بسمه تعالی

جزوه

معادلات

دانشگاه

صنعتی امیر کبیر

استاد

دکتر نیکوکار

$y = x^2 + c \Rightarrow y' = 2x$

تشکیل

برای تعیین معادله دیفرانسیل یک دسته منحنی یک پارامتری باید پارامتر بین معادله و مشتق آن حذف شود

$y = cx^2 + 4 \qquad y' = 2cx \Rightarrow y = \frac{y'}{2}x + 4$

$y = x^2 + ax + b \qquad y = ax^2 + bx + b$

$y' = 2x + a \qquad y' = 2ax + b$

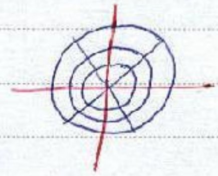
$\boxed{y'' = 2} \qquad y'' = 2a$

اگر یک دسته منحنی n پارامتر داشته باشد و بخواهیم معادله دیفرانسیل آن را پیدا کنیم باید n پارامتر را بین خود منحنی و n مشتقاتش حذف کنیم

مسیرهای قائم

هرگاه دو منحنی از دسته منحنی‌های دو معادله بر هم عمود باشند یکی از منحنی‌ها را مسیرهای قائم دسته منحنی دیگر می‌گوییم

$y = ax \qquad y^2 + x^2 = c^2$



معادله معلوم ← مسیر اصلی

معادله‌ای که به دست می‌آید ← مسیر قائم

قدم ۱ برای تعیین مسیرهای قائم باید معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را تشکیل داد

$$y = ax \qquad y' = a \qquad y' = \frac{y}{x}$$

قدم 2 تشکیل معادله دیفرانسیل مسیر قائم.

هرکجا y' داریم آن را با $-\frac{1}{y'}$ عوض می‌کنیم:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0 \qquad y^2 + x^2 = c^2$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول:
الزاماً باید y' را داشته باشد

$$F(x, y, y') = 0$$

مرتبه اول
۱. نسبت به مشتق حل می‌شوند $\qquad 4xy' + 3y - 1 = 0$
2. نسبت به مشتق حل نمی‌شوند $\qquad \cos y' + 3xe^{y'} - 2y = 2$

۱- نسبت به مشتق حل می‌شوند:
به فرم زیر است:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

تابع حاصلضرب دو تابع یکی از x و دیگری از y است $\qquad h(x,y) = h_1(x) \cdot h_2(y)$

$$\Rightarrow f_1(x)\, f_2(y)\,dx + f_3(x)\, f_4(y)\,dy = 0 \qquad \times \frac{1}{f_2 f_3}$$

$$H(x)\,dx + G(y)\,dy = 0 \Rightarrow$$ معادله تفکیک‌پذیر است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر معادله تفکیک پذیر بود آنگاه

$$H(x)\,dx + G(y)\,dy = 0$$

$$\int \quad + \int \quad = C$$

-1

$$(1+x^3)\,dy - x^2 y\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + \ln c$$

$$\ln y^3 = \ln(1+x^3) + \ln c \Rightarrow y^3 = c(1+x^3)$$

-2

$$x\frac{dy}{dx} + y^2 = 4 \Rightarrow x\,dy + (y^2-4)\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{(y^2-4)} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x = \ln c$$

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x^4 = \ln c \Rightarrow \frac{y-2}{y+2} = \frac{c}{x^4}$$

-3 حد جواب مسأله زیر وقتی $x \to \infty$ برابر است با

$$y' = 2x\cos^2 y \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

1- $-\pi$
2- $\frac{\pi}{4}$
3- $\frac{\pi}{2}$ ✓
4- ∞

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = 2x\,dx \qquad \operatorname{tg} y = x^2 + C \quad x=0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow y = \operatorname{Arc\,tg}(x^2+1) = \frac{\pi}{2}$$

$x \to \infty$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

4- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید

$$x(y-1)\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{y-1}{y}\,dy = \frac{dx}{x}$$

$$y = \ln xy + c$$

معادلاتی به صورت معادله تابعی از یک خط:

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$y' = 2x + y - 1 \quad , y' = tg(3x + 4y) + 2 \quad , y' = e^{4x - y + 3} + \sqrt{4x - y + 3} - 1$$

$$u = ax + by + c \quad , y' = f(u)$$

اگر تو تابعی از یک خط شد می توان خط را به صورت u گرفت و معادله را به معادله تفکیک پذیر تبدیل کرد

