطهٔ C، عدد $a-b$ را نمایش می‌دهد (یعنی طول پاره‌خط OC برابر $a-b$ است) و نقطهٔ تقاطع در سمت چپ B، یعنی نقطهٔ D، نمایشگر عدد $a-b$ است. برای عمل ضرب دو نیم‌خط از O رسم می‌کنیم. روی یک نیم‌خط نقاط U و B را طوری می‌گیریم که طول OU برابر واحد و طول OB برابر b باشد. روی نیم‌خط دیگر نقطهٔ A به نحوی اختیار می‌کنیم که طول OA برابر a باشد. حال اگر خط راستی از B به موازات UA رسم کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط دیگر، یعنی C طوری است که طول OC برابر ab است (بنابر تشابه مثلث‌ها). برای ترسیم نسبت $\frac{a}{b}$ کافی است بدانیم چگونه باید $\frac{1}{b}$ را رسم کنیم. روی دو نیم‌خط متقاطع در O، نقاط U و V را طوری بگیرید که OU و OV هر دو طول واحد داشته باشند. نقطهٔ B را روی نیم‌خط OU طوری می‌گیریم که طول OB برابر b باشد. در این صورت خطی که از U به موازات BV رسم شود خط دیگر را در نقطه‌ای B' قطع می‌کند که فاصله‌اش از O برابر $\frac{1}{b}$ است (مجدداً تشابه). روش معمول دیگری این است که دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز O رسم

می‌کنیم. روی نیم‌خطی ساطع از O، نقطهٔ B را طوری می‌گیریم که طول OB برابر b باشد. نخست فرض کنید $b > 1$، پس B خارج دایره باشد. در این صورت از B مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و از نقطهٔ تماس بر OB عمود می‌کنیم. فاصلهٔ پای عمود، B'، از O برابر $\frac{1}{b}$ است (مجدداً تشابه مثلث‌ها). برای $b < 1$، با مراجعه به همان شکل معکوس فرایند بالا را در نظر می‌گیریم.

هرگاه یکی یا هر دوی a و b منفی باشند، می‌توان با قرینه‌گیری مناسب کماکان از روش‌های بالا استفاده کرد. این نیز قابل ذکر است که هرگاه پاره‌خط‌هایی به طول a و b داده شده باشند، ترسیمات هندسی فوق به کمک پرگار و خط‌کش غیرمدرج قابل اجرا هستند.

حال می‌خواهیم چهار عمل اصلی را به صورت حسابی یا جبری توصیف کنیم. فرض کنید $a = a_0/a_1a_2a_3\ldots$ و $b = b_0/b_1b_2b_3\ldots$ دو عدد مثبت باشند. چگونه باید $a+b$ را محاسبه کرد؟ اگر بسط اعشاری a و b مختومه باشند روش محاسبهٔ $a - b$ را در دبستان آموخته‌ایم. به طور کلی اگر a و b گویا باشند، آنها را به صورت $a = \frac{m}{n}$ و $b = \frac{m'}{n'}$ می‌نویسیم؛ که در اینجا m, n, m', n' عدد صحیح مثبت هستند؛ و داریم $a - b = \frac{mn'+n'm}{nn'}$. مشکل وقتی است که a و b ناگویا باشند. روشن است که الگوریتم دبستانی جمع اعشاری از سمت راست در اینجا جوابگو نیست زیرا که در سمت راست این اعداد مختومه نمی‌شوند و نقطهٔ شروعی وجود ندارد.

$$\begin{array}{cccccc} & a_0 & / & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ + & b_0 & / & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ \hline & & & ? & & & \end{array}$$

