دنباله عددی و سری عددی (۲)

درعمل دستهٔ مهمی از دنباله‌ها از جمع‌زدن متوالی یا انباشتن جملات یک دنباله داده شده حاصل می‌شوند. مثلاً اگر به نمایش اعشاری عددی نگاه کنیم:

$$c = c_0/c_1c_2c_3\ldots$$

این در واقع حد دنبالهٔ اعداد اعشاری مختومهٔ زیر است:

$$c_0, c_0 + \frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100}, \ldots$$

که این دنباله از انباشتن متوالی دنباله زیر به‌دست می‌آید:

$$c_0, \frac{c_1}{10}, \frac{c_2}{100}, \ldots$$

به طوری کلی اگر دنباله $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ داده شده باشد، مقصود از سری مجموع‌های جزیی این دنباله، دنباله زیر است:

$$a_k, a_k + a_{k+1}, a_k + a_{k+1} + a_{k+2}, \ldots$$

اگر دنبالهٔ اخیر به A همگرا باشد، اصطلاحاً گفته می‌شود که سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست و می‌نویسیم $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$. در غیر این صورت، سری واگرا خوانده می‌شود. بدین ترتیب، اگر دنباله عدد صحیح نامنفی $c_0, c_1, c_2, \ldots$ داده شده باشد که در آن برای $i \geq 1$، $0 \leq c_i \leq 9$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}$ طبق اصل تمامیت همگراست و حد آن به $c_0/c_1c_2c_3\ldots$ نمایش داده می‌شود. وقتی همهٔ a_k ها اعداد حقیقی مثبت باشند واضح به نظر می‌رسد که انباشتن a_n ها فقط وقتی ممکن است منجر به یک حد متناهی شود که a_n ها سریعاً کوچک شوند. مثلاً برای $c = c_0/c_1c_2c_3\ldots$، جمله اندیس n برابر

$\frac{a_n}{10^n}$ است که به صفر میل می‌کند وقتی $n \longrightarrow +\infty$. در واقع شرط $a_n \longrightarrow 0$ یک شرط لازم برای همگرایی است حتی اگر a_n ها عدد مختلط باشند.

(۷—۱) شرط لازم همگرایی. اگر سری اعداد مختلط $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، داریم $a_n \longrightarrow 0$ وقتی $n \longrightarrow +\infty$.

اثبات. مجموع جزیی $a_k + \cdots + a_n$ را به S_n نمایش می‌دهیم. فرض کنید سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ به S همگراست، یعنی $S_n \longrightarrow S$. اگر $e > 0$ داده شده باشد، می‌خواهیم N را طوری بیابیم که برای $n > N$ داشته باشیم $|a_n| < e$. چون $S_n \longrightarrow S$، برای $\frac{e}{2} > 0$، N_1 وجود دارد که اگر $m > N_1$، آنگاه $|S_n - S| < \frac{e}{2}$. قرار می‌دهیم $N = N_1 + 1$، پس برای $n > N$ داریم:

$$|S_n - S| < \frac{e}{2} \quad , \quad |S_{n-1} - S| < \frac{e}{2}$$

بنابراین طبق نامساوی مثلث

$$|S_n - S_{n-1}| \leq |S_n - S| + |S - S_{n-1}| < e$$

ولی $S_n - S_{n-1} = a_n$ و حکم به اثبات می‌رسد. □

لازم به تأکید است که این شرط به تنهایی برای همگرایی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ کافی نیست و در واقع a_n ها ممکن است در عین کوچکتر شدن و میل کردن به صفر، آنقدر سریع کوچک نشوند که مجموع آنها به عددی میل کند. مثال ساده و معروف زیر را باید همواره در ذهن داشت.

(۷—۲) سری هارمونیک. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را بررسی می‌کنیم. در اینجا شرط لازم همگرایی برقرار است زیرا که $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ وقتی $n \longrightarrow \infty$ ولی نشان می‌دهیم سری واگراست. به گروه‌بندی زیر از جملات سری تا اندیس $n = 2^k$ توجه کنید:

$$S_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

داریم $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$، $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$، $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$، ...، $\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} > 2^{k-1}(\frac{1}{2^k}) = \frac{1}{2}$

بنابراین $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$، چون با افزایش k، $1 + \frac{k}{2}$ به دلخواه بزرگ می‌شود، S_n ها به حدی (متناهی)

میل نمی‌کنند. این مثال نشان می‌دهد که بررسی همگرایی یک سری ممکن است در مواردی دشوار باشد. در این جلسه ضمن معرفی چند سری مرجع، آزمون‌هایی برای همگرایی سری‌ها مطرح خواهیم کرد.

دو مثال زیر نقطهٔ ارجاع بسیاری از سری‌های دیگر و نیز بحث‌های نظری هستند.

(۷—۳) دو مثال

(۷—۳—۱) سری هندسی. فرض کنید $a \neq 0$ و r دو عدد مختلط داده شده باشند. سری $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ را در نظر می‌گیریم که از انباشتن دنباله زیر به‌دست می‌آید:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

مورد $a = 0$ را کنار گذاشتیم زیرا که در این حالت همهٔ جملات صفر می‌شوند و وضعیت سری مشخص است. نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < 1$. نخست به اتحاد زیر توجه کنید

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad (1)$$

که صحت آن را می‌توان با طرفین_وسطین تحقیق کرد. بنابراین به عنوان مجموع جزیی سری هندسی داریم:

$$\sum_{n=0}^{N} ar^n = a\frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

حال اگر $|r| < 1$، $r^{N+1} \longrightarrow 0$ وقتی $N \longrightarrow +\infty$، پس $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ به $\frac{a}{1-r}$ همگراست. بالعکس اگر $|r| \geq 1$، آنگاه $|ar^n| \geq |a| > 0$ و جملهٔ n ام به صفر میل نمی‌کند، پس شرط لازم همگرایی برقرار نیست.

(۷—۳—۲) سری p. برای $p > 0$ داده شده، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را سری p می‌نامند. در اینجا سری را فقط برای مقادیر صحیح p در نظر می‌گیریم. در آینده مقادیر غیر عدد صحیح نیز در نظر گرفته خواهد شد. برای $p = 1$، سری هارمونیک $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ به‌دست می‌آید که دیدیم واگراست هر چند که جملهٔ n ام

آن به صفر میل می‌کند وقتی $n \to +\infty$. برای $p = ۲$، توجه کنید که

$$n > ۱: \quad \frac{۱}{n^۲} < \frac{۱}{n^۲ - n} = \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}$$

و داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=۲}^{N} \frac{۱}{n^۲-n} &= (\tfrac{۱}{۱} - \tfrac{۱}{۲}) + (\tfrac{۱}{۲} - \tfrac{۱}{۳}) + \cdots + (\tfrac{۱}{N-۱} - \tfrac{۱}{N}) \\ &= ۱ - \tfrac{۱}{N} \end{aligned}$$

بنابراین $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n^۲-n}$ به مقدار ۱ همگراست. حال داریم:

$$N > ۱: \quad \sum_{n=۱}^{N} \frac{۱}{n^۲} < ۱ + \sum_{n=۲}^{N} \frac{۱}{n^۲ - n} = ۲ - \frac{۱}{N} < ۲$$

بنابراین دنباله (S_N)، $S_N = \sum_{n=۱}^{N} \frac{۱}{n^۲}$، یک دنبالهٔ صعودی با کران بالایی است که طبق ۶—۳—۴ جلسهٔ قبل به کوچکترین کران بالایی خود میل می‌کند. به همین ترتیب اگر $p > ۲$، داریم $\frac{۱}{n^p} < \frac{۱}{n^۲}$ و مجموع‌های جزیی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$، دنباله‌ای صعودی با کران بالایی هستند؛ پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ همگراست.

