بسمه تعالی

جزوه

ریاضی ۲

دانشگاه

صنعتی امیر کبیر

استاد

دکتر عرب زاده

« ریاضی دو »

« دکتر رضائی »

حامد ...

...mednatisi@gmail.com

« توابع برداری »

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حقیقی

تابع برداری: هر تابعی با دامنه در $\mathbb{R}$ با برد در $\mathbb{R}^n$ یک تابع برداری نامیده می‌شود.

$r(t) : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad r(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t))$

$x_i : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, n$

در $\mathbb{R}^3$ توابع برداری را با نمایش زیر در نظر می‌گیریم:

$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

مثال: $r(t) = t\vec{i} + e^t\vec{j} + \sin t\,\vec{k}$, $r(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$

$* \quad D_{r(t)} = D_{x(t)} \cap D_{y(t)} \cap D_{z(t)}$

حد توابع برداری:

فرض کنید $r(t)$ در یک همسایگی محذوف t_0 تعریف شده باشد در این صورت

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni 0 < |t - t_0| < \delta$$
$$\Rightarrow \| r(t) - L \| < \varepsilon$$

$x = (x_1, x_2) \quad a = (a_1, a_2) \Rightarrow \| x - a \| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$

قضیه. فرض کنید $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ و $L=(a,b,c)$ در این صورت

$$\lim_{t\to t_0} r(t) = L \iff \begin{cases} \lim_{t\to t_0} x(t) = a \\ \lim_{t\to t_0} y(t) = b \\ \lim_{t\to t_0} z(t) = c \end{cases}$$

مثال. $\lim_{t\to 0} e^t\vec{i} + \frac{\ln(t+1)}{t}\vec{j} + \frac{\sin 2t}{t}\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

مثال: $\lim_{t\to 0} \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \frac{|t|}{t}\vec{k} =$ * حد ندارد چون مؤلفه سوم حد ندارد.

قضیه: فرض کنید $r_1(t)$، $r_2(t)$ دو تابع برداری و $h(t)$ یک تابع حقیقی باشد در این صورت در صورت وجود حدها داریم:

1) $\lim_{t\to t_0} (r_1(t) + r_2(t)) = \lim_{t\to t_0} r_1(t) + \lim_{t\to t_0} r_2(t)$

2) $\lim_{t\to t_0} (h(t)\cdot r_1(t)) = \lim_{t\to t_0} h(t) \cdot \lim_{t\to t_0} r_1(t)$

3) $\lim_{t\to t_0} r_1(t)\cdot r_2(t) = \lim_{t\to t_0} r_1(t) \cdot \lim_{t\to t_0} r_2(t)$

4) $\lim_{t\to t_0} r_1(t)\times r_2(t) = \lim_{t\to t_0} r_1(t) \times \lim_{t\to t_0} r_2(t)$

مثال: فرض کنید $r_1(t) = t\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + e^t\vec{k}$ و $r_2(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$ مطلوبست محاسبه

$\lim_{t\to 0} r_1(t) \underset{\times}{+} r_2(t)$

$\lim_{t\to 0} r_1(t) = (0,1,1)$ $\quad \lim_{t\to 0} r_2(t) = (1,0,0)$

$\lim_{t\to 0} r_1(t) + r_2(t) = (1,1,1)$ $\quad \lim_{t\to 0} r_1(t)\cdot r_2(t) = (0,0,0) = 0$

$$\lim_{t\to 0} r_1(t)\times r_2(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} - \vec{k} = (0,1,-1)$$

پیوستگی توابع برداری:

فرض کنید تابع برداری $r(t)$ در یک همسایگی t_0 تعریف شده باشد در این صورت تابع برداری $r(t)$ در t_0 پیوسته است هرگاه:

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \ni |t-t_0| < \delta \Rightarrow \|r(t) - r(t_0)\| < \epsilon$

و یا: $\lim_{t\to t_0} r(t) = r(t_0)$

قضیه: تابع برداری $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ در t_0 پیوسته است هرگاه $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ در t_0 پیوسته باشند.

مثال: تابع برداری $r(t) = \sinh t\,\vec{i} + e^{t^2}\vec{j} + \ln(t^2+1)\vec{k}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

مثال: $r(t) = \operatorname{Cos} t\,\vec{i} + \frac{\operatorname{Sin} t}{t}\,\vec{j} + \vec{k}$ در $\mathbb{R}-\{0\}$ پیوسته است.

* قضایای حدی به طور مشابه برای پیوستگی برقرار است.

* $r(t): D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $h(t): D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $roh(t)$ تعریف شده

مشتق توابع برداری:

فرض کنید تابع برداری $r(t)$ در t_0 معین باشد در این صورت مشتق تابع برداری را در t_0 چنین تعریف می‌کنیم:

$$r'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}$$

قضیه: اگر $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ آنگاه:

$$r'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}$$

مثال: $r(t) = tg^{-1}t\,\vec{i} + \operatorname{Cosh} t\,\vec{j} + e^{t^2}\,\vec{k}$

$$r'(t) = \frac{1}{1+t^2}\,\vec{i} + \operatorname{Sinh} t\,\vec{j} + 2te^{t^2}\,\vec{k}$$

مثال: $r(t) = \left(\int_0^t \frac{1}{1+s^2}ds\right)\vec{i} + \left(\int_t^{t^2} \operatorname{Sin}(s^2)ds\right)\vec{j}$

$$r'(t) = \frac{1}{1+t^2}\,\vec{i} + \left(2t\operatorname{Sin}(t^4) - \operatorname{Sin}(t^2)\right)\vec{j}$$

قضایای مشتق توابع برداری:

فرض کنید $r_1(t)$ و $r_2(t)$ دو تابع برداری و $h(t)$ یک تابع حقیقی دارای مشتق در این صورت و وجود مشتقات داریم:

1) $(r_1(t) + r_2(t))' = r_1'(t) + r_2'(t)$

2) $(h(t) \cdot r_1(t))' = h'(t)\,r_1(t) + h(t)\,r_1'(t)$

3) $(r_1(t) \cdot r_2(t))' = r_1'(t)\cdot r_2(t) + r_1(t)\cdot r_2'(t)$

4) $(r_1(t) \times r_2(t))' = r_1'(t)\times r_2(t) + r_1(t)\times r_2'(t)$

قضیه: هر تابع برداری با طول ثابت بر مشتق خود عمود است.

اثبات: $\|r(t)\| = c \Rightarrow \|r(t)\|^2 = c^2 \Rightarrow r(t)\cdot r(t) = c^2$

$\Rightarrow 2r'(t)\cdot r(t) = 0 \Rightarrow r'(t)\cdot r(t) = 0 \Rightarrow r(t) \perp r'(t)$

منحنی:

تعریف: فرض کنید $r(t)$ یک تابع برداری با دامنه $I \subseteq \mathbb{R}$ باشد چنانچه

1) $r(t)$ دارای مشتق پیوسته باشد

2) $r'(t) \neq 0 \quad \forall t\in I$

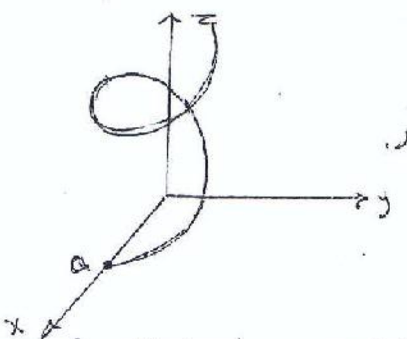
آنگاه $r(t)$ را یک منحنی می‌نامیم و $r(I)$ را اثر منحنی می‌نامیم.

مثال: $r(t) = a\operatorname{Cos} t\,\vec{i} + a\operatorname{Cos} t\,\vec{j} \Rightarrow r'(t) = -a\operatorname{Sin} t\,\vec{i} + a\operatorname{Cos} t\,\vec{j}$

$r(t)$ یک منحنی است. اگر $I=[0,2\pi]$ آنگاه $r(I)$ یک دایره است.

مثال: $r(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+bt\vec{k}$

$\Rightarrow r'(t)=-a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j}+b\vec{k}$ این یک منحنی مارپیچ است



$r(t)$ منحنی مارپیچ می‌نامیم
منحنی حرکت روی دیواره یک استوانه حرکت می‌کند.

تابع طول قوس یک منحنی:

فرض کنید $r(t)$ یک منحنی باشد تابع طول قوس منحنی $r(t)$ در بازه $[t_0, t]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(t)=\int_{t_0}^{t}\|r'(x)\|\,dx \qquad \|r'(t)\|^2=x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2$$

مثال: تابع طول قوس منحنی دایره و مارپیچ را بیابید سپس محیط دایره را محاسبه کنید. (در بازه $[0,t]$)

$$S(t)=\int_0^t\sqrt{(-a\sin u)^2+(a\cos u)^2}\,du=\int_0^t a\,du=at$$

$$S_t=at \Rightarrow S(2\pi)=2\pi a$$

$$S(t)=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2u+a^2\cos^2u+b^2}\,du=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,du$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,t \Rightarrow S(t)=\sqrt{a^2+b^2}\,t$$

$$S(t)=\int_{t_0}^{t}\|r'(u)\|\,du \qquad S'(t)=\|r'(t)\|>0$$

پس $S(t)$ تابعی اکیداً صعودی پس $S(t)$ معکوس‌پذیر است.

$S=S(t)\Leftrightarrow t=t(s)$

چنانچه در تابع برداری به جای پارامتر دلخواه t برحسب پارامتر طول قوس s بنویسیم می‌بینیم تابع برداری به پارامتر طبیعی یا استاندارد مجهز شده است.

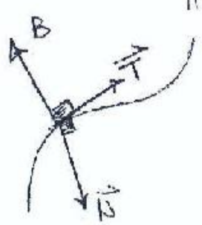
مثال: منحنی $r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$ را برحسب پارامتر طبیعی بنویسید.

$S(t)=\sqrt{2}\,t \Rightarrow t=\frac{s}{\sqrt{2}}$

پس $\Rightarrow r(s)=\cos(\frac{s}{\sqrt{2}})\vec{i}+\sin(\frac{s}{\sqrt{2}})\vec{j}+\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{k}$.

$$\frac{ds}{dt}=\|r'(t)\| \qquad \frac{dt}{ds}=\frac{1}{\|r'(t)\|} \quad * $$

فرض کنید $r(t)$ یک منحنی باشد تابع برداری $T=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ بردار یکانی مماس در هر نقطه بر منحنی $r(t)$ نامیده می‌شود.



بردار:

$$N=\frac{\frac{dT}{ds}}{\left\|\frac{dT}{ds}\right\|}$$

بردار یکانی متعامد در هر نقطه بر منحنی $r(t)$ نامیده می‌شود همچنین بردار $B=T\times N$ بردار یکانی قائم دوم در هر نقطه بر منحنی نامیده می‌شود.

$\Rightarrow 0(x-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}(y-0)+\frac{1}{\sqrt{2}}(z-0)=0 \Rightarrow Z=y$ صفحه بوسان

تعریف: فرض کنید $r(t)$ بردار مکان یک ذره در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد. بردارهای سرعت و شتاب در هر نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود.

سرعت: $\vec{V}(t)=r'(t)$

شتاب: $\vec{a}(t)=r''(t)$

رابطه بردارهای سرعت و شتاب با بردارهای T و N و B:

$$\vec{V}=r'(t)=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}\cdot\|r'(t)\| \Rightarrow \boxed{\vec{V}=\vec{T}\cdot\frac{ds}{dt}}$$

پس T و $\vec{V}$ موازیند.

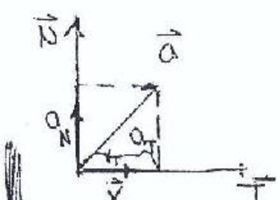
$$a=r''(t)=\frac{d(V(t))}{dt}=\frac{d}{dt}\left(T\cdot\frac{ds}{dt}\right)=\frac{dT}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}+T\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$=\frac{\frac{dT}{dt}}{\left\|\frac{dT}{dt}\right\|}\cdot\left\|\frac{dT}{dt}\right\|\cdot\frac{ds}{dt}+T\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}=\vec{N}\left\|\frac{dT}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right\|\frac{ds}{dt}+T\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$=N\left\|\frac{dT}{ds}\right\|\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+T\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}=K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}+\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}}$$



$a_N=K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ مولفه نرمال شتاب $\quad a_T=\frac{d^2s}{dt^2}$ مولفه مماسی شتاب

$V_T=\frac{ds}{dt}$ مولفه مماسی سرعت

صفحه بوسان: در هر نقطه اگر بردارهای V و a موازی نباشند پس $V\times a$ بردار نرمال صفحه بوسان است.

$$B=\frac{V\times a}{\|V\times a\|} \Rightarrow \boxed{B=\frac{r'\times r''}{\|r'\times r''\|}} \qquad T=\frac{r'}{\|r'\|} \qquad N=B\times T$$

$$\vec{V}\times\vec{a}=\left(\vec{T}\cdot\frac{ds}{dt}\right)\times\left(K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}+\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}\right)=K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3B$$

$$B=\frac{K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\|r'\times r''\|}B \Rightarrow \boxed{K=\frac{\|r'\times r''\|}{\|r'\|^3}}$$

مثال: صفحه بوسان، ρ و K و a و V، B، N و T مطلوبست محاسبه برای a_T، a_N، V_T در $t=0$، $r(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$

$$r'(t)=\vec{i}+2t\vec{j}+3t^2\vec{k} \qquad r''(t)=2\vec{j}+6t\vec{k}$$

$r(0)=\vec{i} \Rightarrow T(0)=\vec{i} \qquad a(0)=2\vec{j} \Rightarrow N(0)=\vec{j} \qquad B(0)=\vec{k}$

$a_T=0 \qquad a_N=2 \qquad V_T=1 \qquad K=2 \qquad \rho=\frac{1}{2}$

$t=0 \Rightarrow (0,0,0)$, $B(0)=(0,0,1)$ $\Rightarrow Z=0$ صفحه بوسان

دایره‌ی انحناء (دایره‌ی بوسان):

فرض کنید $\gamma(t)$ یک منحنی مسطح باشد (در $\mathbb{R}^2$)

$$r(t)=x(t)\,i+y(t)\,j$$

$$\vec{T}=\frac{x'\vec{i}+y'\vec{j}}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \qquad \vec{N}=\frac{-y'\vec{i}+x'\vec{j}}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \qquad B=\vec{K}$$

همواره: $B=\vec K$ — منحنی مسطح $\tau=0$

$$K=\frac{\|r'\times r''\|}{\|r'\|^3} \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow K=\frac{(x'y''-y'x'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \rho=\frac{1}{K}$$

$$y=f(x) \qquad r(t)=t\vec{i}+f(t)\vec{j} \qquad \vec{T}=\frac{\vec{i}+y'\vec{j}}{\sqrt{1+y'^2}}$$

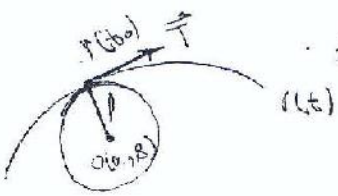
$$\vec{N}=\frac{-y'\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad B=\vec{K} \qquad K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

تعریف دایره بوسان:

دایره‌ای که در جهت تقعر منحنی بر منحنی مماس می‌باشد و شعاع آن شعاع انحنای منحنی باشد را دایره بوسان می‌باشد.

فرض کنید $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$ معادله دایره بوسان باشد. در نقطه تماس مشتق دایره و منحنی یکسان است. همچنین در نقطه تماس شعاع انحنای دایره و منحنی برابر است پس انحنای دایره و منحنی برابر است و چون دایره در جهت تقعر منحنی مماس است پس مشتق دوم آن‌ها هم علامت است و با توجه به رابطه $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ مشتق دوم دایره و منحنی با هم برابر است.

$$2(x-\alpha)+2(y-\beta)y'=0 \Rightarrow \begin{cases} x-\alpha+(y-\beta)y'=0 \\ 1+y'^2+(y-\beta)y''=0 \end{cases}$$

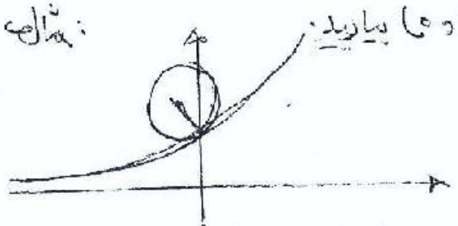


از حل دو معادله دو مجهول α, β بدست می‌آید.

$$\overrightarrow{r(t_0)O}=\rho\vec{N}$$

$$(\alpha-x(t_0),\ \beta-y(t_0))=\rho\vec{N}$$

مثال: دایره بوسان منحنی $y=e^x$ را در $(0,1)$ بیابید.



$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

$$x=0 \Rightarrow K=\frac{1}{\sqrt{8}} \qquad \rho=\sqrt{8} \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=8$$

راه حل:

$$\begin{cases} 0-\alpha+(1-\beta)=0 & \Uparrow\ \alpha=-2 \\ 1+1^2+(1-\beta)1=0 \Rightarrow \beta=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=8 \quad \text{دایره بوسان}$$

راه‌حل: $r(0) = (0,1)$ $\quad O(\alpha, \beta)$ $\quad \rho = \sqrt{8}$

$$N(0) = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \qquad (\alpha, \beta - 1) = \sqrt{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \begin{matrix}\alpha = -2 \\ \beta = 3\end{matrix}$$

در R^3

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2 & \text{دایره بوسان} \\ \text{صفحه بوسان} \end{cases}$$

مثال: دایره بوسان منحنی $r(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$ را در $t=0$ بیابید.

$$K = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad K = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = 2 \qquad N(0) = -\vec{i}$$

$$o(\alpha, \beta, \gamma) \qquad r(0) = (1,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1, \beta, \gamma) = (-2, 0, 0) \Rightarrow \alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 0$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = y \end{cases} \quad \text{دایره بوسان}$$

تاب یک منحنی در R^3:

در دوار $\frac{dB}{ds}$ بر B و T عمود است.

چون $\|B\| = 1$ پس $\frac{dB}{ds} \perp B$

$$B = T \times N$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds} \times N + T \times \frac{dN}{ds}$$

پس $\frac{dB}{ds} = T \times \frac{dN}{ds}$ پس $\frac{dB}{ds} \perp T$

پس $\frac{dB}{ds}$ با N موازی است پس $\frac{dB}{ds} = \tau \vec{N}$

$$\Rightarrow \left\|\frac{dB}{ds}\right\| = \tau$$

کمیت $\tau = \left\|\frac{dB}{ds}\right\|$ را تاب یک منحنی در هر نقطه می‌نامیم.

مثال: مطلوبست محاسبه تاب منحنی $r(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$ در هر نقطه دلخواه.

$$r'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$r''(t) = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k} \qquad \|r' \times r''\| = \sqrt{2}$$

پس:

$$B = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dB}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tau = \left\|\frac{dB}{ds}\right\| = \frac{1}{2} \qquad \delta = \frac{1}{\tau} \quad \text{شعاع تاب}$$

قضیه: منحنی $r(t)$ مسطح است اگر و تنها اگر تاب آن در تمام نقاط صفر باشد.

اثبات: فرض کنید $r(t)$ یک منحنی مسطح باشد پس $r(t)$ در یک صفحه قرار دارد

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

hamednafisi@gmail.com

$$\underset{(a,b,c)}{\vec N}\cdot(\underset{(x,y,z)}{X}-\underset{(x_0,y_0,z_0)}{X_0})=0$$

بنابراین $r(t)$ در معادله‌ای به صورت زیر صدق می‌کند

$$\vec P\cdot(r(s)-r(0))=0$$
$$\vec P\cdot r'(s)=0 \Rightarrow P\cdot T=0 \Rightarrow \vec P\perp\vec T$$
$$\vec P\cdot r''(s)=0 \Rightarrow P\cdot\frac{dT}{ds}=0 \Rightarrow \vec P\perp\vec N$$

پس $\vec P\parallel\vec B$ لذا $P=\lambda B$

چون P یک بردار ثابت است پس B نیز یک بردار ثابت است در حقیقت:

$$B=\pm\frac{P}{\|P\|}$$

پس $\frac{dB}{ds}=0$ پس $\tau=0$

بالعکس: فرض کنید $\tau=0$ نشان دهید $r(t)$ یک منحنی مسطح است.

$$\tau=\left\|\frac{dB}{ds}\right\|=0$$

پس $\frac{dB}{ds}=0 \Longrightarrow B$ برداری ثابت است.

تابع زیر را در نظر بگیرید $f(s)=B\cdot(r(s)-r(0))$

$$f'(s)=B\cdot r'(s)=B\cdot T=0$$

پس $f(s)$ تابعی ثابت است. از طرفی $f(0)=0$ پس $f(s)=0$

یعنی $B\cdot(r(s)-r(0))=0$

یعنی $r(s)$ در صفحه‌ای قرار دارد که بردار نرمال آن بردار ثابت B می‌باشد.

