بسمه تعالی

جزوه

ریاضی ۱

دانشگاه

صنعتی امیر کبیر

استاد

دکتر عرب زاده

«ریاضی یک»

دکتر عزیزاده

1

حامد نفیسی
hamednafisi@gmail.com

مجموعه اعداد مختلط

یک عدد مختلط زوج مرتبی است از اعداد حقیقی x و y به صورت $z=(x,y)$ به طوریکه مشمول قواعد زیر:

۱- زوج مرتب $x=(x,0)$ به صورت یک عدد حقیقی در نظر گرفته می‌شود
$(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$

۲- زوج مرتب $i=(0,1)$ به صورت واحد عدد مختلط در نظر گرفته می‌شود

۳- دو عدد مختلط $z_1=(x_1,y_1)$ و $z_2=(x_2,y_2)$ با یکدیگر برابرند اگر و تنها اگر
$x_1=x_2$ و $y_1=y_2$

۴- مجموع حاصلضرب دو عدد مختلط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_3,y_3)=z_3$$

$$z_1z_2=(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)=(x_3,y_3)=z_3$$

مجموعه اعداد مختلط: مجموعه تمام زوج‌های مرتبی که از قواعد فوق تبعیت می‌کنند مجموعه اعداد مختلط می‌گویند و با $\mathbb{C}$ نشان می‌دهند

تقسیم: از تقسیم عدد مختلط z_1 بر عدد مختلط z_2، عدد مختلطی مانند z_3 نتیجه می‌شود که

$$\frac{z_1}{z_2}=z_3 \Longleftrightarrow z_1=z_2z_3$$
$(z_2 \neq 0)$

عدد مختلط را به صورت دیگری نیز می توان نشان داد

$i.i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

$iy = (0,1)(y,0) = (0,y)$

$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x + iy \quad x,y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1$

جمع و ضرب و تقسیم اعداد مختلط در شکل جبری :

$z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$

$z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1 i y_2 + i x_2 y_1 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$

$z_1 = 1 + 2i \qquad \frac{z_1}{z_2} = z \qquad \frac{1+2i}{1-i} = z = x + iy$

$z_2 = 1 - i \qquad 1 + 2i = (1-i)(x+iy)$

$= x - ix + iy + y = (x+y) + i(y-x) = 1 + 2i$

$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - x = 2 \end{cases} \qquad y = 3/2 \quad x = -1/2$

مزدوج یک عدد مختلط : مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ را به صورت $\bar{z}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$\bar{z} = x - iy = x + i(-y)$

$z\bar{z} = x^2 + y^2$

1. $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$

2. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{1+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3i-1}{2}$

قدر مطلق یک عدد مختلط : قدر مطلق یک عدد مختلط را با $|z|$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می کنیم :

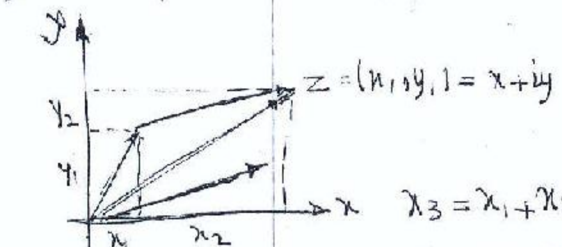
$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad |x| = \sqrt{x^2}$

$|z|^2 = zz' \quad , \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$\mathbb{C} = \{ (x,y) = x + iy \mid i^2 = -1,\ i = (0,1),\ x,y \in \mathbb{R} \}$

هندسه اعداد مختلط :



$x_3 = x_1 + x_2$

$y_3 = y_1 + y_2$

مکان هندسی نقاط Z را بیابید که در معادلات زیر صدق کند.

1) $|z+i|=1$ $\qquad z=x+iy=(x,y)$

2) $|z+i|\leq 1$ $\qquad |x+iy+i|=|x+i(y+1)|=1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2}=1 \Rightarrow x^2+(y+1)^2=1$

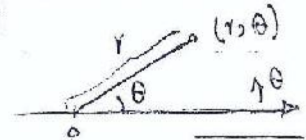
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ معادله کلی دایره $|z-z_0|=R$

* $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|\leq\sqrt{2}$ $\qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ $\qquad |z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$|z+i|\leq\sqrt{2}\,|z-i| \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2}\leq\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$x^2+(y-3)^2\geq 8$

مختصات قطبی:



$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ شرط یکتایی $r>0$ ، $0\leq\theta<2\pi$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad tg\,\theta=y/x$

نمایش یک عدد در مختصات قطبی:

یک عدد مختلط در مختصات قطبی به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\,cis\,\theta$

$\theta=\arg(z)$ آرگومان

namednafis@gmail.com

ضرب و تقسیم دو عدد مختلط $z_1=r_1\,cis\,\theta_1$ ، $z_2=r_2\,cis\,\theta_2$ در مختصات قطبی برابر است:

$z_1z_2=(r_1\,cis\,\theta_1)(r_2\,cis\,\theta_2)=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))=r_1r_2\,cis(\theta_1+\theta_2)$

قضیه: اگر $z_1=r_1\,cis\,\theta_1$ ، $z_2=r_2\,cis\,\theta_2$ باشند آنگاه

$\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$

مثال: اگر $z_1=\sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{3}$ ، $z_2=2\,cis\frac{\pi}{4}$

$z_1z_2=3\sqrt{2}\,cis\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

نتیجه: اگر $z_1=r_1\,cis\,\theta_1$ ، $z_2=r_2\,cis\,\theta_2$ ، ... ، $z_n=r_n\,cis\,\theta_n$

$\arg(z_1z_2\cdots z_n)=\sum_{i=1}^{n}\arg(z_i)$

$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\,cis(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)$

حالت خاص: $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$ $\left(\begin{matrix}r_1=r_2=\cdots=r_n\\ \theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n\end{matrix}\right)$

$z^n=r^n\,cis(n\theta)$

$(z=1\,cis\,\theta)$

$(cis\,\theta)^n=cis(n\theta) \Longleftrightarrow (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

$n\in N$ فرمول دموآور

تمرین: ثابت کنید: i) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$

2) ثابت کنید فرمول دموآور برای $n \in \mathbb{Z}$

مثال: حاصل عبارات زیر را تعیین کنید. $A=(1+i)^2$ $B=(1+i)^{99}$ $C=(1+i)^{100}$

$D=(1+i)^n$ $(n\in\mathbb{N})$

$A=2i$ $\quad 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$B=(\sqrt{2})^{99}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{99}=(\sqrt{2})^{99}\left(\cos\frac{99\pi}{4}+i\sin\frac{99\pi}{4}\right)$

$C=-2^{50}$

مثال: به کمک فرمول دموآور بسط $\sin 5\theta$، $\cos 5\theta$، $\sin 3\theta$، $\cos 3\theta$

$n=3 \quad (\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$

$n=5 \quad (\cos\theta+i\sin\theta)^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta$

محاسبه ریشه‌های nام یک عدد مختلط: عدد مختلط z مفروض است. می‌خواهیم $z^{1/n}$ را محاسبه کنیم.

فرض کنیم z_0 یک جواب برای مسئله باشد. $z^{1/n}=z_0 \Leftrightarrow z=z_0^n$ (1)

(2) $\begin{cases} z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \\ z_0=r_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)\end{cases}$ $\quad r_0^n(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)^n = r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\Rightarrow r_0^n(\cos n\theta_0+i\sin n\theta_0)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$r_0^n=r \Rightarrow r_0=\sqrt[n]{r} \qquad n\theta_0=2k\pi+\theta \Rightarrow \theta_0=\frac{2k\pi+\theta}{n}$

مثال: ریشه‌های nام عدد مختلط -1 را به دست آورید.

$(-1)^{1/n}=?$ $\quad (-1)^{1/n}=z \Rightarrow z^n=-1 \Rightarrow z^n+1=0$ $\Downarrow$

معادله $z^n+1=0$ را حل کرده و جواب‌های آن را تعیین کنید. $(z\in\mathbb{C})$

$z^n=-1$ (1) $\qquad$ (1),(2) $\Rightarrow r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\cos\pi+i\sin\pi$

(2) $\begin{cases} z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \\ -1=\cos\pi+i\sin\pi\end{cases}$ $\quad r^n=1 \Rightarrow r=1 \quad n\theta=2k\pi+\pi$

$\theta=\frac{2k\pi+\pi}{n} \quad k=0,1,2,\ldots,n-1$

جواب‌ها $\left(1,\frac{2\pi}{n}\right),\left(1,\frac{3\pi}{n}\right),\ldots,\left(1,\frac{2(n-1)\pi+\pi}{n}\right)$

مکان این ریشه‌ها دایره‌ای به شعاع (1)

مثال: تحقیق کنید که اتحاد زیر برقرار است.

$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad (z\neq 1)$

$1-z+z^2-z^3\cdots=\frac{1+z^{n+1}}{1+z} \quad (z\neq -1)$

ثانیاً: ریشه‌های nام عدد مختلط یک را تعیین کنید

ثالثاً: ثابت کنید مجموع ریشه‌ها مساوی صفر است و سپس تساوی زیر را نشان دهید

$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-1$

$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=0$

$z^n=1 \Rightarrow (1)^{\frac{1}{n}}=z$

$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\cos 0+i\sin 0 \qquad r^n=1 \Rightarrow r=1$

$n\theta=2k\pi+0 \qquad \theta=\frac{2k\pi}{n} \qquad k=0,1,2,\dots,n-1$

$1=(1,0)=1 \qquad w=(1,\frac{2\pi}{n})=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$

$w^2=(1,\frac{4\pi}{n}) \qquad 1,w,w^2,w^3,\dots,w^{n-1}=$

$1+w+w^2+\dots+w^{n-1}=\frac{1-w^n}{1-w}=0 \quad (w^n=1)$

تمرین: ریشه‌های دهم عدد مختلط $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$ را تعیین کنید: $z^{\frac{1}{10}}$

$Z=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\times\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\mathrm{cis}(\frac{4\pi}{3})$

$Z=\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3})$

معادله زیر را حل کنید و جواب‌های آن را در مجموعه اعداد مختلط تعیین کنید.

$z^6+z^4+z^2+1=z^5+z^3+z \Leftrightarrow 1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6=0$

$1+z+z^2+z^3+\dots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z} \quad (z\neq 1)$

$1-z+z^2-z^3\dots+(-z)^{n-1}=\frac{1-(-z)^n}{1+z} \quad (z\neq -1)$

$n-1=6 \Rightarrow n=7$

$1-z+z^2-z^3+\dots+z^6=\frac{1-(-z)^7}{1+z}=\frac{1+z^7}{1+z}=0$

$\Leftrightarrow z^7+1=0 \quad (z\neq -1)$

تمرین:

$z^4-4z^2+13=0 \qquad z^2=t\in\mathbb{C}$

$(z+1)^2+(z+1)+1=0 \qquad z+1=t$

تمرین: اگر $f(z)$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0 \qquad a_i\in\mathbb{R}$

درصورتیکه $f(z_1)=0 \Leftarrow f(\bar{z}_1)=0$

تمرین: ثابت کنید که $\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n=\frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$

$\left(\frac{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^n=\left(\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}\right)^n=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))^n}=$

$\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos n\alpha-i\sin n\alpha}$

تمرین: مکان هندسی عدد مختلط z را در حالت‌های زیر تعیین کنید

$|z-i+1|+|z+i-1|=4 \Rightarrow |z-\underbrace{(i-1)}_{z_1}|+|z-\underbrace{(-i+1)}_{z_2}|=4$ تعریف بیضی است.

$4\leq|z-i+1|+|z+i-1|\leq 6$ ← اشتراک درون دو بیضی.

$|x+iy-i+1|+|x+iy+i-1|=4 \Leftrightarrow |(x+1)+i(y-1)|+|(x-1)+i(y+1)|=4$

$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=4 \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

مکان بیضی است.

اگر $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ ثابت کنید $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ $\left(z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta\right)$

$z^2-2\cos\theta z+1=0 \Rightarrow z=\frac{\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}}{1}$, $\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta$

$\frac{\cos\theta\pm\sqrt{i^2\sin^2\theta}}{1} \Rightarrow z=\cos\theta\pm i\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{z}=\cos\theta\mp i\sin\theta$

$z^n=\cos n\theta\pm i\sin n\theta \quad \frac{1}{z^n}=\cos n\theta\mp i\sin n\theta$

$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$

اگر z یک عدد مختلط باشد مکان‌ها را تعیین و رسم کنید.

$Re(1/z)>1 \quad Im(1/z)<1 \quad z=x+iy$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

$\frac{x}{x^2+y^2}>1 \quad \frac{-y}{x^2+y^2}<1 \quad x>x^2+y^2 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2<\frac{1}{4}$

* * *

Hamed Nahisi

توابع حقیقی $(f: \mathbb{R}\to\mathbb{R})$

تعریف: فرض کنید تابع f روی تمام نقاط بازه I تعریف شده باشد بجز احتمالاً در نقطه a، $a\in I$. می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی که x به سمت a میل کند عدد L است اگر:

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0$ بطوریکه $|f(x)-L|<\epsilon$ وقتیکه $0<|x-a|<\delta$

و به اختصار می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=L$

قضیه: ثابت کنید حد در صورت وجود (در یک نقطه) منحصر به فرد است.

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ ، $\lim_{x\to a} f(x)=L_2$ باشد ثابت کنید $L_1=L_2$.

$\forall\epsilon>0, \exists\delta_1>0$ بطوریکه $|f(x)-L_1|<\epsilon$ وقتیکه $0<|x-a|<\delta_1$

$\forall\epsilon>0, \exists\delta_2>0$ بطوریکه $|f(x)-L_2|<\epsilon$ وقتیکه $0<|x-a|<\delta_2$

$\forall\epsilon>0, \exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ بطوریکه $|f(x)-L_1|<\epsilon$ ، $|f(x)-L_2|<\epsilon$ وقتیکه $0<|x-a|<\delta$

$\forall\epsilon>0, \ |L_1-L_2|=|L_1-f(x)+f(x)-L_2|\le|f(x)-L_1|+|f(x)-L_2|$

$\Rightarrow |f(x)-L_1|+|f(x)-L_2|<2\epsilon$

$\forall\epsilon>0 \quad |L_1-L_2|<2\epsilon \quad \epsilon=\frac{1}{2}|L_1-L_2|$

$\Rightarrow |L_1-L_2|<|L_1-L_2|$ *

* * *

تمرین: به کمک تعریف درستی حدهای زیر را تحقیق کنید (به کمک تعریف)

$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1$ $\quad \lim_{x\to 2} \sqrt{2x} = 2$ $\quad \lim_{x\to 1} x^3 = 1$ $\quad \lim_{x\to 1} (x^2+x+1) = 3$

$\lim_{x\to 1} (2x+1) = 3 \quad |2x+1-3| = |2x-2| = 2|x-1| < \epsilon$

$\Leftrightarrow |x-1| < \frac{\epsilon}{2} = \delta$

$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta(\epsilon) > 0$ بطوریکه $|f(x)-L| < \epsilon$ وقتیکه $0 < |x-a| < \delta$.