ایدهٔ اثبات فوق را برای ارجاع بعدی به صورت زیر ثبت می‌کنیم:

(۷—۴) فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنباله اعداد حقیقی نامنفی باشد. در این صورت سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر برای دنبالهٔ مجموع‌های جزیی یک کران بالایی وجود داشته باشد.

اثبات. دنبالهٔ مجموع‌های جزیی را در نظر می‌گیریم:

$$S_k = a_k, S_{k+۱} = a_k + a_{k+۱}, \cdots$$

چون $a_i \geq ۰$، داریم $\cdots \leq S_{k+۲} \leq S_{k+۱} \leq S_k$. پس اگر S_n ها دارای کران بالایی باشند، طبق ۶—۳—۴، S_n به کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ $\{S_k, S_{k+۱}, \ldots\}$ میل می‌کند. بالعکس اگر دنبالهٔ (S_n) همگرا باشد، می‌دانیم که در واقع هر دنباله همگرا در $\mathbb{C}$ کراندار است. □

به دلایلی که به زودی خواهیم دید، سری‌های اعداد حقیقی غیرمنفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. برای این گونه سری‌ها اکنون می‌توانیم با توجه به (۷—۴) چند آزمون همگرایی ارائه کنیم:

(۷—۵) فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=l}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی غیرمنفی باشند و اندیسی N وجود داشته باشد، $N \geq k, l$، که برای $n \geq N$ داشته باشیم $a_n \leq b_n$. در این صورت:

الف) اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

اثبات. چون جمع کردن تعدادی متناهی جملهٔ اولیه اثری بر همگرایی یا واگرایی ندارد، کافی است در مورد سری‌های $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ بحث کنیم. اگر $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، دنبالهٔ مجموع‌های جزیی آن از کران بالایی، مثلاً $M > 0$ برخوردار است. چون $a_n \leq b_n$، M کران بالایی برای مجموع‌های جزیی $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ نیز می‌باشد، پس طبق ۷—۴، $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگراست. بالعکس اگر $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگرا نباشد، مجموع‌های جزیی آن دارای کران بالایی نیستند و چون $b_n \geq a_n$، مجموع‌های جزیی $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ نیز به طور اولی کران بالایی ندارند، پس $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ واگراست. □

در این آزمون مقایسهٔ اندازهٔ a_n و b_n به صورت تفاضل مطرح بود (یعنی $b_n - a_n \geq 0$). آزمون مشابهی برای نسبت وجود دارد:

(۷—۶) $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=l}^{\infty}$ دو دنبالهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی هستند و N وجود دارد که $b_n \neq 0$ برای $n \geq N$. در این صورت:

الف) اگر عددی $M > 0$ وجود داشته باشد که $\frac{a_n}{b_n} \leq M$ برای n از مرحله‌ای به بعد، آنگاه اگر $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر عددی $m > 0$ وجود داشته باشد که $\frac{a_n}{b_n} > m$ برای n از مرحله‌ای به بعد، آنگاه اگر $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. الف) شرط $\frac{a_n}{b_n} \leq M$ معادل $a_n \leq M b_n$ است. اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ به B همگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty}(M b_n)$ به MB همگراست، پس طبق (۷—۵)، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) شرط $\frac{a_n}{b_n} \geq m$ معادل $a_n \geq m b_n$ است. اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty}(m b_n)$ نیز واگراست چون $m \neq 0$ (اگر $\sum_{n=l}^{\infty}(m b_n)$ همگرا باشد، با ضرب کردن هر جمله در $\frac{1}{m}$ نتیجه می‌شود که سری $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ نیز واگراست) پس چون $a_n \geq m b_n$، طبق (۷—۴) سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست. □

بسیاری اوقات حالت خاصی از (۵—۷) به صورت زیر مورد استفاده، قرار می‌گیرد:

(۷—۷) $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=l}^{\infty}$ دو دنبالهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی هستند و N وجود دارد که $b_n \neq 0$ برای $n \geq N$. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ وجود داشته باشد و برابر L باشد. در این صورت:

الف) اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $L > 0$ و $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. این در واقع حالت خاصی از ۷—٦ است. در (الف)، می‌توان از $M = L + 1$ استفاده کرد زیرا که اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$، از مرحله‌ای به بعد همهٔ $\frac{a_n}{b_n}$ ها از $L + 1$ کوچکتر می‌شوند. در (ب)، اگر $L > 0$، با گرفتن $m = \frac{L}{2}$، می‌بینیم که چون $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$، از مرحله‌ای به بعد $\frac{a_n}{b_n}$ ها باید از m بزرگتر باشند. $\square$

(۸—۷) مثال. وضعیت سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-n+3}{n^3+1}$ را از نظر همگرایی بررسی می‌کنیم. در این گونه مثال‌ها آنچه تعیین‌کننده است، اختلاف درجهٔ بالاترین جملهٔ صورت و مخرج است. اگر $p =$ (درجهٔ صورت)—(درجهٔ مخرج)، مقایسه با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ کارساز است. در مثال فوق:

$$\frac{\frac{2n^2-n+3}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2n^3-n^2+3n}{n^3+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 2$$

بنابراین واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ نتیجه می‌دهد که سری داده شده واگراست.

(۹—۷) نکته. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ دو سری همگرا، به ترتیب به A و B باشند. در این صورت سری $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ را در نظر می‌گیریم که در آن $c_n = a_n + b_n$. ادعا می‌کنیم که $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ به $A + B$ همگراست. در واقع اگر مجموع‌های جزیی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$، $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ را به ترتیب به A_n، B_n و C_n نمایش دهیم، داریم $C_n = A_n + B_n$ و حکم از گزارهٔ ٦—۴ جلسهٔ قبل نتیجه می‌شود. به همین ترتیب اگر c یک عدد مختلط دلخواه باشد، به سادگی دیده می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty}(ca_n)$ به cA همگراست. ولی نباید تصور کرد که اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n = B$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty}(a_n b_n)$ برابر AB است. مجموع جزیی سری اخیر تا مرحلهٔ N برابر $a_k b_k + \cdots + a_N b_N$ است

در حالی که حاصل‌ضرب مجموع‌های جزیی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$، هر یک تا مرحلهٔ N، برابر $(a_k + \cdots + a_N)(b_k + \cdots + b_N)$ می‌باشد.

به کمک سری هندسی می‌توان دو آزمون بسیار مؤثر برای سری‌های اعداد مثبت ارائه کرد. دو آزمون زیر هر یک، یکی از ویژگی‌های سری هندسی را مبنا قرار می‌دهد. به سری هندسی زیر توجه کنید که در آن r یک عدد حقیقی مثبت فرض می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

می‌دانیم شرطی لازم و کافی برای همگرایی این سری این است که $r < 1$. حال می‌توان r را دو گونه تعبیر کرد. از سویی r نسبت دو جملهٔ متوالی است و از سویی دیگر r ریشهٔ n ام جملهٔ اندیس n این سری. در زیر "آزمون نسبت" در شرایطی که نسبت جملات متوالی تقریباً رفتاری مانند رفتار سری هندسی دارد، یعنی حدوداً ثابت است، کار می‌کند. "آزمون ریشه" وقتی کارایی دارد که ریشهٔ n ام جملهٔ اندیس n حدوداً ثابت باشد.

(۷ــ۱۰) آزمون نسبت. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت است. در این صورت:

الف) اگر عددی $\rho < 1$ وجود داشته باشد و مرحله‌ای N که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر مرحله‌ای N وجود داشته باشد که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگراست.