ولی می‌توان یک راه تقریب عملی به صورت زیر ارائه کرد. اگر هر یک از دو عدد بالا رقم پس از n رقم اعشار مختومه کنیم عددهای $a' = a_0/a_1\ldots a_n$ و $b' = b_0/b_1\ldots b_n$ به‌دست می‌آیند که تقریب‌های a و b هر یک با خطای کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{10^n}$ هستند. حال اگر a' و b' را به طریق عادی جمع کنیم حاصل حداکثر $2 \times \frac{1}{10^n}$ با مجموع $a+b$ فاصله دارد. با بزرگ گرفتن n می‌توان $\frac{2}{10^n}$، یعنی حداکثر خطای حاصل جمع، را به دلخواه کوچک کرد. اکنون می‌توان به سادگی نشان داد که $a+b$ در واقع کوچکترین کران بالایی این تقریب‌هاست. در مورد حاصلضرب و خارج‌قسمت (به فرض مخرج $\neq 0$) می‌توان به روش مشابهی از کسرهای مختومه برای تقریب استفاده کرد ولی در این دو مورد اگر $|a - a'| \leq \frac{1}{10^n}$ و $|b - b'| \leq \frac{1}{10^n}$، تحمین خطای حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت، یعنی $|ab - a'b'|$ و

$|\frac{x}{y}-\frac{p}{q}|$ به این سادگی نیست. در زیر مفهومی کارساز و کلی‌تر، زیر عنوان "همگرایی دنباله" مطرح می‌کنیم که در برگیرنده همهٔ این موارد است و کاربردهای فراوان دیگری نیز خواهد داشت.

مقصودمان از یک قطعه از اعداد صحیح مجموعه‌ای به شکل زیر متشکل از اعداد صحیح است:

$$\{k, k+۱, k+۲, \dots\}$$

یعنی قطعه شامل همهٔ اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی k است. اگر S یک قطعه از اعداد صحیح باشد و E یک مجموعه، هر تابع $a : S \longrightarrow E$ را یک دنباله (در E) می‌نامند. بدین ترتیب a به هر عضو n از S، عنصری $a(n)$ از E نسبت می‌دهد. معمولاً به جای $a(n)$ می‌نویسیم a_n و تصویر تابع a را به ترتیب صعودی ردیف می‌کنیم:

$$a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, \dots \qquad (۱)$$

نماد $(a_i)_{i=k}^{\infty}$ نیز برای نمایش دنباله به‌کار می‌رود. بدین ترتیب معمولاً به جای اینکه دنباله را یک تابع از S به E تلقی کنیم، دنباله را مجموعه‌ای از عناصر E تلقی می‌کنیم که به ترتیب از k شماره‌گذاری شده است. ضمناً لزومی ندارد که a_i ها، به عنوان اعضای E، متمایز باشند، یا به زبان تابعی، تابع a لزوماً یک به یک فرض نمی‌شود.

(۶—۱) چند مثال

(۶—۱—۱) دنباله $a : \{۱, ۲, ۳, \dots\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_n = \frac{۱}{n}$$

این یک دنباله از اعداد حقیقی است که به سوی نقطهٔ ۰ تجمع می‌کند.

(۶—۱—۲) دنباله $a : \{۱, ۲, ۳, \dots\} \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت

$$a_n = n + \frac{۱}{n}$$

تعریف می‌شود دنباله‌ای دیگر از اعداد حقیقی است که با افزایش اندیس n به تدریج بزرگتر می‌شود و هیچ‌جا تجمع نمی‌کند.

(٦—۱—۳) دنباله $a : \{۱, ۲, ۳, \dots\} \longrightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a_n = \frac{i^n}{n}$$

چند جملهٔ اول این دنباله عبارتند از:

$$i, \frac{-۱}{۲}, \frac{-i}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{i}{۵}, \frac{-۱}{٦}, \dots$$

این اعداد به صورت چرخشی چهار نیم محور صفحه را متناوباً سیر می‌کنند و به سوی ۰ تجمع می‌کنند (شکل ۲).