پس $r(s)$ یا $r(t)$ یک منحنی مسطح است.

$$\tau=\left\|\frac{dB}{ds}\right\| \qquad K=\left\|\frac{dT}{ds}\right\|$$

تمرین: رابطه‌ای بر حسب مشتق تابع موازی $r(t)$ برای تاب بیابید

$$\tau=\frac{\|r'\times r''\cdot r'''\|}{\|r'\times r''\|^2}$$

رویه‌ها (سطوح):

مکان هندسی تمام نقاطی در $\mathbb{R}^3$ که در رابطه $F(x,y,z)=0$ صدق می‌کند را یک سطح یا رویه می‌نامیم.

مثال:

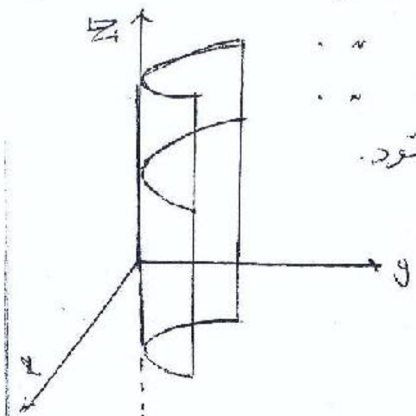
1) $ax+by+cz=0$ یک رویه است که صفحه نامیده می‌شود.

2) $x^2+(y-1)^2+z^2=4$ " " " " " کره " " .

3) $x^2+y^2=1$ " " " " " استوانه " " .

4) $y=x^2$ یک رویه است که استوانه نامیده می‌شود.

5) $xy+x^2+2x-1=0$ یک رویه است.



رویه‌ها را به دسته‌های زیر تقسیم می‌کنیم

1) رویه‌های استوانه‌ای

2) رویه‌های مخروطی

3) رویه‌های دوار

4) رویه‌های درجه دوم شناخته شده.

1) رویه‌های استوانه‌ای:

مکان هندسی تمام نقاطی در $\mathbb{R}^3$ که اگر در آن نقاط به موازات خط ثابتی رسم کنیم خط حاصل تماماً بر سطح رویه قرار گیرد رویه استوانه‌ای می‌نامیم خط

منحنی C را هادی استوانه می‌نامیم.

مثال: $y=x^2$ یک استوانه با مولد موازی محور z هست.

حل: نقطه‌ای دلخواه مانند $A(x_0,y_0,z_0)$ از رویه را در نظر می‌گیریم. معادله خطی که از A به موازات محور zها رسم می‌شود به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=x_0+0t \\ y=y_0+0t \\ z=z_0+1t \end{cases} \qquad A(x_0,y_0,z_0) \quad (0,0,1)$$

با جایگذاری خط در معادله رویه داریم: $y_0=x_0^2$ در رابطه فوق برقرار است. چون A نقطه‌ای از رویه پس خط در معادله رویه صدق می‌کند.

پس رویه استوانه‌ای است.

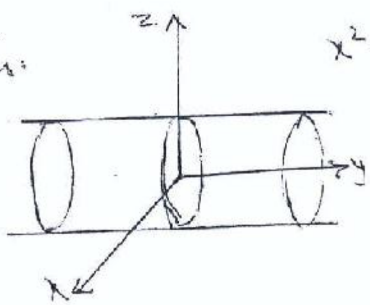
تمرین:

1) هر رویه به صورت $f(x,y)=0$ یک رویه استوانه‌ای (با محور موازی محور zها) است

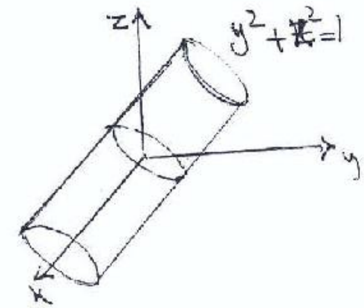
2) " " " " $f(x,z)=0$ " " " " " " " " y " "

3) " " " " $f(y,z)=0$ " " " " " " " " x " "

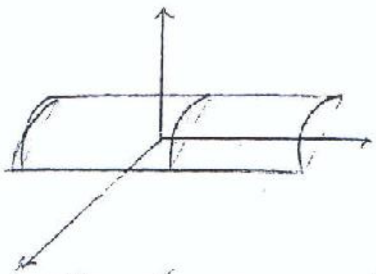
مثال:



$x^2+z^2=1$



$y^2+z^2=1$



$x=z^2$

مثال: نشان دهید $z^2=x+y$ یک رویه استوانه‌ای است که محور آن را مشخص کنید.

حل: فرض می‌کنیم $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای دلخواه روی رویه باشد و $\vec{L}(a,b,c)$ محور استوانه باشد.

معادله خط گذرا از A به موازات L به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

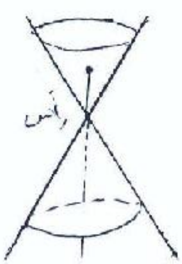
با جایگذاری خط در معادله رویه داریم:

$$(z_0+ct)^2=x_0+at+z_0+bt \Rightarrow$$
$$z_0^2+2z_0ct+c^2t^2=x_0+z_0+at+bt$$
$$c^2t^2+(2z_0c-a-b)t=0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow c^2=0 \Rightarrow c=0$$
$$2z_0c-a-b=0 \Rightarrow a=-b$$

پس $\vec{L}(a,-a,0)$ راستای محور استوانه $(1,-1,0)$ می‌باشد.

2) رویه‌های مخروطی:

مکان هندسی تمام نقاطی در $\mathbb{R}^3$ که اگر آن نقاط به نقطه ثابتی وصل کنیم خط حاصل تماماً در سطح رویه



را قرار گیرد رویه مخروطی می‌نامیم و نقطه ثابت را رأس مخروط می‌نامیم.

مثال: نشان دهید رویه $z^2 = x^2 + y^2$ یک رویه مخروطی با رأس مبدأ می‌باشد.

اثبات: فرض کنید $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای دلخواه در رویه باشد. معادله خطی از A و $S(0,0,0)$ به صورت زیر است:

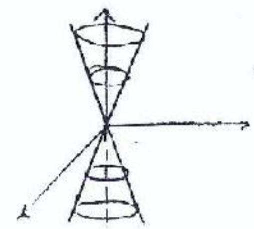
$$\begin{cases} x = 0 + x_0 t \\ y = 0 + y_0 t \\ z = 0 + z_0 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

با جایگذاری خط در معادله رویه داریم:

$$(z_0 t)^2 = (x_0 t)^2 + (y_0 t)^2 \Rightarrow t^2 z_0^2 = (x_0^2 + y_0^2) t^2$$

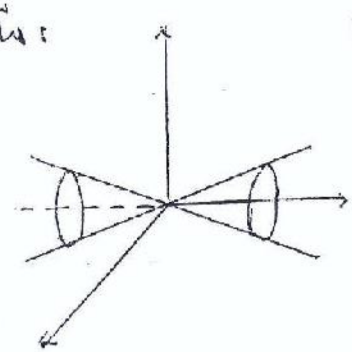
$$t = 0 \Rightarrow (0,0,0) \in \text{رویه} \qquad t \neq 0 \Rightarrow z_0^2 = x_0^2 + y_0^2$$

در رابطه فوق برقرار است زیرا A نقطه‌ای بر رویه می‌باشد.
یک خط در معادله رویه صدق می‌کند پس رویه مخروطی است.

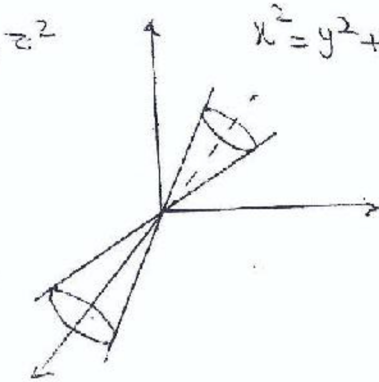


مثال:

$y^2 = x^2 + z^2$



$x^2 = y^2 + z^2$

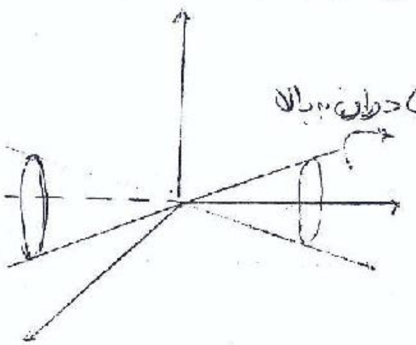


تمرین) هر رویه همگن یک رویه مخروطی با رأس مبدأ می‌باشد.

تعریف: تابع $f(x, y, z)$ را همگن از درجه n می‌نامیم هرگاه

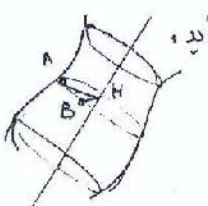
$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z) \quad t \in \mathbb{R}$$

مثال: $z^2 = xy$ یک رویه مخروطی است (همگن از درجه 2 می‌باشد)



ج) رویه‌های دوار:

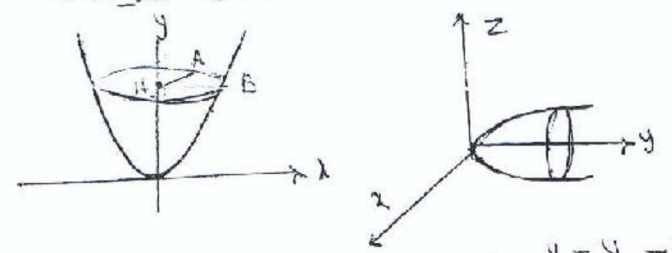
یک رویه دوار از دوران یک منحنی حول خط ثابتی مانند l به دست می‌آید.
خط l را محور دوران می‌نامیم.



مقطع هر صفحه عمود بر محور دوران با رویه دوار یک دایره است. از این خاصیت برای به دست آوردن معادله رویه دوار استفاده می‌کنیم.

$|AH| = |BH|$

مثال: رویه دوار حاصل از دوران منحنی $y=x^2$ و $z=0$ را حول محور yها بیابید.



$A(x,y,z)$
$B(x_0,y_0,0)$
$H(0,y_1,0)$

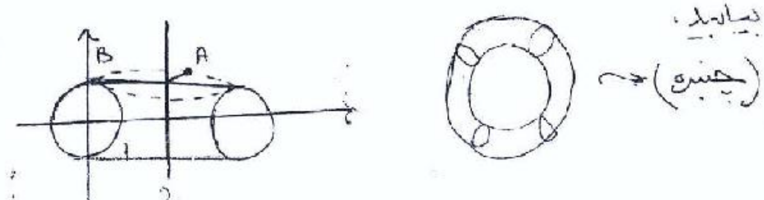
$y=y_0=y_1$

$|AH|=|BH| \Rightarrow \sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{x_0^2} \Rightarrow x^2+z^2=x_0^2$

نقطه B روی منحنی است $y_0=x_0^2$ و $y=y_0 \Rightarrow y=y_0=x_0^2$

پس $\boxed{x^2+z^2=y}$ معادله رویه دواری. (سهمی گون دوار)

مثال: رویه دوار حاصل از دوران منحنی $x^2+y^2=1$ و $z=0$ را حول خط $x=2$ و $z=0$ بیابید.



(چنبره)

$A(x,y,z)\quad B(x_0,y_0,0)\quad H(2,y_1,0)\quad y=y_0=y_1$

$|AH|=|BH| \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+z^2}=\sqrt{(x_0-2)^2}$

$\Rightarrow (x-2)^2+z^2=(x_0-2)^2$

$B\in$ منحنی $\Rightarrow x_0^2+y_0^2=1 \Rightarrow x_0=\pm\sqrt{1-y_0^2}=\pm\sqrt{1-y^2}$

پس معادله رویه دوار به صورت زیر است:

$(x-2)^2+z^2=(\pm\sqrt{1-y^2}-2)^2$

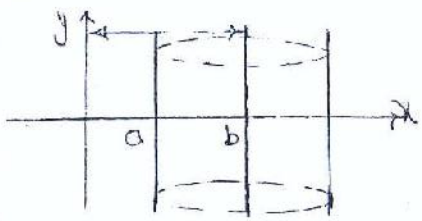
تمرین:

منحنی دوران	محور دوران	رویه دوار
$f(x,y)=0$	x	$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
$f(x,y)=0$	y	$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$
$f(x,z)=0$	x	$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
$f(x,z)=0$	z	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
$f(y,z)=0$	y	$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$
$f(y,z)=0$	z	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

مثال: رویه دوار حاصل از دوران منحنی $x=z^3$ و $y=0$ را حول محور xها بیابید.

$x=(\pm\sqrt{y^2+z^2})^3 \Rightarrow x^2=(y^2+z^2)^3$

مثال، رویه دوار حاصل از دوران خط $x=a$ و $z=0$ حول خط $x=b$ و $z=0$، $(b\neq a)$ بیابید.



$\Rightarrow \begin{cases} x+b=a \\ z=0 \end{cases}$ ، $\begin{cases} x+b=b \\ z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=a-b \\ z=0 \end{cases}$ حول محور xها

$\Rightarrow \pm\sqrt{x^2+z^2}=a-b \Rightarrow x^2+z^2=(a-b)^2$

انتقال B واحد به راست $(x-b)^2+z^2=(a-b)^2$

$y=f(x) \xrightarrow{\text{انتقال به چپ}} f(x+K)$

(4) رویه‌های درجه دوم شناخته شده:

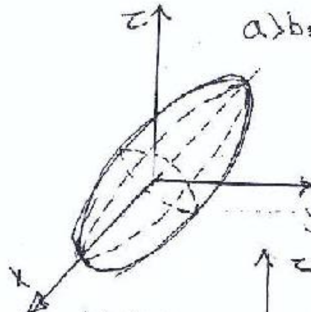
هر رویه درجه دوم در $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر است:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+hy+iz+K=0$$

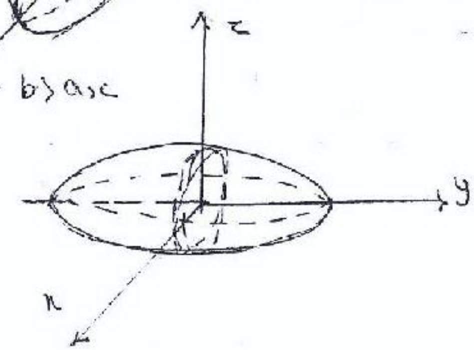
اکنون حالت‌های مختلفی که رویه فوق می‌تواند داشته باشد را بحث می‌کنیم.

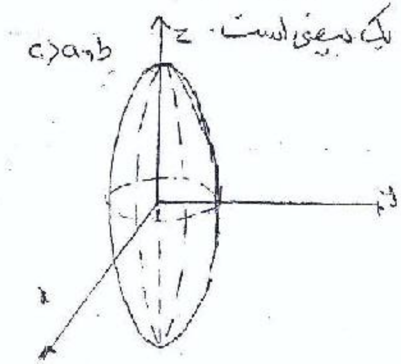
1) بیضی‌گون: هر رویه به صورت زیر یک بیضی‌گون نامیده می‌شود:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$


$a>b>c$

مقطع بیضی‌گون با صفحات $x=k$ و $y=k$ و $z=k$ یک بیضی است.

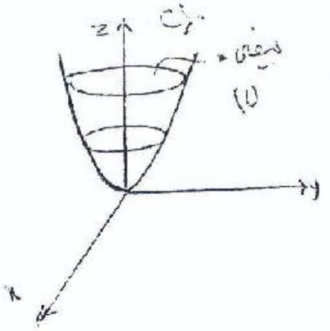

$b>a>c$

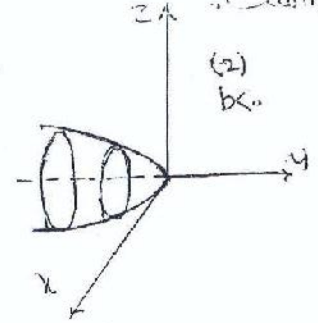

$c>a>b$

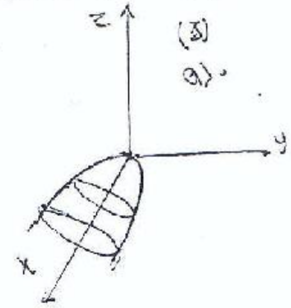
2) سهمی‌گون بیضوی: هر رویه به صورت یکی از حالت‌های زیر سهمی‌گون بیضوی است:

$$\begin{cases} (1)\quad cz=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \\ (2)\quad by=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \\ (3)\quad ax=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$$

مقطع سهمی‌گون بیضوی شماره (1) با صفحه $z=k$ یک بیضی و با صفحات $x=k$ و $y=k$ یک سهمی است.


(1) بیضی

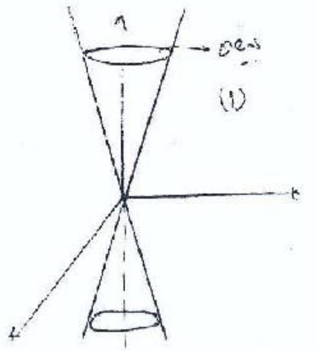

(2) $b<0$

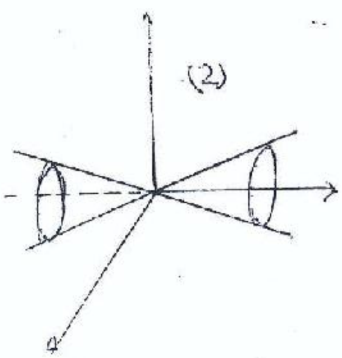

(3) $a>0$

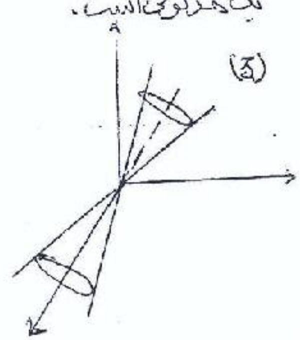
3) مخروط بیضوی: هر رویه به صورت یکی از حالت‌های زیر مخروط بیضوی است:

(1) $\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ (2) $\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ (3) $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

مقطع مخروط بیضوی شماره (1) با صفحه $z=k$ یک بیضی و با صفحات $x=k$ و $y=k$ یک هذلولی است.


(1) بیضی

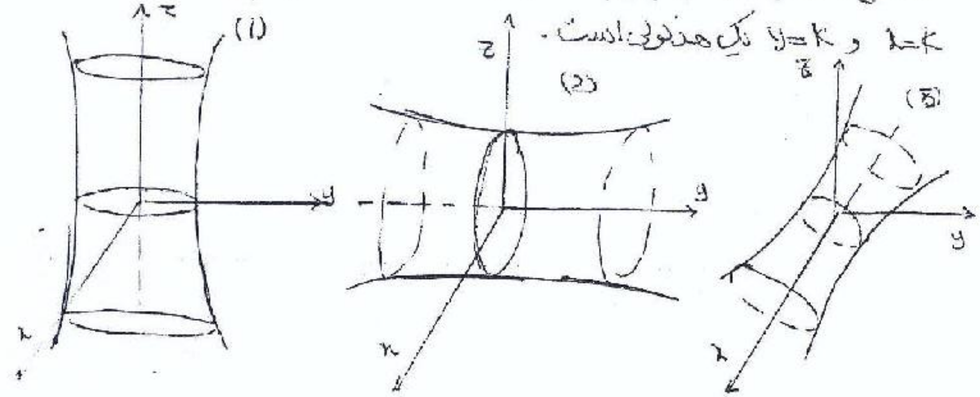

(2)


(3)

4) هذلولی گون یک پارچه: هر رویه‌ای به یکی از حالت‌های زیر هذلولی گون یک پارچه نامیده می‌شود:

$$(1)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

مقطع هذلولی گون یک پارچه شماره (1) با صفحه $z=k$ یک بیضی و با صفحات $x=k$ و $y=k$ یک هذلولی است.