اثبات. طبق فرض داریم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho$ برای $n \geq N$، پس:

$$a_{N+1} \leq \rho a_N$$

$$a_{N+2} \leq \rho a_{N+1} \leq \rho^2 a_N$$

$$\vdots$$

$$a_{N+k} \leq \rho a_{N+k-1} \leq \cdots \leq \rho^k a_N$$

بنابراین از مقایسهٔ سری با جملات مثبت $a_{N+1} + a_{N+1} + \cdots$ با سری هندسی $a_N\rho + a_N\rho^2 + a_N\rho^3 + \cdots$ با قدرنسبت $\rho < 1$ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست. در مورد (ب)، داریم

$$\cdots \geq a_{N+2} \geq a_{N+1} \geq a_N > 0$$

بنابراین شرط لازم همگرایی، $a_n \longrightarrow 0$، تأمین نمی‌شود، و سری واگراست. □

گاهی اوقات یک نتیجهٔ ایده آزمون فوق به صورت زیر کفایت می‌کند. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ وجود داشته و برابر R باشد. اگر $R < 1$، عددی ρ بین R و 1 در نظر می‌گیریم $R < \rho < 1$. طبق تعریف حد دنباله، مرحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$، $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - R| < \rho - R$، پس $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho$ و همگرایی نتیجه می‌شود. اگر $R > 1$، مجدداً مرحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|R - \frac{a_{n+1}}{a_n}| < R - 1$، پس $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ و سری واگراست. در حالتی که $R = 1$، نتیجه قاطعی از این آزمون حاصل نمی‌شود. مثلاً برای سری p، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$،

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^p} = 1$$

مستقل از اینکه p چه باشد. ولی این سری به‌ازای $p = 1$ واگرا و به‌ازای $p > 1$ همگراست.

(۷—۱۱) مثال. فرض کنید عدد حقیقی $x > 0$ داده شده باشد. نشان می‌دهیم $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ همگراست. از آزمون نسبت داریم:

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

پس این سری همگراست.

(۷—۱۲) آزمون ریشه. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت است. در این صورت:

الف) اگر عددی $\rho < 1$ وجود داشته باشد و مرحله‌ای N که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر برای بی‌نهایت اندیس n داشته باشیم $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$، آنگاه سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگراست.

اثبات. برای (الف) داریم $a_n \le \rho^n$ برای هر $n \ge N$ و مقایسه با سری هندسی $\sum \rho^n$، همگرایی سری را به اثبات می‌رساند. در مورد (ب)، $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ به‌ازای بی‌نهایت اندیس n، نشان می‌دهد $a_n \ge 1$ به‌ازای بی‌نهایت اندیس n، پس شرط لازم همگرایی $a_n \longrightarrow 0$ نمی‌تواند برقرار باشد و سری واگراست. □

در اینجا نیز بسیاری اوقات $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ در نظر گرفته می‌شود. اگر این حد وجود داشته باشد و آن را به R نمایش دهیم، سه وضعیت زیر ممکن است رخ دهد. اگر $R < 1$ سری همگراست زیرا که اگر عددی ρ بین R و ۱ اختیار کنیم؛ $R < \rho < 1$، از تعریف حد دنباله نتیجه می‌گیریم مرحله‌ای N وجود دارد که برای $n \ge N$ داریم $|\sqrt[n]{a_n} - R| < \rho - R$ پس $\sqrt[n]{a_n} < \rho$ و همگرایی نتیجه می‌شود. اگر $R > 1$، پس از مرحله‌ای N داریم $|R - \sqrt[n]{a_n}| < R - 1$، پس $\sqrt[n]{a_n} > 1$ و واگرایی نتیجه می‌شود. در اینجا نیز $R = 1$ نتیجه‌ای در مورد همگرایی نمی‌دهد زیرا که مجدداً در مورد سری p:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p$$

از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$، حد عبارت بالا به‌ازای هر p برابر ۱ است. پس این آزمون نمی‌تواند میان سری واگرای $\sum \frac{1}{n}$ و سری همگرای $\sum \frac{1}{n^2}$ تمیز دهد.

(۷–۱۳) مثال. فرض کنید عدد حقیقی $x > 0$ داده شده است، نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ همگراست.

طبق آزمون ریشه:

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}} = \frac{x}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$$

پس سری همگراست. می‌توانستیم این امر را از مقایسه $\frac{x^n}{n^n} \le \frac{x^n}{n!}$ نیز به کمک مثال ۷–۹ نتیجه بگیریم.

دنباله عددی و سری عددی (۳)

در جلسهٔ قبل اشاره داشتیم به اینکه سری‌های اعداد حقیقی غیر منفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و آزمون‌های همگرایی که مطرح کردیم مربوط به سری‌های اعداد غیرمنفی بودند. دلیل اهمیت سری‌های اعداد حقیقی غیرمنفی قضیهٔ زیر است:

(۸—۱) قضیه. فرض کنید $(z_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنبالهٔ اعداد مختلط باشد. اگر $\sum_{n=k}^{\infty}|z_n|$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty}z_n$ نیز همگراست.

بدین ترتیب اگر بتوانیم به کمک یکی از آزمون‌های جلسهٔ قبل همگرایی سری قدرمطلق‌های جملات یک سری را به اثبات برسانیم، همگرایی سری اولیه نتیجه می‌شود. اگر برای سری $\sum_{n=k}^{\infty}z_n$، سری قدرمطلق‌ها، یعنی $\sum_{n=k}^{\infty}|z_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty}z_n$ را همگرای مطلق می‌نامند. پس طبق قضیهٔ بالا، همگرایی مطلق، همگرایی را نتیجه می‌دهد. برای اثبات قضیهٔ بالا نخست به یک نکتهٔ کلی اشاره می‌کنیم.

(۸—۲) گزاره. فرض کنید $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنبالهٔ اعداد مختلط باشد، $c_n=a_n+ib_n$، و $c=a+ib$ یک عدد مختلط. در این صورت $c_n\longrightarrow c$ اگر و تنها اگر $a_n\longrightarrow a$ و $b_n\longrightarrow b$.

اثبات. داریم

$$|a_n-a|,|b_n-b|\leq|c_n-c| \tag{۱}$$

و

$$|c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \qquad (۲)$$

نامساوی اولی بیان این مطلب است که در مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قائمه کوچکتر از وتر است، و نامساوی دوم بیان این مطلب که طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است (شکل ۱).

فرض کنید $c_n \longrightarrow c$، پس برای هر $\epsilon > 0$، N وجود دارد که $|c_n - c| < \epsilon$ برای هر $n > N$. بنابراین از نامساوی (۱) نتیجه می‌شود که $|a_n - a| < \epsilon$ و $|b_n - b| < \epsilon$ وقتی $n > N$. پس $c_n \longrightarrow c$ نتیجه می‌دهد $a_n \longrightarrow a$ و $b_n \longrightarrow b$. بالعکس فرض کنید $a_n \longrightarrow a$ و $b_n \longrightarrow b$. برای ϵ داده شده، N_1 و N_2 وجود دارند که:

$$n > N_1 : \quad |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$n > N_2 : \quad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

با قرار دادن $N = \max\{N_1, N_2\}$ می‌بینیم که اگر $n > N$ آنگاه طبق نامساوی (۲) داریم $|c_n - c| < \epsilon$ و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

به زبان هندسی، گزارهٔ ۸−۲ حکم می‌کند که شرطی لازم و کافی برای $c_n \longrightarrow c$ این است که مؤلفهٔ افقی (قسمت حقیقی) c_n به مؤلفهٔ افقی (قسمت حقیقی) c میل کند و مؤلفهٔ قائم (قسمت موهومی) c_n به مؤلفهٔ قائم (قسمت موهومی) c.