5: $$y' = (y - 4x)^2 \Rightarrow u = y - 4x \Rightarrow u' = y' - 4$$

$$\Rightarrow y' = u^2 \Rightarrow u' + 4 = u^2 \qquad \frac{du}{u^2 - 4} = dx$$

$$\frac{1}{4}\ln$$

6: $$y' = (x + y)^2 \qquad u = x + y \Rightarrow y' = u' - 1$$

$$u' - 1 = u^2 \qquad \frac{du}{u^2 + 1} = dx \qquad tg^{-1} u = x + c$$

PAPCO $$x + y = tg(x + c)$$

:7 $y' = e^{2x+y-1} - 2 \Rightarrow u = 2x+y-1 \qquad u' = 2 + y'$

$u' \cancel{-2} = e^{u} \cancel{-2} \qquad e^{-u}\,du = dx$

$-e^{-u} = x + c$

2 : همگن

$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} h(x,y) \Longrightarrow$ همگن است

در رابطه $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ اگر دو ضریب P و Q همگن با درجه همگنی مساوی باشند ⇐ معادله ما را همگن است و اگر همگن بود می توان بجای $y=vx$ قرار داد

$\Rightarrow y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$

:8

$x\frac{dy}{dx} = x\,tg\left(\frac{y}{x}\right) + y = 0$

$\frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$

$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = tg\,v + \cancel{v}$

$cotg\,v\,dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \sin v = \ln cx$

$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx \qquad y = x\sin^{-1}(cx)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

9- همگن درجه صفر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3+y^3}{xy^2} = \frac{2+v^3}{v^2}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + \frac{2}{v^2} \qquad 2\frac{dx}{x} = v^2 dv$$

$$\frac{1}{3}v^3 = 2\ln x + c \qquad \frac{y^3}{x^3} = 6\ln x + c \Rightarrow y = x\sqrt[3]{\ }$$

10: همگن از درجه صفر

1- 1

2- 0 ✓

3- ∞

4- موجود نیست

$$y' = \frac{x^2+2y^2}{xy} \quad x=0 \quad = \frac{1+2v^2}{v^2}$$

$$\cancel{v} + xv' = \frac{1+2v^2}{v^2} - v = \frac{1+v^2}{v}$$

$$\frac{v}{1+v^2}dv = \frac{dx}{x} \qquad \ln(1+v^2) = \ln cx^2$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = cx^2 \qquad x^2+y^2 = cx^4 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$$

11 تمام معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right)$ که صورت و مخرج معادله یک خط باشد که از مبدأ بگذرد هر همگن از درجه صفری باشد.

$$y = \frac{x+3y+1}{2x-y+4}$$ همگن نیست

$$y = \frac{ax+by+c}{ex+hy+n}$$ (همگن نیست) در این معادله که همگن نیست مبدأ مختصات را به محل تلاقی دو خط منتقل کنیم به شرطیکه دو خط موازی نباشند

الف- دو خط موازی :

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+n}\right) \qquad u = ax+by$$

با تغییر متغیر u ، y' کاملاً جدا از هم می‌شود

11-

$$y' = \frac{y-x}{y-x-1} \qquad u = y-x \quad \Rightarrow y' = u'+1$$

$$u'+1 = \frac{u}{u-1} \qquad u' = \frac{u}{u-1} - 1 = \frac{1}{u-1} \Rightarrow (u-1)\,du = dx$$

$$(u-1)^2 = 2x + C$$

12-

$$y' = \frac{x-y}{2x-2y+1} \qquad u = x-y \Rightarrow y' = 1-u'$$

$$1-u' = \frac{u}{2u+1} \qquad -u' = \frac{u}{2u+1} - 1 = -\frac{u+1}{2u+1}$$

$$\frac{(2u+1)^{+1-1}}{u+1}\,du = dx \qquad 2u - \ln(u+1) = x + C$$

13-

$$(3y+2x+4)\,dx - (4x+6y+5)\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+4}{4x+6y+5} \qquad u = 2x+3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}u$$

$$y' = \frac{1}{3}(u'-2) = \frac{u+4}{2u+5} \Rightarrow \frac{3u+12}{2u+5} = (u'-2)$$

$$u' = \frac{7u+22}{2u+5} \Rightarrow \frac{2u+5}{7u+22}\,du = dx$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