$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 \quad |x^2-4| = |x-2||x+2| < |x-2|5$

$|x-2|5 < \epsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{5}$

$\delta = 1 \Rightarrow |x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 3 < x+2 < 5$

$3 < |x+2| < 5 \Rightarrow \delta(\epsilon) = \operatorname{Min}\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$

$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1 \quad \left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x|} = |x-1| \cdot \frac{1}{|x|}$

$\delta = 1 \Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow 0 < |x| < 2$

$\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x| < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{|x|} < 2 \qquad \delta(\epsilon) = \operatorname{Min}(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2})$

قضیه: اگر m, n دو عدد ثابت باشند آنگاه

$\lim_{x\to a} (mx+n) = ma+n$

$m \neq 0 \Rightarrow |mx+n-ma-n| = m|x-a| < \epsilon \Leftrightarrow |x-a| < \frac{\epsilon}{|m|}$

$\Rightarrow \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{|m|}$

$m = 0 \Rightarrow |n-n| = 0 < \epsilon \Rightarrow \delta(\epsilon) = \epsilon \quad \lim_{x\to a} (n) = a$

قضیه: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = m$ آنگاه:

$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + m$

$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ بطوریکه $|(f(x)+g(x)) - (L+m)| < \epsilon$

وقتیکه $0 < |x-a| < \delta$

$\frac{\epsilon}{2} > 0 \;\; \exists \delta_1 > 0$ بطوریکه $|f(x)-b| < \frac{\epsilon}{2}$ وقتیکه $0 < |x-a| < \delta_1$

$\frac{\epsilon}{2} > 0 \;\; \exists \delta_2 > 0$ بطوریکه $|g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}$ وقتیکه $0 < |x-a| < \delta_2$

$\delta(\epsilon) = \operatorname{Min}\{\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$

$|f(x)+g(x)-b-M| = |(f(x)-b)+(g(x)-M)|$

$\leq |f(x)-b| + |g(x)-M| < \epsilon$

$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(L+M)| < \epsilon$

قضیه: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = M$ باشد ثابت کنید

$\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L.M$

حامد نیسی

اثبات: اثبات حالت ضرب را با تعریف ثابت کنید:

ثابت کنید: $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=LM$ ، $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ، $\lim_{x\to a} g(x)=M$

$$f(x)g(x) = f(x)g(x) - LM + LM + Mg(x) - Mg(x)$$

قضیه: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=M\neq 0$ باشد آن گاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

قضیه (حالت خاص ترکیب): اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آن گاه $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{g(x)}=\sqrt[n]{L}$ مشروط براینکه اگر n زوج $L>0$ باشد.

یادآوری حد چپ و راست: فرض کنید تابع f روی تمام نقاط بازه باز (a,c) تعریف شده باشد. حاکم حد تابع $f(x)$ وقتی که x از سمت راست به a میل کند عدد L است. ($x\to a^+$ ... $x>a \to x-a>0$)

$\forall \epsilon>0, \exists \delta(\epsilon)>0$ بطوریکه $|f(x)-L|<\epsilon$ وقتی که $0<x-a<\delta$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

حد چپ: (c,a) ($x\to a^-$ ، $x<a$ ، $x-a<0$)

$\forall\epsilon>0, \exists\delta(\epsilon)>0$ بطوریکه $|f(x)-L|<\epsilon$ وقتیکه $-\delta<x-a<0$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

به کمک دو تعریف حد راست و حد چپ نتیجه می‌شود

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=L_1$ ، $\lim_{x\to a^-} f(x)=L_2$ ، $L_1=L_2$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ ، $f(x)=[x]$

$$\lim_{x\to1^+}[x] = \lim_{x\to1^+} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to1^-}[x] = \lim_{x\to1^-} f(x) = 0$$

حد وجود ندارد

$g(x) = [1-x] \quad f(x) = [x] \quad f(x)+g(x) = K(x)$

$\lim_{x\to 1^+} K(x) = \lim_{x\to 1^+}([x]+[1-x]) = \lim_{x\to 1^+}[x] + \lim_{x\to 1^+}[1-x] = 1-1 = 0$

$\lim_{x\to 1^+}[x] = 1 \quad \lim_{1^+}[1-x] = -1$

$\lim_{x\to 1^-} K(x) = \lim_{x\to 1^-}([x]+[1-x]) = \lim_{x\to 1^-}[x] + \lim_{x\to 1^-}[1-x] = 0+0 = 0$

$f(x) = \begin{cases} -1 & x\leq 0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & x\leq 0 \\ -1 & x>0 \end{cases}$

چند قضیه مهم در رابطه با حد:

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $L>0$ آنگاه وجود دارد یک همسایگی اطراف a، I بطوریکه

$\forall x\in I \ (x\neq a) \Rightarrow f(x)>0$

$\forall \epsilon>0 .\ \exists \delta>0$ بطوریکه $|f(x)-L|<\epsilon$ وقتیکه $0<|x-a|<\delta$

$\forall \epsilon>0 .\ \exists \delta>0$ بطوریکه $L-\epsilon<f(x)<L+\epsilon$ " $x\in(a-\delta, a+\delta)$ $(x\neq 0)$

$\epsilon=L \ \exists \delta_1>0$ " $0<f(x)$ " $x\in(a-\delta_1, a+\delta_1)$

$\forall x\in(a-\delta_1, a+\delta_1) = I \Rightarrow f(x)>0$ $(x\neq 0)$

قضیه: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $L<0$ آنگاه وجود دارد یک همسایگی اطراف a باشد، I بطوریکه

$\forall x\in I \Rightarrow f(x)<0$

$\forall \epsilon>0 .\ \exists \delta>0$ بطوریکه $|f(x)-L|<\epsilon$ فرض کنید $0<|x-a|<\delta$

$\forall \epsilon>0 .\ \exists \delta>0$ " $L-\epsilon<f(x)<L+\epsilon$ " $x\in(a-\delta, a+\delta)$ $(x\neq 0)$

$\epsilon=-L \ \exists \delta_1>0$ " $0>f(x)$ " $x\in(a-\delta_1, a+\delta_1)$

$\forall x\in(a-\delta_1, a+\delta_1) = I \Rightarrow f(x)<0$ $(x\neq 0)$

قضیه: فرض کنید تابع f روی تمام نقاط بازه باز I تعریف شده باشد بجز احتمالاً a، $a\in I$ و نیز فرض کنیم وجود دارد عدد M و عدد مثبت δ بطوریکه: $f(x)\geq M$ وقتیکه $0<|x-a|<\delta$ (1)

در صورتیکه: $\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow L\geq M$

اثبات: برهان خلف، اگر $L\geq M$ نباشد، آنگاه $L<M$ یا $M-L>0$

$\forall \epsilon>0 .\ \exists \delta_1>0$ بطوریکه $L-\epsilon<f(x)<L+\epsilon$ وقتیکه $0<|x-a|<\delta_1$

$\epsilon=M-L \ \exists \delta_2>0$ بطوریکه $f(x)<M$ وقتیکه $0<|x-a|<\delta_2$ (2)

$\exists \delta_3 = \mathrm{Min}(\delta_1, \delta_2)$ بطوریکه: $0<|x-a|<\delta_3$ $\begin{cases} f(x)\geq M \\ f(x)<M \end{cases}$

قضیه: اگر $f(x)\leq M$ وقتیکه $0<|x-a|<\delta$

اثبات (برهان خلف): اگر $M \le L$ باشد آنگاه $L > M$ یا $L - M > 0$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ به طوریکه $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ وقتیکه $0 < |x-a| < \delta_1$

$\epsilon = L - M \ \exists \delta_2 > 0$ " $M < f(x)$ وقتیکه $0 < |x-a| < \delta$

قضیه فشردگی: فرض کنید سه تابع f و g و h در تمام نقاط بازه باز I تعریف شده باشند بجز احتمالاً در نقطه a ، $a \in I$ و نیز فرض کنید داشته باشیم

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x \in I \quad (x \ne a)$$

در صورتیکه $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L$

اثبات: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ به طوریکه $|g(x) - L| < \epsilon$ وقتیکه $0 < |x-a| < \delta$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ به طوریکه $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ وقتیکه $0 < |x-a| < \delta_1$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ " $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$ وقتیکه $0 < |x-a| < \delta_2$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$ وقتیکه $0 < |x-a| < \delta$

اولین کاربرد: ثابت کنید که $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

دومین کاربرد: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ و تابع $g(x)$ در یک همسایگی a کراندار باشد آنگاه $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = 0$

(تابع $g(x)$ را در بازه I کراندار گوییم اگر وجود داشته باشد عدد مثبت M به طوریکه $|g(x)| \le M \quad \forall x \in I$) $\quad |\sin \frac{1}{x}| \le 1 \quad x \ne 0$

اثبات: $\forall M > 0$ به طوریکه $|g(x)| \le M \Leftarrow$

$-M \le g(x) \le M \quad \forall x \in I \ (x \ne a) \quad (a \in I)$

$f(x) \ge 0 \quad -Mf(x) \le g(x)f(x) \le Mf(x)$

$f(x) \le 0 \quad -Mf(x) \ge g(x)f(x) \ge Mf(x)$

$(n \in \mathbb{N}) \quad \lim_{x\to 0} |x^n \sin \frac{1}{x}| = 0 \quad f(x) = x^n \quad g(x) = \sin \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad |g(x)| \le 1 \quad x \ne 0$

مثال: اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f(x)| \le x^2$ ثابت کنید $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ (ثابت کنید $f'(0) = 0$) $\quad \left(f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$

$-x^2 \le f(x) \le x^2 \quad \forall x$

اگر $x > 0 \Rightarrow -x \le \frac{f(x)}{x} \le x \quad \lim_{x\to 0^+} (-x) = \lim_{x\to 0^+} (x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$

اگر $x < 0 \Rightarrow -x \ge \frac{f(x)}{x} \ge x \quad \lim_{x\to 0^-} (-x) = \lim_{x\to 0^-} (x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0$

حدهای بینهایت:

فرض کنید تابع f روی تمام نقاط بازه باز I تعریف شده باشد بجز احتمالاً a $(a \in I)$ میگوییم $f(x)$ بدون کران افزایش پیدا می‌کند

hamedhatisi@gmail.com

وقتی که $x \to a$ (از سمت a میل می‌کند) اگر:

$\forall N>0\ \exists \delta>0$ به طوریکه $f(x)>N$ ، وقتیکه $0<|x-a|<\varepsilon$

$f(x)\in(N,+\infty)$

به اختصار می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$

تمرین: اگر n یک عدد طبیعی باشد، ثابت کنید $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{اگر n زوج}\\ -\infty & \text{اگر n فرد}\end{cases}$$

فرض کنید تابع f روی $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع f وقتی که x بدون کران افزایش پیدا کند عدد L است اگر:

$\forall \varepsilon>0\ \exists N>0$ به طوریکه $|f(x)-L|<\varepsilon$ وقتیکه $x>N$ ، $x\in(N,+\infty)$

و به اختصار می‌نویسیم: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$

تمرین: اگر n عدد طبیعی باشد $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$

پیوستگی تابع:

تابع f را در عدد a پیوسته گوییم اگر این سه شرط برقرار باشند.

1) $a\in D_f$ ($f(a)$ تعریف شده باشد)

2) $\lim_{x\to a} f(x)=L$

3) $L=f(a)$

در غیر اینصورت تابع f را در a ناپیوسته گوییم.

موضوع: حد و پیوستگی

* تابع f را در a پیوسته گوییم اگر $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

تذکر: تابع f را در a پیوسته گوییم

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ به طوریکه $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ وقتیکه $|x-a|<\delta$

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ در $x=3$ را بررسی کنید.

$D_f=\mathbb{R}-\{3\}$ $\quad x\notin D_f$

مثال: پیوستگی تابع $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ 9 & x=3\end{cases}$ را بررسی کنید.

$D_g=\mathbb{R}$ $\quad g(3)=9$

$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ $\quad g(3)=9\neq L=6$

مثال: آیا تابع $k(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ 6 & x=3\end{cases}$ در نقطه $x=3$ پیوسته است.

به این نوع ناپیوستگی، ناپیوستگی رفع شدنی گویند اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد با تعریف $f(a)=L$ تابع در a پیوسته است.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در نقطه ($a=0$) را بررسی کنید.

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ $\quad 0\notin D_f$

$D_g = \mathbb{R} \quad g(0) = 5 \quad \lim_{x \to 0} g(x)$ وجود ندارد $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$

قضایای پیوستگی:

۱- یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n در تمام نقاط دامنهٔ آن پیوسته است.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$

۲- اگر دو تابع f و g در a پیوسته باشند $\left(\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \,;\, \lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$

آنگاه $f \pm g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ (به شرط آنکه $g(a) \neq 0$) در a پیوسته‌اند.

اثبات: کافیست در قضایای حد به جای L ، $f(a)$ را قرار دهیم و $M = g(a)$

$\lim_{x \to a} (\text{تابع})(x) = (\text{تابع})(a)$

$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) =$

$f(a) + g(a) = (f+g)(a)$

۳- حد ترکیب:

اگر $b = \lim_{x \to a} g(x)$ (تابع g در a حد داشته باشد)، تابع f در b پیوسته باشد، آنگاه:

$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(b)$

اثبات: f در b پیوسته است $\lim_{y \to b} f(y) = f(b)$

① $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ به طوری که $|f(y) - f(b)| < \epsilon$ وقتی که $|y - b| < \delta$

② $\forall \epsilon_1 > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ به طوری که $|g(x) - b| < \epsilon_1$ وقتی که $0 < |x - a| < \delta_1$

③ $\epsilon_1 = \delta \Rightarrow \exists \delta_2 > 0$ به طوری که $|g(x) - b| < \delta$ وقتی که $0 < |x - a| < \delta_2$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \delta_2 > 0$ به طوری که $|f(y) - f(b)| < \epsilon$ وقتی که $|y - b| < \delta$

وقتی که $0 < |x - a| < \delta_2$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ به طوری که $|f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$ وقتی که $0 < |x - a| < \delta_2$

$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$

نتیجه (پیوستگی مرکب)

اگر g در a پیوسته، و f در $g(a)$ پیوسته باشد آنگاه $f \circ g$ در a پیوسته است.

$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f \circ g(a)$

$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$

مثال: اگر تابع f در عدد t پیوسته باشد ثابت کنید:

$\lim_{k \to 0} f(t - 2k) = f(t)$

تابع $g(k)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $g(k) = t - 2k$

$\lim_{k \to 0} g(k) = t \qquad f(t - 2k) = f(g(k))$

$\lim_{k \to 0} f(t - 2k) = \lim_{k \to 0} f(g(k)) = f\left(\lim_{k \to 0} g(k)\right) = f(t)$

14

پیوستگی

پیوستگی راست در نقطه a: تابع f را از سمت راست در a پیوسته گوییم اگر: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

پیوستگی چپ در نقطه a: تابع f را از سمت چپ در a پیوسته گوییم اگر: $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

نتیجه‌ای که از سه تعریف پیوستگی در a، پیوستگی راست در a، پیوستگی چپ در a به سادگی به دست می‌آید:

تابع f در a پیوسته است اگر و فقط اگر از چپ و راست در a پیوسته باشد.

$f(x)=[x]$ $\quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \quad \lim_{x\to 1} f(x) =$ وجود ندارد

تعریف (پیوستگی در فاصله (a,b)): تابع f را در بازه باز (a,b) پیوسته گوییم اگر در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.

تعریف (پیوستگی در فاصله $[a,b)$): تابع f را در بازه $[a,b)$ پیوسته گوییم اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱- f در بازه (a,b) پیوسته باشد.

۲- f در a پیوستگی راست داشته باشد.

تعریف (پیوستگی در فاصله $(a,b]$): تابع f را در بازه $(a,b]$ پیوسته گوییم اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱- f در بازه (a,b) پیوسته باشد.

۲- f در b پیوستگی چپ داشته باشد.

تعریف (پیوستگی روی بازه $[a,b]$): تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته گوییم اگر:

۱- f در بازه (a,b) پیوسته باشد.

۲- f از سمت راست a پیوسته باشد.

۳- f از سمت چپ b پیوسته باشد.

مثال: $f(x)=\begin{cases} x & 1\le x\le 2 \\ 0 & x\in \mathbb{R}-[1,2] \text{ در غیر اینصورت} \end{cases}$

قضیه (مقدار میانی - Mean valu thm): اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و $f(a)\neq f(b)$ آنگاه به ازای هر مقدار دلخواه K بین $f(a)$ و $f(b)$ وجود دارد حداقل یک c، $c\in(a,b)$ به طوری که $f(c)=K$

مثال: ثابت کنید که معادله $x^{19}+x+1=0$ حداقل یک ریشه در بازه $(-1,0)$ دارد.