حال قضیهٔ ۸−۱ را در حالتی که c_n ها حقیقی باشند در نظر بگیرید. پس دنباله‌ای از اعداد حقیقی $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ داریم که $\sum_{n=k}^{\infty} |c_n|$ همگراست. می‌نویسیم:

$$c_n = (c_n + |c_n|) + (-|c_n|)$$

چون $\sum |c_n|$ همگرا فرض شده است، اگر همه جملات در عدد ثابت (-1) ضرب شوند، نتیجه می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty}(-|c_n|)$ همگراست. پس اگر ثابت شود که $\sum_{n=k}^{\infty}(c_n + |c_n|)$ نیز همگراست، آنگاه مجموع جمله به جملهٔ دو سری همگرای فوق، همگرا خواهد شد. ولی داریم

$$0 \leq c_n + |c_n| \leq 2|c_n|$$

و $\sum_{n=k}^{\infty}(2|c_n|)$ همگراست، پس طبق آزمون مقایسهٔ جلسهٔ قبل، ۷—۵، سری $\sum_{n=k}^{\infty}(c_n + |c_n|)$ همگراست.

اکنون قضیهٔ ۸—۱ را در حالت کلی بررسی می‌کنیم. فرض کنید $c_n = a_n + ib_n$، پس $|a_n| \leq |c_n|$ و $|b_n| \leq |c_n|$. اگر $\sum |c_n|$ همگرا باشد، طبق آزمون مقایسه، $\sum |a_n|$ و $\sum |b_n|$ همگرا خواهند شد. ولی a_n و b_n اعداد حقیقی هستند، پس طبق بحث بالا $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نیز همگرا می‌شوند. بنابراین طبق گزارهٔ ۸—۲، $\sum c_n$ که در آن $c_n = a_n + ib_n$ نیز همگراست و اثبات ۸—۱ به انجام می‌رسد.

(۸—۳) چند مثال.

(۸—۳—۱) همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}$ را بررسی می‌کنیم. داریم $|n+i| = \sqrt{n^2+1} > n$، پس $|\frac{1}{(n+i)^2}| < \frac{1}{n^2}$ و در مقایسه با سری p، به‌ازای $p = 2$، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+i|^2}$ همگراست، در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}$ همگراست.

همگرایی مطلق شرطی کافی برای همگرایی است ولی یک شرط لازم نیست. مثلاً با آن که سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، اگر جملات را یکی در میان منفی کنیم، سری حاصل، یعنی:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

همگراست. در واقع آزمون کلی زیر برقرار است:

(۸—۴) آزمون سری متناوب لایب‌نیتس. فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ اعداد حقیقی نامنفی باشد که:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$$

و $a_n \longrightarrow 0$ وقتی $n \longrightarrow +\infty$. در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ همگراست.

اثبات. به دنبالهٔ مجموع‌های جزیی این سری نگاه می‌کنیم:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 - a_2, S_3 = a_1 - a_2 + a_3, \ldots$$

مجموع‌های جزیی با اندیس فرد، یعنی $S_1, S_3, S_5, \ldots$ را در نظر بگیرید. چون $a_{2n} \geq a_{2n+1}$، داریم:

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

پس

$$\cdots \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1$$

همین طور چون $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$، برای مجموع‌های جزیی زوج داریم $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$، پس:

$$\cdots \geq S_6 \geq S_4 \geq S_2$$

توجه کنید که a_1 یک کران بالایی برای دنباله مجموعهای جزیی زوج است زیرا که $a_i \geq a_{i+1}$، پس:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + \cdots - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\ &\leq a_1 \end{aligned}$$

بنابراین دنبالهٔ مجموع‌های جزیی با اندیس زوج به کوچکترین کران بالایی خود، مثلاً S میل می‌کند. نشان می‌دهیم کل دنبالهٔ مجموع‌های جزیی، $(S_n)_{n=1}^{\infty}$، به S میل می‌کند. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده است. از آنجا که $S_{2n} \longrightarrow S$، N_1 وجود دارد که:

$$n > N_1 : \quad |S_{2n} - S| < \frac{\epsilon}{2}$$

از طرفی دیگر، فرض کرده‌ایم $a_n \longrightarrow 0$، پس N_2 وجود دارد که:

$$n > N_2 : \quad |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

حال اگر قرار دهیم $N = 2\max\{N_1, N_2\}$، اگر $n = 2k > N$ داریم $k > N_1$، پس $|S_n - S| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ و اگر $n = 2k - 1 > N$ آنگاه $2k > N_2$ و:

$$\begin{aligned} |S_{2k-1} - S| &\leq |S_{2k-1} - S_{2k}| + |S_{2k} - S| \\ &= |a_{2k}| + |S_{2k} - S| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

پس $S \leftarrow S_n$ و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

در واقع ایدهٔ اثبات فوق بسیار ساده و جالب توجه است. از آنجا که جملات سری متناوباً تغییر علامت می‌دهند و قدرمطلق جملات نوعاً کوچکتر می‌شوند (به هر حال هیچ‌گاه بزرگتر نمی‌شوند)، دنبالهٔ S_n روی محور حقیقی متناوباً به چپ و راست می‌جهد در حالی که دامنهٔ جهش آن رو به تنازل به صفر است ($a_n \longrightarrow ۰$). به این ترتیب $S_{۲n}$ ها از طرف چپ و $S_{۲n+۱}$ ها از طرف راست به سوی نقطه‌ای روی محور حقیقی تجمع می‌کنند (شکل ۲).

با توجه به این گزاره، سری‌های زیر همگرا هستند:

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + - \cdots$$

$$۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + - \cdots$$

در آینده مجموع این دو سری خاص را محاسبه خواهیم کرد.

در این مقطع لازم است نکته‌ای در مورد به‌کارگیری نماد $\sum$ به عنوان حد سری گوشزد کنیم. $\sum$ معمولاً به معنای "مجموع" به‌کار می‌رود، مثلاً $\sum_{i=۱}^{n} a_i = a_۱ + \cdots + a_n$. از آنجا که $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$ به معنای انباشتن متوالی ولی تمام نشدنی a_i هاست، نماد $\sum$ بی‌مورد نیست ولی نباید پنداشت که این "مجموع نامتناهی" لزوماً خواص جمع معمولی را دارد. دیدیم که اگر هر جملهٔ یک سری را در عدد ثابت c ضرب کنیم، حد سری نیز در همان عدد ضرب خواهد شد (تعمیم قانون بخشش)، و نیز اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند، $\sum(a_n + b_n)$ نیز همگراست و به مجموع $\sum a_n$ و $\sum b_n$ میل می‌کند. این نوعی قانون جابجایی (تعویض‌پذیری) عمل جمع به بی‌نهایت عامل جمع است ولی اگر سری‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ خود همگرا نباشند، سری مجموع جملات متناظر یعنی $\sum(a_n + b_n)$ می‌تواند رفتار غیرمنتظره‌ای داشته باشد. در واقع ثابت می‌شود که اگر $\sum a_n$ یک سری همگرا باشد که همگرای مطلق نباشد، می‌توان با جابه‌جا کردن عوامل جمع، حد مجموع را به هر عدد دلخواه میل داد! روش کار را با مثال سری زیر نشان می‌دهیم. همین نوع استدلال در حالت کلی کار می‌کند. سری