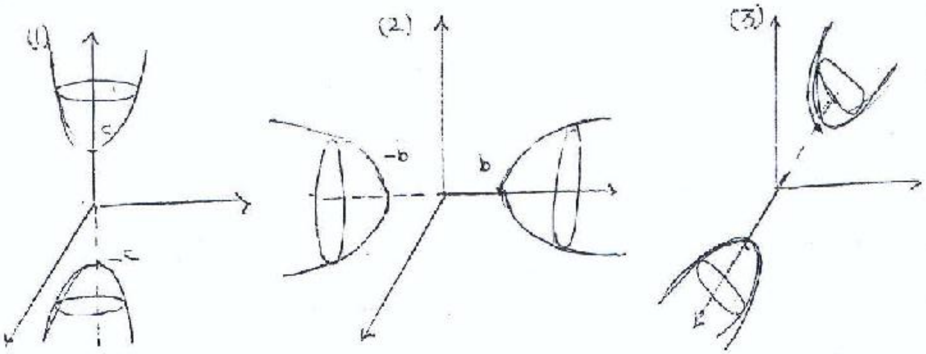
5) هذلولی گون دو پارچه: هر رویه به یکی از حالت‌های زیر هذلولی گون دو پارچه نامیده می‌شود:

$$(1)\ -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2)\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

مقطع هذلولی گون دو پارچه شماره 1 با صفحه $z=k$ یک بیضی است و با صفحات $x=k$ و $y=k$ یک هذلولی است.

$$(1)\ -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2} \Rightarrow 1-\frac{z^2}{c^2}\leq 0 \Rightarrow z^2\geq c^2 \quad c>0$$

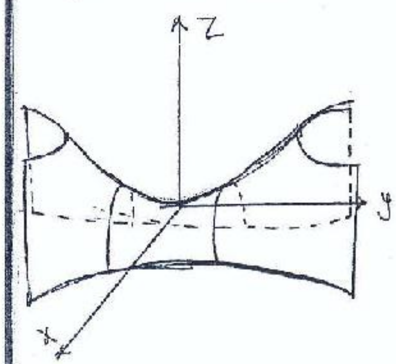
$$\Rightarrow |z|\geq c \Rightarrow z\geq c \quad \text{یا} \quad z\leq -c$$



6) سهمی گون هذلولوی (زین اسبی): هر رویه به یکی از حالت‌های زیر زین اسبی نامیده می‌شود:

$$(1)\ cz=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \qquad (2)\ by=\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2} \qquad (3)\ ax=\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$$

مقطع زین اسبی شماره (1) با صفحه $z=k$ یک هذلولی است و با صفحات $x=k$ و $y=k$ یک سهمی است.



انتقال — دوران:

با انتقال و دوران اکثر رویه‌ها را می‌شود به رویه‌های شناخته شده تبدیل نمود:

$$X=x+a \qquad Y=y+b \qquad Z=z+c$$

اگر در صفحه xy دوران به اندازه θ داشته باشیم آنگاه مختصات جدید و مختصات

تدویر به در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

رویهٔ زیر را توصیف کنید $\quad z^2 = xy$

مثال:

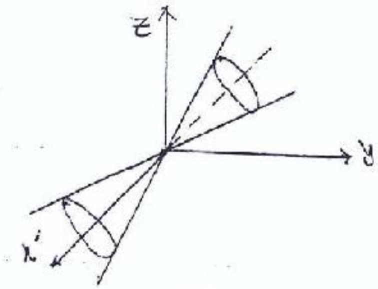
$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x'^2 = \frac{1}{2}y'^2 + z^2$$

مخروط بیضوی



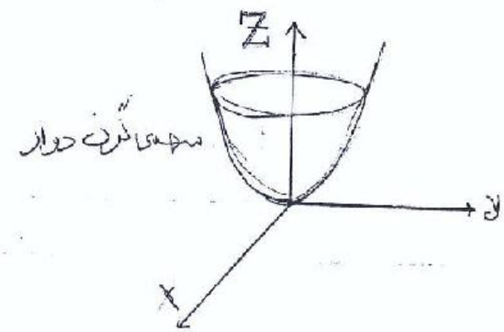
مثال: $\quad x^2 + y^2 - 2x = 1 - z$

$$(x-1)^2 + y^2 = 2 - z$$

$$x - 1 = X \quad , \quad 2 - z = Z$$

$$X^2 + y^2 = Z$$

سهمی گون دوار



مثال: $\quad xy + xz = 1$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - z') \quad , \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z') \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}(xy' - xz') + \frac{\sqrt{2}}{2}(xy' + xz')$$

$$\sqrt{2}\,xy' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'^2 - y''^2) = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'') \text{ و } y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'')$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y''^2 = 1$$

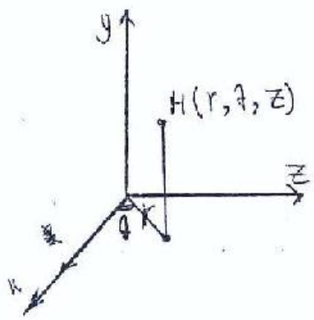
دستگاه مختصات:

1) دستگاه مختصات دکارتی

2) دستگاه مختصات استوانه‌ای

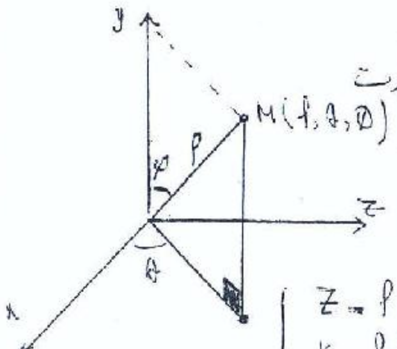
3) دستگاه مختصات کروی

1) دکارتی: هر نقطه در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $H(x, y, z)$ نمایش داده می‌شود که در آن x و y و z به ترتیب فاصلهٔ نقطهٔ H تا صفحات yz، xz و xy می‌باشد.



2) استوانه‌ای: هر نقطه در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت $M(r, \theta, z)$ نمایش داده می‌شود.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = tg^{-1}\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$



3) کروی: نمایش هر نقطه در این دستگاه به صورت $M(\rho, \theta, \Phi)$ می‌باشد

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le \Phi \le \pi$$

$$\begin{cases} z = \rho\cos\Phi \\ r = \rho\sin\Phi \\ x = \rho\sin\Phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\Phi\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = tg^{-1}\frac{y}{x} \\ \Phi = \cos^{-1}\frac{z}{\rho} \end{cases}$$

تذکر: مقطع دو رویه یک منحنی است و به عنوان یک تابع برداری می‌توان هم ساحت ترا تابع برداری را بر رویه‌ها نشان کرد.

$y = f(x) \Rightarrow r(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}$

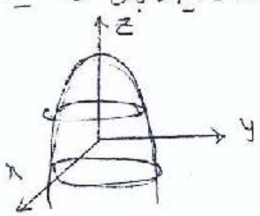
$y = x^2 \Rightarrow r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow r(t) = \sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{i}$

$r(t) = t\vec{i} \pm \sqrt{1-t^2}\,\vec{j}$

مثال: مقطع دو رویه زیر را پارامتری کنید.

$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \Rightarrow \text{سهمی‌گون دوار} \\ z = x^2 - y^2 \Rightarrow \text{زین اسبی} \end{cases}$$



$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$r(t) = \vec{i} + t\vec{j} + (1-t^2)\vec{k}$

مثال: مطلوبست محاسبه T، N، B، k، τ در نقطه $(0,1,1)$ از منحنی مقطع دو رویه فوق.

$r(t) = \vec{i} + t\vec{j} + (1-t^2)\vec{k} \qquad t=1$

$T = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \dfrac{\vec{j} - 2t\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}} \qquad T(1) = \dfrac{\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{5}} \qquad B = \dfrac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}$

$r'(t) = \vec{j} - 2\vec{k} \qquad r''(1) = -2\vec{k} \qquad r'(1)\times r''(1) = (\vec{j}-2\vec{k})(-2\vec{k}) = -2\vec{i}$

$\vec{B}(1) = \dfrac{-2\vec{i}}{2} = -\vec{i} \qquad \vec{N}(1) = \vec{B}(1) \times \vec{T}(1) = -i \times \left(\dfrac{\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{-\vec{k}-2\vec{j}}{\sqrt{5}}$

$r'(t) \times r''(t) = (\vec{j} - 2t\vec{k}) \times (-2\vec{k}) = -2i \qquad B = -\vec{i} \qquad \dfrac{dB}{ds} = 0 \Rightarrow \tau = 0$

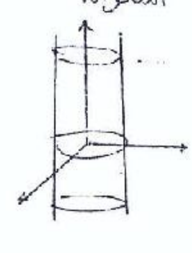
رویه‌های زیر را توصیف کنید.

مثال: 1) $\Rightarrow r = 2$ 2) $r = 2\cos\theta$ 3) $z = r$ 4) $\Rightarrow z = r^2$ 5) $\Rightarrow z = r^2 \sin 2\theta$

6) $\rho = 2$ 7) $\rho = 2\cos\phi$ 8) $\Rightarrow \varphi = \pi/4$

1) $x^2 + y^2 = 4$

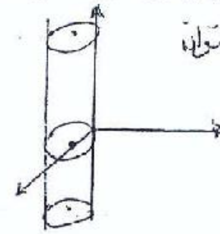
استوانه



(2) $r^2 = 2r\cos\theta$

$x^2 + y^2 = 2x \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$

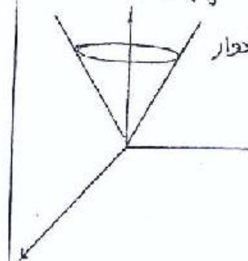
استوانه



3) $z = r$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

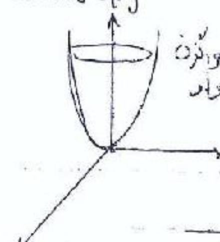
مخروط دوار



4) $z = r^2$

$z = x^2 + y^2$

سهمی‌گون دوار



5) $z = r^2\, 2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow z = 2xy$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

$z = x'^2 - y'^2$ زین اسبی

6) $\rho = 2$

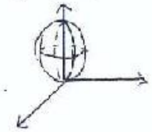
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$

کره

7) $\rho = 2\cos\phi$

$\rho^2 = 2\rho\cos\phi \qquad x^2+y^2+z^2 = 2z$

$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ کره

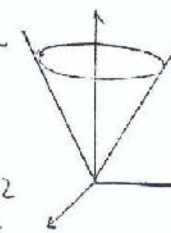


8) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\varphi$

$\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\rho^2$

$z^2 = \frac{1}{2}\rho^2 \ , \quad x^2 + y^2 = z^2$ مخروط



منحنی سیکلوئید (چرخزاد):

تعریف: هرگاه از نقطه‌ای روی چرخی به شعاع a یک نقطه دلخواه بر روی این چرخ یک منحنی ایجاد کند وقتی شکل حرکت این نقاطی که P ایجاد می‌کند منحنی سیکلوئیدی می‌نامند که آن را بیابید.

تمرین: 1) طول قوس منحنی $y^2 = x^3$ از $(1,-1)$ تا $(1,1)$

2) طول قوس منحنی $y = \cosh x$ از $(0,1)$ تا $(x, \cosh x)$

3) طول قوس منحنی چرخزاد $r(t) = a(t-\sin t, 1-\cos t)$ ($a>0$ و $[0, 2\pi]$)

4) مقادیر بردارهای T، N، B، K و τ را در هر یک از منحنی‌های زیر به دست آورید برای

الف) $r(t) = (5t^2, t^3-3t, t^3+3t)$

ب) $r(s) = (\frac{4}{5}\cos s, 1-\sin s, -\frac{3}{5}\cos s)$

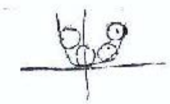
پ) $r(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$

برای (ب) تاب و انحنا را برحسب طول قوس بنویسید.

5) صفحات انحنا منحنی $r(t) = (4\cos t, \sin t, 4\cos t)$ را بیابید

6) تاب و انحنا را برای $r(t) = (\int f(t)\sin t\,dt, \int f(t)\cos t\,dt, \int f(t)\,dt)$ برحسب f بیابید

7) دایره بوسان $y = \operatorname{tg} x$ در $(\frac{\pi}{4}, 1)$



8) مکان هندسی مراکز انحنا و منحنی $y = x^2$ را بیابید.

توابع چندمتغیره: هر تابعی با دامنه $\mathbb{R}^n$ و برد از $\mathbb{R}$ را یک تابع چندمتغیره گوییم.

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

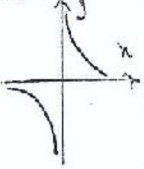
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

مثال: $f(x,y) = x^2y + xy + 3x - 4y + 5$ تابع دو متغیره

مثال: $f(x,y,z) = xye^{x^2yz}$ تابع سه متغیره

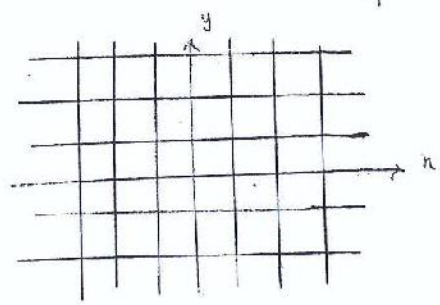
مثال: $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(xy)}$ دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

$$D_f = \{(x,y) \mid xy>0 ,\ \ln(xy) \neq 0\} = \{(x,y) \mid xy>0 ,\ xy \neq 1\}$$



مثال: $f(x,y) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\sin y}$

$$D_f = \{(x,y) \mid \sin x \neq 0 ,\ \sin y \neq 0\}$$
$$= \{(x,y) \mid x \neq k\pi ,\ y \neq k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$$



حد توابع چندمتغیره: فرض کنید تابع n متغیره $f(M)$ در یک همسایگی محذوف $M_0 \in \mathbb{R}^n$ تعریف باشد. در این صورت

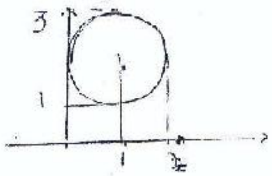
$$\lim_{M \to M_0} f(M) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ \ni \ \|M - M_0\| < \delta \Rightarrow |f(M) - L| < \varepsilon$$

حامد لعیدی

مثال: $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2+xy-3=0$ ثابت کنید:

$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \ni 0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta \Rightarrow |x^2+xy-3|<\epsilon$

$|x^2+xy-3|=|x(x-1)+x(y-2)+3x-3|\leq |x+3||x-1|+|x||y-2|$



$\delta\leq 1$ $\quad 0<x<2$, $\quad 1<y<3$ $\Rightarrow 3(x+3)<\dots$

$\Rightarrow |x^2+xy-3|\leq 5|x-1|+2|y-2|$

$\leq 7\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\epsilon \Rightarrow \delta=\min\{1,\epsilon/7\}$. قرار می‌دهیم

مثال: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin(2x+3y)=0$

$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \ni 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow |(x+y)\sin(2x+3y)|<\epsilon$

$|(x+y)\sin(2x+3y)|\leq |x+y|\leq |x|+|y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}<\epsilon$

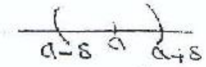
پس $0<\delta\leq \frac{\epsilon}{2}$

مثال: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2}=0$ $\qquad |\sin x-\sin y|\leq |a-b|$, $\ \sin x\leq x$

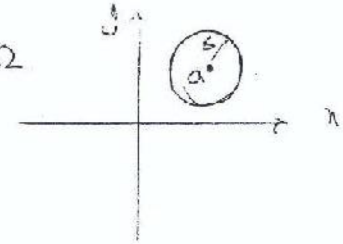
$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \ni 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2}\right|<\epsilon$

همسایگی در $\mathbb{R}^n$

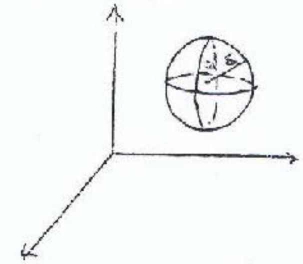
$n=1$



$n=2$



$n=3$



در $\mathbb{R}^3$ فرض کنید $M=(x,y,z)$ و $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=L \iff \forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \ni 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$

$\Rightarrow |f(x,y,z)-L|<\epsilon$

مثال: $\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} 2x-3y+4z=8$ ثابت کنید:

$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \ni 0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}<\delta$

$\Rightarrow |2x-3y+4z-8|<\epsilon$

$|2x-3y+4z-8|=|2(x-1)-3(y-2)+4(z-3)|<\epsilon$

$|2(x-1)-3(y-2)+4(z-3)|\leq 2|x-1|+3|y-2|+4|z-3|$

$\leq 9\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}<\epsilon/9$

پس کافی است $0<\delta\leq \epsilon/9$

$$\left|\frac{x^2\sin(xy)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

پس $\delta \le \epsilon$.

مثال: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0$ نشان دهید.

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists \delta>0, \quad 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right|<\epsilon$$

$$\frac{|xy|}{|x|+|y|} = \frac{|x||y|}{|x|+|y|} \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

پس $\delta \le \epsilon$.

مثال: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} = 0$

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists \delta>0, \quad 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}\right|<\epsilon$$

$$\left|\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}\right| \le \frac{(x-y)^2}{|x|+|y|} \le \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

پس $\delta \le \frac{\epsilon}{2}$.

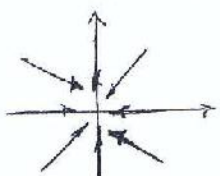
قضیه: حد توابع چندمتغیره در صورت وجود منحصر به فرد است. (تمرین)

برای اثبات عدم وجود حد بکمک قضیه فوق کافی است از دو یا چند مسیر که به نقطه $M_0 \in \mathbb{R}^2$ میل می‌کند حد تابع را در دو مسیر بیابیم که مقدار حدهای آن دو مسیر برابر نباشد.

مثال: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ = موجود نمی‌باشد نشان دهید

راه اول

C_1 مسیر محور xها باشد



$$C_1: y=0 \Rightarrow \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

نیمساز: $C_2: y=x \Rightarrow \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

راه دوم

دسته مسیری که از مبدأ می‌گذرد به صورت $y=mx$ می‌توانند باشند

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

چون مقدار حد به m بستگی دارد پس تابع حد ندارد.

مثال: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ — $y=mx \Rightarrow \lim_{(x,mx)\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0$

به m بستگی ندارد (چیزی نمی‌توان گفت).

$y=\sqrt{x} \Rightarrow \lim_{(x,\sqrt{x})\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ پس حد ندارد.

مثال: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$ پس حد وجود دارد. چون تابع در تعریف حد صدق می‌کند.

قضایای حد توابع حقیقی مانند حد مجموع، تفاضل، حاصلضرب و تقسیم برای توابع چندمتغیره نیز برقرار است.

پیوستگی توابع چند متغیره: فرض کنید تابع چندمتغیره f در یک همسایگی $M_0 \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده باشد. تابع f را در M_0 پیوسته گوییم هرگاه:

$$\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \|M-M_0\|<\delta \Rightarrow |f(M)-f(M_0)|<\epsilon$$

یا:

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$$

مثال: تابع $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ در $(0,0)$ پیوسته نیست چون $f(0,0)$ نامعین است.

مثال: تابع
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$
در $(0,0)$ پیوسته می‌باشد.

قضیه: اگر تابع f در یک همسایگی M_0 کراندار باشد و $\lim_{x\to M_0} g(x)=0$ آنگاه
$$\lim_{x\to M_0} f(x)\cdot g(x)=0$$

مثال: تابع
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
در $(0,0)$ پیوسته است.

مثال: نقاط ناپیوستگی تابع
$$f(x,y)=\begin{cases}1 & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$$
را در $\mathbb{R}^2$ مشخص کنید.

حل: نقاط روی محورها (محور x و y) نقاط ناپیوستگی تابع هستند.

* قضایای پیوستگی مشابه قضایای حدی باشند.

قضیه: چندجمله‌ای‌ها در $\mathbb{R}^n$ پیوسته‌اند.

چندجمله‌ای درجه 1 در $\mathbb{R}$: $P_1(x)=ax+b$

چندجمله‌ای‌های از درجه n در $\mathbb{R}$: $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

چندجمله‌ای‌های از درجه 1 در $\mathbb{R}^2$: $P_1(x,y)=ax+by+c$

چندجمله‌ای‌های از درجه ۲ در $\mathbb{R}^2$: $P_2(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$

چندجمله‌ای‌های از درجه k در $\mathbb{R}^2$: $P_k(x,y)=\sum_{0\le i+j\le k} a_{ij}x^iy^j$

مثال: $P_3(x,y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3$

چندجمله‌ای‌های از درجه k در $\mathbb{R}^n$:

$$P_k(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{0\le i_1+i_2+\cdots+i_n\le k} a_{i_1i_2\dots i_n}\, x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$$

مثال:
$$P_3(x,y,z)=\sum_{0\le i+j+k\le 2} a_{ijk}\,x^iy^jz^k=a_{000}+a_{100}x+a_{010}y+a_{001}z+a_{200}x^2+a_{110}xy+a_{101}xz+a_{020}y^2+a_{011}yz+a_{002}z^2$$

تبصره: توابع گویا در دامنه تعریفشان پیوسته اند: $x\in\mathbb{R}^n$ $\quad f(x)=\dfrac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$

* $f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\quad g: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g\circ f$

مشتق نسبی (جزئی): فرض کنید تابع $f(x,y)$ در یک همسایگی (x_0,y_0) تعریف شده باشد. مشتق نسبی تابع f نسبت به x در (x_0,y_0) را با $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ یا $f_x(x_0,y_0)$ نمایش میدهیم و به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

و به طور مشابه:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=x^2y+x-y+2$ مطلوبست محاسبه $f_x(1,2)$ و $f_y(-1,0)$.

$$f_x(1,2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,2)-f(1,2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)-2+2-3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x+2\Delta x^2+\Delta x}{\Delta x}=5=\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$$

$$f_y(-1,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(-1,0+\Delta y)-f(-1,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-1+\Delta y-\Delta y+2-1}{\Delta y}=0$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ مطلوبست محاسبه $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$.