دو خط متقاطع باشند

ب : متقاطع

(x_0 , y_0) محل تلاقی

$$a x_0 + b y_0 + c = 0$$
$$e x_0 + h y_0 + n = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \overset{\text{جدید}}{X} + x_0 \qquad dx = dX$$
$$y = \overset{\text{جدید}}{Y} + y_0 \qquad dy = dY$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+n}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{eX+hY}\right) \quad \Rightarrow \quad Y = vX \qquad \text{تغییر متغیر}$$

-14

$$y' = \frac{x-y+2}{x+y-1}$$

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad x_0 = -\frac{1}{2} \qquad y_0 = \frac{3}{2}$$

$$x = X - \frac{1}{2} \quad , \quad y = Y + \frac{3}{2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-v}{1+v}$$

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1-v}{1+v} \qquad X\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} - v = \frac{-v^2-2v+1}{1+v}$$

$$-\frac{1+v}{v^2+2v-1}\,dv = \frac{dX}{X}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

3 - کامل

معادله $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را کامل گوییم اگر تابعی مانند $U=U(x,y)$ موجود باشد بطوری که

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q$$

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy \qquad dU=Pdx+Qdy=0$$

$$\Rightarrow dU=0 \quad \Rightarrow U=C$$ — به عنوان تابعی از x و y ثابت است

اگر $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ شد معادله دیفرانسیل کامل می‌شود.

13: جواب معادله که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+y\cos x}{4y^3-\sin x}$

$$\overset{P}{(3x^2+y\cos x)}dx+\overset{Q}{(\sin x-4y^3)}dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos x \quad \Rightarrow$$ کامل است

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2+y\cos x \quad \Rightarrow \quad U=x^3+y\sin x+f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\cancel{\sin x}+f'(y)=\cancel{\sin x}-4y^3 \quad \rightarrow f'(y)=-4y^3$$

$$x^3+y\sin x-y^4=C \qquad x=0,\ y=0 \Rightarrow C=0$$

مثال 14: a را طوری تعیین کنید تا معادله زیر یک معادله کامل باشد

$$(aye^{xy}+2xy)dx+(xe^{xy}+x^2)dy=0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial P}{\partial y} = a e^{xy} + axy e^{xy} \ldots$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = e^{xy} + yx e^{xy} \ldots \qquad a e^{xy} = e^{xy} \Rightarrow a = 1$$

مثال 15: معادله دیفرانسیل کامل است مقدار a کدام است

$$(x^{-1} + y^{-1})dx + a x y^{-2} dy = 0$$

مثال 16: $y'(y^2 - x) = y$ چه جوابی دارد؟

$$y\,dx + (x - y^2)\,dy = 0$$

$$U = \int y\,dx + f(y) \qquad U = yx + f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \cancel{x} + f'(y) = \cancel{x} - y^2 \Rightarrow f'(y) = -y^2 \Rightarrow f(y) = -\frac{1}{3}y^3$$

$$U = yx - \frac{1}{3}y^3 = c$$

مثال 17: $(x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad , \; y(1) = 1 \Rightarrow y(0) = ?$

[illegible] $U = \int (x-y)\,dy + f(x) \Rightarrow U = xy - \frac{1}{2}y^2 + f(x)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cancel{y} + f'(x) = x + \cancel{y} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$U = xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c = 1$$

$$y(0) \Rightarrow \quad y^2 = -2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اگر دیفرانسیل کامل نشود اصلاً قادر به حل مسأله نیستیم

$x\,dy - y\,dx = 0$ کامل نیست -1 و 1

$\frac{1}{xy}$: $\frac{1}{y}dy - \frac{1}{x}dx = 0$ کامل است 0 و 0

$\frac{1}{x^2}$: $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$ $-\frac{1}{x^2}$ و $-\frac{1}{x^2}$ 〃

$\frac{1}{y^2}$: $\frac{x}{y^2}dy - \frac{1}{y}dx = 0$ $\frac{1}{y^2}$ و $\frac{1}{y^2}$ 〃

عوامل غیر صفری که در یک معادله ناکامل ضرب می‌شوند و معادله را کامل می‌سازند را عامل انتگرال‌ساز گوییم.