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + - \cdots \qquad (۳)$$

را در نظر بگیرید. این در واقع مجموع دو سری غیر همگراست که جملهٔ نمونهٔ هر یک به صفر میل می‌کند. یکی از این سری‌ها، سری جملات با مخرج زوج است:

$$-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}-\cdots$$

این سری با ضرب کردن جملات سری هارمونیک در $(-\frac{۱}{۲})$ پدید آمده است پس لزوماً واگراست (و گرنه با ضرب کردن جملات در -۲، سری هارمونیک همگرا می‌شود). از طرفی دیگر چون $\frac{۱}{۲} < ۱$، $\frac{۱}{۴} < \frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۶} < \frac{۱}{۵}$، ... ، سری جملات با مخرج فرد نیز واگراست. حد سری (۳) قطعاً از ۱ کوچکتر است زیرا با نوشتن سری به صورت زیر:

$$۱+(-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳})+(-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵})+(-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷})+\cdots$$

چون مجموع داخل هر پرانتز منفی است، هر بار عددی از مجموع قبلی کم می‌شود. با این حال نشان می‌دهیم با جابجایی مناسب می‌توان مجموع سری را به مثلاً عدد ۲ میل داد. برای این کار نخست جملات فرد $۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}+\cdots$ را تا جایی جمع می‌کنیم که از ۲ بیشتر شود. جدول زیر که از محاسبه با ماشین حساب حاصل شده است نشان می‌دهد باید تا $\frac{۱}{۱۵}$ جلو رفت:

$$\begin{aligned}
۱ &< ۲\\
۱+\frac{۱}{۳} &\simeq ۱/۳۳۳۳ < ۲\\
۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵} &\simeq ۱/۵۳۳۳ < ۲\\
\vdots\ &\ \vdots\ \ \vdots\\
۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۳} &\simeq ۱/۹۵۵۱ < ۲\\
۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۵} &\simeq ۲/۰۲۱۸ > ۲
\end{aligned}$$

حال جملات زوج (منفی) را از مجموع محاسبه شده کم می‌کنیم تا مجموع کوچکتر از ۲ شود. در واقع در اینجا افزودن $-\frac{۱}{۲}$ کافی است:

$$(۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۵})-\frac{۱}{۲}\simeq ۱/۵۲۱۸$$

مجدداً جملات فرد (مثبت) را به ترتیب می‌افزاییم تا مجموع از ۲ تجاوز کند. محاسبه با ماشین حساب می‌دهد:

$$(۱ + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۱۵}) - \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۱۷} + \cdots + \frac{۱}{۴۱}) \simeq ۲/۰۰۴۱ > ۲$$

اکنون از جملات زوج استفاده می‌کنیم تا مجموع از ۲ کوچکتر شود:

$$(۱ + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۱۵}) - \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۱۷} + \cdots + \frac{۱}{۴۱}) - \frac{۱}{۴} \simeq ۱/۷۵۴۱$$

با ادامه دادن این فرایند می‌بینیم که میزان انحراف از ۲ تدریجاً کوچکتر می‌شود زیرا که $\frac{۱}{۲n}$ به تدریج کوچکتر می‌شود. روشن است که به جای ۲ می‌توان با این روش مجموع را به هر عددی میل داد.

قضیه‌ای جالب حکم می‌کند که این پدیده برای سری‌های همگرای مطلق رخ نمی‌دهد، یعنی اگر یک سری همگرای مطلق باشد، هیچ‌گونه جابجایی در جملات اثری بر حد سری نخواهد داشت. نکته تمایز از وضعیت بالا این است که در بالا به سبب واگرایی $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots$ قادر بودیم با افزودن جملات، مجموع را به ۲ برسانیم ولی در مورد سری‌های همگرای مطلق، هیچ زیردنباله‌ای از سری، واگرا نخواهد شد و قادر نخواهیم بود نوسان‌های مورد نیاز را ایجاد کنیم.

پایداری محاسبه

از این بخش بررسی تابع‌های حقیقی یک متغیری را آغاز می‌کنیم. مقصود از یک تابع حقیقی یک متغیری تابعی $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ است که در آن دامنهٔ تابع، یعنی S، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. به این ترتیب به هر عضو s از S، عدد حقیقی مشخصی $f(s)$ منسوب می‌شود. اگر f را، که معمولاً با یک فرمول یا دستورالعمل داده می‌شود، یک ماشین محاسبه یا برنامه‌ای رایانه‌ای فرض کنیم، به‌ازای ورودی s، همواره خروجی مشخصی $f(s)$ حاصل می‌شود.

یکی از ملاحظاتی که در همهٔ محاسبات علمی و مهندسی ظاهر می‌شود، موضوع تقریب است. نتیجه یک محاسبه یا حاصل به‌کارگیری یک تابع ممکن است عددی باشد که دانش "دقیق" آن به منظور کاربرد مورد نظر ضروری است. اما "دقیق" به چه معنی است؟ مثلاً توجه کنید که حتی عظیم‌ترین رایانه جهان حافظه‌ای محدود دارد و گنجایش ضبط و به‌کارگیری یک عدد اعشاری نامختومه $\dots c_0/c_1c_2c_3$ را ندارد. به علاوه در هر کاربرد نیز، حساسیت دستگاه‌ها و دقت سنجش، آستانه‌ای دارد که دقت بیش از آن نه عملی است و نه لزوماً ضروری. بنابراین در هر کاربرد یا مقوله، معمولاً اندازهٔ خطای قابل تحملی $\epsilon > 0$ منظور می‌شود که عملاً دو نتیجهٔ نزدیکتر از ϵ به یکدیگر از هم غیرقابل تشخیص‌اند و تقریب تا این اندازه قابل قبول محسوب می‌شود.

در زمینهٔ محاسبهٔ مقدار توابع، معمولاً آستانهٔ دقتی برای نتیجهٔ حاصل از به‌کارگیری تابع منظور می‌شود و سؤال اساسی این است که داده‌ها باید به چه دقتی معلوم باشند که حاصل محاسبه از دقت مورد نظر برخوردار شود. با ذکر چند مثال موضوع را پیگیری می‌کنیم.

(۹—۱) چند مثال.

(۹—۱—۱) تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت $f(x)=5x+۳$ تعریف می‌کنیم. ورودی این تابع باید به چه دقت باشد که خطای خروجی آن کمتر از $۱۰^{-۴}$ باشد؟

حل و بحث. توجه کنید که چنین سؤالی می‌تواند مصداق عملی کاملاً معنی‌داری داشته باشد. فرض کنید لازم است ابعاد یک تصویر رایانه‌ای را پنج برابر بزرگ کنیم به طوری که تصویر حاصل همچنان هموار به نظر رسد یعنی جزییات عکس به صورت نقطه‌چین ظاهر نشود. به این منظور لازم است نقطه‌های مجاور از فاصلهٔ معینی به هم نزدیک‌تر بمانند که چشم انسان عکس را به صورت هموار مشاهده کند. سؤالی که در اینجا مطرح است این است که در شکل اولیه نقاط روشن باید چه اندازه به هم نزدیک باشند که پس از بزرگ‌سازی با ضریب ۵ تصویر قابل قبولی به‌دست آید. در فرمول این تابع می‌توان جمع‌کردن عدد ۳ را به معنای انتقال تصویر تلقی کرد که نباید اثری بر جواب مسأله داشته باشد.

حال به حل مسأله می‌پردازیم. دو ورودی $x_۱$ و $x_۲$ در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم فاصلهٔ این دو ورودی، یعنی $|x_۲-x_۱|$ چقدر باشد که فاصله خروجی‌های متناظر، یعنی $|f(x_۲)-f(x_۱)|$، کوچکتر از $۱۰^{-۴}$ باشد. باید داشته باشیم:

$$|(5x_۱+۳)-(5x_۲-۳)|<۱۰^{-۴}$$

یا معادلاً

$$5|x_۱-x_۲|<۱۰^{-۴}$$

بنابراین واضح است که اگر $|x_۲-x_۱|<\frac{1}{5}۱۰^{-۴}$، آنگاه دقت مورد نظر در خروجی منظور می‌شود.