در $(0,0)$:

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

تابع فوق حد ندارد و پیوسته نیست؛ اما مشتقات نسبی آن موجود است.

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}0 & x^2+y^2=0\\ \dfrac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$ مطلوبست محاسبه $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\sin^2(\Delta x)}{|\Delta x|}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^2\Delta x}{|\Delta x|\,\Delta x}=$$ موجود نیست

$f_y(0,0)=$ موجود نیست

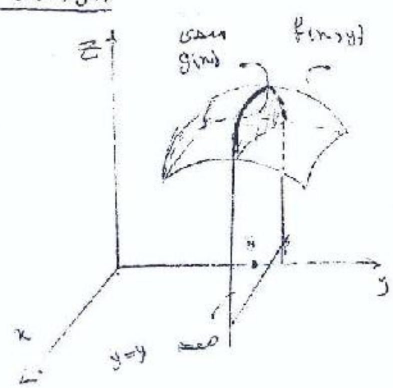
این تابع در $(0,0)$ دارای حد است و پیوسته می‌باشد ولی دارای مشتق نیست

تذکر: مشتق با حد و پیوستگی هیچ رابطه‌ای ندارد (مشتقات نسبی).

** فرض کنید تابع $g(x)=f(x,y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=g'(x_0)$$



* تابع دو متغیره نمایش یک سطح را در فضای $\mathbb{R}^3$ خواهد بود و مشتق جزئی تابع f در

[illegible] x برابر با شیب [illegible] $g(x)$ در نقطه x_0 می‌باشد

منحنی $g(x)$ از تقاطع صفحه $y=y_0$ با سطح $z=f(x,y)$ حاصل می‌شود.

مثال: فرض کنید $f(x,y,z)=xy+yz^2+x^3z+4z-5$ مطلوبست محاسبه $f_x(1,2,3)$ و $f_y(1,2,3)$ و $f_z(1,2,3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbb{R}^3)=y+3x^2z \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbb{R}^3)=x+z^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbb{R}^3)=2yz+x^3+4$$

$$f_x(1,2,3)=11 \qquad f_y(1,2,3)=10 \qquad f_z(1,2,3)=17$$

مشتق سوئی (مشتق جهتی): فرض کنید تابع $f(x,y)$ در یک همسایگی $M_0(x_0,y_0)$ معین باشد و فرض کنید $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ برداری یکانی باشد $(a^2+b^2=1)$ مشتق سوئی تابع f در جهت بردار $\vec{u}$ در نقطه M_0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{\vec{u}}f(M_0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(M_0+t\vec{u})-f(M_0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+at,y_0+bt)-f(x_0,y_0)}{t}$$

مثال: $D_{\vec{u}}f(1,2)$ مطلوبست محاسبه $f(x,y)=xy^2+x^2$ فرض کنید

$$\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$$

$$D_{\vec{u}}f(1,2)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1+\frac{3}{5}t,\,2+\frac{4}{5}t)-f(1,2)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+\frac{3}{5}t)(2+\frac{4}{5}t)^2+(1+\frac{3}{5}t)^2-5}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+\frac{3}{5}t)(4+\frac{16}{5}t+\frac{16}{25}t^2)+1+\frac{6}{5}t+\frac{9}{25}t^2-5}{t}=\frac{34}{5}$$

مثال: نشان دهید تابع f در $(0,0)$ در جهات دارای مشتق سوئی است: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

حل: فرض کنید $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ برداری یکانی و دلخواه باشد. $(a^2+b^2=1)$

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{abt^2}{a^2t^2+b^2t^2}}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{ab}{t}=\begin{cases}0 & ab=0\\ \text{نامتناهی} & ab\neq 0\end{cases}$$

$ab=0 \Rightarrow a=0$ یا $b=0$

$a=0 \Rightarrow b=\pm 1$

$b=0 \Rightarrow a=\pm 1$

$\Rightarrow \vec{u}=\pm\vec{i},\ \pm\vec{j}$

مثال: در چه جهاتی تابع f در $(0,0,0)$ دارای مشتق سوئی می‌باشد: $f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x^2z}{x^2+y^2+z^2} & x^2+y^2+z^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2+z^2=0\end{cases}$ فرض کنید:

$\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ و $\|\vec{u}\|=1$

$$D_{\vec{u}}f(0,0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(at,bt,ct)-f(0,0,0)}{t}$$

$$D_{\vec{u}}f(0,0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{a^2ct^3}{(a^2+b^2+c^2)t^2}-0}{t}=a^2c$$

پس در همه جهات دارای مشتق سوئی است.

$$D_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}f(0,0,0)=0$$

تمرین: رابطه مشتق سوئی با مشتق جزئی چیست؟

$$D_{\vec u} f(H_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(H_0+t u) - f(H_0)}{t} \qquad H_0 \in \mathbb{R}^2$$

$$D_{\vec u} f(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+u_1 t,\, y_0+u_2 t) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$$\vec u = \pm i \qquad D_{\vec i} f(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$\vec u = \pm j \qquad D_{\vec j} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

پس مشتقات جزئی حالت خاصی از مشتقات سوئی می‌باشد.

مشتق‌پذیری: فرض کنید $f(x,y)$ در یک همسایگی (x_0,y_0) تعریف باشد تابع f را در (x_0,y_0) مشتق‌پذیر نامیم هرگاه اعداد ثابت A و B و توابع $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ و $\beta(\Delta x,\Delta y)$ موجود باشند به طوریکه به ازاء هر Δx و Δy که $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha, \beta = 0$$

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A+\alpha \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$$

مثال: نشان دهید تابع $f(x,y) = x^2 y$ در $\mathbb{R}^2$ مشتق‌پذیر می‌باشد.

حل: فرض کنید $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ دلخواه باشد

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = (x_0+\Delta x)^2(y_0+\Delta y) - x_0^2 y_0$$

$$= x_0^2 y_0 + 2x_0\Delta x y_0 + \Delta x^2 y_0 + x_0^2\Delta y + 2x_0\Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y - \cancel{x_0^2 y_0}$$

$$= 2x_0 y_0\Delta x + x_0^2\Delta y + (y_0\Delta x)\Delta x + (2x_0\Delta x + \Delta x^2)\Delta y$$

$$A = 2x_0 y_0, \quad B = x_0^2, \quad \alpha = y_0\Delta x, \quad \beta = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha, \beta = 0$$

پس f در $\mathbb{R}^2$ مشتق‌پذیر است.

مثال: نشان دهید تابع $f(x,y,z) = xy + z^2$ در $(-1,2,3)$ مشتق‌پذیر است.

$$f(-1+\Delta x, 2+\Delta y, 3+\Delta z) - f(-1,2,3) =$$

$$(-1+\Delta x)(2+\Delta y) + (3+\Delta z)^2 - 7 = -2 - \Delta y + 2\Delta x + \Delta x\Delta y$$

$$+ 9 + 6\Delta z + \Delta z^2 - 7 = 2\Delta x - \Delta y + 6\Delta z + \Delta x\Delta y + \Delta z\,\Delta z$$

$$A = 2, \quad B = -1, \quad C = 6, \quad \alpha = \Delta y, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \Delta z$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \alpha, \beta, \gamma = 0$$

پس تابع مشتق‌پذیر است.

قضیه: اگر تابع f در (x_0,y_0) مشتق‌پذیر باشد آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ در (x_0,y_0) موجودند (شرط لازم مشتق‌پذیری وجود مشتقات جزئی است)

اثبات: فرض کنید تابع f در (x_0,y_0) مشتق‌پذیر باشد در نتیجه:

$$\exists A, B, \alpha, \beta \ni f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha, \beta = 0 \qquad \forall \Delta x, \Delta y$$

hamednafisi@gmail.com

چون در رابطه فوق بازاء هر Δx و Δy برقرار است پس برای $\Delta y=0$ نیز برقرار است پس داریم:

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \alpha$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A$$

پس $\frac{\partial f}{\partial x}$ در (x_0,y_0) موجود است و به طریق مشابه با فرض $\Delta x=0$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B$$

مثال: نشان دهید تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست؟

حل:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \Delta x}{\Delta x|\Delta x|} =$$ موجود نیست.

پس f در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

قضیه: اگر تابع $f(x,y)$ در (x_0,y_0) مشتق پذیر باشد آنگاه f در (x_0,y_0) پیوسته است (شرط لازم مشتق پذیری پیوستگی است).

اثبات: بنابر تعریف مشتق پذیری داریم:

$$\exists \alpha, \beta \ni f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

با فرض $x=x_0+\Delta x$ و $y=y_0+\Delta y$ داریم:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x-x_0) + B(y-y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

پس f در (x_0,y_0) پیوسته است.

مثال: مشتق پذیری یا عدم مشتق پذیری تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ را در $(0,0)$ بررسی کنید.

حل: مشتقات جزئی موجود است. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$$y=mx \Rightarrow \lim_{(x,mx)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{m}{1+m^2}$$ حد ندارد پس پیوسته نیست.

پس f در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

مثال: نشان دهید تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

حل: مشتقات جزئی موجود است. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

پس تابع f دارای مشتقات جزئی است و هم پیوسته نیز است.

فرض کنید تابع f در $(0,0)$ مشتق پذیر است (فرض خلف)

$$\exists \alpha, \beta \ni f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$\frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \alpha\Delta x + \beta\Delta y \quad \forall \Delta x, \Delta y$$

با فرض $\Delta x=\Delta y$ داریم:

$$\frac{\Delta x^3}{2\Delta x^3} = (\alpha+\beta) \Rightarrow \frac{1}{2} = \alpha+\beta \xRightarrow[\Delta x,\Delta y \to 0]{} \frac{1}{2} = 0$$ تناقض.

تمرین: مشتق‌پذیری یا عدم مشتق‌پذیری تابع

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & x^2+y^2+z^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2+z^2=0\end{cases}$$

را در $(0,0,0)$ بررسی کنید.

قضیه: اگر تابع f در (x_0,y_0) مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه در (x_0,y_0) در هر سوئی دارای مشتق سوئی می‌باشد (عکس مطلب غلط است)

اثبات: بنابر تعریف مشتق‌پذیری داریم:

$$\exists\,\alpha,\beta \Rightarrow f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha,\beta$$

فرض کنید $u=a\vec{i}+b\vec{j}$ برداری یکانی در امتداد دلخواه باشد. فرض کنید

$\Delta x = at$ و $\Delta y = bt$

پس:

$$f(x_0+at, y_0+bt)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)at+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)bt+\alpha at+\beta bt$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+at,y_0+bt)-f(x_0,y_0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)a+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)b$$

$$\Rightarrow D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)a+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)b$$

پس $D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)$ در هر جهت دلخواه $\vec{u}$ موجود است.

تعریف: بردار $\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ را بردار گرادیان می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\vec{\nabla} f=\overrightarrow{\text{grad} f}=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}$$

نتیجه: اگر تابع f در (x_0,y_0) مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه:

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)=\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\vec{u}$$

مثال: $f(x,y)=xy^2+x^2$ $\quad (1,2)$ $\quad \vec{u}=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$

$$\vec{\nabla} f=(y^2+2x,\ 2xy)\qquad \vec{\nabla} f(1,2)=(6,4)$$

$$D_{\vec{u}}f(1,2)=(6,4)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\frac{34}{5}$$

مثال: تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

در $(0,0)$ در هر سوئی دارای مشتق سوئی است اما مشتق‌پذیر نیست.

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{a^2bt^3}{(a^2+b^2)t^2}}{t}=a^2b \qquad \vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$$

ماکزیمم مقدار مشتق سوئی: فرض کنید تابع f مشتق‌پذیر باشد.

$$D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla} f\cdot\vec{u}=|\vec{\nabla} f||\vec{u}|\cos\theta=|\nabla f|\cos\theta$$

پس: $D_{\vec{u}}f=|\nabla f|\cos\theta$

اگر $\cos\theta=1$ آن‌گاه ماکزیمم مقدار مشتق سوئی را خواهیم داشت. یعنی $\theta=0$ و یا بردار گرادیان و بردار $\vec{u}$ هم جهت می‌شوند و اگر $\cos\theta=-1$ می‌نیمم مقدار مشتق سوئی را

خواهیم داشت یعنی $\theta=\pi$ و یا بردار گرادیان در بردار $\vec{u}$ خلاف جهت باشد.

مثال: ماکزیمم و مینیمم مقدار مشتق سوئی تابع $f(x,y)=x^2y+xy^3$ در نقطه $(1,2)$ در چه جهاتی است.

$$\vec{\nabla} f=(2xy+y^3,\ x^2+3xy^2)\qquad \vec{\nabla} f(1,2)=(12,13)$$

در جهت بردار $(12,13)$ ماکزیمم مقدار و در جهت $-(12,13)$ مینیمم مقدار را خواهد داشت.

مثال*: فرض کنید ماکزیمم مقدار مشتق سوئی تابع $f(x,y)=xy^2+x^3y+2x-3y+4$ در نقطه‌ای روی محور xها برابر با 10 می‌باشد. آن نقطه را بیابید.

$$A(a,0)\qquad \vec{\nabla} f=(y^2+3x^2y+2,\ 2xy+x^3-3)$$

$$\vec{\nabla} f(a,0)=(2,\ a^3-3)\qquad |\vec{\nabla} f(a,0)|=\sqrt{4+(a^3-3)^2}=10$$

$$(a^3-3)^2=96\qquad a^3=3\pm\sqrt{96}\qquad a=\sqrt[3]{3\pm\sqrt{96}}$$

قاعده زنجیره‌ای: اگر f تابعی n متغیره باشد و $x=x(u,v)$، $y=y(u,v)$ در این صورت:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$f(u,v)$ ، $u=u(x,y)$ ، $v=v(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\quad \text{و}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

مثال: فرض کنید $f(u,v)=u^2+v^3$ و $u=xy$ و $v=x^2+y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2uy+3v^2(2x)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2ux+3v^2(2y)$$

مثال: فرض کنید $w(x,y,z)=f(\overset{u}{x-y},\ \overset{v}{y-z},\ \overset{k}{z-x})$ مطلوبست محاسبه

$$w_x+w_y+w_z=?$$

$$w_x=f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x+f_k\cdot k_x=f_u(1)+f_v(0)+f_k(-1)$$
$$=f_u-f_k$$
$$w_y=f_u(-1)+f_v(1)+f_k(0)=-f_u+f_v$$
$$w_z=f_u(0)+f_v(-1)+f_k(1)=-f_v+f_k$$

پس: $w_x+w_y+w_z=0$

مثال: $f(x,y)=x^2y+xy^2+2x^3+3y^3$ مطلوبست محاسبه xf_x+yf_y

$$f_x=2xy+y^2+6x^2\qquad f_y=x^2+2xy+9y^2$$
$$xf_x+yf_y=2x^2y+xy^2+6x^3+yx^2+2xy^2+9y^3$$
$$=3(x^2y+xy^2+2x^3+3y^3)=3f(x,y)$$

مثال: $f(x,y)=xy+y^2$ مطلوبست محاسبه $xf_x+yf_y-2f(x,y)$

* اگر $f(x,y)$ همگن از درجه n باشد آنگاه

$$xf_x+yf_y=nf.$$

حل:

$f(tx,ty)=t^n f(x,y) \quad \forall t\in\mathbb{R}$

مشتق نسبت به t:

$\frac{\partial f}{\partial u}(x)+\frac{\partial f}{\partial v}(y)=nt^{n-1}f(x,y)$

$t=1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y=nf(x,y) \quad \forall t\in\mathbb{R}$

مثال: $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}e^{\frac{x-y}{x+y}}$ همگن از درجه صفر پس $xf_x+yf_y=0$

مشتق ضمنی: فرض کنید $f(x,y,u,v)=0$ ، $g(x,y,u,v)=0$ و u و v توابعی از x و y باشند. برای محاسبه u_x و u_y و v_x و v_y از مشتق ضمنی استفاده می‌کنیم.

با مشتق‌گیری از توابع فوق نسبت به x و y و حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول u_x و u_y ، v_x و v_y محاسبه می‌شود.

مثال: $x^2v+yu+uv+2x=0$ ، $xu+yv+u-y=0$

مطلوبست محاسبه u_x و v_x و u_y و v_y.

مشتق نسبت به x

$$\Rightarrow \begin{cases} u+xu_x+yv_x+u_x=0\\ 2xv+x^2v_x+yu_x+u_xv+uv_x+2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+1)u_x+yv_x=-u\\ (y+v)u_x+(x^2+u)v_x=-2xv-2\end{cases}$$

$$u_x=\frac{\begin{vmatrix}-u & y\\ -2xv-2 & x^2+u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x+1 & y\\ y+v & x^2+u\end{vmatrix}} \qquad v_x=\frac{\begin{vmatrix}x+1 & -u\\ y+v & -2xv-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x+1 & y\\ y+v & x^2+u\end{vmatrix}}$$

تعریف: فرض کنید

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}$$

در این صورت اگر $f(x,y,u,v)=0$ ، $g(x,y,u,v)=0$

آنگاه:

$$u_x=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \qquad u_y=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

$$v_x=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \qquad v_y=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

مثال: $xy+ux+vy+4y=0$ ، $x^2uy+uv+x=0$ ***

مطلوبست محاسبه x_u ، x_v و y_u و y_v.

$$x_u=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix}x^2y+v & x^2u\\ x & x+v+4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2xuy+1 & x^2u\\ y+u & x+v+4\end{vmatrix}}$$

قاعدهٔ زنجیره‌ای و مشتق ضمنی: فرض کنید

$z=f(u,v)$ $\quad g(x,y,u,v)=0 \quad h(x,y,u,v)=0$

برای محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

برای محاسبه u_x و v_x از مشتق ضمنی به کمک g و h استفاده می‌کنیم.

مثال: $uy^2 + xyv + x = 0$, $xu + yv^2 + y = 0$, $z = u^2 + uv$

مطلوبست محاسبه $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$z_y = (2u+v)u_y + uv_y$$

مشتق نسبت به y $\Rightarrow \begin{cases} xu_y + v^2 + 2yvv_y + 1 = 0 \\ u_y y^2 + 2uy + xv + xyv_y = 0 \end{cases}$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} -v^2-1 & 2yv \\ -2yu+v & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 2yv \\ y^2 & xy \end{vmatrix}} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} x & -v^2-1 \\ y^2 & -2yu+v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 2yv \\ y^2 & xy \end{vmatrix}}$$

مشتق‌های مراتب بالاتر: فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره مفروض باشد و $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ خود توابعی دو متغیره باشند.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0,y_0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Delta x,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y) = x^4y + xy^5 + x^2 - y^3 + 4y$ مطلوبست محاسبه

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 + 5xy^4 - 3y^2 - 3y^2 + 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4x^3 + 5y^4$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = 12x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y + y^5 + 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 4x^3 + 5y^4 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x} = 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2y + 2 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2} = 12x^2$$

* $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ یعنی از تابع ابتدا n بار مشتق نسبت به y و سپس m بار نسبت به x مشتق می‌گیریم.

تذکر: ترتیب محاسبه مشتق دارای اهمیت است

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

فرض کنید، مثال:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbb{R}^2)=\begin{cases}\dfrac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x^5}{\Delta x^4}-0}{\Delta x}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbb{R}^2)=\begin{cases}\dfrac{(2x^2y-y^2)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\frac{\Delta y^5}{\Delta y^4}-0}{\Delta y}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}\ *$$

قضیه: اگر $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ موجود و پیوسته باشند آنگاه:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

مثال: $f(x,y)=x\,\mathrm{Sin}(xy^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{Sin}(xy^2)+xy^2\,\mathrm{Cos}(xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y\,\mathrm{Cos}(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy\,\mathrm{Cos}(xy^2)-2x^2y^3\,\mathrm{Sin}(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=4xy\,\mathrm{Cos}(xy^2)-2x^2y^3\,\mathrm{Sin}(xy^2)$$

مثال: عبارت $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ را در مختصات قطبی بنویسید.

عبارت $u_{xx}+u_{yy}$ را در مختصات قطبی بنویسید.

(فرض کنید $u(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد)

$$x=r\,\mathrm{Cos}\theta,\quad y=r\,\mathrm{Sin}\theta \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=u_r\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+u_\theta\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=$$

$$u_r\,\mathrm{Cos}\theta-u_\theta\frac{\mathrm{Sin}\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=u_r\,\mathrm{Sin}\theta+u_\theta\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r}$$

$$=u_r\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+u_\theta\cdot\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(u_r\sin\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(u_r\sin\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}=\left(u_{rr}\cos\theta-u_{\theta r}\frac{\sin\theta}{r}+u_\theta\frac{\sin\theta}{r^2}\right)$$

$$\cos\theta+\left(u_{\theta r}\cos\theta-u_r\sin\theta-u_{\theta\theta}\frac{\sin\theta}{r}-u_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$u_{yy}=\left(u_{rr}\sin\theta+u_{\theta r}\frac{\cos\theta}{r}-u_\theta\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\sin\theta+$$

$$\left(u_{\theta r}\sin\theta+u_r\cos\theta+u_{\theta\theta}\frac{\cos\theta}{r}-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

صفحهٔ مماس و خط قائم: رابطهٔ دو متغیره $z=f(x,y)$ نمایش یک رویه در $\mathbb{R}^3$ باشد.