(٦—۱—۴) $\mathcal{L}$ را مجموعهٔ خطوط راست در صفحه می‌گیریم و تابع $l : \{۰, ۱, ۲, \dots\} \longrightarrow \mathcal{L}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $l(n)$ یا l_n خط راست گذرا از ۰ با شیب n است، یعنی خط راست $y = nx$ (شکل ۳). این یک دنبالهٔ خطوط راست است که به سوی محور y میل می‌کند.

(٦—۱—۵) $\mathcal{F}$ را مجموعهٔ تابع‌های از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ می‌گیریم و تابع $c : \{۱, ۲, \dots\} \longrightarrow \mathcal{F}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $c(n)$ تابع $\cos nx$ است (شکل ۴). هر c_n یک تابع تناوبی است با دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{n}$.

در این مرحله ما فقط به دنباله‌های عددی می‌پردازیم یعنی دنباله‌های $a : S \longrightarrow E$ که در آن E معمولاً $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ است. بحث کلی را برای دنباله‌های اعداد مختلط می‌نویسیم و از آنجا که $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ تلقی می‌شود، می‌توان دنباله‌های اعداد حقیقی را نیز به عنوان دنباله‌هایی از اعداد مختلط در نظر گرفت. در بعضی مثال‌ها مانند (٦—۱—۱) و (٦—۱—۳) می‌بینیم که با افزایش اندیس n، اعضای دنباله به نقطهٔ خاصی نزدیک می‌شوند. اگر دقت دید یا تشخیص دستگاه‌های مشاهده مثلاً $\epsilon > ۰$ باشد، آنگاه اگر اعضای دنباله در فاصله‌ای کوچکتر از ϵ نسبت به نقطهٔ تجمع قرار گیرند، آنگاه نمی‌توان آنها را از نقطهٔ تجمع تمیز داد، انگار که دنباله به حالت سکون رسیده است. این مفهوم را "همگرایی" می‌نامیم و به شکل دقیق زیر تعریف می‌کنیم:

(٦—۲) **تعریف.** دنبالهٔ $a : S \longrightarrow \mathbb{C}$ را به نقطهٔ a^* همگرا می‌نامیم یا می‌گوییم a_n به a^* میل می‌کند، (و می‌نویسیم $a_n \longrightarrow a^*$ یا $\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$)

در صورتی که برای هر $\epsilon > 0$، عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد که هرگاه $n \geq N$، آنگاه $|a_n - a^*| < \epsilon$.

توجه کنید که طبق این تعریف، هر درجهٔ تشخیص $\epsilon > 0$ که منظور شود، قرار است مرحله‌ای N، علی‌الاصول وابسته به ϵ، وجود داشته باشد که از آن مرحله به بعد، a_n ها از a^* غیر قابل تشخیص باشند.

(۶—۳) چند مثال

(۶—۳—۱) به مثال ۶—۱—۱ توجه کنید. در اینجا داریم $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ زیرا که اگر $\epsilon > 0$ منظور شود، با گرفتن عدد صحیح N بزرگتر از $\frac{1}{\epsilon}$، یعنی $\frac{1}{N} < \epsilon$، داریم: هرگاه $n \geq N$ آنگاه:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

(۶—۳—۲) در مثال ۶—۳—۳، دنباله به ۰ همگراست زیرا که برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، اگر مجدداً N را بزرگتر از $\frac{1}{\epsilon}$ می‌گیریم. برای $n > N$ داریم:

$$\left|\frac{i^n}{n} - 0\right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

(۶—۳—۳) فرض کنید $c = c_0/c_1c_2c_3\ldots$ یک عدد مثبت به صورت بسط اعشاری باشد. دنباله C_n را به صورت بسط‌های مختومهٔ این عدد تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$C_0 = c_0 \quad , \quad C_1 = c_0/c_1 \quad , \quad C_2 = c_0/c_1c_2 \quad , \quad \ldots$$

ادعا می‌کنیم $C_n \longrightarrow c$. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. عدد N را طوری می‌گیریم که $\frac{1}{10^N} < \epsilon$. برای $n \geq N$ داریم:

$$|c - C_n| = 0/0\ldots 0c_{n+1}c_{n+2}\cdots \leq \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^N} < \epsilon$$

(۶—۳—۴) مثال فوق را می‌توان بدین صورت تعمیم داد. فرض کنید $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ و مجموعهٔ $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ دارای کران بالایی باشد.