(۹—۱—۲) تابع مجذور کردن، یعنی $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$، $f(x)=x^۲$، را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم عدد x باید به چه وقتی معلوم باشد که خطا در محاسبهٔ مجذور آن کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد.

حل و بحث. خواهیم دید که بر خلاف مثال قبل، در اینجا جواب مطلقی وجود ندارد، بلکه جواب به

حدود اندازهٔ x وابسته است. اگر x_1 و x_2 دو ورودی این تابع باشند، می‌خواهیم درجه دقتی $\delta > 0$ منظور کنیم که اگر $|x_2 - x_1| < \delta$ آنگاه فاصلهٔ خروجی‌های متناظر، یعنی $|x_2^2 - x_1^2|$، کوچکتر از 10^{-3} باشد. پس باید داشته باشیم:

$$|x_1^2 - x_2^2| < 10^{-3}$$

یا معادلاً:

$$|x_1 + x_2||x_1 - x_2| < 10^{-3}$$

کمی توجه به عبارت بالا نشان می‌دهد که مسأله به این صورت جواب ندارد، یعنی هیچ مقدار $\delta > 0$ وجود ندارد که برای هر دو عدد x_1 و x_2 به فاصله کوچکتر از δ، فاصلهٔ $|x_2^2 - x_1^2|$ کوچکتر از 10^{-3} باشد. فرض کنید چنین δای وجود داشته باشد. اگر دو عدد x_1 و x_2 را هر دو بزرگتر از $\frac{1}{\delta}$ ولی به فاصله $\frac{\delta}{2}$ از یکدیگر انتخاب کنیم، مثلاً:

$$x_1 = \frac{1}{\delta} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$$

از طرفی داریم $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$ و از سویی دیگر $|x_1 + x_2| = \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}$، پس:

$$\begin{aligned} |x_1^2 - x_2^2| &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| = (\tfrac{2}{\delta} + \tfrac{\delta}{2})(\tfrac{\delta}{2}) \\ &= (\tfrac{2}{\delta} + \tfrac{\delta}{2})(\tfrac{\delta}{2}) = 1 + \tfrac{\delta^2}{4} \end{aligned}$$

که δ هرچه باشد $1 + \frac{\delta^2}{4}$ از 10^{-3} کوچکتر نمی‌شود. نکتهٔ این مسأله این است که وقتی عددی مجذور می‌شود، یعنی در خود ضرب می‌شود، هر خطا در عدد ورودی، خطایی حدوداً دو برابر حاصل‌ضرب این خطا در مقدار عدد داده شده در نتیجهٔ محاسبه ایجاد می‌کند. به طور دقیق، فرض کنید x مقدار "واقعی" و h خطایی در ارائه آن باشد. در این صورت:

$$(x + h)^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

وقتی h کوچکتر از ۱ باشد، h^2 از h کوچکتر است، ولی $2hx$ می‌تواند بزرگ باشد اگر x بزرگ باشد.

بدین ترتیب سؤال مطرح شده را نمی‌توان به این کلیت پاسخ داد ولیکن در عمل، عددی که باید مجذور شود به طور تقریبی معلوم است و این دانش تقریبی، کافی است که ما را قادر سازد حدودی برای تقریب لازم به‌دست آوریم. مسأله خاص زیر را در نظر می‌گیریم. عددی a به صورت زیر داده شده است:

$$a = ۱۵/a_۱a_۲a_۳a_۴\ldots$$

که ارقام پس از اعشار a_n، تا n های خیلی بزرگ معلومند یا قابل محاسبه‌اند. می‌خواهیم بدانیم این عدد را پس از چند رقم مختومه کنیم که اختلاف مجذور عدد حاصل از مجذور a کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد. اگر عدد a را پس از n رقم اعشار مختومه کنیم، عددی

$$A_n = ۱۵/a_۱\ldots a_n$$

به‌دست می‌آید. می‌خواهیم بدانیم تا چند رقم n باید جلو رفت که $|A_n^۲ - A^۲|$ کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد. توجه کنید که این مصداقی از مسأله اولیه است. وقتی a را پس از n رقم اعشاری مختومه می‌کنیم، اختلاف $|A_n - A|$ کوچکتر یا مساوی ۱۰^{-n} است. پس در واقع سؤال این است که $|A_n - A|$ چه قدر کوچک گرفته شود که $|A^۲ - A_n^۲| < ۱۰^{-۳}$. داریم

$$|A^۲ - A_n^۲| = |A + A_n||A - A_n|$$

حال قطعاً A و A_n هر دو کوچکتر ۱۶ هستند، پس:

$$|A^۲ - A_n^۲| < ۳۲|A - A_n| \leq (۳۲)۱۰^{-n}$$

پس اگر بتوانیم n را طوری بگیریم که $(۳۲)۱۰^{-n} < ۱۰^{-۳}$، دقت مورد نظر در محاسبهٔ مجذور حاصل می‌شود. معادلاً باید داشته باشیم:

$$۱۰^n > (۳۲)۱۰^۳$$

اگر n برابر ۵ یا بزرگتر گرفته شود این نامساوی برقرار می‌شود. حاصل اینکه مجذور $۱۵/a_۱\ldots a_۵$ از مجذور $۱۵/a_۱a_۲a_۳\ldots$ کمتر از $۱۰^{-۳}$ فاصله دارد.

در مثال خاص بالا ما فقط تقریب نقصانی برای A را در نظر گرفتیم زیرا $A_n \leq A$. همین استدلال را می‌توان در واقع به طور کلی، بدون استفاده از عددنویسی اعشاری برای محاسبه مجذور اعداد نزدیک به ۱۵ تکرار کرد. فرض کنید a عددی باشد $۱۵ < a < ۱۶$، می‌خواهیم عددی $\delta > ۰$ بیابیم که اگر $|a - a'| < \delta$، آنگاه $|a^۲ - a'^۲| < ۱۰^{-۳}$. مقدمتاً $\delta_۱$ را کوچکتر یا مساوی $a - ۱۶$ و $a - ۱۵$ می‌گیریم، پس اگر $|a - a'| < \delta_۱$، آنگاه a' نیز عددی در بازهٔ $]۱۵, ۱۶[$ است. در این صورت داریم:

$$|a^۲ - a'^۲| = |a - a'||a - a'| < (۳۲)|a - a'|$$

بنابراین اگر $(۳۲)|a - a'|$ کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ باشد، یعنی $|a - a'| < \frac{۱}{۳۲}۱۰^{-۳}$، $|a^۲ - a'^۲|$ کوچکتر از $۱۰^{-۳}$ خواهد بود. پس

$$\delta = \min\{۱۶ - a, a - ۱۵, \frac{۱}{۳۲}۱۰^{-۳}\}$$

ویژگی مورد نظر را دارد. اگر هیچ دانشی نسبت به اندازه $a - ۱۵$ و $a - ۱۶$ نداشته باشیم، یعنی ندانیم a کجای بازهٔ $]۱۵, ۱۶[$ قرار گرفته است می‌توانیم برای به‌دست آوردن δ مناسب به طریق زیر عمل کنیم. مقدمتاً فرض می‌کنیم $\delta_۱ = ۱$. آنگاه اگر $|a - a'| < \delta_۱$، قطعاً $۱۴ < a' < ۱۷$، پس $|a - a'| = a + a' < ۳۳$ و داریم:

$$|a^۲ - a'^۲| = |a + a'||a - a'| < ۳۳|a - a'|$$

پس اگر $|a - a'|$ کوچکتر از $\frac{۱}{۳۳}۱۰^{-۳}$ گرفته شود، داریم $|a^۲ - a'^۲| < ۱۰^{-۳}$. بنابراین

$$\delta = \min\{۱, \frac{۱}{۳۳}۱۰^{-۳}\} = \frac{۱}{۳۳}۱۰^{-۳}$$

به هر حال کار می‌کند.