بردار گرادیان در هر نقطه بر رویه عمود است.

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$r(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

$$f(x,y,z)=0$$

$r(t)$ بر رویه واقع است پس:

$$f(x(t),y(t),z(t))=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial f}{\partial z}z'(t)=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(x',y',z')=0\Rightarrow\vec{\nabla} f\cdot r'(t)=0$$

پس بردار گرادیان بر تمامی خطوط مماس بر رویه در نقطهٔ مفروض عمود است یعنی بردار گرادیان بر رویه عمود است.

صفحه‌ای که در بر دارندهٔ تمامی خطوط مماس در هر نقطه بر رویه است را صفحهٔ مماس بر رویه می‌نامیم.

واضح است که بردار گرادیان بردار نرمال صفحهٔ مماس است.

خطی که بر صفحهٔ مماس در نقطهٔ داده شده عمود است را خط قائم بر رویه نامیم. بردارهای خط همان بردار گرادیان است.

* **مثال:** صفحهٔ مماس و خط قائم بر رویهٔ $z=xy$ را در نقطهٔ $(1,-2,-2)$ بیابید.

$f(x,y,z)=z-xy \quad \vec{\nabla} f=(-y,-x,1) \quad \vec{\nabla} f(1,-2,-2)=(2,-1,1)$

صفحهٔ مماس $2(x-1)-1(y+2)+1(z+2)=0$

خط قائم: $x=1+2t,\ y=-2-t,\ z=-2+t$

از تقاطع دو رویه یک منحنی حاصل می‌شود. در هر نقطه بر منحنی تقاطع دو رویه می‌توان خط مماس، صفحهٔ قائم را تعریف نمود. اگر رویه‌های با معادلات f و g باشد آن گاه $\vec{\nabla} f\times\vec{\nabla} g$ خط مماس و بردار نرمال صفحهٔ قائم خواهد بود.

* **مثال ۳:** مطلوب است محاسبهٔ خط مماس و صفحهٔ قائم در نقطهٔ $(1,-1,1)$ واقع بر محل برخورد دو رویهٔ زیر:

$$\begin{cases} f: & xy+xz^2-y=1\\ g: & x^2z+yz-3x+3=0\end{cases}$$

$\vec{\nabla} f = (y+z^2,\ x-1,\ 2xz)$ $\quad \vec{\nabla} g = (2xz-3,\ z,\ x^2+y)$

$\vec{\nabla} f(1,-1,1) = (0,0,2)$ $\quad \vec{\nabla} g(1,-1,1) = (-1,1,0)$

$\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

خط مماس: $x = 1-2t\ ,\ y = -1-2t\ ,\ z = 1$

صفحه قائم: $-2(x-1) - 2(y+1) = 0$

دیفرانسیل: دیفرانسیل تابع n متغیره $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$$f(x,y) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

تعریف: هر عبارتی به صورت $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ را یک فرم دیفرانسیلی می‌نامیم.

تعریف: فرم دیفرانسیلی $Pdx + Qdy$ را دیفرانسیل کامل می‌نامیم هرگاه تابعی مانند $\varphi(x,y)$ یافت شود به طوری که $d\varphi = Pdx + Qdy$

مثال: $ydx + xdy$ یک دیفرانسیل کامل است زیرا اگر $\varphi = xy$ آنگاه
$d\varphi = ydx + xdy$

حالت خصوصی

قضیه: اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ آنگاه $Pdx + Qdy$ دیفرانسیل کامل است.

مثال: فرم دیفرانسیلی $(y^2 + 3x^2y + 1)dx + (2xy + x^3 - 2y)dy$ کامل است.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y + 3x^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

حال فرض کنید $Pdx + Qdy$ دیفرانسیل کامل باشد. پس بنا بر تعریف
$\exists \varphi \Rightarrow d\varphi = Pdx + Qdy$

از طرفی $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$ پس:

$(1)\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ و $(2)\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$

$(1) \Rightarrow \varphi(x,y) = \int Pdx + g(y) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right) + g'(y) \overset{(2)}{=} Q$

$\Rightarrow g'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right)$

پس: $g(y) = \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right)\right] dx + c$

پس: $\boxed{\varphi(x,y) = \int Pdx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx\right)\right] dy + C}$

مثال: تابع φ را برای مثال قبل بنویسید.

$(1)\ \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 3x^2y + 1\ ,\ (2)\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^3 - 2y$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \varphi(x,y) = xy^2 + x^3y + x + g(y) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy + x^3 + g'(y)$

$= 2xy + x^3 - 2y \Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + c$

پس: $\varphi(x,y) = xy^2 + x^3y + x - y^2 + c$

قضیه: شرط دیفرانسیل $Pdx + Qdy + Rdz$ کامل است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ و } \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x} \text{ و } \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$$

مثال: نشان دهید $e^{yz^2}dx + xz^2e^{yz^2}dy + (2xyze^{yz^2}+1)dz$ کامل است سپس φ را پیدا کنید.

$$P_y = z^2e^{yz^2} = Q_x \qquad P_z = 2yze^{yz^2} = R_x$$

$$Q_z = 2xe^{yz^2}\cdot z + 2xyz^3e^{yz^2} = R_y \Rightarrow$$ کامل است:

$$(1)\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=e^{yz^2} \qquad (2)\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = xz^2e^{yz^2} \qquad (3)\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}=2xyze^{yz^2}+1$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}\varphi(x,y,z)=xe^{yz^2}+g(y,z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=xz^2e^{yz^2}+\frac{\partial g}{\partial y}=xz^3e^{yz^2}$$

پس: $\frac{\partial g}{\partial y}=0$

$$\Rightarrow g(y,z)=h(z)$$

پس: $\varphi(x,y,z)=xe^{yz^2}+h(z)$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial z}=2xyze^{yz^2}+h'(z)=2xyze^{yz^2}+1$$

$$\Rightarrow h'(z)=1 \Rightarrow h(z)=z+c$$

پس: $\varphi(x,y,z)=xe^{yz^2}+z+c$

مثال: ۱) ثابت کنید، $\frac{dr}{ds}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}=-k^2$

حل: $\|T\|=1 \Rightarrow \|T\|^2=1 \to T\cdot T=1 \to \frac{dT}{ds}\cdot T+T\cdot\frac{dT}{ds}=0$

$$2T\cdot\frac{dT}{ds}=0\Rightarrow T\cdot\frac{dT}{ds}=0 \Rightarrow \frac{dT}{ds}\cdot\frac{dT}{ds}+T\cdot\frac{d^2T}{ds^2}=0 \xRightarrow{T=\frac{dr}{ds}}$$

$$\left\|\frac{dT}{ds}\right\|^2+\frac{dr}{ds}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}=0\Rightarrow \frac{dr}{ds}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}=-k^2$$

۲) ثابت کنید: $N=\frac{f(t)}{\|r'\|^4}(r'\times(r''\times r'))$

حل: $N=B\times T=\frac{r'\times r''}{\|r'\times r''\|}\times\frac{r'}{\|r'\|} \Rightarrow f=\frac{\|r'\|^3}{\|r'\times r''\|}$

$$N=\frac{(r'\times r'')\times r'}{\|r'\times r''\|}\frac{\|r'\|^3}{\|r'\|^4}\Rightarrow N=\frac{f(t)}{\|r'\|^4}\boxed{(r'\times(r''\times r'))}(r'\times r'')\times r'$$

$$(r'\times r'')\times r' = -r'\times(r'\times r'')=r'\times(r''\times r')$$

۳) مطلوبست محاسبه T و N و B و K و τ برای منحنی‌های مقاطع رویه‌های زیر:

$$\begin{cases} z=x^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} (0,1,0) \qquad \begin{cases} z=y^2-x^2 \\ z=2-x^2-y^2 \end{cases} (0,1,1)$$

حل: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\cos^2 t$

$r(t)=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j+\cos^2 t\,\vec k \qquad t=\frac{\pi}{2}$

(2) $y^2-x^2=2-x^2-y^2 \Rightarrow y=\pm1$

$x=t,\ y=1,\ z=1-t^2 \Rightarrow r(t)=t\,\vec i+\vec j+(1-t^2)\vec k$

$r(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \cos^2 t\,\vec{k}$ $\quad T = \dfrac{-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} - 2\sin t\cos t\,\vec{k}}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4\sin^2 t\cos^2 t}}$

$\vec{T}(\frac{\pi}{2}) = -\vec{i}$

$B = \dfrac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|} \Rightarrow \begin{array}{l} r'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} - 2\sin t\cos t\,\vec{k} \\ r''(t) = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} - 2\cos 2t\,\vec{k} \end{array}$

$r'(\frac{\pi}{2}) = -\vec{i} \quad r''(\frac{\pi}{2}) = -\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow r'(\frac{\pi}{2}) \times r''(\frac{\pi}{2}) = -\vec{i} \times (-\vec{j} + 2\vec{k}) = \vec{k} + 2\vec{j}$

$\|r' \times r''\| = \sqrt{5} \Rightarrow B = \dfrac{\vec{k} + 2\vec{j}}{\sqrt{5}}$

$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \dfrac{\vec{k} + 2\vec{j}}{\sqrt{5}} \times (-\vec{i}) = \dfrac{-\vec{i} + 2\vec{k}}{\sqrt{5}}$

$k = \dfrac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3} = \dfrac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

$\boxed{\tau = \dfrac{r' \cdot (r'' \times r''')}{k^2 \|r'\|^6}}$ $\quad r''' = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + 4\sin 2t\,\vec{k}$

$r'''(\frac{\pi}{2}) = \vec{i}$

$\tau = \dfrac{-\vec{i} \cdot ((-\vec{j} + 2\vec{k}) \times \vec{i})}{(\sqrt{5})^2 \; 1^6} = \dfrac{-\vec{i} \cdot (\vec{k} - 2\vec{j})}{5} = \dfrac{0}{5} = 0$

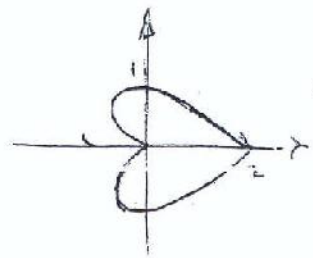
منحنی‌های قطبی: برای رسم منحنی‌های قطبی از جدول مقادیر و تقارن‌ها استفاده می‌کنیم $r = f(\theta)$

۴) زوج زیر را توصیف کنید. $r = 2(1 + \cos\theta)$ ← دلنمائون

* اگر θ را به $(-\theta)$ تبدیل کنیم در معادله تغییر حاصل نشود نسبت به محور قطبی متقارن است.

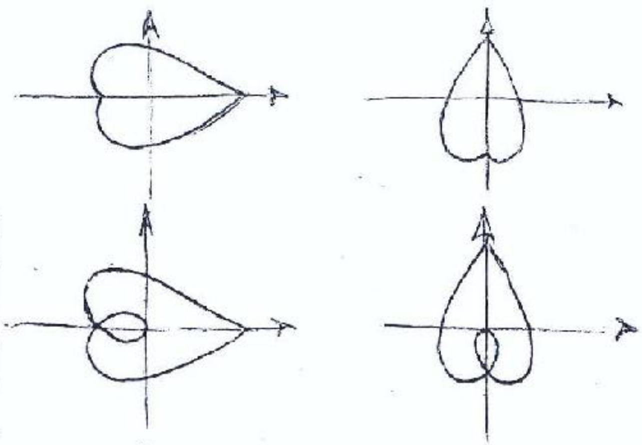
$r = 1 + \cos\theta$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	2	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0



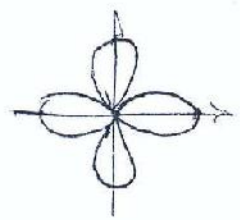
دلنما.

$r = a \pm b\cos\theta \qquad r = a \pm b\sin\theta$ $\quad$ دلنما:



۵) زوج $r^2 = \cos 2\theta$ را توصیف کنید

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1



۶) فرض کنید: $u(x,y,z) = x^m f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$

ثابت کنید $x u_x + y u_y + z u_z = m u$

حل: $u_x = m x^{m-1} f + x^m \left(f_s \cdot (-\frac{y}{x^2}) + f_k (\frac{-z}{x^2}) \right)$

$u_y = x^m \left(f_s \cdot (\frac{1}{x}) + f_k (0) \right) \qquad u_z = x^m \left(f_s \cdot 0 + f_k \frac{1}{x} \right)$

$xu_x = mx^m f - f_s x^{m-1} y - f_t x^{m-1} z$

$yu_y = f_s x^{m-1} y \qquad zu_z = f_t x^{m-1} z$

$\Rightarrow xu_x + yu_y + zu_z = mu$

۷) فرض کنید: $f(\overset{u}{xy}, \overset{v}{z-2x}) = 0$ ثابت کنید $xz_x - yz_y = 2x$

حل: $f_u \cdot y + f_v \cdot (z_x - 2) = 0$, $f_u \cdot x + f_v \cdot z_y = 0 \Rightarrow$

$z_x = \frac{2f_v - yf_u}{f_v}$, $z_y = -\frac{xf_u}{f_v}$

$xz_x - yz_y = \frac{2xf_v - xyf_u}{f_v} + \frac{xyf_u}{f_v} = 2x$

۸) ثابت کنید مشتق سوئی تابع $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ در هر نقطه از بیضی $2x^2 + y^2 = c^2$ در امتداد قائم بر بیضی صفر است.

حل: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x = a\cos t$, $y = b\sin t$

$\Rightarrow \frac{x^2}{(\frac{c}{\sqrt{2}})^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{c}{\sqrt{2}}\cos t \\ y = c\sin t \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{N} = \frac{-c\cos t\,\vec{i} - \frac{c}{\sqrt{2}}\sin t\,\vec{j}}{\sqrt{c^2\sin^2 t + \frac{c^2}{2}\cos^2 t}} \Rightarrow D_{\vec{N}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{N}$

$\vec{\nabla} f = (-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x}) = (-2\operatorname{tg}^2 t, 2\sqrt{2}\operatorname{tg} t)$

$D_{\vec{N}} f = \frac{2c\operatorname{tg}^2 t \cos t - 2c\operatorname{tg} t \sin t}{\sqrt{c^2\cos^2 t + \frac{c^2}{2}\sin^2 t}} = 0$

۹) اگر تابع $f(x,y,z)$ و $P(1,2,3)$, $A(2,3,4)$, $B(3,3,1)$, $C(2,1,4)$ در نقطه P مشتق پذیر باشد، مشتق سوئی تابع f را در جهت بردار $\vec{u}$ برابر 2 و در جهت بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ به ترتیب $D_{\vec{w}} f(P) = \frac{2}{3}$, $D_{\vec{v}} f(P) = 0$, $D_{\vec{u}} f(P) = 2$ بردارهای یکانی بردارهای $\vec{PA}$, $\vec{PB}$ و $\vec{PC}$ هستند. مطلوبست گرادیان f در نقطه P و مشتق سوئی تابع f در نقطه P در جهت بردار $\vec{A}$ که $\vec{A} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$

حل: $\vec{PA} = (1,1,1)$ $\quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$D_{\vec{u}} f(P) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(f_x + f_y + f_z) = 2$

$\vec{PB} = (2,1,-2) \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{3}(2,1,-2) \Rightarrow D_{\vec{v}} f(P) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} = \frac{1}{3}(2f_x + f_y - 2f_z) = 0$

$\vec{PC} = (1,-1,1) \Rightarrow \vec{w} = \frac{1}{3}(1,-1,1) \Rightarrow D_{\vec{w}} f(P) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(f_x - f_y + f_z) = \frac{2}{3}$

$f_x + f_y + f_z = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2f_x + f_y - 2f_z = 0 \qquad \Rightarrow f_y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad f_x = ? \quad f_z = ?$

$f_x - f_y + f_z = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

تمرین:

۱) طول قوس منحنی $y = \cosh x$ از $(x, \cosh x)$ تا $(0,1)$

$x = t \Rightarrow y = \cosh t \qquad S = \int \|r'(t)\| dt$

$r'(t) = \vec{i} + \sinh t\,\vec{j} \qquad S = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \int_0^x \cosh t\, dt$

$S = \sinh t$

۲) طول قوس منحنی چرخزاد $r(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$ $(0 \to 2\pi)$

hamednahisi@gmail.com

$$N=\frac{\frac{dT}{dt}}{\left\|\frac{dT}{dt}\right\|} \qquad T \Rightarrow N=\frac{-\frac{1}{\cos^2 t}\vec{i}+\vec{j}}{\left\|\left(-\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2+1\right\|} \Rightarrow N_{(\frac{\pi}{4})}=\frac{-2\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{(2)^2+1}}=\frac{-2\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{5}}$$

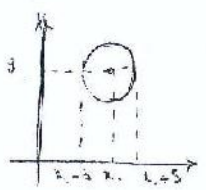
$$r\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=\left(\tfrac{\pi}{4},1\right) \qquad \alpha-\frac{\pi}{4}=-\frac{5}{2}\ ,\ \beta-1=\frac{5}{4}$$

کاربردهای مشتق:

تعیین اکسترمم های تابع چند متغیره: فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. نقطه $(x_0,y_0)\in D_f$ را یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع $f(x,y)$ می نامیم هرگاه مرکز همسایگی از (x_0,y_0) باشد مانند I به طوری که $f(x_0,y_0)\ge f(x,y)\quad \forall (x,y)\in I$ و (x_0,y_0) را نقطه مینیمم نسبی می نامیم هرگاه: $f(x_0,y_0)\le f(x,y)\quad \forall (x,y)\in I$

اگر $f(x_0,y_0)\ge f(x,y)\quad \forall (x,y)\in D_f$ آنگاه (x_0,y_0) نقطه ماکزیمم مطلق تابع f خواهد بود و اگر $f(x_0,y_0)\le f(x,y)\quad \forall (x,y)\in D_f$ آنگاه (x_0,y_0) نقطه مینیمم مطلق می نامیم.

قضیه: اگر (x_0,y_0) نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x,y)$ باشد و f دارای مشتق جزئی باشد آنگاه $\nabla f(x_0,y_0)=0$



اثبات: (x_0,y_0) نقطه ماکزیمم نسبی

$$y=y_0 \Rightarrow f(x_0,y_0)\ge f(x,y_0)\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

پس اگر $g(x)=f(x,y_0)$

آنگاه $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\quad g(x_0)\ge g(x)$

یعنی x_0 نقطه ماکزیمم نسبی تابع حقیقی $g(x)$ می باشد پس $g'(x_0)=0$

اما $g'(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

$$r(t)=a(1-\cos t,\sin t) \qquad s=\int_0^{2\pi}\|r'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\left[(1-\cos t)^2+\sin^2 t\right]}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}$$

$$=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(-1-1)=8a$$

3) آنرا داریم:

$$r(t)=\left(\int f(t)\sin t\,dt,\ \int f(t)\cos t\,dt,\ \int f(t)\,dt\right)$$

$$k=\frac{\|r'\times r''\|}{\|r'\|^3} \qquad \tau=\frac{r'\cdot(r''\times r''')}{\|r'\times r''\|^2}$$

$$r'(t)=\left(f(t)\sin t,\ f(t)\cos t,\ f(t)\right)$$

$$r''(t)=\left(f'(t)\sin t+\cos t f(t),\ f'(t)\cos t-\sin t f(t),\ f'(t)\right)$$

$$T=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+\vec{k}\right) \qquad N=\left(\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}\right)$$

$$\frac{dT}{ds}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}\right)\frac{1}{\sqrt{2}f(t)} \Rightarrow k=\left\|\frac{dT}{ds}\right\|=\frac{1}{2f(t)}$$

$$B=T\times N=\left(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}-\vec{k}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tau=\left\|\frac{dB}{ds}\right\|=\frac{1}{2f(t)} \qquad \frac{\tau}{k}=cte \Rightarrow$$ منحنی مارپیچ تعمیم یافته

4) دایره بوسان

$y=\operatorname{tg}x$ در $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$

$$r(t)=t\vec{i}+\operatorname{tg}t\,\vec{j} \Rightarrow r'(t)=\vec{i}+(1+\operatorname{tg}^2 t)\vec{j}$$

$$k=\frac{\|r'\times r''\|}{\|r'\|^3}=4 \Rightarrow \rho=\frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rho=\frac{5\sqrt{5}}{\ }$$

یعنی $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ و به طور مشابه $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

پس $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

تعریف: نقطه‌ای که گرادیان f در آن نقطه صفر باشد یا مشتقات جزئی در آن نقطه موجود نباشد را نقطه بحرانی می‌نامیم.