$f(x)=x^{19}+x+1 \quad [-1,0]$

$f(-1)=-1 \quad f(0)=1$

مشتق

$\forall k \in (-1,1)\ \exists c \in (-1,0)$ به طوریکه $f(c)=k$

$k=0 : \exists c_1 \in (-1,0)$ به طوریکه $f(c_1)=0$

$c_1^n + c_1 + 1 = 0 \quad c_1 \in (-1,0)$

مثال: ثابت کنید که معادله $x^n + x + \alpha = 0$ که در آن n یک عدد طبیعی فرد و α عدد حقیقی ثابتی می باشد دارای حداقل یک ریشه در حدود اعداد حقیقی است.

$f(x) = x^n + x + \alpha$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}$ به طوریکه $f(x_1) > 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists x_2 \in \mathbb{R}$ به طوریکه $f(x_2) < 0$

$k \in (f(x_2), f(x_1))\ \exists c \in \mathbb{R}\ \ f(c)=k$

$k=0\ \exists c \in \mathbb{R} \Rightarrow f(c)=0$

مشتق: مشتق تابع f تابعی است که با علامت f' نشان داده می شود و تابع f' در نقطه مانند x از دامنه تابع برابر است با

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در هر نقطه مانند x از دامنه تابع پیدا کنید

$D_f = [x \mid x \geq 0]$ $\quad f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x \neq 0 \qquad (D_{f'} \subseteq D_f)*$

مشتق

$x=a \quad f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$\Rightarrow \boxed{f'(a) = \lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ در یک نقطه خاص

مثال: $f(x)=\sin x$ $\quad f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x\cos\Delta x + \sin\Delta x\cos x - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin x \frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin x}{\Delta x}\right] = \sin x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x}{\Delta x} = \sin x\times 0 + \cos x\times 1 = \cos x$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0$

مثال: مشتق تابع $f(x)=|x-2|$ را در نقطه $x=2$ به دست آورید

$f(2)=0 \quad f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$

$\lim_{x\to 2^-} -\frac{x-2}{x-2} = -1$

$\Rightarrow f'(2) =$ تعریف نشده، وجود ندارد

تعریف: تابع f را در a مشتق پذیر گوئیم اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد.

تعریف: تابع f را مشتق پذیر گوئیم اگر در تمام نقاط دامنه تابع مشتق پذیر باشد.

مشتق

قضیه (شرط لازم مشتق‌پذیری، ارتباط مشتق‌پذیری و پیوستگی)

اگر تابع f در a مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه تابع f در a پیوسته است.

فرض: $f'(a)$ وجود دارد $\Longleftrightarrow$ $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود دارد

حکم: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right) \quad (x-a\neq 0)$$

$$\lim_{x\to a}(x-a)=0 \qquad =\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0$$

قضایای مشتق: (قوانین مشتق)

قرارداد: اگر $y=f(x)$ مشتق تابع f را علاوه بر f' با علامت‌های $D_x y$، y' و $\frac{dy}{dx}$ نشان می‌دهند.

قضیه: اگر $y=f(x)=c$، c ثابت آن‌گاه $D_x c=0$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 0=0$$

قضیه: اگر $y=f(x)=x^n$ و n عدد طبیعی آن‌گاه $D_x(x^n)=nx^{n-1}$

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})=a^n-b^n$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+O(x)\Delta x+\dots\right]=nx^{n-1}$$

مشتق

قضیه: اگر دو تابع f و g در دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه $f\pm g$، $f\cdot g$، $\frac{f}{g}\ (g\neq 0)$ مشتق‌پذیر شده و داریم:

$$D_x(f\pm g)=D_x f\pm D_x g$$

$$D_x(fg)=gD_x f+fD_x g \qquad D_x\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gD_x f-fD_x g}{g^2}$$

$$D_x(fg)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(fg)(x+\Delta x)-(fg)(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=g(x)f'(x)+f(x)g'(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)=g(x)$$

(در تقسیم $f(x)g(x)$ را کم و زیاد کنیم)

نتیجه: اگر $f(x)=x^{-n}$ و n عدد طبیعی باشد آن‌گاه $D_x x^{-n}=-nx^{-n-1}$

$$f(x)=x^{-n}=\frac{1}{x^n} \qquad D_x f(x)=\frac{0\times x^n-nx^{n-1}\times 1}{x^{2n}}$$

$$=-nx^{n-1}\cdot x^{-2n}=-nx^{-n-1}$$

قضیه: اگر $f(x)=x^r$ و $r=\frac{1}{q}$ (q عدد طبیعی) باشد آن‌گاه

$$D_x x^{\frac{1}{q}}=\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1},\quad D_x x^r=rx^{r-1}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{\Delta x} = A$$

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-2}a + b^{n-1}) = a^n - b^n$$

$$a = (x+\Delta x)^{\frac{1}{q}} \quad b = x^{\frac{1}{q}} \quad n = q$$

$$f'(x) = A \times \frac{(x+\Delta x)^{\frac{q-1}{q}} + \dots + x^{\frac{q-1}{q}}}{(x+\Delta x)^{\frac{q-1}{q}} + \dots + x^{\frac{q-1}{q}}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{q-1}{q}} + \dots + x^{\frac{q-1}{q}}}$$

$$= \lim \frac{1}{q x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$

قضیه (ترکیب) (قانون زنجیره‌ای): اگر تابع g در نقطه c مشتق‌پذیر بوده و تابع f در نقطه $g(c)$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه تابع fog در c مشتق‌پذیر شده و داریم $(fog)'(c) = g'(c)\, f'(g(c))$

اثبات: باید ثابت کنیم:

$$(fog)'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c}$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف. اگر $g'(c) \neq 0$ باشد $\Leftarrow$ $g(x) - g(c) \neq 0$

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

$$\lim_{x \to c} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] = f'(g(c)) \cdot g'(c)$$

نتیجه: اگر $f(x) = x^2$ ، ۲ عددی گویا باشد آن‌گاه $f'(x) = 2x^{2-1}$

اثبات: $r = \frac{p}{q}$ ، q عدد طبیعی است.

$$y = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p = u^p \qquad y' = p u' u^{p-1} \quad (u = x^{\frac{1}{q}})$$

$\Rightarrow$

نتیجه: اگر $y = f(u)$ و D_u^y وجود داشته باشند و نیز $u = g(x)$ و D_x^u وجود داشته باشند آن‌گاه D_x^y وجود داشته و برابر است با

$$D_x^y = D_u^y \times D_x^u$$

تعمیم برای سه حالت: $y = f(u)$ ، D_u^y وجود داشته، $u = g(x)$ و D_x^u وجود داشته و $x = k(t)$ و D_t^x وجود داشته آن‌گاه D_t^y وجود داشته

$$D_t^y = D_u^y \cdot D_x^u \cdot D_t^x$$

مثال: اگر f و g دو تابع باشند به طوری که داشته باشیم $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(g(x)) = x$ آن‌گاه در صورتی که تابع g مشتق‌پذیر باشد $g' = g$

$$(f(g(x)))' = (x)' \qquad D_x(fog)x = D_x^x = 1$$

$$f'(g(x))\, g'(x) = 1 \Rightarrow f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}, \quad f'(g(x)) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow g' = g$$

حامد نفیسی

مشتق توابع ضمنی، مشتق درجات بالاتر:

توابع:
۱- توابع صریح: اگر $y=f(x)$ تابع را تابع صریح گویند.
۲- توابع ضمنی: $2x+4y=1$ و $x^2y^5+x^3y^2+y^2x=5$

مثال: اگر $f(x)=y$ باشد، y' را در هر یک از توابع ضمنی زیر به دست آورید:

$2x+4y=1 \quad D_x(2x+4y)=D_x(1)=0$

$D_x 2x + D_x 4y = 2D_x x + 4D_x y = 2+4y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{2}{4}$

$x^2+y^2=1 \quad D_x(x^2+y^2)=D_x 1=0$

$D_x x^2 + D_x y^2 = 0 \quad 2xD_x x \quad 2xD_x x + 2yD_x y = 0$

$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$

$x^5y^2+x^4y^4+x^3y^2+xy+1=0$

$D_x(x^5y^2)+D_x(x^4y^4)+D_x(x^3y^2)+D_x(xy)+D_x(1)=0$

$y^2D_x x^5 + x^5D_x y^2 + y^4D_x x^4 + x^4D_x y^4 + y^2D_x x^3 + x^3D_x y^2$
$+yD_x x + xD_x y = 0$

$5x^4y^2+2x^5yy'+4x^3y^4+4x^4y^3y'+3x^2y^2+2x^3yy'+y+xy'=0$

اگر $f(x)=y$ باشد، مشتق اول تابع را به صورت زیر

$y'=f'(x)=D_x y=y^{(1)}=f^{(1)}(x)$

$y''=f''(x)=D_x^2 y=y^{(2)}=f^{(2)}(x) \quad \dots \quad y^{(n)}=f^{(n)}(x)$

مثال: مشتق n ام تابع $y=\sin x$ را تعیین کنید.

$y^{(0)}=f^{(0)}(x)=\sin x \quad f^{(1)}(x)=\cos x \quad f^{(2)}(x)=-\sin x$

$y^{(3)}=-\cos x \quad y^{(4)}=\sin x \quad y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

$y=\frac{1}{x}=x^{-1} \qquad y=\frac{1}{x-1}$

مرتبه دوم؟

کاربردهای از مشتق: (ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق و قضایای رول میانگین کوشی)

تعریف ماکزیمم نسبی: می‌گوییم f در نقطه $c \in D_f$ دارای یک مقدار ماکزیمم نسبی است اگر وجود داشته باشد بازه‌ای مانند I شامل c به طوری که

$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in I=(c-\delta, c+\delta)$

قرارداد: ماکزیمم یا مینیمم نسبی را اکسترمم نسبی گویند.

قضیه: اگر تابع f در نقطه $c \in D_f$ دارای یک مقدار اکسترمم نسبی باشد نیز $f'(c)$ وجود داشته باشد آنگاه $f'(c)=0$ است.

اثبات: فرض: داریم $(c, f(c))$ اکسترمم نسبی است.

$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ وجود دارد. $f'(c)$

حکم: $f'(c)=0$

حالت اول: $(c, f(c))$ ماکزیمم نسبی است.

$\exists\, I=(c-\delta, c+\delta) \quad \forall x\in I \quad f(c) \geq f(x) \Rightarrow f(x)-f(c) \leq 0$

if $x<c \Rightarrow x-c<0 \quad f(x)-f(c) \leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_-(c) = f'(c) \geq 0$

if $x>c \Rightarrow x-c>0 \quad f(x)-f(c) \leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_+(c) = f'(c) \leq 0$

$\begin{cases} f'(c) \geq 0 \\ f'(c) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(c)=0$

نتیجه: اگر تابع f دارای اکسترمم نسبی باشد، این نقاط در مجموعه نقاطی قرار دارند که مشتق در آن وجود نداشته یا مشتق در این نقاط صفر می‌شود.

تعریف: نقطه c، $c\in D_f$ را نقطه بحرانی گوییم اگر $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

اکسترمم های نسبی در صورت وجود در مجموعه نقاط بحرانی قرار دارند

مجموعه نقاط بحرانی $= \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$

به سه روش می‌توان اکسترمم های نسبی را تشخیص داد:

۱- با استفاده از تعریف: $\quad \boxed{c=0} \quad f(x)=|x|$

$I=(-1,1) \quad \forall x\in I \quad f(x) \geq 0 = f(0) \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

۲- استفاده از مشتق اول:

۳- استفاده از مشتق دوم:

تعریف (ماکزیمم مطلق): می‌گوییم تابع f روی بازه I دارای یک مقدار ماکزیمم مطلق است اگر وجود داشته باشد عددی مانند $c\in I$، به طوریکه:

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x\in I$$

تذکر: ماکزیمم یا مینیمم مطلق را اکسترمم های مطلق گویند.

آیا شرایطی وجود دارد که تضمین کند وجود ماکزیمم و مینیمم مطلق را؟!!

قضیه: (اکسترمم): اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع f در این بازه دارای یک مقدار ماکزیمم مطلق و یک مقدار مینیمم مطلق است.

اگر شرایط قضیه اکسترمم برقرار باشد آیا می‌توان ماکزیمم و مینیمم مطلق را تعیین کرد؟

با روش زیر این دو مقدار به دست می‌آید.

۱- ابتدا همه نقاط بحرانی را تعیین و مقدار تابع را در این نقاط مشخص می‌کنیم. $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \Rightarrow \{f(c_1), \dots, f(c_n)\}$

۲- مقدار تابع را در نقاط ابتدایی و انتهایی $[a,b]$ تعیین می‌کنیم: $f(a), f(b)$

۳- با مقایسه این مقادیر داریم:

ماکزیمم مطلق $= M = \max(f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n), f(a), f(b))$

مینیمم مطلق $= m = \min(f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n), f(a), f(b))$

مثال: ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} 5x-1 & x<3 \\ x^2+5 & x\geq 3 \end{cases}$ را در صورت وجود روی بازه $[2,5]$ تعیین کنید.

ابتدا بررسی می‌کنیم که تابع روی کل این بازه پیوسته است یا خیر.

$x<3 \Rightarrow f(x) = 5x-1 \qquad x\geq 3 \Rightarrow f(x) = x^2+5$

پس کافیست پیوستگی $a=3$ را بررسی کنیم.

$f(3) = 9+5 = 14 \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} (x^2+5) = 14 \\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} (5x-1) = 14 \end{cases}$

$\lim_{x\to 3} f(x) = 14$

$f'(x) = \begin{cases} 5 & x<3 \\ 2x & x>3 \end{cases} \qquad 2x=0 \Rightarrow x=0$ غ ق ق

$f'_+(3) = 6 \ , \ f'_-(3) = 5 \Rightarrow$ $f'(3)$ وجود ندارد

x	2	3	5
$f(x)$	9	14	30

$Min = 9 \qquad Max = 30$

$9 \leq f(x) \leq 30 \quad \forall x \in [2,5]$

مثال: ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} 4-(x+5)^2 & x\leq -4 \\ 12-(x+1)^2 & x>-4 \end{cases}$ را بدست آورید. بر روی بازه $[-6,0]$

$a = -4 \quad f(-4) = 3 \quad \lim_{x\to -4^+} f(x) = 3 = \lim_{x\to -4^-} f(x) = f(-4) = 3$

$f'(x) = \begin{cases} -2(x+5) & x<-4 \\ -2(x+1) & x>-4 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x+5=0 \Rightarrow x=-5 \checkmark \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \checkmark \end{matrix}$

$f'(-4) = ? \quad f'_+(-4) = 6 \quad f'_-(-4) = -2 \Rightarrow$ $f'(-4)$ وجود ندارد

x	-6	-5	-4	-1	0
$f(x)$	3	4	3	12	11

$Min = 3 \quad Max = 12$

$(-6,3) \equiv (-4,3) \equiv Min$

قضیه (رول): اگر تابع f سه شرط زیر را داشته باشد:

الف) f در $[a,b]$ پیوسته باشد

ب) f در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد

ج) $f(a) = f(b) = 0$

آن‌گاه وجود دارد عددی مانند c: $c \in (a,b)$ به طوری که $f'(c) = 0$ است.

اثبات قضیه: دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $f(x) \equiv 0 \ \forall x \in [a,b] \qquad f'(x) = 0$

$c \in (a,b)$ موجود است $\quad f'(c) = 0$.

حالت دوم: فرض کنیم تابع همه جا صفر نباشد

$\exists c \in [a,b]$ به طوری که $f(c) \neq 0 \Rightarrow c \neq a , c \neq b \Rightarrow c \in (a,b)$

$f(a) = f(b) = 0$

چون f در بازه $[a,b]$ پیوسته است با توجه به قضیه اکسترمم تابع در این بازه دارای یک مقدار مینیمم مطلق، یک مقدار ماکزیمم مطلق است.