(۳—۱—۹) تابع $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۰\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که $f(x) = \frac{۱}{x}$. می‌خواهیم بدانیم عدد x باید به چه دقت معلوم باشد که خطای معکوس محاسبه شده از $۱۰^{-۲}$ کوچکتر باشد.

حل و بحث. در اینجا نیز پدیده‌ای مشابه مثال قبل ظاهر می‌شود، یعنی به طور کلی جواب به حدود اندازهٔ x وابسته خواهد بود. توجه کنید که اگر دو عدد بزرگ به اندازهٔ 10^{-n} اختلاف داشته باشند (x بزرگ) اختلاف معکوس آنها بسیار کوچک است، در حالی که اگر دو عدد کوچک همین اندازه اختلاف داشته باشند معکوسشان می‌تواند به نسبت دور از هم باشد. به عنوان مثال:

$$x_1 = 10 \quad , \quad x_2 = 10 + 10^{-3} \quad , \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \simeq 0/0000099990$$

در حالی که

$$x_1 = 10^{-3} \quad , \quad x_2 = 10^{-3} + 10^{-3} \quad , \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = 500$$

بنابراین لازم است سؤال اولیه را با قید بیشتری مطرح کنیم. فرض کنید عدد a به صورت زیر داده شده است:

$$a = 0/02a_3a_4a_5\ldots$$

می‌خواهیم $\delta > 0$ را طوری تعیین کنیم که اگر $|a-a'| < \delta$، آنگاه $|\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < 10^{-2}$. چون دامنهٔ f را اعداد حقیقی مثبت در نظر گرفته‌ایم، برای هر a' در دامنهٔ f داریم:

$$|\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| = \frac{|a-a'|}{aa'}$$

از این عبارت روشن است که $\delta = a$ نمی‌تواند تخمین $|\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < 10^{-2}$ را تأمین کند زیرا که اگر $\delta = a$، a' را می‌توان به دلخواه نزدیک به ۰ گرفت و در این صورت کسر به دلخواه بزرگ می‌شود. برای رفع این اشکال، مقدمتاً $\delta_1 > 0$ را عددی کوچکتر از a می‌گیریم، مثلاً $\delta_1 = 10^{-2}$. بنابراین اگر $|a-a'| < \delta_1$، چون $a = 0/02a_3a_4\ldots \geq 0/02$، داریم $a' > 0/01$. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$|a-a'| < 10^{-2}: \quad |\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < \frac{|a-a'|}{(0/01)(0/02)} = \frac{10^4}{2}|a-a'|$$

اکنون می‌توانیم $\delta > 0$ نهایی مورد نظر را پیدا کنیم. می‌خواهیم عبارت بالا از 10^{-2} کوچکتر شود. پس اگر δ را برابر یا کوچکتر از $(2)(10^{-6})$ بگیریم داریم:

$$|a-a'| < 2 \times 10^{-2}: \quad |\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}| < \frac{10^4}{2}|a-a'| < 10^{-2}$$

ضمناً این δ از δ مقدماتی، یعنی 10^{-2}، کوچکتر است، پس شرط اولیهٔ دور ماندن از 0 نیز خود به خود برقرار می‌شود.

در دو مثال آخر سعی کردیم نشان دهیم تأمین دقت لازم در یک محاسبه ممکن است چندان آسان نباشد. گاهی اوقات درجهٔ دقت در داده‌ها باید بسیار زیاد باشد تا دقت مورد نظر در نتیجه حاصل شود. به طور کلی این انتظار که بتوان با اعمال دقت کافی در ارائه داده‌ها، دقت مورد نظر در نتیجهٔ مورد نظر را تأمین کرد "پایداری محاسبه" می‌نامیم. این ویژگی همیشه برقرار نیست. مثلاً تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۲ نمایش داده شده است. مقدار این تابع در $x = 0$ برابر ۱ است. توجه کنید که هیچ $\delta > 0$ وجود ندارد که $|x - 0| < \delta$ لزوماً دقت مثلاً $|f(x) - f(0)| < 10^{-1}$ را تضمین کند زیرا که اگر $x > 0$ و $|x - 0| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(0)| = 1 - x$ و $x > 0$ هر قدر کوچکتر شود، $1 - x$ بزرگتر می‌شود.

در زیر تعریف دقیق پایداری محاسبهٔ f در نقطه‌ای از قلمرو f را توصیف می‌کنیم. عنوان معمول‌تری برای "پایداری محاسبه"، اصطلاح "پیوستگی" است که در اینجا نیز به‌کار خواهیم برد، ولی کلمهٔ پیوستگی بار شهودی زیادی دارد که گاهی موجب سوء تفاهم می‌شود. دانشجو باید همواره تعریف دقیق زیر و آنچه با استدلال صحیح از آن نتیجه می‌شود در نظر داشته باشد و بیش از آن را از مفهوم پیوستگی انتظار نداشته باشد.

(۹—۲) تعریف. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و $a \in S$. می‌گوییم تابع f در a پیوسته است (یا تابع f در a از پایداری محاسبه برخوردار است) در صورتی که برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ متناظری وجود داشته باشد که برای هر نقطهٔ x از دامنهٔ f که $|x - a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

اگر تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطهٔ دامنهٔ خود پیوسته باشد، تابع f را پیوسته می‌نامیم. همان طور که

اشاره کردیم، نباید از کلمهٔ پیوستگی انتظاراتی فرای تعریف داشت. در مثال اول زیر تابع فقط در یک نقطه از دامنه خود پیوسته است و در مثال دوم تابعی پیوسته داریم که اطلاق کلمهٔ پیوسته برای آن دور از انتظار به نظر خواهد رسید.

چند مثال

(۹−۳−۱) تابع $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{گویا } x \\ 1-x & \text{ناگویا } x \end{cases}$$

نشان می‌دهیم این تابع فقط در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است. از تمرین‌های بخش ۱ یادآوری می‌کنیم که در هر بازهٔ باز از اعداد حقیقی، هم اعداد گویا و هم اعداد ناگویا یافت می‌شوند. بنابراین شکل تقریبی نمودار این تابع (شکل ۳) را می‌توان به صورت دو نقطه‌چین متراکم روی خطوط $y=x$ و $y=1-x$ تصور کرد که در نقطهٔ $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ تجمع می‌یابند. نشان می‌دهیم این تابع در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است. برای $\epsilon>0$ داده شده، ادعا می‌کنیم $\delta=\epsilon$ در نقطهٔ $\frac{1}{2}$ شرط تعریف را برآورده می‌کند. فرض کنید $|x-\frac{1}{2}|<\epsilon$. اگر x گویا شد که $f(x)=x$ و $|f(x)-f(\frac{1}{2})|<\epsilon$. اگر x ناگویا باشد، داریم $f(x)=1-x$، پس $f(x)-\frac{1}{2}=1-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-x$، پس مجدداً $|f(x)-f(\frac{1}{2})|=|\frac{1}{2}-x|=|x-\frac{1}{2}|<\epsilon$. حال نشان می‌دهیم برای $a\neq\frac{1}{2}$، تابع در a پیوسته نیست. ϵ را برابر $|\frac{1}{2}-a|>0$ می‌گیریم. $\delta>0$ هرچه باشد، نقطه‌ای x ارائه می‌کنیم که $|x-a|<\delta$ ولی $|f(x)-f(a)|\not<\epsilon$. دو حالت در نظر می‌گیریم. اگر a گویا باشد داریم $f(a)=a$ و نقطهٔ ناگویای x را آنقدر نزدیک به a می‌گیریم که اولاً a و x در یک طرف $\frac{1}{2}$ باشند، ثانیاً $|x-a|<\delta$. در این صورت $f(x)=1-x$ و:

$$|f(x)-f(a)|=|1-x-a|=|(\frac{1}{2}-x)+(\frac{1}{2}-a)|$$

حالت دیگر اینکه a ناگویا و $f(a)=1-a$. در این حالت x را نقطه‌ای گویا آنقدر نزدیک به a