نتیجه: اکسترمم‌های نسبی تابع f در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتد.

مثال: $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 2$

$\Rightarrow \nabla f\,(2(x-1), 2y) = 0 \Rightarrow x = 1 , y = 0 \Rightarrow (1,0)$ نقطه بحرانی

$f(1,0) = 2 \leq (x-1)^2 + y^2 + 2 = f(x,y)$

$\Rightarrow f(1,0) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

پس $(1,0)$ نقطه مینیمم نسبی و مطلق تابع f می‌باشد.

تذکر: یک نقطه بحرانی ممکن است نقطه اکسترمم نباشد. همچنین نقطه‌ای را نقطه زینی نامیم.

مثال. $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla f\,(2x, -2y) = 0 \Rightarrow x = 0 , y = 0$ نقاط بحرانی

در همسایگی $(0,0)$ داریم:

$f(0,0) = 0 \geq -y^2 = f(0,y)$

$f(0,0) = 0 \leq x^2 = f(x,0) \Rightarrow$ پس $(0,0)$ نقطه اکسترمم نیست

پس $(0,0)$ نقطه زینی است.

آزمون مشتق دوم: فرض کنید (x_0, y_0) نقطه بحرانی تابع $f(x,y)$ باشد و تابع f در (x_0, y_0) مشتق‌پذیر باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\Delta(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

در این صورت

1) اگر $\Delta(M_0) > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) > 0$ آنگاه نقطه M_0 نقطه می‌نیمم نسبی است.

2) اگر $\Delta(M_0) > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) < 0$ آنگاه نقطه M_0 نقطه ماکزیمم نسبی است.

3) اگر $\Delta(M_0) < 0$ آنگاه نقطه M_0 نقطه زینی است.

4) اگر $\Delta(M_0) = 0$ چیزی نمی‌توان گفت.

مثال: $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 2 \quad M_0(1,0)$ نقطه بحرانی

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \Delta = 4 \qquad \Delta(M_0) > 0 , \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = 2 > 0$

$\Leftarrow$ M_0 نقطه می‌نیمم نسبی است.

مثال: $f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 3x - 9y^2 + 12y + 12$ نقاط بحرانی:

$\nabla f = (3x^2 - 3 , 6y^2 - 18y + 12) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$6y^2 - 18y + 12 = 0 \Rightarrow y = 1, 2$

$\Rightarrow \underset{M_1}{(1,1)} \; \underset{M_3}{(-1,1)} \; \underset{M_2}{(1,2)} \; \underset{M_4}{(-1,2)}$ نقاط بحرانی

$f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = 12y - 18 \quad f_{xy} = 0$

$\Rightarrow \Delta(x,y) = 6x(12y - 18)$

$\Delta(M_1) = -36 < 0 \Rightarrow$ M_1 زینی است.

$\begin{cases} \Delta(M_2) = 36 > 0 \\ f_{xy}(M_2) = 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ M_2 می‌نیمم نسبی است

$\begin{cases} \Delta(M_3) = 36 > 0 \\ f_{yy}(M_3) = -6 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ M_3 ماکزیمم نسبی است

$\Delta(M_4) = -36 < 0 \Rightarrow$ M_4 زینی است.

تمرین: نقاط بحرانی و ماهیت آن‌ها را برای توابع زیر بیابید.

$f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

اکسترمم های شرطی یا مقید: اکسترمم مقید یعنی پیدا کردن اکسترمم های تابع f با این شرط که نقاط در رابطه $g=0$ صدق کند.

قضیه: اگر M_0 نقطه اکسترمم تابع f باشد با شرط g آنگاه

$$\overrightarrow{\nabla f} - \lambda \overrightarrow{\nabla g} = 0$$

روش معروف ضرایب لاگرانژ و λ را ضریب لاگرانژ می‌نامیم.

مثال: نقطه ای را بیابید که تا مبدأ می‌نیمم فاصله را داشته باشد؟ برصفحه $x+2y+3z=1$

$d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow$ می‌نیمم $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ ← با شرط $g(x,y,z) = x+2y+3z-1 = 0$ باشد.

$$\overrightarrow{\nabla f} - \lambda \overrightarrow{\nabla g} = (2x, 2y, 2z) - \lambda(1, 2, 3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x = \lambda, \quad 2y = 2\lambda, \quad 2z = 3\lambda, \quad x + 2y + 3z = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} + 2\lambda + \frac{9}{2}\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{7} \Rightarrow x = \frac{1}{12}, \; y = \frac{1}{7}, \; z = \frac{3}{14}$$

← $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right)$ نقطه می‌نیمم است.

* چنانچه بخواهیم اکسترمم های تابع f را با شرایط $g=0$ و $h=0$ محاسبه کنیم آنگاه خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{\nabla f} - \lambda \overrightarrow{\nabla g} - \mu \overrightarrow{\nabla h} = 0$$

مثال: نقطه ای را بیابید که تا مبدأ $x-y-z=3$ و $x+y+z=2$ برخط کمترین فاصله را داشته باشد.

$\min f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

با شرایط $\begin{cases} g(x,y,z) = x+y+z-2 = 0 \\ h(x,y,z) = x-y-z-3 = 0 \end{cases}$

$$\overrightarrow{\nabla f} - \lambda \overrightarrow{\nabla g} - \mu \overrightarrow{\nabla h} = 0$$

$$\Rightarrow (2x, 2y, 2z) - \lambda(1,1,1) - \mu(1,-1,-1) = 0$$

$$2x = \lambda + \mu, \quad 2y = \lambda + (-\mu), \quad 2z = \lambda - \mu$$

$$x + y + z = 2, \quad x - y - z = 3$$

$$\Rightarrow y = z \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow z = y = -\frac{1}{4}$$

← نقطه مورد نظر: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

نتیجه: اکنون برای تعیین اکسترمم های مطلق تابع f در ناحیه‌ای مانند D در $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ناحیه D را به دو قسمت درون D و روی مرز D تقسیم می‌کنیم: در درون D نقاط بحرانی $\nabla f = 0$ و روی مرز D از اکسترمم مقید استفاده می‌کنیم.

مقادیر نقاط بدست آمده را در تابع f قرار می‌دهیم بیشترین مقدار حاصل را ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار را مینیمم مطلق می‌نامیم.

مثال: اکسترمم های مطلق تابع $f(x,y) = xy$ را در ناحیه $D: x^2+y^2 \le 1$ بیابید.

درون D: $x^2+y^2<1$ و مرز D: $x^2+y^2=1$

درون D: $\nabla f = (y, x) = 0 \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow M_0(0,0) \in D$

$f(x,y) = xy \quad , g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f - \lambda \vec{\nabla} g = 0 = (y,x) - \lambda(2x, 2y) = 0$

$\Rightarrow y = 2\lambda x \ , \ x = 2\lambda y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = y^2$

$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

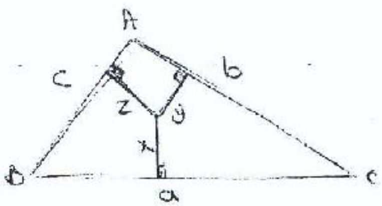
$M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f(M_0) = 0 \quad f(M_1) = \frac{1}{2} \quad f(M_2) = -\frac{1}{2} \quad f(M_3) = -\frac{1}{2} \quad f(M_4) = \frac{1}{2}$

مینیمم مطلق

ماکزیمم مطلق

تمرین: 1) مثلثی را تعیین کنید که حاصلضرب سینوس های زوایای داخلی Max باشد.



2) مساحت مثلث S:

الف) ثابت کنید $ax + by + cz = 2S$

ب) مینیمم مقدار $x^2+y^2+z^2$ را بیابید

بسط تیلور توابع چند متغیره: فرض کنید تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0, y_0) دارای مشتقات نسبی در هر مرتبه‌ای باشد در این صورت داریم:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) +$$

$$\frac{1}{2}(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^j \frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-j}\partial y^j} + R_n(x,y)$$

که $R_n(x,y)$ باقیمانده تیلور می‌باشد.

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(x-x_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(c_1, c_2)$$

اگر $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ بسط مک لورن حاصل می‌شود.

مثال: بسط مک لورن $f(x,y) = \sin(xy)$ را بیابید.

$f_x = y\cos(xy) \quad f_y = x\cos(xy) \quad f_{xx} = -y^2\sin(xy)$

$f_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy) \quad f_{yy} = -x^2\sin(xy)$

$f_{xxx} = -y^3\cos(xy)$ $\quad f_{xxy} = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy)$

$\Rightarrow \sin(xy) = \dots$ [illegible]

انتگرال چندگانه:

انتگرال دوگانه: فرض کنید تابع $f(x,y)$ در ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ محصور باشد ناحیه D را به n قسمت $D_1, D_2, \dots, D_n$ تقسیم می‌کنیم $\quad D=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$

مساحت هر جزء D_i را Δs_i می‌نامیم. در هر جزء D_i نقطه‌ای دلخواه $(x_i,y_i)\in D_i$ را انتخاب می‌کنیم. مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i$$

مجموع فوق را حاصل جمع ریمانی می‌نامیم.

حال چنانچه

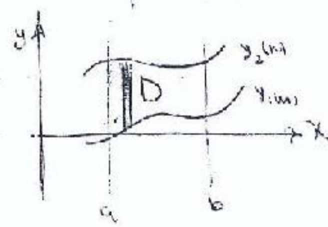
$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i$$

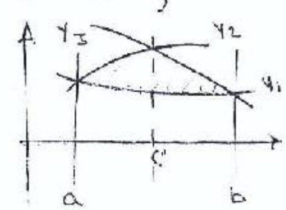
موجود باشد گوییم تابع $f(x,y)$ در D دارای انتگرال دوگانه است و می‌نویسیم:

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} f(x_i,y_i)\Delta s_i = \iint_D f(x,y)\,ds$$

محاسبه انتگرال دوگانه: ناحیه D را در راستای محور yها منظم نامیم هرگاه:

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$



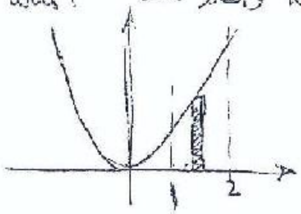


$D = \{(x,y)\mid a\le x\le c,\ y_1\le y\le y_3\} \cup \{(x,y)\mid c\le x\le b,\ y_1\le y\le y_2\}$

و ناحیه D را در راستای محور xها منظم نامیم هرگاه:

$D=\{(x,y)\mid x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d\}$

مثال: ناحیه محدود به منحنی $y=x^2$ و خطوط $x=1$ و $x=2$ و محور xها



$$D=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,\ 0\le y\le x^2\}$$

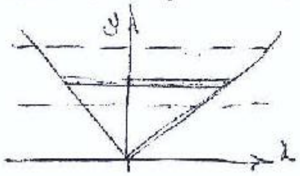
منظم در راستای محور yها و در راستای محور xها نامنظم

* دایره در راستای هر دو محور منظم است: $x^2+y^2=a^2$

$D=\{(x,y)\mid -a\le x\le a,\ -\sqrt{a^2-x^2}\le y\le \sqrt{a^2-x^2}\}$

$D=\{(x,y)\mid -\sqrt{a^2-y^2}\le x\le \sqrt{a^2-y^2},\ -a\le y\le a\}$

مثال: $y=1$ و $y=2$ $\quad y=|x|$



$$D=\{(x,y)\mid -y\le x\le y,\ 1\le y\le 2\}$$

فرض کنید D در راستای محور yها منظم باشد در این صورت:

$$\iint_D f(x,y)\,ds = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

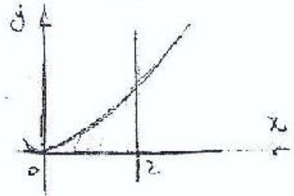
و اگر D در راستای محور xها منظم باشد در این صورت:

$$\iint_D f(x,y)\,ds = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

واگر در راستای هر دو محور منظم باشد آن گاه:

$$\iint_D f(x,y)\,ds = \int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\iint_D (x^2+y)\,ds$ که D ناحیه محدود به منحنی $y=x^2$ و خطوط $x=0$ و $x=2$ و $y=0$ و محور xها.

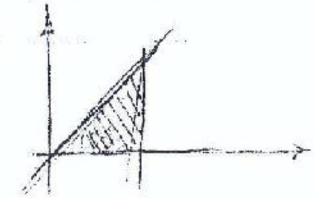


$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le x^2\}$$
$$=\{(x,y)\mid \sqrt{y}\le x\le 2,\ 0\le y\le 4\}$$

$$\iint_D (x^2+y)\,ds = \int_0^2\int_0^{x^2}(x^2+y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^2\left(x^4+\frac{x^4}{2}\right)dx$$

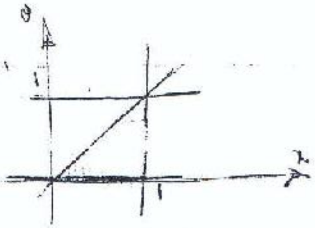
$$\iint_D (x^2+y)\,ds = \int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^4\left(\frac{1}{3}x^3+xy\right)\Big|_{\sqrt{y}}^2 dy = \int_0^4\left(\frac{8}{3}+2y-\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)dy$$
$$=\left(\frac{8}{3}y+y^2-\frac{8}{15}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^4=\frac{48}{5}$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\iint_D e^{x^2}\,ds$ که D ناحیه محدود به خطوط $y=x$ ، $x=0$ ، $y=0$ و $x=1$ می‌باشد.



$$\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e}{2}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(e-1)$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

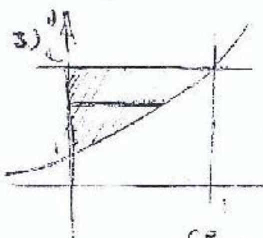


$$I=\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx=\frac{1}{2}(e-1)$$

مثال: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$ 2) $\int_0^1\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$ 3) $\int_0^1\int_{e^x}^e \frac{dy\,dx}{\ln y}$

3)



$0\le x\le 1,\ e^x\le y\le e \Rightarrow 1\le y\le e,\ 0\le x\le \ln y$

$$\int_0^1\int_{e^x}^e \frac{dy\,dx}{\ln y}=\int_1^e\int_0^{\ln y}\frac{dx\,dy}{\ln y}=\int_1^e\left(\frac{x}{\ln y}\right)\Big|_0^{\ln y}dy$$
$$=\int_1^e dy = e-1$$

خواص انتگرال دوگانه:

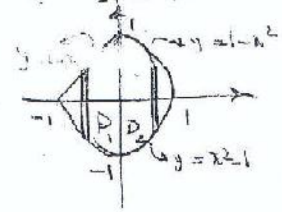
1) $\iint_D ds = S(D)$ مساحت

2) $\iint_D (f(x,y)+\lambda g(x,y))\,ds=\iint_D f(x,y)\,ds+\lambda\iint_D g(x,y)\,ds$

3) جمع پذیری: اگر $D=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ ؛ $D_i\bigcap_{i\ne j} D_j=\emptyset$ در این صورت

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\iint_{D_1} f(x,y)\,ds+\iint_{D_2} f(x,y)\,ds+\cdots\iint_{D_n} f(x,y)\,ds$$

مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y=x^2-1$ ، $y=1-x^2$ ، $y \le 1+x$ را بیابید. حل:



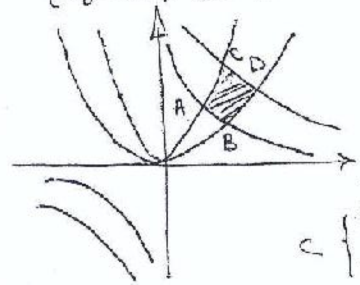
$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{x^2-1}^{1+x} dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{0}(1+x-x^2+1)\,dx$$

$$+ \int_{0}^{1}(1-x^2-x^2+1)\,dx = \left(2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left(2x-\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{1} =$$

تمرین: مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های

$$\begin{cases} xy=1 \ , \ y=x^2 \\ xy=2 \ , \ y=4x^2 \end{cases}$$

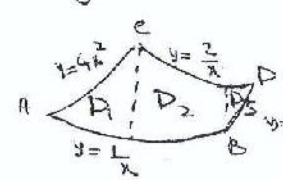


$$A\begin{cases} y=4x^2 \Rightarrow 4x^3=1 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ xy=1 \end{cases}$$

$$B\begin{cases} y=x^2 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1 \\ xy=1 \end{cases}$$

$$C\begin{cases} y=4x^2 \Rightarrow 4x^3=2 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ xy=2 \end{cases}$$

$$D\begin{cases} y=x^3 \Rightarrow x^3=2 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2} \\ xy=2 \end{cases}$$



$$S=\iint dx\,dy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\int_{\frac{1}{x}}^{4x^2} dy\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt[3]{2}}\int_{x^2}^{\frac{2}{x}} dy\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\mathrm{Ln}\,2$$

قضیه: تغییر متغیر در انتگرال دوگانه: فرض کنید $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ نگاشتی باشد که ناحیه D را در دستگاه xy را به ناحیه D' در دستگاه uv تبدیل کند و

$$u=u(x,y) \quad , \quad v=v(x,y)$$

تعریف می‌کنیم:

$$J(x,y) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$J(x,y)$ را ژاکوبین تبدیل می‌نامیم:

$$J(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

و همواره:

$$J(x,y) = \frac{1}{J(u,v)}$$

مثال: فرض کنید مطلوبست محاسبه $J(x,y)$

$$\begin{cases} u=xy \\ v=\frac{y}{x^2} \end{cases}$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{3y}{x^2} = 3v \Rightarrow J(x,y) = \frac{1}{J(u,v)} = \frac{1}{3v}$$

مثال: $x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

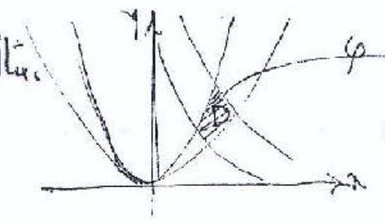
قضیه: فرض کنید $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: ρ تبدیلی باشد که ناحیه D در دستگاه xy را به ناحیه D' در دستگاه uv می‌برد و

$$u=u(x,y) \quad v=v(x,y)$$

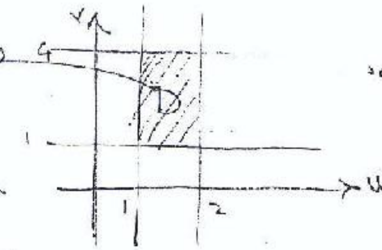
و u و v توابعی دیفرانسیل پذیر باشند $J(x,y) \neq 0$ در این صورت:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(x,y)|\,du\,dv$$

مثال:



در مثال قبل:



$$\varphi \begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y}{x^2} = v \end{cases} \qquad J(x,y) = \frac{1}{3v}$$

$$\iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \frac{1}{3v}\,du\,dv = \int_1^2\int_1^4 \frac{1}{3v}\,dv\,du = \int_1^2 \frac{1}{3}\operatorname{Ln}4\,du = \frac{2}{3}\operatorname{Ln}2$$

* هرگاه ناحیه انتگرال‌گیری دایره بود بهترین تبدیل مختصات قطبی است.

مثال: $\displaystyle\iint_{D:x^2+y^2\le 1} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$\iint_{D:x^2+y^2\le 1} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{D:r\le 1} \sin(r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sin(r^2)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\cos(r^2)\Big]_0^1 = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$$

$$= \pi(1-\cos 1)$$

مثال: 1) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2-x} e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dy\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2-y} \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dx\,dy$

3) $\displaystyle\iint e^{2x}(3yx^2+y^2)\,dx\,dy$ D: $y=e^{-x},\ y=2e^{-y},\ y=x^3+1,\ y=x^3+2$

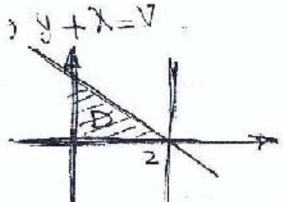
4) $\displaystyle\iint \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\cos\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)dx\,dy$ D: $x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=5,\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9$

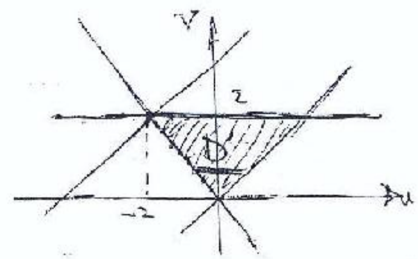
5) $\displaystyle\iint (x+y)\sin(x^2-y^2)\,dx\,dy$ D: $x+y=\pi,\ x+y=2\pi,\ x-y=0,\ x-y=\frac{\pi}{2}$

1) $y-x=u,\ y+x=v$

$0 \le x \le 2$

$0 \le y \le 2-x$





$$\begin{cases} x = \dfrac{v-u}{2} \\ y = \dfrac{u+v}{2} \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} x=0 \Rightarrow u=v & x=2 \Rightarrow u-v=4 \\ y=0 \Rightarrow u=-v & y=2-x \Rightarrow v=2 \end{array}$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \qquad \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy = \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\,\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$= \int_0^2\int_{-v}^{v} \frac{1}{2}e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv = \int_0^2 \frac{1}{2}v\,e^{\frac{u}{v}}\Big]_{-v}^{v}\,dv = \frac{1}{2}\int_0^2 (e^1-e^{-1})\,v\,dv$$

$$= (e^1 - e^{-1}) = 2\sinh(1)$$

مثال: $\iint_D e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ $\quad \frac{x}{a}=u \quad \frac{y}{b}=v$

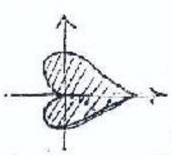
$D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ $\quad J(u,v)=\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}=ab$

$$\Rightarrow I=\iint_{D:\ u^2+v^2\le 1} e^{-u^2-v^2}\,ab\,dudv = ab\int\int_0^1 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \pi ab(1-e^{-1})$$

کاربردهای انتگرال دوگانه:

مساحت:

مثال: مساحت ناحیه محصور به منحنی $r=1+\cos\theta$ را بیابید.