فاکتور انتگرال $F = F(x,y) \neq 0$ تابعی است از (x,y) در حالت کلی مخالف صفر به طوری که اگر در طرفین یک معادله‌ی دیفرانسیل ناکامل ضرب شود دیفرانسیل را کامل کند

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

$$(FP)\,dx + (FQ)\,dy = 0 \Rightarrow u = c$$

جوابی که از این طریق به دست می‌آید (u) همان جواب مسأله است.

$$f_1(x)\,f_2(y)\,dx + f_3(x)\,f_4(y)\,dy = 0$$

$\frac{1}{f_2 f_3}$ فاکتور انتگرال معادلات جدا از هم

$\frac{1}{xP+yQ}$ بهتر است از روش قبلی حل شوند همگن 〃 〃 〃

اگر معادله ای جواب داشته باشد حتماً یک و بینهایت فاکتور انتگرال‌ساز دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x)$ $\leftarrow$ $F=e^{\int f(x)dx}$

اگر $\frac{-1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(y)$ $\leftarrow$ $F=e^{\int f(y)dy}$

اگر عوامل غیر جبری نباشد مانند ln خوب کار می کند $x^{\alpha}y^{\beta}$

مثال 18:

$(xy+y^2)dx-(x^2+xy)dy=0$

1 بیش از یک عامل انتگرال ساز دارد ✓

2 کامل است .

3 فقط یک عامل انتگرال ساز تابعی از x دارد غ

4 ~ y ~ ~ ~ ~ ~ ~ غ

$\frac{\partial P}{\partial y}=x+2y$

کامل نیست ⇒ دقت $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3(x+y)$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x-y$

$\frac{3(x+y)}{Q=-x(x+y)}=-\frac{3}{x}$ $F=e^{-3\int\frac{dx}{x}}=e^{-3\ln x}=1/x^3$

یا

$\frac{3(x+y)}{P=y(x+3)}=-\frac{3}{y}$ $F=1/y^3$

یا

$x^{\alpha}y^{\beta}(xy+y^2)dx-x^{\alpha}y^{\beta}(x^2+xy)dy=0$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} - (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\begin{cases} \beta+1 = -\alpha-2 \\ \beta+2 = -\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow$$ جواب می‌دهد پس می‌توانیم
از این عامل انتگرال‌ساز استفاده کرد

ولی چون α و β منفی به ما داده استفاده نمی‌شود ⇐ بی‌نهایت جواب دارد $\alpha+\beta=-3$

مثال ۱۹ :

$x^{\alpha}y^{\beta}$ جواب نمی‌دهد

$$(1+x^2)\,dy - (\tan^{-1}x - y)\,dx = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$ تفاضل $\Rightarrow 1-2x$

$$\frac{1-2x}{Q = 1+x^2} = f(x) \qquad e^{\tan^{-1}x - \ln(1+x^2)} \Rightarrow \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

مثال 20 : عبارت $x^{\alpha}y^{\beta}$ عامل انتگرال‌ساز معادله زیر است $\alpha+\beta$ کدام است

-2 $\quad -1$ $\quad 1$ $\quad 2$

$$(x^2+xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0$$

$$x^{\alpha}y^{\beta}(2y^3 - 3xy)\,dx + x^{\alpha}y^{\beta}(x^2+xy^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(\beta+3)x^{\alpha}y^{\beta+2} - 3(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} 2(\beta+3) = \alpha+1 \\ -3(\beta+1) = \alpha+2 \end{cases} \qquad \alpha = 1,\quad \beta = -2$$

$$\alpha + \beta = -1$$

مثال 21:

$$2xy\,dx + (4y + 3x^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x \qquad \text{تفاضل} = -4x$$

$$\frac{-4x}{-2xy} = \frac{2}{y} \qquad 2\ln y \Rightarrow F = y^2$$

$$y^2 \times (\qquad) = 0$$

$$2xy^3\,dx + (4y^3 + 3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$u = x^2y^3 + f(y) \Rightarrow \cancel{3x^2y^2} + f'(y) = 4y^3 + \cancel{3x^2y^2}$$

$$f(y) = y^4 \qquad \left(x^2y^3 + y^4 = C\right)$$

مثال 22: عامل انتگرال ساز کدام است

$$2\sin y^2\,dx + xy\cos y^2\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y\cos y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = y\cos y^2 \qquad \text{تفاضل} = 3y\cos y^2$$

$$\frac{3y\cos y^2}{xy\cos y} = \frac{3}{x} \Rightarrow F = x^3$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فاکتور انتگرال ساز : 23