می‌گیریم که x و a هر دو در یک طرف $\frac{1}{2}$ باشند و $|x-a|<\delta$. در این صورت نیز داریم:

$$|f(x)-f(a)|=|x-1+a|=|(\frac{1}{2}-x)+(\frac{1}{2}-a)|$$

چون x و a در یک طرف $\frac{1}{2}$ انتخاب شده‌اند، $\frac{1}{2}-x$ و $\frac{1}{2}-a$ هم علامتند، پس:

$$\begin{aligned}|(\tfrac{1}{2}-x)+(\tfrac{1}{2}-a)| &= |\tfrac{1}{2}-x|+|\tfrac{1}{2}-a| \\ &> |\tfrac{1}{2}-a|=\epsilon\end{aligned}$$

در نتیجه مستقل از اینکه $\delta>0$ چه باشد، برای چنین x که $|x-a|<\delta$ داریم $|f(x)-f(a)|>\epsilon$، یعنی f در a پیوسته نیست.

(۹—۳—۲) مجموعهٔ اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. نشان می‌دهیم هر تابع $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته است. این ممکن است با شهود پیوستگی سازگار به نظر نرسد ولی ملاحظه خواهیم کرد که "گسستگی دامنه" در واقع پیوستگی تابع را سهل‌تر می‌سازد. نشان می‌دهیم f در هر نقطهٔ دامنه، $n\in\mathbb{Z}$، پیوسته است. $\epsilon>0$ هرچه باشد، می‌گیریم $\delta=1$. حال اگر x عنصری از دامنه باشد که $|x-n|<1$، چون x عدد صحیح است، لزوماً داریم $x=n$، پس $|f(x)-f(n)|=0<\epsilon$ و شرط پیوستگی برقرار است. این مثال را می‌توان این‌گونه تعبیر کرد که اگر قرار باشد داده‌ها همه عدد صحیح باشند، تنها دادهٔ "نزدیک" به یک عدد صحیح خود آن است، پس خطایی در محاسبه صورت نمی‌گیرد.

(۹—۳—۳) در مقابل مثال قبل فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی باشد که همه‌جا صفر است به استثنای در مقادیر صحیح n که در آن $f(n)\neq 0$. نشان می‌دهیم f در n پیوسته نیست. $\epsilon>0$ را کوچکتر از $|f(n)|$ می‌گیریم. حال $\delta>0$ هرچه باشد، نقطه‌ای x وجود دارد که $|x-n|<\delta$ و x عدد صحیح نیست. پس $f(x)=0$ و $|f(x)-f(n)|=|f(n)|>\epsilon$ و f در n پیوسته نیست. به سادگی می‌توان نشان داد f در هر نقطهٔ غیر عدد صحیح پیوسته است.

در مورد کارایی تعریف پیوستگی در رابطه با محاسبات عملی آن‌گونه که در آغاز این بخش مورد بحث قرار گرفت، ممکن است ایراد زیر به ذهن برسد. ما پیوستگی یا پایداری محاسبهٔ تابع f در یک

نقطهٔ a را تعریف کردیم. از آنجا که مقدار a ممکن است فقط به طور تقریبی معلوم باشد و تابع ممکن است در نقاط به دلخواه نزدیک به a پیوسته نباشد (مانند مثال ۹ ـ ۳ ـ ۱)، این تعریف چه ارزش عملی می‌تواند داشته باشد؟ در زیر نشان می‌دهیم که در واقع اگر f در a پیوسته باشد، برای هر دو مقدار $a_۱$ و $a_۲$ به اندازهٔ کافی نزدیک به a، فاصله $|f(a_۱) - f(a_۲)|$ نیز کوچک است، و بالعکس برقراری این رابطه دال بر پیوستگی f در a است.

(۹ـ۴) گزاره. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و $a \in S$. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > ۰$، عددی $\delta > ۰$ وجود داشته باشد که برای هر دو نقطهٔ $a_۱$ و $a_۲$ در دامنهٔ f که در بازهٔ $]a - \delta, a + \delta[$ باشند، داشته باشیم $|f(a_۱) - f(a_۲)| < \epsilon$.

برهان. نخست توجه کنید که اگر ویژگی ذکر شده برقرار باشد، تابع در a پیوسته است زیرا که می‌توان یکی از $a_۱$ و $a_۲$ را خود نقطهٔ a گرفت و دیگری را نقطه‌ای دلخواه x در $]a - \delta, a + \delta[$. پس $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

بالعکس فرض کنید f در a پیوسته است. اگر $\epsilon > ۰$ داده شده باشد، طبق پیوستگی f در a، برای $\frac{\epsilon}{۲} > ۰$، عددی $\delta > ۰$ وجود دارد که $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{۲}$. حال اگر برای $a_۱$ و $a_۲$ در دامنه تابع داشته باشیم $|a_۱ - a| < \delta$ و $|a - a_۲| < \delta$، نتیجه می‌شود که:

$$|f(a_۱) - f(a_۲)| \leq |f(a_۱) - f(a)| + |f(a) - f(a_۲)| < \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon$$

□

بدین ترتیب اگر داده‌ها همه نزدیک به یک نقطهٔ پیوستگی تابع f باشند، می‌توان انتظار داشت که نتایج محاسبه با آنها نیز به هم نزدیک باشند.

نکتهٔ قابل ذکر دیگر اینکه همچنان که مثال‌های ۹ ـ ۱ ـ ۲ و ۹ ـ ۱ ـ ۳ در آغاز این بخش نشان دادند، برای $\epsilon > ۰$ داده شده، $\delta > ۰$ مناسب ممکن است علاوه بر وابستگی به ϵ، به نقطه‌ای که در آن پیوستگی مطرح است وابسته باشد. در مثال ۹ـ۱ـ۱، برای $\epsilon > ۰$ داده شده، یک $\delta > ۰$ واحد برای هر نقطهٔ دامنه تعریف پیوستگی را برقرار می‌ساخت ولی در مثال‌های ۹ـ۱ـ۲ و ۹ـ۱ـ۳، مقدار δ

به اندازه نقطهٔ a در دامنه نیز وابسته بود. در حالتی که برای $\epsilon > 0$ داده شده، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد که در سراسر دامنه کار کند، یعنی هرگاه $|x_1 - x_2| < \delta$، آنگاه $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ می‌گوییم تابع f در دامنهٔ خود به طور یکنواخت پیوسته است. در حالت کلی، مانند مثال $f(x) = x^2$، در مثال ۹—۱—۲، یا مثال $f(x) = \frac{1}{x}$ در مثال ۹—۱—۳ با دامنهٔ $x > 0$، تابع در سراسر دامنه خود پیوسته است ولیکن از پیوستگی یکنواخت برخوردار نیست.