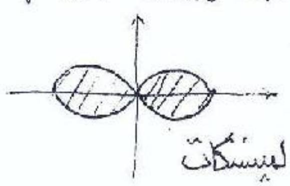
$$S=2\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta=\left(\theta+2\sin\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{3\pi}{2}$$

مثال: مساحت محصور به منحنی $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$

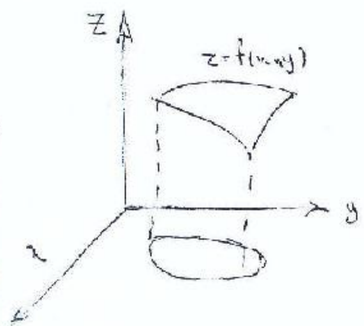
$r^4=r^2\cos 2\theta \Rightarrow r^2=\cos 2\theta$



$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta\,d\theta$$

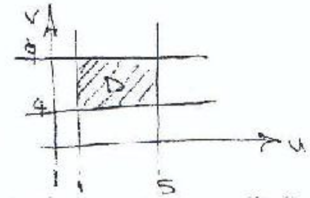
لمنیسکات $\Rightarrow S=\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$

تعیین حجم به کمک انتگرال دوگانه:



فرض کنید تابع $f(x,y)$ در ناحیه D پیوسته و نامنفی باشد. حجم محدود از بالا به رویه $z=f(x,y)$

$\begin{cases}x^2-y^2=u\\ x^2+y^2=v\end{cases}$



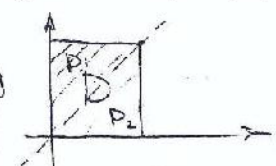
$J(u,v)=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=8xy$ $\quad J(x,y)=\frac{1}{8xy}$

$$\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\cos\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)dxdy=\iint_{D'}\frac{xy}{v^3}\cos\left(\frac{u}{v}\right)\frac{1}{8xy}\,dudv$$

$$=\frac{1}{8}\int_4^9\int_1^5\frac{1}{v^3}\cos\left(\frac{u}{v}\right)dudv=\frac{1}{8}\int_4^9\frac{1}{v^2}\left(\sin\left(\frac{5}{v}\right)-\sin\frac{1}{v}\right)dv$$

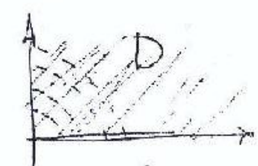
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\cos\left(\frac{5}{v}\right)-\cos\left(\frac{1}{v}\right)\right)\Big]_4^9=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{5}\left(\cos\frac{5}{9}-\cos\frac{5}{4}\right)-\cos\frac{1}{9}+\cos\frac{1}{4}\right.$$

مثال: $\iint_D |y-x|\,dxdy$ $\quad D:[0,1]\times[0,1]$



$$=\iint_{D_1}(y-x)\,dxdy+\iint_{D_2}(-y+x)\,dxdy$$

مثال: $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy=I$



$$I=\iint_D e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

تذکر*:

$I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx \Rightarrow I=\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy$

$$\Rightarrow I^2=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

و از پایین به ناحیه D در صفحه xy و از کنار به استوانه‌ای متکی به D برابر است با:

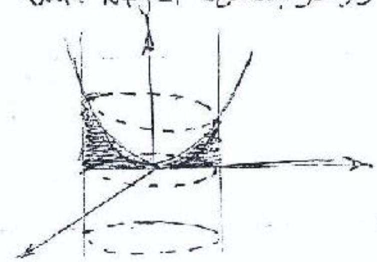
$$V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

اگر ناحیه مورد نظر محدود از بالا توسط سطح $z=f(x,y)$ و از پایین توسط سطح $z=g(x,y)$ باشد آنگاه:

$$V=\iint_D \big(f(x,y)-g(x,y)\big)\,dx\,dy$$

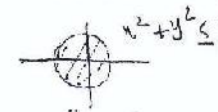
پس D تصویر ناحیه مورد نظر در صفحه xy است.

مثال: حجم محدود از بالا به سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ و از کناره به استوانه $x^2+y^2=1$ و از پایین به صفحه $z=0$ را بیابید.

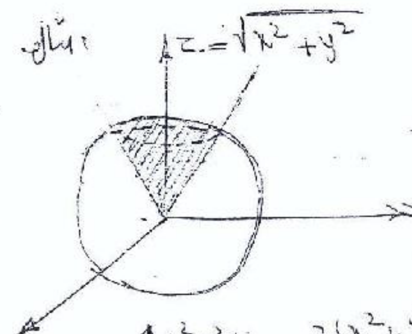


$$V=\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

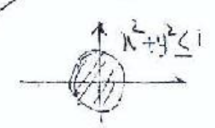


مثال: حجم محدود به رویه‌های $x^2+y^2+z^2=2$ ، $z=\sqrt{x^2+y^2}$



$$V=\iint_D \left(\sqrt{2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{2-r^2}-r\right) r\,dr\,d\theta$$



$z(x^2+y^2)=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

انتگرال سه‌گانه

انتگرال سه‌گانه: فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ در ناحیه G در $\mathbb{R}^3$ محدود باشد. ناحیه G را به n قسمت $G_1, G_2, \dots, G_n$ تقسیم می‌کنیم:

$$G=\bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

فرض کنید $\Delta_i V$ حجم جزء G_i باشد. در هر جزء G_i نقطه دلخواه (x_i, y_i, z_i) را در نظر می‌گیریم و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta_i V$$

حال اگر

$$\lim_{\max \Delta_i V\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta_i V$$

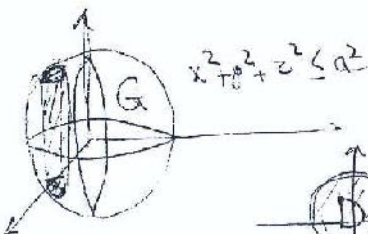
موجود باشد گوییم تابع f در ناحیه G دارای انتگرال سه‌گانه است و می‌نویسیم:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\lim_{\max \Delta_i V\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta_i V$$

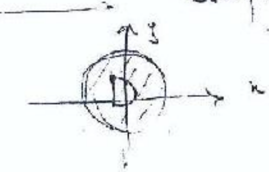
تعریف: ناحیه G را در راستای محور zها منظم نامیم هرگاه:

$$G=\{(x,y,z) \mid (x,y)\in D,\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$$

D تصویر G در صفحه xy است.



$$G=\{(x,y,z) : (x,y)\in D,\ -\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le \sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$$

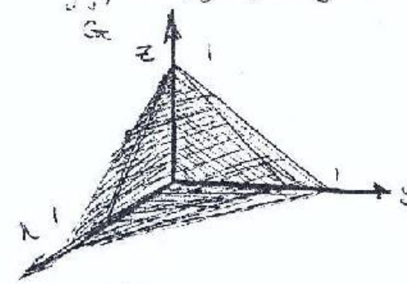


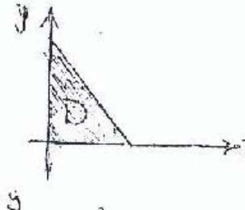
حال فرض کنید ناحیه G در راستای محور zها منظم باشد در این صورت:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV=\iint_D \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,ds$$

مثال: فرض کنید G ناحیه محدود به صفحه $x+y+z=1$ و صفحات مختصات باشد مطلوبست محاسبه:

$$I=\iiint_G (x+yz)\,dx\,dy\,dz$$





$$G=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\ 0\le z\le 1-x-y\}$$

$$I=\iint_D\int_0^{1-x-y}(x+yz)\,dz\,ds=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(x+yz)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(x(1-x-y)+\frac{1}{2}y(1-x-y)^2\right)ds=\int_0^1\cdots$$

تعریف: ناحیه G را در راستای محور yها منظم نامیم هرگاه:

$$G=\{(x,y,z)\mid (x,z)\in D',\ y_1(x,z)\le y\le y_2(x,z)\}$$

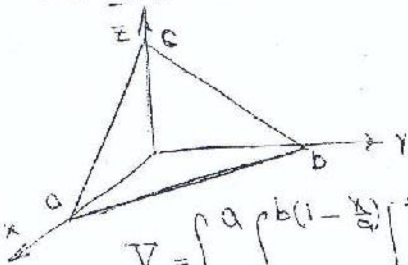
پس D' تصویر G در صفحه xz است.

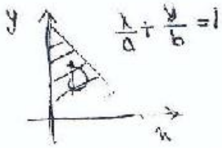
و به طور مشابه منظم بودن در راستای محور xها تعریف می‌شود.

* تذکر: اگر $f(x,y,z)=1$ آنگاه:

$$\iiint_G dx\,dy\,dz=(G\ \text{حجم})$$

مثال: حجم ناحیه محدود به صفحه $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ و صفحات مختصات را بیابید.





$$V=\int_0^a\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}\int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})}dz\,dy\,dx=\int_0^a\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^a\left(bc\left(1-\frac{x}{a}\right)^2-\frac{1}{2}bc\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right)dx=-\frac{1}{2}bca\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\Big]_0^a=\frac{1}{6}abc$$

تعریف: فرض کنید $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ تبدیلی به صورت زیر باشد:

$$\varphi\begin{cases}u=u(x,y,z)\\ v=v(x,y,z)\\ w=w(x,y,z)\end{cases}$$

ژاکوبین تبدیل فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(x,y,z)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

$$J'(u,v,w)=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\Rightarrow J(x,y,z)=\frac{1}{J'(u,v,w)}$$

ژاکوبین تبدیل در مختصات استوانه‌ای و کروی را بیابید.

مثال: استوانه‌ای

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad J(x,y,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$(x,y,z) \sim (r,\theta,z)$

کروی

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \qquad J(x,y,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$J(x,y,z) = \cos\phi\left(-\rho^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - \rho^2\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi\right)$$
$$-\rho\sin\phi\left(\rho\cos^2\theta\sin^2\phi + \rho\sin^2\theta\sin^2\phi\right) \Rightarrow$$

$$J(x,y,z) = -\rho^2\sin\phi\cos^2\phi - \rho^2\sin^3\phi = -\rho^2\sin\phi$$

تمرین: حجم مخروط کروی را در مختصات دکارتی بیابید.

قضیه تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه: فرض کنید $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تبدیلی باشد که ناحیه G در دستگاه xyz را به ناحیه G' در دستگاه uvw تبدیل می‌کند،

$x = x(u,v,w)$

$y = y(u,v,w)$

$z = z(u,v,w)$

و $J(x,y,z) \neq 0$، در این صورت،

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{G'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\,|J(x,y,z)|\,du\,dv\,dw$$

مثال: حجم بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ را بیابید.

$$\iiint_G dx\,dy\,dz \qquad G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

فرض کنید $\begin{cases} \frac{x}{a} = u \\ \frac{y}{b} = v \\ \frac{z}{c} = w \end{cases}$

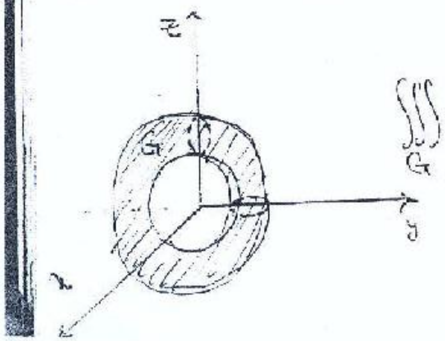
$G \to G' : u^2 + v^2 + w^2 \le 1$

$$J(x,y,z) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \qquad \iiint_G dx\,dy\,dz = \iiint_{G'} abc\,du\,dv\,dw$$

$$\begin{cases} u = \rho\sin\phi\cos\theta \\ v = \rho\sin\phi\sin\theta \\ w = \rho\cos\phi \end{cases} \qquad \iiint_G dx\,dy\,dz = abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= 2\pi abc\,\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi = \frac{2\pi}{3}abc\left(-\cos\phi\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{4}{3}\pi abc$$

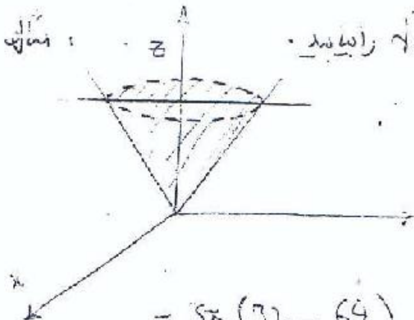
مثال: $\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ که G محدود به کره‌های $x^2+y^2+z^2=1$ ، $x^2+y^2+z^2=4$ مطلوبست محاسبه



$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 \rho^3\sin^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}(16-1)\sin^2\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{15}{64}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi\right)\int_0^{\pi} dv = \frac{15}{4}\pi^2$$

مثال: حجم ناحیه محدود به $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4$ را بیابید.



$$\iiint_G dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_r^{4} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{4}(4-r)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(2r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^4 d\theta$$

$$= 2\pi\left(32 - \frac{64}{3}\right)$$

انتگرال خط:

تابع $F(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$P, Q, R: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

را یک میدان برداری می‌نامیم

فرض کنید $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

یک تابع برداری $\alpha(t)$ و ... قسمتی از منحنی در بازهٔ $[t_0, t_1]$ باشد در این صورت

$\int_\alpha F\cdot dr$ را انتگرال خط (منحنی الخط) می‌نامیم

به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\int_\alpha F\cdot dr = \int_\alpha P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\right.$$

$$\left. + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]dt$$

$\omega = \int F\cdot dr$ کار انجام شده است.

مثال: مطلوبست محاسبهٔ $\int_\alpha xz\,dx + yx\,dy + z^2\,dz$ روی مسیری از منحنی $r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ از نقطهٔ $(0,0,0)$ تا $(2,4,8)$ می‌باشد.

$$\omega = \int_0^2\left[t\cdot t^3\cdot 1 + t^2\cdot t^2\cdot 2t + t^6\cdot 3t^2\right]dt = \frac{32}{5} + \frac{64}{3} + \frac{512}{3}$$

مثال: مطلوبست محاسبهٔ $\int_\alpha xy\,dx + y^2\,dy$ که α:

الف) خطی است که $(0,0)$ را به $(1,1)$ وصل می‌کند.

ب) منحنی $y = x^2$ از $(0,0)$ تا $(1,1)$

ج) منحنی $y = x^3$ " " " "

الف) $y = x \Rightarrow \alpha(t) = t\vec{i} + t\vec{j}$

$$\int_0^1 (t^2 + t^2)\,dt = \frac{2}{3}$$

$\alpha(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$

ب) $\int_0^1 (t^3 + t^4\cdot 2t)\,dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

ج) $\alpha(t) = t\vec{i} + t^3\vec{j}$ $\quad \int_0^1 (t^4 + t^6\cdot 3t^2)\,dt = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

مثال: مثال قبل را برای میدان برداری $F = xy\vec{i} + \frac{1}{2}x^2\vec{j}$ حل کنید.

$\int xy\,dx + \frac{1}{2}x^2\,dy$: $\quad$ الف) $\int_0^1\left(t^2 + \frac{1}{2}t^2\right)dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

ب) $\int_0^1\left(t^3 + \frac{1}{2}t^2\cdot 2t\right)dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

ج) $\int_0^1\left(t^4 + \frac{1}{2}t^2\cdot 3t^2\right)dt = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$

ت) $y = x^n \qquad \alpha(t) = t\vec{i} + t^n \vec{j}$

$$\int_0^1 \left(t^{n+1} + \frac{1}{2} t^2 t^{n-1}\right) dt = \frac{1}{n+2} + \frac{n}{2(n+2)} = \frac{1}{2}$$

خواص انتگرال خط:

۱) خطی بودن

$$\int_\alpha (F + \lambda G)\, dr = \int_\alpha F\, dr + \lambda \int_\alpha G\, dr$$

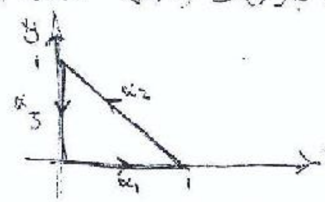
۲) اگر $\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$ به طوری که انتهای α_i ابتدای α_{i+1} باشد، در این صورت:

$$\int_\alpha F \cdot dr = \int_{\alpha_1} F \cdot dr + \int_{\alpha_2} F\, dr + \cdots + \int_{\alpha_n} F \cdot dr$$

۳)

$$\int_{\bar{\alpha}} F\, dr = -\int_\alpha F \cdot dr$$

مثال: مطلوبست محاسبهٔ $\int_\alpha x^2 y\, dx + y^3\, dy$ که α مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$، $(0,1)$ می‌باشد.



$\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \qquad \alpha_1(t) = t\vec{i}$

$\alpha_2(t) = t\vec{i} + (1-t)\vec{j} \qquad \alpha_3(t) = t\vec{j}$

$$\int_\alpha F \cdot dr = \int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2} + \int_{\alpha_3} = 0 + \int_1^0 \left(t^2(1-t) - (1-t)^3\right) dt + \int_1^0 t^3\, dt$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_{\alpha : x^2+y^2=1} x^2\, dx + y^2\, dy$

$x(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t\right) dt = \left(\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right)_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_{\alpha : x^2+y^2=1} x^2\, dx + (y^2 + 2x)\, dy = \int_\alpha x^2\, dx + y^2\, dy + \int_\alpha 2x\, dy$$

$$= 0 + \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t\, dt = \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

استقلال مسیرها:

فرض کنید $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ یک میدان گرادیان (پتانسیل) باشد به عبارت دیگر فرم دیفرانسیلی $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ دیفرانسیل کامل باشد در این صورت تابعی مانند φ موجود است به طوری که

$$d\varphi = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$\int_\alpha F\, dr = \int_\alpha P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$= \int_\alpha d\varphi = \varphi(\text{انتها}) - \varphi(\text{ابتدا})$$

یعنی اگر فرم دیفرانسیلی $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ کامل باشد آنگاه مقدار $\int_\alpha r \cdot dr$ تنها به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد یعنی مستقل از مسیر است.