یکی از این دو نقطه، نقطه $(c, f(c))$ است به عبارت دیگر $(c, f(c))$ اکسترمم مطلق است.

$f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow f(c) \neq 0$

چون $c \in (a,b) \Leftarrow f(c)$ اکسترمم نسبی است

$f'(c)$ وجود دارد $\Rightarrow f'(c) = 0$ است

نتیجه: اگر شرط سوم قضیه را به صورت $f(a) = f(b)$ در نظر بگیریم قضیه تغییری نخواهد کرد.

اثبات: تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $g(x) = f(x) - k$

تابع g هر سه شرط قضیه رول را دارا است.

$g(a) = f(a) - k = 0 \quad g(b) = f(b) - k = 0$

$\exists c \in (a,b)$ به طوری که $g'(c) = 0$

$g'(x) = f'(x) \quad \forall x \in (a,b) \quad 0 = g'(c) = f'(c) \Rightarrow f'(c) = 0$

قضیه میانگین: اگر تابع f دارای دو شرط زیر باشد:

۱- f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد

۲- f در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد

۲۵

hamednafisi@gmail.com

آن گاه وجود دارد عددی مانند $c \in (a,b)$ به طوری که:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

اثبات: تابع $g(x) = f(x) - kx$ تعریف می‌کنیم k عددی ثابت.

تابع g دو شرط اول و دوم قضیه رول را دارد.

فرض $g(a) = g(b) \Leftrightarrow f(a) - ka = f(b) - kb \Leftrightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\exists c \in (a,b)$ به طوری که $g'(c) = 0$

$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x \in (a,b)$

$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

اولین کاربرد قضیه میانگین:

اگر مشتق تابع f روی بازه I وجود داشته و مثبت باشد

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$

آن گاه تابع f روی این بازه صعودی اکید (اکیداً صعودی) است.

اثبات: فرض می‌کنیم که $x_1, x_2 \in I$ و $x_1 < x_2$ باشد باید ثابت کنید $f(x_1) < f(x_2)$

$f(x) \quad [x_1, x_2] \subset I$

$\exists c \in (x_1, x_2)$ یا $c \in I$ به طوری که $f'(c) = \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{+} > 0$

$c \in I \quad f'(c) > 0$

$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

قضیه: اگر مشتق تابع روی تمام نقاط بازه I وجود داشته و مساوی صفر باشد، آن‌گاه f در این بازه تابعی ثابت است.

به عبارتی $f(x)=k \quad \forall x\in I \iff f'(x)=0 \quad \forall x\in I$

اثبات: فرض کنیم $x_1, x_2 \in I$ و $x_1 \neq x_2$ باشد باید ثابت کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ (می‌توان فرض کرد $x_1<x_2$) $f(x)$ $[x_1, x_2]$

$\exists c\in(x_1,x_2) \quad f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$c\in I \Rightarrow f'(c)=0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

قضیه کوشی: اگر f و g دو تابع باشند به طوری که در شرایط زیر صدق کنند:

۱- f و g در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند.

۲- f و g در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشند.

۳- $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$

آن‌گاه وجود دارد عددی مانند c، $c\in(a,b)$ به طوری که

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

* اگر $g(x)=x$ قضیه میانگین حاصل می‌شود.

$K(x)=f(x)-\lambda g(x)$ (λ مقدار ثابت است)

$K(x)$ شرط اول و دوم قضیه رول را دارا است.

فرض می‌کنیم $K(a)\overset{?}{=}K(b) \iff f(a)-\lambda g(a)=f(b)-\lambda g(b)$

$\iff \lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

$\exists c\in(a,b) \quad K'(c)=0 \qquad K'(x)=f'(x)-\lambda g'(x)$

$c\in(a,b) \Leftarrow \forall x\in(a,b)$

$K'(c)=f'(c)-\lambda g'(c) \Rightarrow f'(c)=\lambda g'(c)$

$K'(c)=0 \qquad g'(c)\neq 0$

$\Rightarrow \lambda=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

مثال: شرایط قضیه رول را برای تابع $f(x)=x^3-x$ بررسی کرده در صورت برقرار بودن شرایط مقدار مناسب c را تعیین کنید. در بازه $[0,1]$

$f(0)=0 \qquad f(1)=0$

$\exists c\in(a,b)$ به طوری که $f'(c)=0 \qquad f'(x)=3x^2-1$

$f'(c)=3c^2-1=0 \Rightarrow 3c^2=1 \Rightarrow c^2=\frac{1}{3} \Rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$c=+\sqrt{\frac{1}{3}} \quad (a<c<b)(0<c<1)$

مثال: شرایط قضیه میانگین را برای تابع $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ را در بازه $[0,1]$ بررسی کرده در صورت برقرار بودن شرایط مقدار c را به دست آورید.

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ مشتق‌پذیر است: $(0,1)$

$\exists c \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$

$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=1 \Rightarrow c=\frac{8}{27} \qquad 0<c<1$ قابل قبول است.

مثال: شرایط قضیه کوشی را برای تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در بازه $[0,\pi]$ بررسی کرده و مقدار مناسب c را پیدا کنید.

حل: $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(0,\pi) \qquad g'(x)=-\sin x \Rightarrow \sin x\neq 0$

$\Rightarrow g'(x)\neq 0$

$\exists c\in(0,\pi)$ به طوریکه $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{\sin\pi-\sin 0}{\cos\pi-\cos 0}=0$

$f'(x)=\cos x \quad g'(x)=-\sin x$

$-\dfrac{\cos c}{\sin c}=0 \Rightarrow \cos c=0 \Rightarrow c=\dfrac{\pi}{2}$

قضیه هوپیتال: (قاعده اول هوپیتال)

فرض کنیم دو تابع f و g روی تمام نقاط بازه باز I مشتق‌پذیر باشند بجز احتمالاً در نقطه a، $a\in I$ و نیز فرض کنیم $\forall x\in I,\ g'(x)\neq 0$ $(x\neq a)$ در صورتیکه:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ ، 2) $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ و 3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$

آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

فرض کنیم بازه $I=(a,b)$

ابتدا فرض کنیم x عدد دلخواهی بین (a,b) باشد برای این xها دو تابع به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases} \qquad G(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases}$$

کافیست ثابت کنیم F و G از سمت راست پیوسته باشند.

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a}f(x)=0=F(a)$$

۲۳

$$\lim_{x\to a^+}G(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0=G(a)$$

طبق فرض توابع F و G در بازه $[a,x]$ مشتق‌پذیر است

$G'(x)=g'(x)\neq 0 \quad (a,x)$

$\exists c\in(a,x)\ \ a<c<x$ به طوریکه $\dfrac{F'(c)}{G'(c)}=\dfrac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad x\to a^+,\ c\to a^+$

$\lim\limits_{c\to a^+}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad L=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \boxed{\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L}$

تذکر: اگر در قاعده اول هوپیتال به جای $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ یکی از دو شرط زیر را قرار دهیم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ، $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\pm\infty$ یا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ قاعده هوپیتال برقرار می‌باشد (قاعده دوم هوپیتال)

دیفرانسیل: (یکی دیگر از کاربردهای مشتق)

اگر $y=f(x)$ (y تابعی از x باشد) دیفرانسیل تابع y را با علامت dy نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\Delta x\neq 0:\ dy=f'(x)\cdot\Delta x$

$$dy=g(x,\Delta x)$$

$$\left(f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right.$$

مثال: شرایط قضیه کوشی را برای تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در بازه $[0,\pi]$ بررسی کرده و مقدار مناسب c را پیدا کنید.

حکم $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(0,\pi)$ $\quad g'(x)=-\sin x \Rightarrow \sin x\neq 0$

$\Rightarrow g'(x)\neq 0$

$\exists c\in(0,\pi)$ به طوریکه $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{\sin\pi-\sin 0}{\cos\pi-\cos 0}=0$

$f'(x)=\cos x \quad g'(x)=-\sin x$

$-\dfrac{\cos c}{\sin c}=0 \Rightarrow \cot c=0 \Rightarrow c=\dfrac{\pi}{2}$

قضیه هوپیتال: (قاعده اول هوپیتال)

فرض کنیم دو تابع f و g روی تمام نقاط بازه باز I مشتق‌پذیر باشند بجز احتمالاً در نقطه a، $a\in I$ و نیز فرض کنیم $\forall x\in I,\ g'(x)\neq 0\ (x\neq a)$ در صورتیکه:

۱) $\lim_{x\to a} f(x)=0$ ، ۲) $\lim_{x\to a} g(x)=0$ و ۳) $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$

آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

فرض کنیم بازه $I=(a,b)$

ابتدا فرض کنیم x عدد دلخواهی بین (a,b) باشد برای این xها دو تابع به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases} \qquad G(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases}$

کافیست ثابت کنیم F و G از سمت راست پیوسته باشند.

$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a}f(x)=0=F(a)$

$\lim_{x\to a^+}G(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0=G(a)$

طبق فرض توابع F و G در بازه $[a,x]$ مشتق‌پذیر است.

$G'(x)=g'(x)\neq 0 \quad (a,x)$

$\exists c\in(a,x)\quad a<c<x$ به طوریکه $\dfrac{F'(c)}{G'(c)}=\dfrac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad \lim_{x\to a^+}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad x\to a^+,\ c\to a^+$

$\lim_{c\to a^+}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad L=\lim_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \boxed{\lim_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L}$

تذکر: اگر در قاعده اول هوپیتال به جای $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ یکی از دو شرط زیر را قرار دهیم $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ یا $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\pm\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ قاعده هوپیتال برقرار می‌باشد (قاعده دوم هوپیتال)

دیفرانسیل: (یکی دیگر از کاربردهای مشتق)

اگر $y=f(x)$ (y تابعی از x باشد) دیفرانسیل تابع y را با علامت dy نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\Delta x\neq 0,\ dy=f'(x)\cdot\Delta x$

$dy=g(x,\Delta x)$

$\left(f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right.$

$\forall \epsilon > 0 . \ \exists \delta > 0 .$ بطوریکه $\left|\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) - f'(x)\right| < \epsilon$ وقتیکه $0 < |\Delta x| < \delta$

$\forall \epsilon > 0 . \ \frac{|\Delta y - f'(x)\Delta x|}{|\Delta x|} < \epsilon \quad |\Delta y - \underbrace{f'(x)\Delta x}_{dy}| \to$

دیفرانسیل متغیر: اگر $y = f(x)$ باشد، دیفرانسیل متغیر x را با علامت dx نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم $dx = \Delta x$ (۱) $\quad (dx \neq 0)$ $\quad \Delta x \neq 0$

$\left(y = x \quad dy = 1 \cdot (\Delta x) \Rightarrow dx = \Delta x \right)$
$dy = dy$

$\Rightarrow dy = f'(x)\,dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$

$\Delta y \simeq dy \quad f(x+\Delta x) - f(x) \simeq dy \Leftrightarrow f(x+\Delta x) = dy + f(x)$

مثال: اگر $y = x^2 + x + 1$، Δy و dy و $|dy - \Delta y|$ را تعیین کنید.

$dy = (2x+1)(dx = \Delta x) \qquad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) + 1 - x^2 - x - 1$

$\Rightarrow |\Delta y - dy| = (\Delta x)^2$

مثال: مقدار $\sqrt{82}$ را تا ۳ رقم اعشار به کمک دیفرانسیل محاسبه کنید.

$f(x) = \sqrt{x} \qquad f(x+\Delta x) - f(x) \simeq dy\big|_{(x,\Delta x)}$

$\Leftrightarrow f(x+\Delta x) \simeq dy\big|_{(x,\Delta x)} + f(x)$

$f(82) = \sqrt{82} \qquad f(82) = f(81+1) \simeq f(81) + dy\big|_{(81,1)}$

$f(81) = 9 \qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x \qquad dy\big|_{(81,1)} = \frac{1}{2\sqrt{81}} \times 1 = \frac{1}{18}$

$\sqrt{82} \simeq 9 + \frac{1}{18} \qquad \sqrt{82} = 9 + 0.055 = 9.055$

حامد نفیسی

تمرین: $\sqrt[3]{7.05}$ را تا سه رقم اعشار محاسبه کنید.

قضیه ۴: اگر $y = f(x)$، (y تابعی از x باشد) آنگاه دیفرانسیل تابع y برابر است با $dy = f'(x)\,dx$ بدون توجه به اینکه x متغیری است مستقل یا وابسته.

اثبات: اگر x مستقل باشد بنابه تعریف $dy = f'(x)\,dx$

فرض کنیم x متغیری وابسته باشد $x = g(t)$ آنگاه y نیز تابعی از t خواهد شد. بنابراین $dy = D_t^y \cdot dt$ از طرفی $D_t^y = D_x^y \cdot D_t^x$

$x = g(t) \Rightarrow dx = D_t^x \cdot dt$ و $dy = D_x^y \cdot D_t^x \cdot dt$

$dy = D_x^y \boxed{D_t^x \cdot dt} \Rightarrow dy = D_x^y \cdot dx = f'(x)\,dx$

خواص عملگر d (فرمول‌های دیفرانسیل):

به کمک قضایای مشتق، خواص عملگر d به صورت زیر به دست می‌آید:

1. $d(c) = 0 \qquad D_x^y = \frac{dy}{dx} \Rightarrow D_x^c = \frac{d(c)}{d(x)} = 0 \Rightarrow d(c) = 0$

2. $d(x^r) = r x^{r-1} dx \qquad D_x^{(x^r)} = \frac{d(x^r)}{dx} = r x^{r-1} \Rightarrow d(x^r) = r x^{r-1} dx$

3. $d(u+v) = d(u) + d(v) \qquad \frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

$D_x^{(u+v)} = D_x^u + D_x^v \Rightarrow d(u+v) = d(u) + dv$

$4.\ d(uv) = v\,du + u\,dv$

$5.\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

$6.\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$

مثال: به کمک خواص دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}$ را بدست آورید.

1) $x^3 + y^3 = 1 \Rightarrow d(x^3+y^3) - d(1) = 0 \Rightarrow d(x^3) + d(y^3) = 0$

$3x^2dx + 3y^2dy = 0 \Longleftrightarrow$ (معادله دیفرانسیل)

$3x^2 + 3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$

2) $x^4y^4 + x^5y^2 + xy = 0$

$d(x^4y^4) + d(x^5y^2) + d(xy) = 0$

$y^4dx^4 + x^4dy^4 + y^2dx^5 + x^5dy^2 + xdy + ydx = 0$

$4x^3y^4dx + 4y^3x^4dy + 5y^2x^4dx + 2x^5ydy + xdy + ydx = 0$

$4x^3y^4 + 4y^3x^4\left(\frac{dy}{dx}\right) + 5x^4y^2 + 2x^5y\frac{dy}{dx} + y + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

تابع اولیه (ضدمشتق، ضددیفرانسیل)

تعریف: تابع $F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ روی بازه I گویند اگر

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

آیا می‌توان گفت تابع $F(x) = x^5 + x^4 + x + 1$ تابع اولیه ⟵ $f(x) = 5x^4 + 4x^3 + 1$ روی بازه $I = \mathbb{R}$ است؟ بله چون $F'(x) = f(x)$

یک تابع مانند $f(x)$ بی‌شمار تابع اولیه دارد اما به نظر می‌رسد که اختلاف آن‌ها در یک عدد ثابت است.