$$y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dx = 0$$

xe^{2x}

$\frac{e^{2y}}{x}$

$\frac{e^{2y}}{y}$

ye^{2y}

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad$ تفاضل $= 1-2y$

$\frac{1-2y}{-y} = 2 - \frac{1}{y} \qquad 2y - \ln y \qquad F = e^{2y-\ln y}$

$$F = \frac{e^{2y}}{y}$$

: 24

$$dx + 2xy\,dy = y e^{-y^2}\,dy$$

e^{y^2} ✓

e^{x^2}

e^{-x^2}

e^{-y^2}

$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad$ تفاضل $= -2y$

$\frac{-2y}{-1} = 2y \qquad F = e^{y^2}$

β و α : 25 را طوری تعیین کنید که $x^{\alpha} y^{\beta}$ یک فاکتور انتگرال برای معادله زیر باشد

$$y\,dx + x(1-3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$x^{\alpha} y^{\beta+1}\,dx + x^{\alpha+1} y^{\beta}(1-3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)(x^{\alpha}y^{\beta}) + 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} - 3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}$$

$\alpha = \beta = -3 \qquad \alpha = -3$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

26: فاکتور انتگرال ساز ؟ به y بستگی ندارد

$x^2 dy - xy\,dx = (x-2)e^{x}dx$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ تفاضل $= -3x$

$\frac{-3x}{x^2} = \frac{-3}{x^?} \qquad F = \frac{1}{x^3}$

27: جواب عمومی معادله کدام است

$(1+y^2)dx = (tg^{-1}y - x)dy$

$(1+y^2)dx + (x - tg^{-1}y)dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ تفاضل $2y - 1$

$-\frac{2y-1}{1+y^2} \Rightarrow tg^{-1}y - \ln(1+y^2) \Rightarrow F = e^{tg^{-1}y}/1+y^2$

$e^{tg^{-1}y}\,dx + \underbrace{(x - tg^{-1}y)\cdot e^{tg^{-1}y}/1+y^2}\,dy = 0$

$u = xe^{tg^{-1}y} + fy$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(\cancel{1+}\frac{1}{1+y^2}\cancel{y}\right)e^{tg^{-1}y} + f'(y) =$

$f(y) = -\int \frac{tg^{-1}y}{1+y^2}\,e^{tg^{-1}y}\,dy$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\tan^{-1} y = T \quad \Rightarrow \quad (\tan^{-1} y)' =$

$f_y = -\int T e^{T} dT$

تاحل :28

$y(x^2 - y)dx + x(x^2 + 3y)dy$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 - 1 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \qquad$ تفاضل $= -1 - 2x^2$ نتیجه می‌دهد

$x^{\alpha} y^{\beta+1} (x^2 - y) dx + x^{\alpha+1} y^{\beta} (x^2 + 3y) dy = 0$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1) y^{\beta} x^{\alpha+2} - (\beta+2) x^{\alpha} y^{\beta+1}$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+3) x^{\alpha+2} y^{\beta} + 3(\alpha+1) x^{\alpha} y^{\beta+1}$

$\beta + 1 = \alpha + 3 \qquad \beta - \alpha = 2 \qquad \alpha = -\dfrac{7}{4}$

$-(\beta+2) = 3(\alpha+1) \qquad 3\alpha + \beta = -5 \qquad \beta = \dfrac{1}{4}$

$-\beta - 2 = 3\alpha + 3$

اگر معادله‌ای به فرم $y' + y f(x) = r(x)$ باشد معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول می‌شود

اگر مرتبه خطی بود تشخیص $\quad (y f(x) - r(x))\, dx + dy = 0$

همگی معادلات خطی پذیر است

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = f(x) \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad$ تفاضل $= f(x)$

$\left(F = e^{\int f(x)\,dx} \right)$ عامل انتگرال‌ساز معادلات خطی ← طول می‌کشد حفظ شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' + y f(x) = r(x) \qquad h(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow y = e^{-h(x)}\left[\int r(x) e^{h(x)}\,dx + c\right]$$

یا $\frac{dx}{dy} + x f(y) = r(y)$ جای x و y را با هم
عوض شود

$y' - y\,tg\,x = 2\cos x$ شاخص = 2 : 28

$\ln \cos x \qquad y = \frac{1}{\cos x}\left[\int 2\cos^2 x\,dx + c\right]$

$xy' - y = x^2 \cos x$: 29

$y' - \frac{1}{x} \; 2x\cos x$

$h(x) = -\ln x \qquad y = x\left[\int \frac{\cancel{x}\cos x}{\cancel{x}}\,dx + c\right]$

: 30

$dy + (y\,cotg\,x - e^{\cos x})\,dx = 0 \quad , \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$

هرگاه y تک در معادله دیده شود باید خطی بودن آن چک گردد

$\frac{dy}{dx} + y\,cotg\,x = e^{\cos x}$

$h(x) = +\ln \sin x \qquad y = \frac{1}{\sin x}\left[\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx + c\right] \qquad c = 2$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