نشان می‌دهیم a_n به کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ فوق میل می‌کند. نخست می‌دانیم که طبق اصل تمامیت برای مجموعهٔ $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ کوچکترین کران بالایی a^* وجود دارد. حال هر $\epsilon > 0$ که منظور شود، به بازه $]a^* - \epsilon, a^* + \epsilon[$ نگاه می‌کنیم. اگر هیچ a_N در این بازه قرار نگیرد، از آنجا که a^* یک کران بالایی برای مجموعهٔ a_n هاست، باید داشته باشیم $a_n < a^* - \epsilon$ برای هر n. بنابراین هر عدد بین $a^* - \epsilon$ و a^* یک کران بالایی برای مجموعه، کوچکتر از a^*، خواهد بود که خلاف این فرض است که a^* کوچکترین کران بالایی برای $\{a_0, a_1, \ldots\}$ می‌باشد. پس N وجود دارد که a_N در $]a^* - \epsilon, a^* + \epsilon[$ قرار می‌گیرد. البته $a^* - \epsilon < a_N \leq a^*$. از آنجا که دنبالهٔ (a_n) غیرنزولی است و هر a_n باید کوچکتر از کران بالایی a^* یا مساوی آن باشد، برای هر $n \geq N$ داریم:

$$a^* - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a^*$$

بنابراین برای هر $n \geq N$، نامساوی $|a_n - a^*| < \epsilon$ برقرار است.

اکنون به مسألهای که در آغاز این بخش مطرح شد باز می‌گردیم: یعنی روش محاسبه مجموع، حاصلضرب و خارج‌قسمت اعداد حقیقی با تقریب محتومه ساختن را بررسی می‌کنیم. گزاره زیر در واقع کلی‌تر از این نیاز خاص است و بعداً موارد استفاده بسیار دیگری نیز خواهد داشت.

(۶–۴) **گزاره.** فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=k}^{\infty}$ دو دنبالهٔ اعداد مختلط باشند که $a_n \longrightarrow a^*$ و $b_n \longrightarrow b^*$. در این صورت:

الف) اگر دنبالهٔ $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = a_n - b_n$ تعریف کنیم، داریم $c_n \longrightarrow a^* + b^*$.

ب) اگر دنبالهٔ $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = a_n \cdot b_n$ تعریف کنیم، داریم $c_n \longrightarrow a^* \cdot b^*$.

ج) اگر مضافاً فرض کنیم $b_n \neq 0$ برای هر n و $b^* \neq 0$ و دنبالهٔ $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ تعریف کنیم، داریم $c_n \longrightarrow \frac{a^*}{b^*}$.

اثبات. (الف) فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد، N را طوری جستجو می‌کنیم که $n \geq N$ نتیجه دهد $|(a_n - b_n) - (a^* + b^*)| < \epsilon$. اگر بتوانیم N را طوری تأمین کنیم که $|a_n - a^*| < \frac{\epsilon}{2}$ و

$|b_n - b^*| < \frac{\epsilon}{2}$ هر دو بهازای $n \geq N$ برقرار شوند. بنابر نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a^* + b^*)| &= |(a_n - a^*) + (b_n - b^*)| \\ &< |a_n - a^*| - |b_n - b^*| \\ &< \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