قضیه: اگر $F(x)$، $G(x)$ دو تابع اولیه $f(x)$ روی بازه I باشند

آنگاه $G(x) - F(x) = C \quad \forall x \in I \Longleftrightarrow G(x) = F(x) + C \quad (F' = f,\ G' = f \quad \forall x \in I)$

اثبات: $K(x) = G(x) - F(x), \quad \forall x \in I$

$K'(x) = G'(x) - F'(x) \quad \forall x \in I \Rightarrow K'(x) = f(x) - f(x) \quad \forall x \in I$

$K'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow K(x) = C \quad \forall x \in I$

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I \Longleftrightarrow \frac{d(F(x))}{dx} = f(x)$

$\Longleftrightarrow d(F(x)) = f(x)dx$ ①

تابع اولیه را با $\int$ نشان داده و با به کارگیری این علامت روی ①

$\int d(F(x)) = \int f(x)dx \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C \quad (F' = f)$

خواص تابع اولیه - فرمول‌های تابع اولیه:

$\int dx = x + C$ (تابع اولیه صوری)

$(c \neq 0)\ \int cf\,dx = c\int f\,dx$

$\int (f+g)dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

$\int (c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n)dx = c_1\int f_1dx + \cdots + c_n\int f_ndx$

4. $d(uv) = v\,du + u\,dv$

5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

6. $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$

مثال: به کمک خواص دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}$ را بدست آورید.

1) $x^3+y^3=1 \Rightarrow d(x^3+y^3) - d(1) = 0 \Rightarrow d(x^3)+dy^3=0$

$3x^2dx + 3y^2dy = 0 \Leftrightarrow$ (مطلقاً دیفرانسیل)

$3x^2 + 3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$

2) $x^4y^4 + x^5y^2 + xy = 0$

$d(x^4y^4) + d(x^5y^2) + d(xy) = 0$

$y^4dx^4 + x^4dy^4 + y^2dx^5 + x^5dy^2 + xdy + ydx = 0$

$4x^3y^4dx + 4y^3x^4dy + 5y^2x^4dx + 2x^5y\,dy + xdy + ydx = 0$

$4x^3y^4 + 4y^3x^4\left(\frac{dy}{dx}\right) + 5x^4y^2 + 2x^5y\frac{dy}{dx} + y + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

تابع اولیه (ضدمشتق، ضددیفرانسیل)

تعریف: تابع $F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ روی بازه I گویند اگر

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

آیا می‌توان گفت تابع $F(x) = x^5 + x^4 + x + 1$ تابع اولیه $\leftarrow$

$f(x) = 5x^4 + 4x^3 + 1$ روی بازه $I = \mathbb{R}$ است؟ بله چون $F'(x) = f(x)$

یک تابع مانند $f(x)$ بی‌شمار تابع اولیه دارد اما به نظر می‌رسد که اختلاف آنها در یک عدد ثابت است

قضیه: اگر $F(x)$، $G(x)$ دو تابع اولیه $f(x)$ روی بازه I باشند آنگاه $G(x) - F(x) = c \;\; \forall x \in I \Leftrightarrow G(x) = F(x) + c$ $\quad (F' = f,\ G' = f \;\; \forall x \in I)$

اثبات: $K(x) = G(x) - F(x) \quad \forall x \in I$

$K'(x) = G'(x) - F'(x) \;\; \forall x \in I \Rightarrow K'(x) = f(x) - f(x) \;\; \forall x \in I$

$K'(x) = 0 \;\; \forall x \in I \Rightarrow K(x) = c \;\; \forall x \in I$

$F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in I \Leftrightarrow \frac{d(F(x))}{dx} = f(x)$

$\Leftrightarrow d(F(x)) = f(x)\,dx \quad (1)$

تابع اولیه را $\int$ نشان داده و با به کارگیری این علامت روی (1)

$\int d(F(x)) = \int f(x)\,dx \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (F' = f)$

خواص تابع اولیه - فرمول‌های تابع اولیه:

(تابع اولیه فوری)

$\int dx = x + C$

$(c \neq 0) \quad \int c f\,dx = c\int f\,dx$

$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

$\int (c_1f_1 + c_2f_2 + \dots + c_nf_n)\,dx = c_1\int f_1\,dx + \dots + c_n\int f_n\,dx$

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c \quad r \neq -1 \quad (r \text{ گویا})$$

$$\int u^r du = \frac{1}{r+1} u^{r+1} + c \quad (r \neq -1) \quad u = g(x)$$

$$\int \sin u \, du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u \, du = \sin u + c$$

مثال: تابع اولیه های زیر را حل کنید.

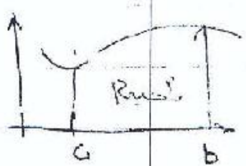
$$\int \frac{x+x^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx$$
$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{1+\frac{3}{2}} x^{1+\frac{3}{2}}$$

$$\int (x^2+1)^2 dx = \int (x^4+2x^2+1) dx = \int x^4 dx + \int 2x^2 dx + \int dx$$
$$= \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x$$

$$\int x(x^2+1)^n dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^n dx = \frac{1}{2}\int u^n du = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} u^{n+1} \quad (n \neq$$
$$x^2+1 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$$

انتگرال پذیری، انتگرال معین:

محاسبه مساحت: فرض کنید تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و مثبت باشد. می خواهیم مساحت ناحیه R واقع بین نمودار تابع f خطوط $x=a$ و $x=b$ و محور xها را محاسبه می کنیم.



$S =$ مساحت R

حل: بازه $[a, b]$ را n قسمت مساوی تقسیم می کنیم

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و آن را با Δx نشان می دهیم $x_0 = a$, $x_1 = a+\Delta x$, $x_{i-1} = a+(i-1)\Delta x$, $x_i = a+i\Delta x$

زیر بازه $[x_{n-1}, x_n]$ ... $[x_0, x_1], [x_1, x_2]$

$f(c_i)$ مینیمم مطلق و $f(c_i') =$ ماکزیمم $c_i, c_i' \in [x_{i-1}, x_i]$

$f(c_i)\Delta x \leq$ مساحت ناحیه $R_i \leq f(c_i')\Delta x$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} (\text{مساحت } R_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i')\Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \leq S \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i')\Delta x$$

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \quad \text{نقطه دلخواه} \; (c_i, f(c_i)) \in [x_{i-1}, x_i] \; (i=1, \ldots, n)$$

مثال: مساحت ناحیه R واقع بین نمودار این تابع $f(x) = x^2+1$ و خطوط $x=0$، $x=2$ و محور xها را محاسبه کنید.

$a = 0 \quad b = 2 \quad \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{2}{n} \quad x_2 = 2 \times \frac{2}{n} \; \ldots \; x_{i-1} = 2\frac{(i-1)}{n}, \; x_i = \frac{2i}{n}$

$x_n = 2$

$\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right] \quad \left(\frac{2i}{n}, f\left(\frac{2i}{n}\right)\right)$ اکسترمم

۲۸

$$f(c_i)\Delta x = \left(\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1\right)\frac{2}{n} \qquad f(c_i)\Delta x = \frac{8i^2}{n^3} + \frac{2}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8i^2}{n^3} + \frac{2}{n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2 = 2 + \frac{8}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S = 2 + \frac{16}{6} = 2 + \frac{8}{3}$$

مجموع ریمان: فرض کنید تابع f در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد، بازه $[a,b]$ را به n قسمت دلخواه تقسیم می‌کنیم تا نقاط $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n$

$$[x_0, x_1][x_1, x_2], \dots [x_{i-1}, x_i] \dots [x_{n-1}, x_n]$$

$$\Delta_1 x = x_1 - x_0 \qquad \Delta_2 x = x_2 - x_1 \qquad \Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

$$\dots \quad \Delta_n x = x_n - x_{n-1}$$

طول $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, 2, \dots, n$

مجموع ریمان گویند: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x$

$\|\ \|$ نرم $\quad \|\Delta\|$: ماکزیمم همه Δ است

انتگرال پذیری: تابع f را روی بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر گوییم اگر وجود داشته باشد عددی مانند L به طوری که $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum f(\alpha_i)\Delta_i x = L$

به ازای هر تقسیم دلخواه Δ، هر نقطه اختیاری α_i

$\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$

تذکر: تابع f را روی بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر گوییم اگر

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ به طوری که $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x - L\right| < \varepsilon$ وقتی که $\|\Delta\| < \delta$

به ازای هر تقسیم دلخواه Δ، هر نقطه اختیاری α_i

انتگرال معین: اگر f در بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد (L وجود دارد) مقدار L را با $\int_a^b f(x)dx$ و آن را انتگرال معین تابع f در بازه $[a,b]$ گویند.

$$L = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x = L$$

تذکر: اگر f روی بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد انتگرال معین آن عددی ثابت، منحصر به فرد است

توجه: انتگرال معین می‌تواند مثبت، منفی و صفر باشد.

قضیه: (رابطه بین پیوستگی و انتگرال‌پذیری)،
اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه این تابع روی بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. (عکس قضیه درست نیست)

ثابت کنید تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ که $(a<0<b)$ ناپیوسته است در حالیکه انتگرال‌پذیر بوده مقدار انتگرال معین آن صفر است

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

دو حالت در نظر می گیریم

(1) $\alpha_i \neq 0$ فرض کنید $i=1,\dots,n$ $f(\alpha_i)=0$

$\sum f(\alpha_i)\Delta_i x = 0 \qquad \delta(\epsilon)=\epsilon$

(2) $\begin{cases} \alpha_i \neq 0 & i\neq j \Rightarrow f(\alpha_i)=0 \quad i\neq j \\ \alpha_j = 0 & \Rightarrow f(\alpha_j)=1 \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x = f(\alpha_1)\Delta_1 x + f(\alpha_2)\Delta_2 x + \dots + f(\alpha_j)\Delta_j x + \dots + f(\alpha_n)\Delta_n x$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x = f(\alpha_j)\Delta_j x = \Delta_j x$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x - 0\right| = |\Delta_j x - 0| = |\Delta_j x| \leq \|\Delta\|$$

$$\delta(\epsilon)=\epsilon \quad \|\Delta\|<\delta \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x - 0\right| < \epsilon$$

برای اولین کاربرد انتگرال معین می توان مساحت را نام برد، به عبارت دیگر ادعا می کنیم که اگر تابع f در بازه [a,b] پیوسته و مثبت باشد، آنگاه مساحت ناحیه R واقع بین نمودار f و خطوط x=a ، x=b اگر تابع f در بازه [a,b] پیوسته و مثبت باشد ناحیه (محور x ها) برابر است $R = S = \int_a^b f(x)dx$

f در بازه [a,b] انتگرال پذیر بوده، انتگرال معین f:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$\alpha_i = c_i \qquad \Delta_i x = \Delta x \qquad \Delta_i x = \Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \|\Delta\| = \Delta x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

مثال: به کمک تعریف انتگرال معین $f(x)=(x^2+1)$ را در بازه [0, 2] به دست آورید.

خواص انتگرال معین و ارتباط آن با توابع اولیه:

تعریف: اگر $a \in D_f$ باشد $\int_a^a f(x)dx = 0$

تعریف: اگر $a>b$ ، f انتگرال پذیر باشد $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

قضیه: اگر f انتگرال پذیر [a,b] و K عددی ثابت آنگاه:

$$\int_a^b K f(x)dx = K\int_a^b f dx$$

$$\int_a^b K f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} K f(\alpha_i)\Delta_i x = K \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x = K\int_a^b f(x)dx$$

قضیه: اگر f و g در بازه [a,b] انتگرال پذیر باشند آنگاه f+g در بازه [a,b] انتگرال پذیر است

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f dx \pm \int_a^b g dx$$

قضیه: اگر $f(x)=K$ ، K عددی ثابت آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = K(b-a)$$

دو حالت در نظر می‌گیریم

① $\alpha_i \neq 0$ فرض کنید $i=1,\dots,n$ $f(\alpha_i)=0$

$\sum f(\alpha_i)\Delta_i x = 0 \qquad \delta(\epsilon)=\epsilon$

② $\begin{cases} \alpha_i \neq 0 & i \neq j \Rightarrow f(\alpha_i)=0 \quad i\neq j \\ \alpha_j = 0 & \Rightarrow f(\alpha_j)=1 \end{cases}$

$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x = f(\alpha_1)\Delta_1 x + f(\alpha_2)\Delta_2 x + \dots + f(\alpha_j)\Delta_j x + \dots + f(\alpha_n)\Delta_n x$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x = f(\alpha_j)\Delta_j x = \Delta_j x$

$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x - A\right| = |\Delta_j x - 0| = |\Delta_j x| \leq \|\Delta\|$

$\delta(\epsilon)=\epsilon \quad \|\Delta\|<\delta \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x - 0\right| < \epsilon$

برای اولین کاربرد انتگرال معین می‌توان مساحت را نام برد. به عبارت دیگر ادعا می‌کنیم که اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و مثبت باشد، آنگاه مساحت ناحیه R واقع بین نمودار f و خطوط $x=a$ ، $x=b$ و محور xها ... باشد آنگاه (و محور xها) برابر است

R مساحت ناحیه $= S = \int_a^b f(x)dx$

f انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ انتگرال معین طور:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x$

$\alpha_i = C_i \qquad \Delta_i x = \Delta x \qquad \Delta_i x = \Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \|\Delta\| = \Delta x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

مثال: به کمک تعریف انتگرال معین $f(x) = (x^2+1)$ را در بازه $[0,2]$ بدست آورید.

خواص انتگرال معین و ارتباط آن با توابع اولیه:

تعریف: اگر $a \in D_f$ باشد $\int_a^a f(x)dx = 0$

تعریف: اگر $a>b$ ، f انتگرال‌پذیر باشد $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

قضیه: اگر f انتگرال‌پذیر $[a,b]$ و K عددی ثابت آنگاه:

$\int_a^b K f(x)dx = K\int_a^b f dx$

$\int_a^b K f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} K f(\alpha_i)\Delta_i x = K \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i x = K\int_a^b f(x)dx$

قضیه: اگر f و g در بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند آنگاه $f \pm g$ در بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است

$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f dx \pm \int_a^b g dx$

قضیه: اگر $f(x)=K$ ، K عددی ثابت آنگاه:

$\int_a^b f(x)dx = K(b-a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\,\Delta x_i =$$

$$k \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = k \lim_{\|\Delta\|\to 0} (b-a) = k(b-a)$$

قضیه: اگر f روی بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و $c \in [a,b]$ آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

قضیه: اگر f روی بازه کوچکی که شامل سه نقطه c و b و a است انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$c \quad a \quad b$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

قضیه: اگر f و g روی بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و روی این بازه داشته باشیم $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$ آن‌گاه $\int_a^b f\,dx \geq \int_a^b g\,dx$

حالت خاص: $g=0$ روی بازه $[a,b] \Leftarrow [a,b]$ $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f\,dx \geq 0$

حالت خاص: $f=0$ روی بازه $[a,b] \Leftarrow [a,b]$ $g \leq 0 \Rightarrow \int_a^b g\,dx \leq 0$

۳۲

خواص انتگرال معین و ارتباط آن با تابع اولیه:

قضیه: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته، M و m به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع روی این بازه باشد.

آن‌گاه: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

اثبات:

$$\forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b m\,dx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underbrace{\int_a^b M\,dx}_{M(b-a)}$$

مثال: به کمک قضیه قبل کران بالا و پایین $\int_{-1}^{2} \sqrt{1+x^4}\,dx$ را بیابید.

$f(x)=\sqrt{1+x^4}$ $\quad [-1,2]$ $\quad c=0$ نقطه بحرانی

x	-1	0	2
$f(x)$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{17}$

$M=\sqrt{17} \qquad m=1$

$$1(2+1) \leq \int_{-1}^{2}\sqrt{1+x^4} \leq \sqrt{17}\,(2+1) \Rightarrow 3 \leq \int_{-1}^{2}\sqrt{1+x^4}\,dx \leq 3\sqrt{17}$$

قضیه مقدار میانگین در انتگرال:

اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه وجود دارد عددی مانند c، $a \leq c \leq b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i =$$

$$k\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = k\lim_{\|\Delta\|\to 0}(b-a) = k(b-a)$$

قضیه: اگر f روی بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و $c\in[a,b]$ آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

قضیه: اگر f روی بازه که شامل سه نقطه c و b و a است انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$c \quad a \quad b$

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_c^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

قضیه: اگر f و g روی بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و روی این بازه داشته باشیم $f(x)\geq g(x)\ \forall x\in[a,b]$ آن‌گاه $\int_a^b f\,dx \geq \int_a^b g\,dx$

حالت خاص: $g=0$ روی بازه $[a,b]$ $\Leftarrow$ $[a,b]$ $f(x)\geq 0$ $\Leftarrow$ $\int_a^b f\,dx \geq 0$

حالت خاص: $f=0$ روی بازه $[a,b]$ $\Leftarrow$ $[a,b]$ $g\leq 0$ $\Leftarrow$ $\int_a^b g\,dx \leq 0$

خواص انتگرال معین و ارتباط آن با تابع اولیه:

قضیه: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته، M و m به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع روی این بازه باشد.