31: جواب معادلهٔ زیر در $x=e$ کدام است. $y(1)=2$ $x>0$

$$x^2y' + xy = 1 \Rightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

$$h(x) = \ln x$$

$$y = \frac{1}{x}\left[\int \frac{1}{x^2}\, x\,dx + c\right]$$

32: $y' - xy - 2x = 0$

33: $xy' + y - x^2 = 0$

34: $xy' - y = 3x^4$

35: $\dfrac{xy' - y}{x^2} + \dfrac{y}{x} = e^{-x}$ $t = \dfrac{y}{x}$

$$t' + t = e^{-x}$$

$h(x) = x$ $\Rightarrow \dfrac{y}{x} = e^{-x}\left[\int e^{-x} e^{x}\,dx + c\right]$

36: جواب معادله برحسب $\lambda = \dfrac{1}{\cos y}$ کدام است

$$\sin y\,\frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x\cos y) \qquad \cos y = \frac{1}{\lambda}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' \sin y = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{dx} \qquad \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} - \lambda = -x$$

$$\lambda = e^{x}\left[\int -x e^{-x} dx + c\right]$$

$$h(x) = -x$$

$$(1+y^2)\,dx = (\mathrm{tg}^{-1} y - x)\,dy : 37$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{\int (1+y^2)} = \frac{\mathrm{tg}^{-1} y}{1+y^2}$$

$$h(y) = \mathrm{tg}^{-1}(y)$$

$$x = e^{-\mathrm{tg}^{-1}(y)}\left[\int \frac{\mathrm{tg}^{-1} y}{1+y^2} e^{\mathrm{tg}^{-1} y} dy + c\right]$$

$$\int u e^{u} du$$

معادله برنولی:

صورت کلی

$$y' + y f(x) = y^{\alpha} r(x)$$

برای حل مسأله طرفین را بر y^{α} تقسیم می کنیم سپس تغییر متغیر $u = y^{1-\alpha}$ می گیریم سپس معادله تبدیل به معادله خطی می شود

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

38: در معادله زیر کدام تغییر متغیر آن را خطی می‌کند.

$y' + y\sin x = y^3 \cos x$

y^{-2}

39: جواب معادله $y' = xy^2 - y$

$y' + y = xy^2 \qquad \alpha = 2$

$y'y^{-2} + y^{-1} = x \qquad u = y^{-1} \qquad u' = -y'y^{-2}$

$u' - u = -x$

$h(x) = -x \qquad \frac{1}{y} = u = e^{x}\left[\int -xe^{-x}\,dx + c\right]$

40: $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

$y'y^{-2} + y^{-1} = \cos x - \sin x$

$u = y^{-1} \rightarrow u' = -y'y^{-2}$

$u' - u = \sin x - \cos x$

$h(x) = -x \qquad \frac{1}{y} = e^{x}\left[\int -\cancel{x}(\sin x - \cos x)e^{-x}\,dx + c\right]$

41: $y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$

$y' - \frac{2}{x}y = \frac{x}{y} \qquad \alpha = -1$

$y'y - \frac{2}{x}y^2 = x \qquad u = y^2, \; u' = 2yy'$

$u' - \frac{4}{x}u = 2x$

$h(x) = -4\ln x \qquad u = y^2 = x^4\left[\int 2x\frac{x}{4}\,dx + c\right]$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$y' + y = \frac{x}{y}$$:42

$$y' + y = (x-1)y^2$$:43

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos x^2}{y}$$:44

$$xy' + y = xy^3$$:45

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3} \qquad \frac{dx}{dy} - xy = \frac{y^3}{x}$$:46

برنولی نسبت به x واسطه

$$x\frac{dx}{dy} - x^2 = y^3 \qquad v = x^2 \ , \quad \frac{dv}{dy} = 2x\frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dv}{dy} - 2yv = 2y^3$$

$$h(y) = -y^2 \qquad v = x^2 = e^{y^2}\left[\int 2y^3 e^{-y^2}\,dy + c\right]$$

$t = y^2$ [illegible]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسیرهای قائم:

$f(x, y, c) = 0$

47 : معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم همه دوایری که از مرکز می‌گذرد و مرکز آنها بر روی محور x است کدام است

$$(x-c)^2 + y^2 = c^2$$

حتی المقدور بهتر است c به یک طرف کشیده شود تا مشتق آن صفر گردد

$$x^2 + y^2 = 2cx$$

$$x + yy' = c \qquad x^2 + y^2 = 2x(x + yy')$$

$$y^2 - x^2 = 2xyy' \qquad \frac{-1}{y'} \qquad y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$ معادله خطوط قائم

48 : مسیرهای قائم دسته منحنی $xy = c$ کدام است

$$y + xy' = 0$$

$$y + x\left(\frac{-1}{y'}\right) = 0$$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم $\Rightarrow yy' = x \qquad y\,dy = x\,dx$

$$y^2 - x^2 = a$$

49. معادله مسیرهای قائم $y = cx^2$ کدام است

$$y = cx^2$$
$$y' = 2cx \qquad \frac{y}{y'} = \frac{x}{2} \quad \frac{-1}{y'} \quad -yy' = \frac{x}{2} \Rightarrow -2y\,dy = \frac{x}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = c$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x^3 y - x y^3 = c$ —50

$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ —51

52- معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم را بدست آورید $y^2 = cx^3 + x^2 - 1$

$2yy' - 2x = 3cx^2$ $= 2 y^2 - x^2$

$\div$ $y^2 - x^2 + 1 = cx^3$

$= \frac{2yy' - 2x}{y^2 - x^2 + 1} = \frac{3}{x}$ $2xyy' = 3y^2 - x^2 + 3$ $\frac{-1}{y'}$

$y' = \frac{-2xy}{3y^2 - x^2 + 3}$

معادله اصلی منحنی از حذف c بین خودش و معادله دیفرانسیل آن بدست می آید

معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

مسیرهای قائم در مختصات قطبی منحنی $f(r, \theta, \frac{dr}{d\theta})$

$f(r, \theta, -r^2 \frac{d\theta}{dr})$ قائم بر آ

Subject:
Year. Month. Date. ( )

53:

$r = C(1 + \sin\theta)$

$\div$

$\frac{dr}{d\theta} = C\cos\theta \qquad \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

$\frac{r}{-r^2 \frac{d\theta}{dr}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم بر منحنی اصلی

$\frac{-dr}{r} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} d\theta \times \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$-\ln r = -\ln k(1-\sin\theta)$

$r = k(1-\sin\theta)$

54: معادله مسیرهای قائم

$r = 2C\cos\theta$

$\frac{dr}{d\theta} = -2C\sin\theta \qquad \frac{r}{dr/d\theta} = -\cot\theta$

$\frac{r}{-r^2 \frac{d\theta}{dr}} = -\cot\theta \qquad \frac{dr}{r} = \cot\theta \, d\theta$

$\ln r = \ln a\sin\theta \qquad r = a\sin\theta$

PAPCO

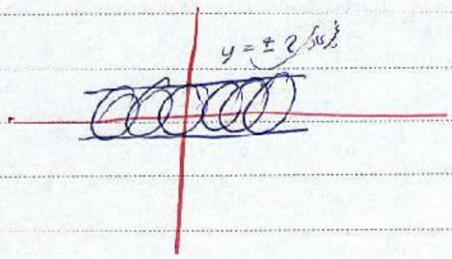
Subject:

Year. Month. Date. ( )

جواب غیرعادی

منحنی تماسی آن به کلیه منحنیهای جواب عمومی (دسته منحنی) و به هرکدام در یک نقطه تماس می شود

$$y^2(1+y'^2)=4 \Rightarrow \begin{cases} (x-c)^2+y^2=4 \\ -2(x-c)=0 & \text{مشتق نسبت به } c \end{cases}$$



پوشش یک دسته منحنی منحنی است که بر کلیه منحنی‌های جواب عمومی (دسته منحنی) و به هرکدام در یک نقطه مماس می شود.

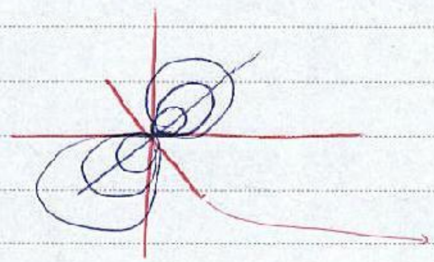
برای بدست آوردن پوشش c را بین دسته منحنی و مشتق آن نسبت به c حذف می کنیم.

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=0 \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

دوایری را نشان می دهد که از مرکز می گذرند و مرکزشان . $(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$
روی نیمساز است .