ولی از آنجا که $a_n \longrightarrow a^*$، برای $\frac{\epsilon}{2} > 0$، عددی N_1 وجود دارد که $n \geq N_1$ نتیجه می‌دهد که $|a_n - a^*| < \frac{\epsilon}{2}$؛ و نیز از آنجا که $b_n \longrightarrow b^*$، برای $\frac{\epsilon}{2} > 0$، عددی N_2 وجود دارد که $n \geq N_2$ نتیجه می‌دهد $|b_n - b^*| < \frac{\epsilon}{2}$. پس با گرفتن $N = \max\{N_1, N_2\}$، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(ب) در اینجا نیز برای $\epsilon > 0$ داده شده، N را طوری جستجو می‌کنیم که $n \geq N$ نتیجه دهد $|a_n b_n - a^* b^*| < \epsilon$. در اینجا مرتبط ساختن $|a_n b_n - a^* b^*|$ با دو کمیت $|a_n - a^*|$ و $|b_n - b^*|$ به سادگی قسمت (الف) نیست، مثلاً حاصل‌ضرب $(a_n - a^*)(b_n - b^*)$ برابر است با $a_n b_n - a_n b^* - a^* b_n - a^* b^*$ که در آن دو جملهٔ زاید وجود دارد و به جای تفاضل $a_n b_n - a^* b^*$، مجموع این دو جمله ظاهر می‌شود. از حکم کمکی زیر استفاده می‌کنیم:

(۶—۵) لم. هرگاه (c_n) دنباله‌ای همگرا از اعداد مختلط باشد و $c_n \longrightarrow c^*$، آنگاه عددی $K > 0$ وجود دارد که $|c^*| \leq K$ و $|c_n| \leq K$ برای هر n (یا به اصطلاح، هر دنباله همگرا کراندار است).

اثبات ۶—۵. حول c^* یک گوی به شعاع ۱ در نظر می‌گیریم. طبق تعریف همگرایی، عددی N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|c_n - c^*| < 1$. بنابراین برای $n \geq N$ داریم $|c_n| < |c^*| + 1$ زیرا که هر نقطهٔ داخل گوی شعاع ۱ حول c^* باید نزدیکتر از $|c^*| + 1$ از ۰ باشد. حال در بین تعداد متناهی عضو دنباله، قبل از مرحله N، که در بیرون گوی هستند، فاصلهٔ دورترین آنها به ۰ را به R نمایش می‌دهیم. در این صورت $K = \max\{R, |c^*| + 1\}$ عدد مورد نظر است. □

اکنون به اثبات قسمت (ب) از گزاره باز می‌گردیم. عبارت $a_n b_n - a^* b^*$ را به صورت $a_n b_n - a_n b^* - a_n b^* - a^* b^*$ می‌نویسیم. پس داریم:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a^* b^*| &\leq |a_n b_n - a_n b^*| + |a_n b^* - a^* b^*| \\ &\leq |a_n||b_n - b^*| + |b^*||a_n - a^*| \end{aligned}$$

حال طبق لم ۶—۵، کرانی K_1 برای دنبالهٔ (a_n) و a^* و نیز کرانی K_2 برای (b_n) و b^* وجود دارد.

پس:

$$|a_nb_n - a^*b^*| \le K_1|b_n - b^*| + K_2|a_n - a^*| \tag{۲}$$

از آنجا که $a_n \longrightarrow a^*$، برای $0 < \frac{\epsilon}{2K_2}$، عددی N_1 وجود دارد که برای $n \ge N_1$ داریم $|a_n - a^*| < \frac{\epsilon}{2K_2}$؛ و نیز $b_n \longrightarrow b^*$ نتیجه می‌دهد که $0 < \frac{\epsilon}{2K_1}$، N_2 وجود دارد که برای $n > N_2$ داریم $|b_n - b^*| < \frac{\epsilon}{2K_1}$. با گرفتن $N = \max\{N_1, N_2\}$، برای $n \ge N$ هر دو نامساوی برقرارند و نتیجه می‌شود که $|a_nb_n - a^*b^*| < \epsilon$.