۱۰

انتگرال خط :

$$\int_\alpha F\cdot dr = \int_\alpha P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{t_0}^{t_1} F(\alpha(t))\cdot \alpha'(t)\,dt$$

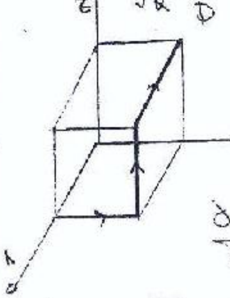
$F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ $\quad \alpha(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$t \in [t_0, t_1]$

$$\int_\alpha F\cdot dr = \varphi(\text{انتها}) - \varphi(\text{ابتدا})$$ F میدان گرادیان باشد

مثال، $\int_\alpha \underbrace{e^{yz}}_{P}\,dx + \underbrace{(xze^{yz} + 2y)}_{Q}\,dy + \underbrace{xye^{yz}}_{R}\,dz$ مطلوبست محاسبه

α مسیر مشخص شده زیر است



$\Phi(x,y,z) = xe^{yz} + g(y,z)$

$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xze^{yz} + \frac{\partial g}{\partial y} = xze^{yz} + 2y \Rightarrow g(y,z) = y^2 + h(z)$

$\Phi = xe^{yz} + y^2 + h(z)$ $\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = xye^{yz} + h'(z) = xye^{yz} \Rightarrow h(z) = c$ ثابت

$P_y = Q_x = ze^{yz}$

$P_z = R_x = ye^{yz}$ است (در اینجا مسئله را از طریق گرادیان حل کردیم) ** دیفرانسیل کامل

$Q_z = xe^{yz} + xyze^{yz} = R_y$

$\frac{d\Phi}{dx} = e^{yz}$ $\quad \frac{d\Phi}{dy} = xze^{yz} + 2y$ $\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = xye^{yz}$

مثال:

$$\int_{(1,2,3)}^{(-1,4,5)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

مطلوبست محاسبه $(-1,4,5)$

$P_y = Q_x = z$

$P_z = R_x = y$ دیفرانسیل کامل است

$Q_z = R_y = x$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz \Rightarrow \varphi = xyz + g(y,z)$ $\quad \varphi_y = xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz \Rightarrow g_y = 0$

$\Rightarrow g = h(z)$

$\varphi = xyz + h(z) \Rightarrow \varphi_z = xy + h'(z) = xy \Rightarrow h(z) = C.$

$\Rightarrow \varphi = xyz + C$

$$\int_{(1,2,3)}^{(-1,4,5)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \varphi(-1,4,5) - \varphi(1,2,3) = -36$$

* مروری بر انتگرال سطح *

D_1, D_2, D_3 به ترتیب تصاویر Δ بر صفحات xy و zx و yz باشد

$$\iint_\Delta f(x,y,z)\,d\omega$$

$\Delta: z = g(x,y) \Rightarrow \iint_\Delta f(x,y,z)\,d\omega = \iint_{D_1} f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dx\,dy$

$\Delta: y = g(x,z) \Rightarrow \iint_\Delta f(x,y,z)\,d\omega = \iint_{D_2} f(x,g(x,z),z)\sqrt{1+g_x^2+g_z^2}\,dx\,dz$

$\Delta: x = g(y,z) \Rightarrow \iint_\Delta f(x,y,z)\,d\omega = \iint_{D_3} f(g(y,z),y,z)\sqrt{1+g_y^2+g_z^2}\,dy\,dz$

$\Phi(x,y,z) = xe^{yz} + g(y,z) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = xze^{yz} + \frac{\partial g}{\partial y} = xz^{yz} + 2y$

$\Rightarrow g(y,z) = y^2 + h(z) \Rightarrow y = xe^{yz} + y^2 + h(z)$

$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = xye^{yz} + h'(z) \Rightarrow h(z) = c$ ثابت

$\Phi(x,y,z) = xe^{yz} + y^2 + c \Rightarrow \int \dots = b^2 - a^2$

$\Rightarrow \Phi(x,y,z) = xe^{yz} + y^2 + c \Rightarrow \int e^{yz}dx + (xze^{yz} + 2y)dy + xye^{yz}dz$

$= \Phi(0,b,c) - \Phi(a,0,0) = b^2 - a$

تعریف: منحنی α را ساده نامیم هرگاه یک به یک باشد: $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$

(خودش را قطع نکند)

ممکن است تابع یک به یک نباشد ولی منحنی ساده باشد.

منحنی α را بسته نامیم هرگاه $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$

منحنی را ساده و بسته نامیم هرگاه بجز در ابتدا و انتها خودش را قطع نکند.

ساده	✓	×	✓	×
بسته	×	✓	✓	×

برای منحنی‌های بسته از نماد $\oint_\alpha F.dr$ استفاده می‌کنیم.

نتیجه: اگر F میدان گرادیان باشد و منحنی α بسته باشد آنگاه $\oint_\alpha F.dr = 0$

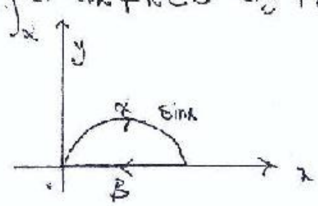
مطلوبست محاسبه $\oint_\alpha e^{yz}dx + xze^{yz}dy + xye^{yz}dz$ که α دایره $x^2+y^2=1$ باشد: مثال

$\oint_\alpha F.dr = \Phi$. $F = e^{yz}\vec{i} + xze^{yz}\vec{j} + xye^{yz}\vec{k}$ نگهدار است پس

مثال قبل را برای منحنی α زیر حل کنید:

دو مثال

$\int_\alpha e^{yz}dx + xze^{yz}dy + xye^{yz}dz$



راه اول

F نگهدار است $\quad \int_{\alpha \cup \beta} F.dr = 0$

$\int_\alpha F.dr = -\int_{-\beta} F.dr = \int_\beta F.dr \qquad \beta(t) = t\vec{i} \quad 0 \leq t \leq \pi$

$\int_\alpha F.dr = \int_0^\pi dt = \pi$

راه دوم

$\Phi = xe^{yz} \qquad \int_\alpha F.dr = \Phi(\pi,0,0) - \Phi(0,0,0) = \pi$

مثال: مطلوبست محاسبه که α دایره $x^2+y^2=1$ می‌باشد.

$\oint_\alpha (e^{yz} + y)dx + xze^{yz}dy + (xye^{yz})dz = \oint_\alpha e^{yz}dx + xze^{yz}dy + xye^{yz}dz$

$+ \oint y\,dx$

حل تمرین

$\alpha(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$

$$\oint_\alpha F\cdot dr = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,dt = -\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = -(\pi) = -\pi$$

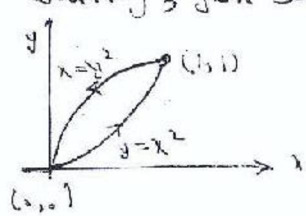
$\phi = xe^{yz}$ $\quad \int_\alpha F\cdot dr = \phi(\pi,0,0) - \phi(0,0,0) = \pi$

قضیه گرین: در $\mathbb{R}^2$ برقرار است.

فرض کنید $\vec{F} = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ یک میدان برداری باشد و α یک منحنی ساده بسته در $\mathbb{R}^2$ باشد که مرز D است.
و فرض کنید که توابع P و Q و مشتقات جزئی آن‌ها در D پیوسته باشند در این صورت:

$$\oint_\alpha P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

مثال: قضیه گرین را برای $\vec{F} = xy\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}$ و منحنی α که شامل $y=x^2$ و $x=y^2$ باشد تحقیق کنید.



سمت چپ: $\oint_\alpha xy\,dx + y^2\,dy = \int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2}$

$\alpha_1(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$ ، $\alpha_2(t) = t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j}$

$$\Phi_\alpha = \int_0^1 (t^3 + t^4\cdot 2t)\,dt + \int_1^0 (t^3\cdot 2t + t^2)\,dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{20}$$

سمت راست: $\iint_D (0-x)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} -x\,dy\,dx = \int_0^1 (-x\sqrt{x} + x^3)\,dx = -\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{20}$

مثال: $\alpha: x^2+y^2=4$ ، مطلوبست محاسبه $\oint_\alpha (2y+\sqrt[3]{x^2+1})\,dx + (5x - e^{tg^{-1}y})\,dy$

حل: به کمک گرین داریم:

$$\oint_\alpha F\cdot dr = \iint_{D: x^2+y^2\le 4} (5-2)\,dx\,dy = 3S(D) = 12\pi$$

مثال: فرض کنید α منحنی ساده بسته ای باشد که ناحیه ای به مساحت 10 واحد سطح را محصور کرده است. مطلوبست محاسبه: $\oint_\alpha (x^2 + \sin x + y)\,dx + (e^{y^2} + y\,tg^{-1}y + 6x)\,dy$

$$= \iint_D (6-1)\,dx\,dy = 5\,S(D) = 50$$

محاسبه مساحت به کمک انتگرال خطی:

$$\oint_\alpha P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

با انتخاب مناسب P و Q به طوری که $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ باشد مساحت ناحیه به دست می‌آید

مثلاً اگر فرض کنید: $P=0$ ، $Q=x$ پس $\oint_\alpha x\,dy = S(D)$

و یا $\oint -y\,dx = S(D)$

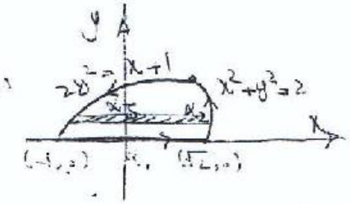
و یا $\oint_\alpha -\frac{1}{2}y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy = S(D)$

مثال: مطلوبست محاسبه مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$x(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$

$$\oint_\alpha x\,dy = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,dt = ab\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)_0^{2\pi} = \pi ab$$

مثال، درستی قضیه گرین را برای منحنی زیر تحقیق کنید:



$$\oint_\alpha y^2dx + x^2dy$$

$\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ $\qquad \int_\alpha = \int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2} + \int_{\alpha_3}$

$\alpha_1(t) = t\vec{i} \qquad \alpha_2(t) = \sqrt{2}\cos t\,\vec{i} + \sqrt{2}\sin t\,\vec{j} \qquad \alpha_3(t) = (2t^2-1)\vec{i} + t\vec{j}$

$$\int_{\alpha_1} y^2dx + x^2dy = \int_{-1}^{\sqrt{2}} 0 = 0$$

$$\int_{\alpha_2} y^2dx + x^2dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-2\sqrt{2}\sin^3 t + 2\sqrt{2}\cos^3 t)dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} -\sin t(1-\cos^2 t)$$

$$+ \cos t(1-\sin^2 t)\,dt = 2\sqrt{2}\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t + \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2 - 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 - \frac{1}{3} = 4 - \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_{\alpha_3} y^2dx + x^2dy = \int_1^0 (4t^3 + (2t^2-1)^2)dt = -1 - \frac{4}{5} + \frac{4}{3} - 1 = -\frac{22}{15}$$

$$\oint_\alpha y^2dx + x^2dy = 0 + 4 - \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{22}{15}$$

سمت راست قضیه گرین $\longrightarrow \iint_D (2x-2y)dxdy = \int_0^1 \int_{2y^2-1}^{\sqrt{2-y^2}} 2(x-y)dxdy =$

$$2\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left[(2-y^2) - (2y^2-1)^2\right] - y\sqrt{2-y^2} + y(2y^2-1)\right)dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}y^2 - 2y^4 + 2y^2 - \frac{1}{2} - y\sqrt{2-y^2} + 2y^3 - y\right)dy$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}(2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\right) = \frac{6}{5} + \frac{2}{3}\left(1 - 2^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{6}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{28}{15} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\oint_\alpha \overbrace{\frac{-ydx}{x^2+y^2}}^{P} + \overbrace{\frac{xdy}{x^2+y^2}}^{Q}$

الف) α دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع 1 می‌باشد.

ب) α دایره‌ای « « مبدأ « « a می‌باشد.

پ) α « « « « $(2,0)$ « « 1 « .

ت) α هر « که مبدأ را شامل نمی‌باشد.

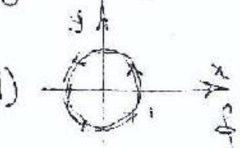
ث) α هر منحنی بسته‌ای که مبدأ را شامل نمی‌باشد

ج) α هر منحنی ساده و بسته‌ای که مبدأ را شامل باشد

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow$ توابع P و Q در $(0,0)$ پیوسته نیستند بنابراین مستقیماً نمی‌توان از قضیه گرین استفاده کرد.

الف)

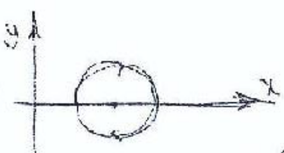


$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\oint_\alpha F\cdot dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^2 t}{1} + \frac{\cos^2 t}{1}\right)dt = 2\pi$$

ب) $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t) \Rightarrow \oint_\alpha F\cdot dr = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2\sin^2 t}{a^2} + \frac{a^2\cos^2 t}{a^2}\right)dt = 2\pi$

پ)



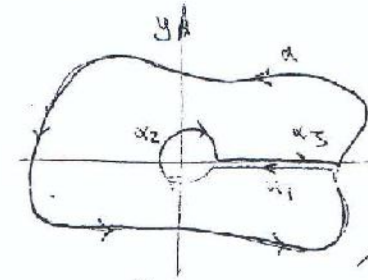
$\oint_\alpha F\cdot dr = 0$ شرایط قضیه گرین برقرار است

ت) $\oint F\cdot dr = 0$ انتگرال روی منحنی بسته در یک ناحیه کامل و شرایط قضیه گرین برقرار است.

ث) $\oint F\cdot dr = 0$

پس: $\gamma = \alpha \cup \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$

ج)



$\oint_\gamma F \cdot dr = 0$

$\cancel{\int_{\alpha_1}} + \int_{\alpha_2} + \cancel{\int_{\alpha_3}} + \int_\alpha = 0$

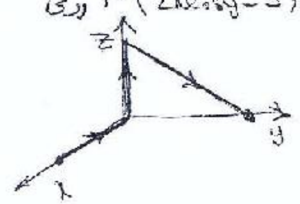
$\Rightarrow \int_\alpha = -\int_{\alpha_2} = -(-2\pi) = 2\pi$

تمرین‌ها:

1) فرض کنید $\alpha: 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, $r(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + \frac{2}{\pi} b t\,\vec{k}$

مطلوبست محاسبه $\int_\alpha F \cdot dr$ ، $F = (e^x\cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x\sin y)\vec{j} + (xy + x)\vec{k}$

2) کار انجام شده توسط نیروی $F(2x\cos y - 3, -x^2\sin y - z^2, -2yz - 2)$ روی مسیر داده شده زیر را بیابید.



3) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$

4) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy + \int_{-1}^0 \int_{-y}^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

5) $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}\sin(y^2)}{y^2}\,dx\,dy\,dz$

6) حجم محدود $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$

7) فرض کنید α منحنی از تقاطع $tg x = \sin y$, $z = x + y$ از $(0,0,0)$ تا $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ باشد. مطلوبست محاسبه:

$\int_\alpha y^3\,dx + (3xy^2 + 4y^3\cos^2 z)\,dy - (y^4\sin 2z)\,dz$

8) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dx\,dy$

9) $\iint_D |y - \sqrt{x}|\,dx\,dy$ که D ناحیه بین: $y = 1$, $y = x$ و $x = 0$ می‌باشند.

10) مطلوبست محاسبه $\oint_\alpha (x+z)\,dx + (y+z)\,dy + \sin z\,dz$ که α مثلثی است که رئوس آن محل برخورد صفحه $x + 2y + 3z = 6$ با صفحات مختصات است.

11) $\iiint_G \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dv$, $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$

12) $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} e^{\sin x}\,dx\,dy$

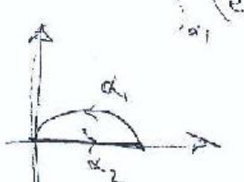
13) $\int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\,dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^x \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\,dx$

14) $\iint_D |2x - y|\,dx\,dy$, $D: y = 2x^2,\ x \ge 0,\ y \le 0$

15) فرض کنید α_1 قسمتی از منحنی $y = \sin x$ و $0 \le x \le \pi$ و α_2 قسمتی $0 \le x \le \pi$ ، $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت:

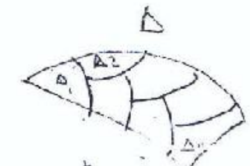
الف) انتگرال $\oint_{\alpha} (e^x + xy^2)\,dx + (\cos y^2 + yx^2 + x)\,dy$

ب) $\int_{\alpha_1} (e^x + y^2x)\,dx + (\cos y^2 + yx^2 + x)\,dy$



انتگرال سطح (رویه‌ای)

فرض کنید Δ یک سطح (رویه) در $\mathbb{R}^3$ باشد و دارای نمایش $z = g(x, y)$ و فرض کنید تابع $f(x, y, z)$ بر سطح Δ معین باشد سطح Δ را به n قسمت $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ تقسیم نمائیم



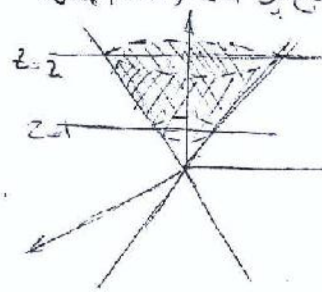
$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$$

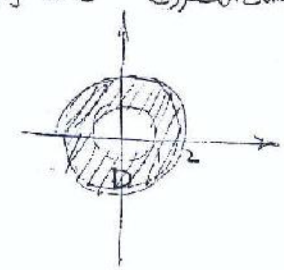
$$\lim_{\max \Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,|\Delta_i \sigma| = \iint_{\Delta} f(x, y, z)\,ds$$

اگر حد فوق موجود باشد گوئیم تابع f بر سطح Δ دارای انتگرال رویه‌ای است.

$$\iint_{\Delta} f(x, y, z)\,d\sigma = \iint_{D} f(x, y, g(x, y))\,\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,dx\,dy$$

مثال: $\iint_{\Delta} x^2 z^2\,d\sigma$ ، Δ قسمتی از مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ واقع بین $z=1$ ، $z=2$



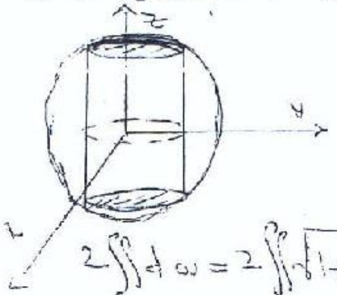


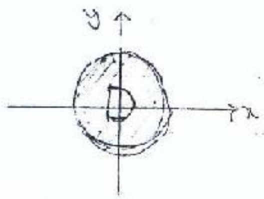
$$\iint_{\Delta} x^2 z^2\,d\sigma = \iint_{D} x^2 (x^2 + y^2)\sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{D} x^2 (x^2 + y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^4 \cos^2\theta\, r\sqrt{2}\,dr\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{63}{6}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{63}{6}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{63\sqrt{2}}{6}\pi$$

مثال: استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ را قطع می‌کند. مساحت سطح حاصل را بیابید.





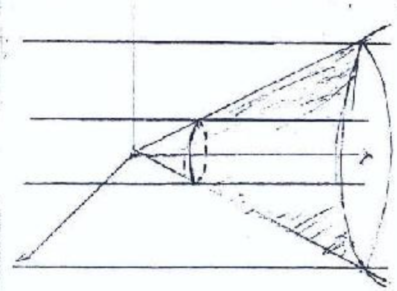
$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = g(x, y)$$

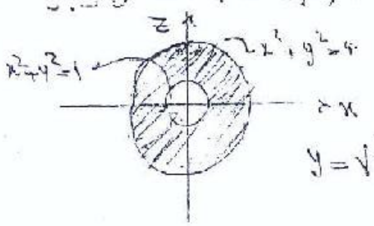
$$2\iint_{\Delta} d\sigma = 2\iint_{D} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy = 2\iint_{D} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4 - r^2}}\,r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi} (-2\sqrt{4 - r^2}\,\Big]_0^1\,d\theta = 4\int_0^{2\pi} (2 - \sqrt{3})\,d\theta$$

$$= 8\pi(2 - \sqrt{3})$$

مثال: مساحت سطح قسمتی از مخروط $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ بین استوانه‌های $x^2 + z^2 = 1$ ، $x^2 + z^2 = 4$ را بیابید.





$$y = \sqrt{x^2 + z^2} = g(x, z)$$

$$\iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_{D} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2}}\,dx\,dz = \sqrt{2}\iint_{D} dx\,dz = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\,dr\,d\theta$$

$$= 3\pi\sqrt{3}$$

hamednafisi@gmail.com

13)
$$\operatorname{Curl}(\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} =$$

$$= (f_{yz} - f_{zy})\vec{i} - (f_{xz} - f_{zx})\vec{j} + (f_{xy} - f_{yx})\vec{k} = 0$$

14) f یک تابع اسکالر است

$$\nabla(\operatorname{div} \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \nabla^2 F$$

(غلط) $\nabla \cdot (\nabla F) = \nabla^2 F$ ، $\nabla^2 F$ را عملگر لاپلاس می‌نامیم $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$

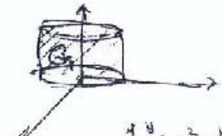
مثال: فرض کنید $F = xe^{z}\vec{i} + yx^2\vec{j} + (x^2 + yz)\vec{k}$ مطلوبست محاسبه‌ی $\operatorname{div} F$ ، $\operatorname{Curl} F$:

$$\operatorname{div} F = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = e^{z} + x^2 + y$$

$$\operatorname{Curl} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^{z} & yx^2 & x^2+yz \end{vmatrix} = (z - 0)\vec{i} - (2x - xe^{z})\vec{j} + (2xy - 0)\vec{k}$$

مثال: فرض کنید $F = 4x\vec{i} + (-2y^2)\vec{j} + z^2\vec{k}$ یک میدان برداری باشد و G ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^3$ محصور به $x^2+y^2=4$ ، $z=0$ و $z=3$ باشد. مطلوبست محاسبه‌ی: $\iiint_G \operatorname{div} F \, dv$

$$\operatorname{div} F = 4 - 4y + 2z \qquad \iiint_G (4 - 4y + 2z)\, dv$$



$$= \iint_D \int_0^3 (4 - 4y + 2z)\, dz\, dx\, dy = \iint_D (12 - 12y + 9)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (21 - 12r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{21}{2}r^2 - 4r^3\sin\theta\right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (42 - 32\sin\theta)\, d\theta = 84\pi$$