آن‌گاه: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

اثبات:

$$\forall x\in[a,b] \quad m\leq f(x)\leq M$$

$$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \qquad\qquad M(b-a)$$

مثال: به کمک قضیه قبل کران بالا و پایین $\int_{-1}^{2}\sqrt{1+x^4}\,dx$ را پیدا کنید.

$f(x)=\sqrt{1+x^4}$ $\quad [-1,2]$ $\quad$ نقطه بحرانی $c=0$

x	-1	0	2
$f(x)$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{17}$

$M=\sqrt{17} \qquad m=1$

$$1(2+1) \leq \int_{-1}^{2}\sqrt{1+x^4} \leq \sqrt{17}\,(2+1) \Rightarrow 3 \leq \int_{-1}^{2}\sqrt{1+x^4}\,dx \leq 3\sqrt{17}$$

قضیه مقدار میانگین در انتگرال: اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه وجود دارد عددی مانند c، $a\leq c\leq b$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$m \le \overbrace{\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}}^{K} \le M \qquad m \le K \le M$$

$f(c_2) \le K \le f(c_1)$ $\quad \exists\ c \in [a,b]$ به طوریکه $f(c) = K$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

قضیه (اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال): اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و $g(x)$ یک تابع اولیه‌ای $f(x)$ روی این بازه باشد آنگاه: $(g'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b])$

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) = g(x)\Big]_a^b = g(x)\Big|_a^b$$

اثبات: تابع $F(x)$ را به صورت تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

ثابت می‌کنیم $F(x)$ نیز تابع اولیه دیگری برای $f(x)$ است:

$$F'(x) \overset{?}{=} f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

قضیه مقدار میانگین $\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)(x+\Delta x - x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x) \qquad x \le c \le x+\Delta x$

$F(x) = g(x) + C \quad \forall x \in [a,b]$

$\int_a^x f(t)dt = g(x) - g(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$

قرارداد: از این به بعد به تابع اولیه، انتگرال نامعین گوییم.

$$\int f(x)dx = g(x) + C$$

مثال: مشتق تابع $F(x) = \int_1^x (t^2+t+1)dt$ را به دو روش تعیین کنید.

روش اول: با محاسبه انتگرال معین $\quad$ روش دوم: بدون محاسبه انتگرال معین.

First way $\quad F(x) = \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t\right)\Big]_1^x = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{11}{6} \Rightarrow F'(x) = x^2 + x + 1$

Second way $\quad F(x) = \int_1^x t^2 + t + 1 \qquad f(t) = t^2 + t + 1$

$F'(x) = f(x) = x^2 + x + 1$

مثال: $F(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$

$f(t) = \sin(t^2)$

$F'(x) = \sin(x^2)$

مثال: $G(x)=\int_0^{x^2}\sin(t^2)\,dt$

$F(x)=\int_0^{x}\sin t^2\,dt \Rightarrow F'(x)=\sin x^2 \Rightarrow F'(x^2)=\sin x^4$

$G(x)=F(x^2) \Rightarrow G'(x)=2xF'(x^2)$

$G'(x)=2x\sin x^4$

تمرین: ثابت کنید اگر f تابعی پیوسته روی مجموعه $\mathbb{R}$ باشد و α_x و β_x دو تابع مشتق‌پذیر از x باشد آنگاه مشتق تابع $F(x)$ به صورت

$F(x)=\int_{\alpha_x}^{\beta_x} f(t)\,dt \Leftarrow$

$F'(x)=\beta'(x)f(\beta(x))-\alpha'(x)f(\alpha(x))$

یادآوری توابع خاص (مثلثاتی، معکوس مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی):

$f(x)=\sin x \quad x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \quad y\in[-1,1]$

$y=\cos x \quad x\in[0,\pi] \quad y\in[-1,1]$

$y=tg\,x \quad y\in\mathbb{R} \quad x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$y=cotg\,x \quad y\in\mathbb{R} \quad x\in(0,\pi)$

$y=\sin^{-1}x \Leftrightarrow x=\sin y \Rightarrow 1=y'\cos y \Rightarrow$

$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}=\pm\sqrt{1-x^2}$

نتیجه: اگر $y=\sin^{-1}u \quad (u=g(x))$

الف) $y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ب) $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\sin^{-1}u+C$

ج) $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\sin^{-1}(\frac{u}{a})+C$

تمرین: معکوس تابع $\cos x$ را بدست آورید:

$y=\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x \Rightarrow \cos^{-1}x+\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

$y=\cos^{-1}x \Rightarrow x=\cos y \Rightarrow 1=-y'\sin y \Rightarrow y'=-\frac{1}{\sin y}$

$\Rightarrow y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=tg^{-1}x \Leftrightarrow x=tg\,y \Rightarrow 1=y'(1+tg^2y) \Rightarrow y'=\frac{1}{1+tg^2y}$

$\Rightarrow y'=\frac{1}{1+x^2}$

نتیجه: $y=tg^{-1}u$

1) $y'=\frac{u'}{1+u^2}$ 2) $\int\frac{du}{1+u^2}=tg^{-1}u+C$

3) $\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{|a|}tg^{-1}\frac{u}{a}+C$

سایر معکوس توابع مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$y=\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-tg^{-1}x \Rightarrow y=\sec^{-1}x=\cos^{-1}(\frac{1}{x})$

hamednafisi@gmail.com

$y = \csc^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

مشتق $\sec^{-1}(x)$ را به دست آورید.

$y = \sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad y = \cos^{-1} u$

$$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow u = \frac{1}{x} \Rightarrow u' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$\log_a M = N \Leftrightarrow M = a^N \quad (M>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

$a = e \simeq 2.71 \quad \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\right)$

تابع لگاریتم طبیعی و معکوس آن، تابع نمایی:

تابع لگاریتم طبیعی را به چند صورت می توان تعریف کرد:

تعریف: تابع لگاریتم طبیعی که با علامت تابعی $f(x) = \ln x$ نمایش داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$f(x) = \ln x = \log_e x \quad (x>0)$

تعریف: تابع لگاریتم طبیعی به صورت زیر نیز تعریف می‌شود:

$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt =$

$\ln ab = \ln a + \ln b \qquad \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^a \frac{1}{t}\,dt + \int_1^b \frac{1}{t}\,dt$

با کمک تعریف ثابت کنید مشتق تابع $f(x) = \ln x$ برابر است با $f'(x) = \frac{1}{x}$.

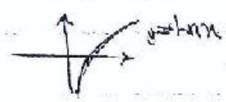
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x\to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right) \quad \frac{\Delta x}{x} = t$$

$\Delta x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$$= \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$



نتیجه: اگر $y = \ln u$ و $u = g(x)$ آنگاه: $y' = D_x^y = \frac{u'}{u}$

تعریف: مشتق تابع $y = \ln|x|$

$u = |x| = \sqrt{x^2} \quad u' = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \quad y' = \frac{\frac{x}{|x|}}{|x|} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

نتیجه: 1) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ 2) $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

$$\int u^n\,du = \begin{cases} \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C & n \neq -1 \\ \ln|u| + C & n = -1 \end{cases}$$

مثال: انتگرال‌های نامعین ۴ تابع مثلثاتی را به دست آورید.

1) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ 2) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

۳) $\int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \qquad u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x\,dx$

$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

۴) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad \sin x = u \Rightarrow du = \cos x\,dx$

$= \int \frac{du}{u} = \ln|\sin x| + C$

*** ۵) $\int \sec x\,dx = \int (\sec x)\frac{\sec x + tg\,x}{\sec x + tg\,x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x\,tg\,x}{\sec x + tg\,x}\,dx$

$= \int \frac{du}{u} = \boxed{\ln|\sec x + tg\,x| + C}$

*** ۶) $\int \csc x\,dx = \int (\csc x)\frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}\,dx = \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x}\,dx$

$= \int \frac{du}{u} = \boxed{\ln|\csc x - \cot x| + C}$

تعریف: معکوس تابع لگاریتم طبیعی تابع نمایی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

$R_f = \{y \mid y > 0\} \qquad e^u = e^{g(x)} > 0$

قضیه: مشتق $y = e^x$ برابر $y' = e^x$ است $\left(y^{(n)} = e^x = y, \; n \geq 0\right)$

$x = \ln y \xRightarrow{\text{مشتق}} 1 = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = y$

نتیجه: اگر $y = e^u$ و $u = g(x)$ آنگاه

الف) $y' = u'e^u$ ب) $\int e^u du = e^u + C$

مثال: انتگرال‌های معین و نامعین زیر را تعیین کنید.

1) $(a \neq 0)\; \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int a e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int e^u du = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

$ax = u \Rightarrow a\,dx = du$

۲) $\int_0^1 x e^{(x^2+5)}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x e^{x^2+5} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{u} = \frac{1}{2}e^{(x^2+1)}\Big]_0^1$

۳) $\int \cos x\, e^{(\sin x+1)}dx = \int e^u du = e^u = e^{\sin x + 1} + C$

۴) $\int e^{x^2}dx =$ قابل محاسبه نیست.

به سادگی نتیجه می‌شود که.

$y = \log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow \ln x = y\ln a \Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a}$

تمرین: دامنه و برد و مشتق تابع $y = \log_a x$ را تعیین و آن را رسم کنید.

$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \left(\frac{1}{\ln a}\right)\ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} > 0$

$e<5<e^2 \Rightarrow \ln e<\ln 5<\ln e^2 \Rightarrow 1<\ln 5<2$

تعریف: معکوس تابع $y=\log_a x$ تابع نمایی $y=a^x$ است به سادگی می‌توان نشان داد که: $a^x=e^{x\ln a}$

$y=a^x \Leftrightarrow \ln y=x\ln a \Leftrightarrow y=e^{x\ln a}$

مثال: مشتق توابع زیر را تعیین کنید.

$y=5^x \qquad y=5^{\sin x} \qquad y=a^x$

$y=5^x=e^{x\ln 5}=e^u \Rightarrow y'=(\ln 5)5^x$

$y=5^{\sin x}=e^{\sin x\ln 5} \Rightarrow y'=(\cos x\ln 5)5^{\sin x}$

$y=a^x=e^{x\ln a} \Rightarrow y'=(\ln a)a^x$

مثال: انتگرال‌های معین و نامعین زیر را تعیین کنید.

1) $\int a^x dx=\int e^{x\ln a}dx \qquad u=x\ln a \Rightarrow du=\ln a\,dx$

$=\frac{1}{\ln a}a^x+c$

$u=(x^2+1)\ln 5 \Rightarrow du=2x\ln 5\,dx$

$~~u=x^2+1 \Rightarrow du=2x\,dx~~$

2) $\int_0^1 x5^{(x^2+1)}dx=\int_0^1 xe^{(x^2+1)\ln 5}dx=\frac{1}{2\ln 5}\int_0^1(2x\ln 5)e^{(x^2+1)\ln 5}dx$

$=\frac{1}{2\ln 5}\int_{\ln 5}^{2\ln 5}e^u du=e^u\times\frac{1}{2\ln 5}\Big]_{\ln 5}^{2\ln 5}=\frac{1}{2\ln 5}(25-5)=\frac{10}{\ln 5}$

۲۶

$\int(\sin x)3^{\cos x}dx=?$

آشنایی با توابع غیرجبری:

اگر $u=f(x)$ و $v=g(x)$ دو تابع از متغیر x باشند آنگاه تابع $y=u^v$ (که در آن $u>0$) آنگاه این تابع را تابع غیر جبری گویند.

مثال: $y=x^x$ ، $y=x^{\sqrt{x}}$ ، $y=x^{\sin x}$ ، $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ، $y=(\sin x)^{\cos x}$

توابع غیرجبری قابل تبدیل به توابع لگاریتمی ضمنی یا نمایی صریح می‌باشند.

$y=u^v \Leftrightarrow \underbrace{\ln y=v\ln u}_{\text{لگاریتم‌گیری دو طرف}} \Leftrightarrow y=e^{v\ln u}$ نمایی صریح

مثال: مشتق توابع زیر را تعیین کنید.

$y=x^x=e^{x\ln x}=e^u \Rightarrow y'=u'e^u \qquad u=x\ln x \Rightarrow u'=\ln x+1$

$\Rightarrow y'=(\ln x+1)x^x$

$y=x^{\sin x}=e^{(\sin x)\ln x} \Rightarrow y'=(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})e^{\sin x\ln x}$

$=(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})x^{\sin x}$

مثال: تابع اولیه‌های زیر را تعیین کنید.

$\int(\ln x+1)x^x dx=\int(\ln x+1)e^{x\ln x}dx=\int e^u du$

$=e^{x\ln x}+c=x^x+c$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

نکته : $\int x^n \ln x\, dx$, $\int x^n \log_a^x dx$, $\int x^n e^x dx$, $\int x^n a^x dx$ به روش جزء به جزء حل می شوند

مثل : $\int \sin^{-1}x\, dx$, $\int tg^{-1}x\, dx$, $\int x\, tg^{-1}x\, dx$, $\int \sinh^{-1}x\, dx$, $\int tgh^{-1}x\, dx$

$$\int \sin^{-1}x\, dx = x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$\begin{cases} u = \sin^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int tg^{-1}x\, dx = x\, tg^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\, tg^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$\begin{cases} u = tg^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int x\, tg^{-1}x\, dx = \frac{1}{2}x^2\, tg^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2\, tg^{-1}x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$\begin{cases} u = tg^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \qquad = \frac{1}{2}x^2\, tg^{-1}x + \frac{1}{2}tg^{-1}x + C$$

$$\int \sinh^{-1}x\, dx = x\sinh^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sinh^{-1}x - \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du \quad (u = 1+x^2)$$

$$\begin{cases} u = \sinh^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int tgh^{-1}x\, dx = x\, tgh^{-1}x - \int \frac{x}{1-x^2}dx = x\, tgh^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$\begin{cases} u = tgh^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{1-x^2}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$\int x^n \sin^{-1}x\, dx$, $\int x^n \cos^{-1}x\, dx$, $\int x^n tg^{-1}x\, dx$, $\int x^n \sinh^{-1}x\, dx$, $\int x^n \cosh^{-1}x\, dx$ به روش جزء به جزء حل می شوند

$$A = \int e^x \sin x\, dx = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x\, dx \end{cases} \quad \begin{pmatrix} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{pmatrix} = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$\begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \qquad \begin{matrix} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \sin x \end{matrix}$$

$$A = e^x(\sin x - \cos x) - A \Rightarrow 2A = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

$\left(\int \sec^3 x\, dx = \int \underbrace{\sec x}_{u}\, \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{dv}\right.$, $\int \sec^5 x\, dx$, $\int e^{ax}\cos bx\, dx$, $\int e^{ax}\sin bx\, dx$

۲۵

تمرین: انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

$\int \sin^4 x\,dx$ ، $\int \cos^5 x\,dx$ ، $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ ، $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$

$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}$ ، $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x}$ ، $\int \sin 3x \cos^4 x\,dx$

۳) روش تبدیل انتگرال به انتگرال توابع مثلثاتی (توابع هیپربولیک)، بعضی از انتگرال‌ها به گونه‌ای می‌باشند که با انتخاب یک متغیر مناسب، به انتگرال توابع مثلثاتی تبدیل می‌شوند، از طرفی انتگرال توابع مثلثاتی

$\int \sin^n x\,dx$ ، $\int \cos^n x\,dx$ ، $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$ ، $\int tg^n x\,dx$ ، $\int \cot^n x\,dx$

$\int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}$ ، $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}$ ، $\int \frac{1}{\cos^n x}\,dx$ ، $\int \frac{1}{\sin^n x}\,dx$

قابل محاسبه می‌باشند، ما براین با مشکل مواجه نخواهیم شد.