(ج) برای اثبات $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a^*}{b^*}$ کافی است نشان دهیم $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b^*}$ و از حکم (ب) برای حاصل‌ضرب $\frac{1}{b_n} \cdot a_n$ استفاده کنیم. در اینجا نیز یک لم کمکی مشابه و معکوس لم قبلی مورد نیاز است:

(۶–۶) لم. هرگاه (b_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط ناصفر باشد که $b_n \longrightarrow b^*$ و $b^* \ne 0$، آنگاه عددی $k > 0$ وجود دارد که $|b^*| \ge k$ و $|b_n| \ge k$ برای هر n.

اثبات. نقطهٔ b^* در فاصلهٔ مثبت $|b^*|$ از ۰ قرار دارد. اگر گوی به شعاع $\frac{1}{2}|b^*|$ به مرکز b^* را در نظر بگیریم، چون $b_n \longrightarrow b^*$، N وجود دارد که برای $n > N$، $|b_n - b^*| < \frac{|b^*|}{2}$، پس $|b_n| > \frac{|b^*|}{2}$ برای $n > N$. برای تعداد متناهی عضو دنباله که ممکن است در خارج این گوی باشند، یعنی برای $n < N$، چون همه غیر صفر هستند، یکی کوچکترین فاصلهٔ مثبت ممکن از ۰ را دارد. این فاصله را به r نمایش می‌دهیم. حال $\min\{r, \frac{|b^*|}{2}\}$ عدد k مورد نظر است. □

به اثبات (ج) باز می‌گردیم، می‌خواهیم ثابت کنیم $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b^*}$. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b^*}\right| &= \frac{|b_n - b^*|}{|b_n||b^*|} \\ &\le \frac{|b_n - b^*|}{k^2} \quad \text{(طبق لم ۶–۶)} \end{aligned} \tag{۳}$$

حال چون $b_n \longrightarrow b^*$، برای $0 < \epsilon k^2$، وجود دارد N که $n > N$ نتیجه می‌دهد $|b_n - b^*| < \epsilon k^2$، پس برای $n > N$ داریم $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b^*}\right| < \epsilon$. □

بدین ترتیب، برای محاسبه حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت دو عدد $a = a_0/a_1a_2a_3\ldots$ و $b = b_0/b_1b_2b_3\ldots$ می‌توان از تقریب‌های مختومهٔ $a = a_0/a_1\ldots a_n$ و $b = b_0/b_1\ldots b_n$ استفاده کرد

و با افزایش n به مقدار واقعی $a \cdot b$ نزدیکتر شد. اما در مورد حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت تفاوت عمده‌ای با مجموع وجود دارد. در مورد مجموع دیدیم که اگر a و b هر یک پس از n رقم بعد از ممیز مختومه شوند، خطای مجموع از $\frac{۲}{۱۰^n}$ بیشتر نیست، مستقل از اینکه اعداد a و b چه باشند. در مورد حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت نمی‌توان احکام مشابهی صادر کرد بدین معنی که اگر $a = a_۰/a_۱\ldots a_n$ و $b = b_۰/b_۱\ldots b_n$ به عنوان تقریب‌های مختومهٔ a و b در نظر گرفته شوند، انحراف حاصل‌ضرب (و خارج‌قسمت، به ترتیب) این دو عدد از ab (و $\frac{a}{b}$، به ترتیب) فقط به n وابسته نیست، بلکه به اندازهٔ a و b نیز بستگی خواهد داشت. مثلاً در اثبات ٦—۴ (ب)، طبق (۲) داریم:

$$|a_n b_n - a^* b^*| \le K_۱|b_n - b^*| + K_۲|a_n - a^*|$$

که در اینجا $K_۱$ یک کران بالایی برای دنبالهٔ (a_n) و $K_۲$ یک کران بالایی برای دنبالهٔ (b_n) است. بدین ترتیب اگر قدرمطلق a_n ها به نسبت بزرگ باشد، باید $|b_n - b^*|$ را متناسباً کوچک انتخاب کرد، و همین طور برای b_n ها در رابطه با $|a_n - a^*|$، تا دقت مورد نظر حاصل شود. به مثال‌های زیر توجه کنید.

(٦—۷) مثال

(٦—۷—۱) دو عدد $a = ۴۸۷/r_۱r_۲r_۳\ldots$ و $b = ۳/s_۱s_۲s_۳\ldots$ داده شده‌اند. می‌خواهیم n را طوری اختیار کنیم که انحراف حاصل‌ضرب $a_n = ۴۸۷/r_۱\ldots r_n$ و $b_n = ۳/s_۱\ldots s_n$ از حاصل‌ضرب ab کوچکتر از $۱۰^{-۶}$ باشد. برای چنین n داریم $|a_n - a^*| \le ۱۰^{-n}$ و $|b_n - b^*| < ۱۰^{-n}$، پس طبق (۲):

$$|a_n b_n - ab| \le (K_۱ + K_۲)۱۰^{-n}$$

می‌توان $K_۱ = ۴۸۸$ و $K_۲ = ۴$ را به عنوان کران بالایی برای دنباله‌های مختومه در نظر گرفت، پس طرف راست نامساوی بالا کوچکتر از $(۴۹۲)۱۰^{-n}$ است. اگر بخواهیم این خط کوچکتر از $۱۰^{-۵}$ باشد، $n = ۸$ کار می‌کند زیرا $۴۹۲ < ۱۰^۳$ ولی $n = ۷$ کار نمی‌کند. بدین ترتیب اگر هر یک از a و b

پس از هشت رقم پس از ممیز مختومه شوند، انحراف حاصل‌ضرب دو عدد مختومه از حاصل‌ضرب واقعی کوچکتر از $۱۰^{-۵}$ خواهد بود.

(۶—۷—۲) عدد $b = ۰/۰۳۲۱۹۰۹۹۰۹۹۹\ldots$ را در نظر می‌گیریم. اگر این عدد را پس از n رقم بعد از ممیز مختومه کنیم، تقریب را به b_n نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم n را طوری اختیار کنیم که اختلاف $\frac{۱}{b_n}$ با $\frac{۱}{b}$ کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد. طبق نامساوی (۳) در اثبات ۶—۶ داریم:

$$\left|\frac{۱}{b_n} - \frac{۱}{b}\right| \leq \frac{۱}{k^۲}|b_n - b|$$

که در آن $۰ < k$ عددی است که $k \leq |b_n|$ و $k \leq |b^*|$. در اینجا می‌توانیم k را برابر $۰/۰۳۲۱$ اختیار کنیم و با توجه به این که $۱۰^۵ < (۳۲۱)^۲$ داریم $۱۰^{-۳} < (۰/۰۳۲۱)^۲$ و $\frac{۱}{k^۲} < ۱۰^۳$، پس

$$\left|\frac{۱}{b_n} - \frac{۱}{b}\right| < (۱۰^۳)|b_n - b^*|$$

برای اینکه طرف راست کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد، کافی است که $|b_n - b^*|$ کوچکتر از $۱۰^{-۶}$ باشد. بنابراین معکوس $۰/۰۳۲۱۹۰$ از $b^{-۱}$ انحرافی کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ خواهد داشت. محاسبه با ماشین حساب به نسبت قوی نشان می‌دهد که:

$$(۰/۰۳۲۱۹۰۹۹۰۹۹۹)^{-۱} = ۳۱/۰۶۴۵۹۱۹۵$$

$$(۰/۰۳۲۱۹۰)^{-۱} = ۳۱/۰۶۵۵۴۸۳۰$$

اختلاف این دو عدد برابر $۰/۰۰۰۹۵۶۳۵$ است که از $۱۰^{-۳}$ کوچکتر می‌باشد.