مثال: انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

$\underset{A}{\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}}$ ، $\underset{B}{\int \sqrt{1-x^2}\,dx}$ ، $\underset{C}{\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x^2}}}$ ، $\underset{D}{\int \sqrt{2+x^2}\,dx}$ ، $\underset{E}{\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}}$

$\underset{F}{\int \sqrt{x^2-1}\,dx}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \csc\theta\,d\theta = \ln|\csc\theta - \cot\theta| + C$$

$x = \sin\theta \quad dx = \cos\theta\,d\theta \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta$

$$B = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos\theta\cos\theta\,d\theta = \int \cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C$$

$$C = \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x^2}} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta}{(\sqrt{2}\,tg\theta)\sqrt{2}\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sec\theta}{tg\theta}\,d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\,d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \csc\theta\,d\theta$$

$\begin{cases} x = \sqrt{2}\,tg\theta \ \ \text{یا}\ \ x = \sqrt{2}\sinh t \\ dx = \sqrt{2}\sec^2\theta \end{cases} \qquad \sqrt{2+x^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+tg^2\theta} = \sqrt{2}\sec\theta$

(1) $D = \int \sqrt{2}\sec\theta(\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta) = 2\int \sec^3\theta\,d\theta$

(2) $x = \sqrt{2}\sinh t \Rightarrow dx = \sqrt{2}\cosh t\,dt$

$\sqrt{2+x^2} = \sqrt{2+2\sinh^2 t} = \sqrt{2}\cosh t$

$D = \int \sqrt{2+x^2}\,dx = 2\int \cosh^2 t\,dt \qquad \cosh^2 t = \frac{1+\cosh 2t}{2}$

$$E = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec\theta\,tg\theta\,d\theta}{\sec\theta\,tg\theta} = \int d\theta = \theta + C = \sec^{-1}x + C$$

$\begin{cases} x = \sec\theta \quad (tg^2\theta = \sec^2\theta - 1) \\ dx = \sec\theta\,tg\theta\,d\theta \end{cases}$

$\begin{cases} x = \cosh t \quad (\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \Rightarrow \cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t) \\ dx = \sinh t\,dt \end{cases}$

حامد نفیسی

$$F=\int \operatorname{tg}\theta \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta=\int \sec\theta \operatorname{tg}^2\theta \, d\theta=\int \sec\theta(\sec^2\theta-1)\,d\theta$$
$$=\int \sec^3\theta \, d\theta-\int \sec\theta \, d\theta$$

تمرین $\Rightarrow F=\int \sqrt{x^2-1}\,dx \qquad x=\cosh t$

نتیجه: تمام انتگرال‌هایی که رادیکالی به صورت $\sqrt{a^2+u^2}$ ، $\sqrt{a^2-u^2}$ ، $\sqrt{u^2-a}$ دارند به سادگی قابل تبدیل به انتگرال توابع مثلثاتی (هیپربولیک) هستند.

تمرین: $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad (x=\operatorname{tg}\theta)$

$$\int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\sec^4\theta}=\int \cos^2\theta \, d\theta=\frac{1}{4}\int (1+\cos 2\theta)^2 d\theta$$

« آشنایی با توابع هیپربولیک » (هذلولوی)

به کمک دو تابع $y=e^x$ و $y=e^{-x}$ شش تابع تعریف می‌شوند که این توابع را توابع هیپربولیک یا هذلولوی گویند.

خواص این توابع شبیه خواص توابع مثلثاتی است.

تعریف: توابع sin ، cos ، tg ، Ct ، Sec ، Csc هیپربولیک به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$y=\sinh x=\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$y=\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$y=\operatorname{tgh} x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$y=\operatorname{Cth} x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

$y=\operatorname{Sech} x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$

$y=\operatorname{Csch} x=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$

$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 x=1\\ \cosh^2 x-\sinh^2 x=1\end{cases}$

$\begin{cases}\operatorname{tg} x \operatorname{Cot} x=1\\ \operatorname{tgh} x \operatorname{Cth} x=1\end{cases}$

$\begin{cases}1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\\ 1-\operatorname{tgh}^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x}=\operatorname{Sech}^2 x\end{cases}$

$\begin{cases}\sin 2x=2\sin x\cos x\\ \sinh 2x=2\sinh x\cosh x\end{cases}$

$\begin{cases}y=\sin x \longrightarrow y'=\cos x\\ y=\sinh x \longrightarrow y'=\cosh x\end{cases}$

$\begin{cases}y=\cos x \longrightarrow y'=-\sin x\\ y=\cosh x \longrightarrow y'=\sinh x\end{cases}$

$\int \sinh x\,dx=\cosh x+c$

$\int \cosh x\,dx=\sinh x+c$

توابع $\sinh x$ ، $\cosh x$ ، $\operatorname{tgh} x$ را رسم کنید.

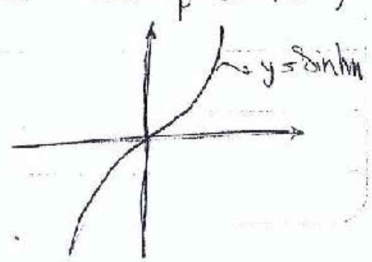
$y=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \quad D_f=\mathbb{R} \quad f'(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$f'(x)>0 \qquad x=0 \rightarrow y=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$f''(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \Rightarrow f''(x)=f(x)$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=0$ نقطه عطف

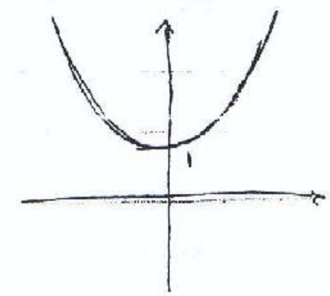


$y = \cosh x \qquad D_f = \mathbb{R} \qquad y > 0$

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \qquad (0,1)$

$y'' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Rightarrow y'' > 0$



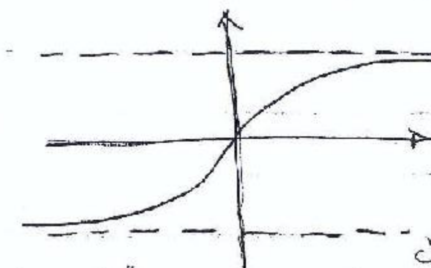
* اگر فقط یک شاخه از $y = \cosh x$ را در نظر بگیریم (یعنی $x>0$) در این صورت این تابع معکوس پذیر می‌شود.

$y = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$

$D_f = \mathbb{R} \qquad |y| < 1 \qquad x = 0 \Rightarrow y = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \ , \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$y' = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0 \qquad y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \to (0,0)$ نقطه عطف



* این تابع همه جا معکوس پذیر است.

تعریف: $y = \coth x \qquad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

«آشنایی با معکوس توابع هیپربولیک»

معکوس توابع هیپربولیک مانند معکوس توابع مثلثاتی تعریف می‌شوند.

تعریف

$y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y$

$y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y$

$y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y$

$y = \coth^{-1} x \Leftrightarrow x = \coth y$

$y = \operatorname{sech}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sech} y$

$y = \operatorname{csch}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{csch} y$

$y = \sinh^{-1} x \qquad D_f = \mathbb{R} \qquad R_f = \mathbb{R}$ تابع پیوسته و صعودی

$y' = ? \Rightarrow x = \sinh y \Rightarrow 1 = y' \cosh y \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cosh y}$

$(\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1) \Rightarrow \cosh x = \pm\sqrt{1 + \sinh^2 y} = \pm\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}$

منفی به این دلیل قابل قبول نیست چون $\cosh x$ همواره مثبت است

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

نتیجه اگر $y = \sinh^{-1} u$ و $u = g(x)$

الف) $y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$ ب) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \sinh^{-1} u + C$

$y = \cosh^{-1} x \qquad D_f : \{x \mid x \geq 1\} \qquad R_f \{y \mid y \geq 0\}$

$y' = ? \Rightarrow x = \cosh y \Rightarrow 1 = y' \sinh y \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sinh y}$

$\sinh y = \pm\sqrt{\cosh^2 x - 1}$

منفی به این دلیل غیرقابل قبول نیست که وقتی $y > 0$ باشد این تابع مثبت می‌باشد

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

نتیجه: اگر $y=\cosh^{-1}u$ و $u=g(x)$ آنگاه:

الف) $y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$

ب) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 \mp x^2}} = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\frac{u}{x}\right)+c & \text{منفی} \\ \sinh^{-1}\left(\frac{u}{x}\right)+c & \text{مثبت} \end{cases}$

ج) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$

د) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1}u + c$

تمام انتگرال‌هایی که به فرم $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ باشند قابل انتگرال‌گیری می‌باشند.

تمرین. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$ ، $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ ، $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ ، $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$y = tgh^{-1}x \quad |x|<1 \Rightarrow x = tgh\,y \overset{(1)}{\Rightarrow} 1 = y'(1-tgh^2 y)$

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{1-x^2}$

نتیجه: اگر $y = tgh^{-1}u$ و $u=g(x)$

الف) $y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$ ب) $\displaystyle\int \frac{du}{1-u^2} = tgh\,u + c$

نتیجه کلی:

$$\int \frac{du}{a^2 \pm u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} tg^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c & \text{مثبت} \\ \frac{1}{a} tgh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c & \text{منفی} \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = -\int \frac{du}{a^2-u^2} = -\frac{1}{a} tgh^{-1}u + C$$

* تمام کسرهایی که به فرم $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ هستند قابل انتگرال‌گیری می‌باشند.

تذکر: توابع هیپربولیک توابعی هستند نمایی، معکوس این توابع باید به صورت لگاریتمی نیز تعریف شوند. نشان می‌دهیم که این توابع را به صورت لگاریتمی نیز توان تعریف کرد.

$y = \sinh^{-1}x = Ln(x+\sqrt{x^2+1}) \quad x\in\mathbb{R}$

$y = \cosh^{-1}x = Ln(x+\sqrt{x^2-1}) \quad x \geq 1$

$y = tgh^{-1}x = \frac{1}{2} Ln \frac{1+x}{1-x} \quad |x| \leq 1$

$y = coth^{-1}x = \frac{1}{2} Ln \frac{x+1}{x-1} \quad |x| \geq 1$

$y = sech^{-1}x = Ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) \quad 0 < x < 1$

$y = csch^{-1}x = Ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) \quad x \neq 0$

تمرین: ثابت کنید هر دو تعریف برای معکوس توابع هیپربولیک معادلند.

$y = \sinh^{-1}x \Leftrightarrow x = \sinh y \Leftrightarrow x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

طرفین $\times e^y$

$\Leftrightarrow 2x = e^y - e^{-y} \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \Leftrightarrow A^2 + 2Ax - 1 = 0$

$A = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2+1}}{1}$ → $x + \sqrt{x^2+1}$ ؛ $x - \sqrt{x^2+1} \xrightarrow{e^y>0}$ غ ق ق

$A = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y = Ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$I=\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+$$

حالت چهارم: اگر در مخرج (x) علاوه بر عوامل درجه اول و دوم بدون تکرار، به تکرار $(x^2+px+q)^k$ که در آن $p^2-4q<0$ آن گاه در طرف راست اتحادی که تشکیل می‌دهیم به ازای هر عبارت که به صورت $(x^2+px+q)^k$ عبارت زیر را اضافه می‌کنیم

$$\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{A_{k-1}x+B_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}$$

$$\int\frac{2x^2+3}{x^4+2x^2+1}dx=\int\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+2\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{tg}^{-1}x$$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\equiv\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=\frac{(Ax+B)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$2x^2+3\equiv(Ax+B)+(Cx+D)(x^2+1)\quad A=0\ \ B=1\ \ C=0\ \ D=2$$

تذکر: با توجه به اینکه انتگرال توابع گویا قابل انتگرال‌گیری می‌باشد اگر بتوان با استفاده از تغییر متغیر مناسب انتگرال توابع غیر گویا را به تابع گویا تبدیل کرد این گونه انتگرال‌ها نیز بدون هیچ مشکلی قابل حل می‌باشند:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx\ ,\ \int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx\ ,\ \int\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx\quad \left[x=t^2\Rightarrow dx=2t\,dt\right]=2\sqrt{x}-2\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x}+c$$

$$=\int\frac{t\times 2t}{1+t^2}dt=2\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=2t-2\operatorname{tg}^{-1}t+c$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{t^3(6t^5)dt}{1+t^2}=6\int\frac{t^8}{1+t^2}dt$$

$$x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt$$

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t^2\cdot 6t^5dt}{1+t^3}=6\int\frac{t^7dt}{1+t^3}$$

مثال ۱) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{5+\cos x}dx=-\int\frac{du}{u}=\ln(5+\cos x)+C$

$$u=5+\cos x\Rightarrow du=-\sin x\,dx$$

۲) $\displaystyle\int\frac{dx}{5+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{4t^2+6}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}}$

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

$$dt=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)dx\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

۳) $\displaystyle\int\sec x\,dx=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{1-t^2}=2\operatorname{tgh}^{-1}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+c$

$$I=\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+$$

حالت چهارم: اگر در تجزیه (مخرج) علاوه بر عوامل درجه اول و دوم بدون تکرار، یا تکرار $(x^2+px+q)^k$ که در آن $p^2-4q<0$ آن گاه در طرف راست اتحادی که تشکیل می‌دهیم به ازای هر عبارت که به صورت $(x^2+px+q)^k$ عبارت زیر را اضافه می‌کنیم

$$\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{A_{k-1}x+B_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}$$

$$\int\frac{2x^2+3}{x^4+2x^2+1}dx=\int\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+2\int\frac{dx}{x^2+1}\qquad tg^{-1}x$$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\equiv\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=\frac{(Ax+B)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$2x^2+3\equiv(Ax+B)+(Cx+D)(x^2+1)\qquad A=0\quad B=1\quad C=0\quad D=2$$

تذکر: با توجه به اینکه انتگرال توابع گویا قابل انتگرال‌گیری می‌باشند اگر بتوان با انتخاب متغیری مناسب انتگرال توابع غیر گویا را به تابع گویا تبدیل کرد این گونه انتگرال‌ها نیز بدون هیچ مشکلی قابل حل می‌باشند:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx\ ،\ \int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx\ ،\ \int\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx\qquad x=t^2\Rightarrow dx=2t\,dt\qquad =2\sqrt{x}-2tg^{-1}\sqrt{x}+c$$

$$=\int\frac{t\times 2t}{1+t^2}dt=2\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=2t-2tg^{-1}t+c$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{t^3(6t^5)dt}{1+t^2}=6\int\frac{t^8}{1+t^2}dt$$

$$x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt$$

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t^2\cdot 6t^5dt}{1+t^3}=6\int\frac{t^7dt}{1+t^3}$$

مثال ۱) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{5+\cos x}dx=-\int\frac{du}{u}=\ln(5+\cos x)+c$

$$u=5+\cos x\Rightarrow du=-\sin x\,dx$$

۲) $\displaystyle\int\frac{dx}{5+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{4t^2+6}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}}$

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\qquad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad tg\frac{x}{2}=t$$

$$dt=\frac{1}{2}\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)dx\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

۳) $\displaystyle\int\sec x\,dx=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{1-t^2}=2tgh^{-1}\left(tg\frac{x}{2}\right)+c$

روش کاهشی انتگرال: این روش که برای انتگرال‌هایی به صورت $I_n=\int x^n e^{ax}dx$ ($n\in N$)، $I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$، $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$، $I_n=\int tg^n x\,dx$، $I_n=\int x^n e^{x}dx$ استفاده می‌شود سعی می‌کنیم یک رابطه بازگشتی تعیین کرده و به کمک آن، انتگرال را محاسبه کنیم. به عبارت دیگر سعی می‌کنیم بین I_n و یکی از I_nهای دیگری مانند I_{n-1} و I_{n+1} ... یک معادله تولید کنیم.

$$I_n=\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\underbrace{\int x^{n-1}e^x dx}_{I_{n-1}} \Rightarrow I_n = x^n e^x - nI_{n-1} \quad n\geq 1$$

$$I_0=e^x+C$$

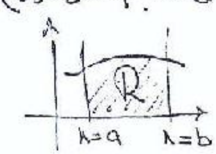
$$I_n=\int tg^n x\,dx = \int tg^{n-2}x\, tg^2 x\,dx = \int tg^{n-2}x(\sec^2x-1)dx$$

$$I_n=\int tg^{n-2}x\sec^2 x\,dx - \int tg^{n-2}x\,dx$$

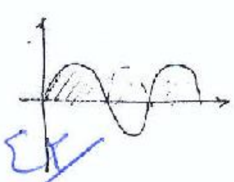
$$I_n=\frac{1}{n-1}tg^{n-1}x - I_{n-2} \quad n\geq 2 \qquad I_0=x+c \qquad I_1=\ln|\sec x|+c$$

کاربردهای انتگرال معین (محاسبه سطح، حجم، طول قوس)

محاسبه مساحت: اگر f پیوسته و مثبت در بازه $[a,b]$



مساحت ناحیه R $\quad S=\int_a^b f(x)dx$



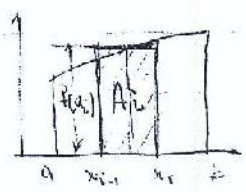
در حالت کلی اگر f پیوسته در بازه $[a,b]$ آنگاه مساحت ناحیه R واقع بین نمودار f، خطوط $x=a$، $x=b$ و محور xها برابر است با $\int_a^b|f(x)|dx$

می‌خواهیم ناحیه R واقع بین تابع پیوسته f، بین خطوط $x=a$، $x=b$ و محور xها یک مرتبه حول محور xها و یک مرتبه حول محور yها دوران دهیم. اگر حجم جسم حاصل از دوران به ترتیب V_x و V_y نامگذاری می‌کنیم.

قضیه: حجم جسم حاصل از دوران ناحیه R (واقع بین نمودار تابع پیوسته $f(x)$، خطوط $x=a$ و $x=b$ و محور xها) هنگامی که این ناحیه حول محور xها دوران کند برابر است با $V_x=\pi\int_a^b (f(x))^2dx$

اثبات: بازه $[a,b]$ را به n قسمت تقسیم می‌کنیم تا نقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n$ در بازه‌های $[x_0,x_1], \dots, [x_{i-1},x_i], \dots, [x_{n-1},x_n]$ $\quad \Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ $(i=1,\dots,n)$

$\alpha_i\in[x_{i-1},x_i]$



حجم استوانه‌ای که از دوران مستطیل A_i $= \pi f^2(\alpha_i)\Delta_i x$

حجم کل $\sum_{i=1}^{n} V_{x_i}=\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\alpha_i)\Delta_i x \qquad V_x \simeq \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\alpha_i)\Delta_i x$

$$g(x)=\pi(f(x))^2 \qquad g(\alpha_i)=\pi f^2(\alpha_i)$$

$$V_x \simeq \sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i)\Delta_i x \Rightarrow V_x = \int_a^b g(x)dx$$

قضیه: حجم جسم حاصل از دوران ناحیه R (واقع بین تابع پیوسته و مثبت $f(x)$، خطوط $x=a$ $(a\geq 0)$ و $x=b$ و محور xها) هنگامی که حول محور yها

حول محور y برابر است با: $V_y = \int_a^b 2\pi x f(x)dx = 2\pi \int_a^b x f(x)dx$

محاسبه طول قوس (قضیه): اگر $f(x)$ و مشتق آن $f'(x)$ روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه اندازه طول قوس منحنی تابع $f(x)$ از نقطه $A(a,f(a))$ تا نقطه $B(b,f(b))$ برابر است با

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$f(x) = Ln\, x$ تعریف شده باشد

الف) مساحت ناحیه R واقع بین نمودار f را $x=1$ ، $x=e$ و محور xها حساب کنید

ب) ناحیه R را یکبار حول محور xها و یکبار حول محور yها دوران دهید V_x, V_y

ج) اندازه طول قوس منحنی این تابع را $A(1,0)$ تا $B(e,1)$

راه حل: الف) $S = \int_1^e |Ln\, x| dx = \int_1^e Ln\, x\, dx = (x Ln\, x - x)\Big|_1^e = 1$

ب) $V_x = \pi \int_1^e (Ln\, x)^2 dx = \pi \int_0^1 u^2 e^u du = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx$

$Ln\, x = u \Rightarrow x = e^u \quad dx = e^u du \quad x=e \to u=1 \quad x=1 \to u=0$

$V_y = 2\pi \int_1^e x\, ln\, x\, dx$

$L = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_1^e \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$

تمرین: $f(x) = e^x \quad [0,1]$

انتگرال‌های نامتعارف (غیرعادی - ناسره) (Improper Integrals)

در نوع اول انتگرال نامتعارف تعریف می‌کنیم گروه اول انتگرال‌هایی می‌باشند که یک یا هر دو کران انتگرال $\pm\infty$ است. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ، $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ ، $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

تعریف: اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a,+\infty)$ پیوسته باشد آنگاه انتگرال نامتعارف $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} g(b)$ که تابعی از b است. اگر $\lim_{b\to\infty} g(b)$ وجود داشته باشد

انتگرال نامتعارف را همگرا گویند (مستقل از همگرایی گویند) و اگر این حد وجود نداشته باشد این انتگرال را واگرا گویند.

تعریف: اگر تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty, b]$ پیوسته باشد آنگاه انتگرال نامتعارف $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} g(a)$ اگر $\lim_{a\to-\infty} g(a)$ وجود داشته باشد انتگرال نامتعارف را همگرا گویند و اگر وجود نداشته باشد آن را واگرا گویند.

تعریف: اگر تابع f روی مجموعه $\mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} I(a) + \lim_{b\to+\infty} I(b)$$

مثال: درباره همگرایی انتگرال زیر بحث کنید

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} tg^{-1}x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (tg^{-1} b) = \frac{\pi}{2}$$

تمرین: همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های روبرو را بحث کنید.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$ ، $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx = 2$ ، $\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx = 1$

چند قضیه در مورد همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های نامتعارف:

قضیه. اگر f و g دو تابع پیوسته روی بازه $[a,+\infty)$ و $0\le f(x)\le g(x)$ درباره $[a,+\infty)$ در صورتیکه انتگرال نامتعارف $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ همگرا باشد، $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ همگراست (آزمون مقایسه)

مثال) همگرایی و واگرایی انتگرال روبرو بحث کنید. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3(1+e^{2x})}$

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-3}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx \begin{cases} p>1 & \text{همگرا} \\ p\le 1 & \text{واگرا}\end{cases}\right)$

$1\le x^3 < x^3(1+e^{2x}) \Rightarrow \frac{1}{x^3(1+e^{2x})} < \frac{1}{x^3}$

قضیه. اگر انتگرال نامتعارف $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ همگراست.

مثال) در همگرایی و واگرایی انتگرال روبرو بحث کنید. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$

$0\le\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$

hamednafisi@gmail.com

انتگرال‌های نامتعارف نوع دوم:

انتگرال‌هایی باشند به صورت $\int_a^b f(x)dx$ که در آن f در نقطه انتهایی و انتهای بازه یا نقاط بین $[a,b]$ پیوسته نباشد.

تعریف: اگر تابع f روی تمام نقاط بازه $(a,b]$ پیوسته و $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ آنگاه $\int_a^b f(x)dx$ را انتگرال نامتعارف گویند و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\epsilon\to0^+}\underbrace{\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx}_{\text{وجود دارد}}=\lim_{\epsilon\to0^+}I(\epsilon)$ $\xrightarrow{\text{وجود داشته}}$ همگرا

واگرا غیر از بی‌نهایت

تعریف. اگر تابع f روی تمام نقاط بازه $[a,b)$ پیوسته و $\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$ آنگاه $\int_a^b f(x)dx$ را انتگرال نامتعارف گویند به صورت زیر است.

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx=\lim_{\epsilon\to0^+}I(\epsilon)$ $\xrightarrow{\text{وجود دارد}}$ همگرا

وجود نداشته باشد واگرا

تعریف اگر تابع f روی تمام نقاط بازه $[a,b]$ پیوسته باشد بجز نقطه c ، $(a<c<b)$ و $\lim_{x\to c^\pm}|f(x)|=+\infty$ آنگاه انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ برابر است

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_a^{c-\epsilon}f(x)dx+\lim_{\delta\to0^+}\int_{c+\delta}^b f(x)dx=I_1(\epsilon)+I_2(\delta)$

وجود داشته ← همگرا

مثال) انتگرال $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ = واگراست.

۴۵

دنباله‌ها و سری‌ها

دنباله چیست؟ تعریف: دنباله تابعی است که از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌شود. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ تابع f یک دنباله است.

$f(1)=1 \quad f(2)=\frac{1}{2} \quad f(3)=\frac{1}{3} \quad \dots \quad f(n)=\frac{1}{n}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یا $\{a_n\}$ $\qquad f=\{(n,\frac{1}{n}) \mid n\in\mathbb{N}\}$

حد یک دنباله: حد دنباله $\{a_n\}$ وقتی که $n\to+\infty$ عدد c است اگر $\forall \epsilon>0 \ \exists N$ عدد طبیعی به طوری که $|a_n-c|<\epsilon$ وقتی $n\geq N$ و به اختصار می‌نویسیم $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$.

تعریف: اگر دنباله $\{a_n\}$ حد داشته باشد دنباله را همگرا گویند و اگر حد نداشته باشد یا $\lim_{n\to+\infty} a_n=\pm\infty$ دنباله واگرا است.

مثال: ثابت کنید که دنباله $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به صفر است.

$|\frac{1}{n}-0|<\epsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<\epsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\epsilon} \qquad N_{(\epsilon)}=[\frac{1}{\epsilon}]+1$

مثال: ثابت کنید که این دنباله واگرا است. $\{(-1)^{n+1}\}=1,-1,1,\dots$

فرض می‌کنیم $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}=c \qquad \forall\epsilon>0 \ \exists N$ عدد طبیعی $|a_n-c|<\epsilon \quad \forall n\geq N$

$\epsilon=\frac{1}{2} \ \exists N_1$ به طوری که $|(-1)^{n+1}-c|<\frac{1}{2} \quad \forall n\geq N_1$

زوج $n_1 \geq N_1 \qquad |(-1)^{n_1+1}-c|<\frac{1}{2} \Rightarrow |-1-c|<\frac{1}{2}$

فرد $n_2 \geq N_1 \qquad |(-1)^{n_2+1}-c|<\frac{1}{2} \Rightarrow |1-c|<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow |1+c|+|1-c|<1 \Rightarrow |1+c+1-c|<1 \Rightarrow |2|<1 \Rightarrow 2<1$ ✗

چند قضیه در رابطه با همگرایی و یا واگرایی دنباله‌ها:

ق ۱. اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ و نیز $f(n)$ برای همه مقادیر صحیح مثبت تعریف شده باشد آن‌گاه دنباله $\{f(n)\}$ همگراست یا به عبارت دیگر $\lim_{n\to+\infty} f(n)=L$

مثال: در همگرایی و یا واگرایی این دنباله‌ها بحث کنید.

$\{\frac{n}{n+1}\}, \{n\tan\frac{\pi}{n}\}, \{\ln n\}, \{n\}, \{n^2\}, \{(1+\frac{1}{n})^n\}, \{\frac{\ln n}{n^2}\}$

از اول) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ (1) $\qquad f(x)=x\tan\frac{\pi}{x}$ (2) $\qquad f(x)=\ln x$

(e) $\lim (1+\frac{1}{n})^n$ (وجود دارد) $\lim_{n\to+\infty} x^2 = +\infty$ (واگرا) $\lim_{n\to+\infty} x = +\infty$

(و) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

تعریف e: عدد e را می‌توان حد دنباله $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ تعریف کرد.

ق۲) قضیه فشردگی در دنباله‌ها: فرض کنید برای سه دنباله $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ داشته باشیم $a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n$ در صورتی که $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = c$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} b_n = c$

ق۳) اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا باشند ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ، $\lim_{n\to\infty} b_n = b$) آنگاه دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ و $\{a_n b_n\}$ و $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ ($b \neq 0$ و $b_n \neq 0$) همگرا خواهند شد.

مثال: همگرایی و واگرایی دنباله روبرو را به دست آورید. $\{\frac{n^2}{n+1}\tan\frac{\pi}{n}\}$

$$= \{\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{a_n} \cdot \underbrace{n\tan\frac{\pi}{n}}_{b_n}\} = \{a_n b_n\}$$

معرفی چند دنباله خاص:

۱) تعریف (دنباله یکنوا): دنباله $\{a_n\}$ را یکنوا گوییم اگر یکی از دو شرط زیر را دارا باشد:

الف) $a_n \le a_{n+1}$ (نزولی) ب) $a_{n+1} \le a_n$ (صعودی)

۲) دنباله کراندار: دنباله $\{a_n\}$ را کراندار گوییم اگر وجود داشته باشد عدد مثبت M به طوری که $|a_n| \le M \quad \forall n$

تمرین: هر دنباله همگرا کراندار است.

تمرین: اگر $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ ثابت کنید در یک همسایگی a کراندار است.

ق۴) هر دنباله یکنوا و کراندار همگرا است. عکس قضیه درست نیست.

سری (تعریف): دنباله $\{a_n\}$ را در نظر بگیرید. مجموع اعداد این دنباله که به صورت زیر نوشته می‌شود یک سری گویند.

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

تذکر: a_n (جمله عمومی دنباله) را جمله عمومی سری گویند.

3

سری‌های همگرا و سری‌های واگرا (تعریف) سری $\sum a_n$ را در نظر بگیرید

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

به کمک این سری دنباله $\{S_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$S_1 = a_1 \quad S_1 = a$ (دنباله مجموع جزئی سری) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

اگر $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ سری را همگرا گویند و اگر $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ وجود نداشته باشد سری واگرا است.

مثال: به کمک تعریف سری ثابت کنید که سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ همگرا است و مقدار همگرایی را هم محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \overset{?}{=} S = 1$$

جمع و تفریق $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad a_1 = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \{S_n\} = \left\{1 - \frac{1}{1+n}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 = S$

مثال: ثابت کنید که سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ واگرا است.

جمع و تفریق $a_n = \ln(n) - \ln(n+1) \qquad a_1 = \ln 1 - \ln 2 \qquad a_2 = \ln 2 - \ln 3$

$S_n = -\ln(n+1) \qquad \{S_n\} = \{-\ln(n+1)\} \quad \lim\limits_{n\to\infty}(-\ln(n+1)) = -\infty$

سری‌های خاص:

سری هندسی (تعریف) به سری

$a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

یک سری هندسی گویند، a را جمله اول، r را قدر نسبت سری گویند.

قضیه: سری هندسی همگرا است اگر $|r|<1$ و اگر $|r| \geq 1$ سری واگرا است.

(در صورتیکه سری همگرا باشد مقدار همگرایی $S = \frac{a}{1-r}$)

$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$

$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$

$\Rightarrow (1-r)S_n = a - ar^n$

(با فرض $r \neq 1$) $\Rightarrow S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n$

$|r|>1 \quad \lim S_n = \pm\infty \qquad |r|<1 \quad \lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

۴۷