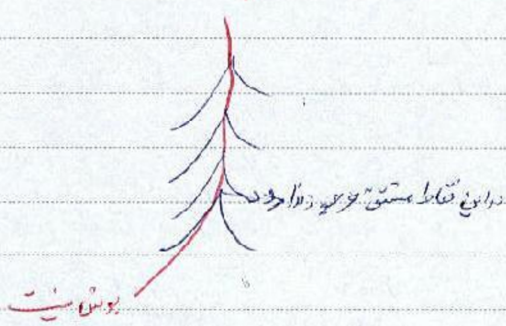


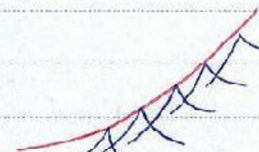
$$(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$$

$$-2(x-c)-2(y-c)=4c$$

$x+y=0$

تمام $x+y=0$ پوش سینت منفرد $(0,0)$





برای این که نقاط ~~بحرانی~~ استثنایی دیوانی را بدست آوریم داریم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0 \end{cases}$$

اگر یک دسته منحنی هکلان نقاط استثنایی (هندسی) داشته باشد از رابطه $\dfrac{\partial F}{\partial c}=0$
$F(x,y,c)=0$
هم بدست می آید که باید جوابهای بدست آمده از رابطه های قبل را از این رابطه ها حذف کرد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(\quad)(\quad)=0$

مثلاً $y=x^2$ $\quad d$

جواب غیرعادی $\quad$ دیفرانسیل دارد

نباید حذف شود $\quad$ جواب عمومی

وگرنه غلط می شود

$F(x, y, y')=0$ $\quad$ معادلاتی که نسبت به مشتق حل نمی شوند:

حالت ۱: $F(y')=0$ $\quad$ $\ln y' - \sin y = 0$ $\quad$ تابع فقط تابعی از y' باشد

$y'^7 - 3y'^6 + 4y'^4 - 3y'^2 + y' - 1 = 0$

زمانی می توان حل کرد که معادله لااقل دارای یک ریشه حقیقی $y'=k$ باشد

$\Rightarrow F(k)=0 \quad y=kx+c \Rightarrow k=\dfrac{y-c}{x} \Rightarrow F\left(\dfrac{y-c}{x}\right)=0$

$y'-2=0 \Rightarrow \dfrac{y-c}{x}-2=0$

جمع توابع پیوسته پیوسته است

$\ln y' - \sin x = 0$

$\pi \quad + \quad + \quad +$ $\quad >$ لااقل یک ریشه حقیقی دارد $\quad \Rightarrow \ln \dfrac{y-c}{x} = \sin \dfrac{y-c}{x}$

$\frac{\pi}{4} \quad -$

$y'^7 - 3y'^6 + 4y'^4 - 3y'^2 + y' - 1 = 0 \qquad \left(\dfrac{y-c}{x}\right)^7 - 3(\quad) \cdots - 1 = 0$

$f(x, y, y')$

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$$ جواب عمومی

اگر معادله‌ای نسبت به مشتق حل نشود معمولاً به فرم پارامتری مطرح می‌شود.

حالت اول

$f(y, y') = 0$

$y = f(y')$

$y' = p \Rightarrow dy = p\,dx$

$dy = f'(p)\,dp$

$p\,dx = f'(p)\,dp \longrightarrow \begin{cases} y = f(p) \\ x = \displaystyle\int \frac{f'(p)}{p}\,dp + c \end{cases}$

$$y = y'^2 e^{y'}$$

$$y = p^2 e^p \Rightarrow p\,dx = e^p (2p + p^2)\,dp \qquad p(\qquad) = 0$$

$p = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ در معادله صدق می‌کند و چون y وابسته به c نیست جواب غیرعادی است

$$\begin{cases} y = p^2 e^p \\ x = e^p + p e^p + c \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حالت دوم

$x = f(y')$

$y' = p \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{p}\, dy$

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p\, f'(p)\, dp + C \end{cases}$$

$\rightarrow dx = f'(p)\, dp$

$\frac{1}{p}\, dy = f'(p)\, dp$

۱- جواب عمومی کدام است

$x = 2y' + \sin y'$

$$\begin{cases} x = 2p + \sin p \\ y = p^2 + p\sin p + \cos p + C \end{cases}$$

$\frac{1}{p}\, dy = (2 + \cos p)\, dp$

$p \neq 0$

حالت سوم

$x = f(y, y')$

$y' = p \rightarrow dx = \frac{1}{p}\, dy$

$x = f(y, p)$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$x = 4y^2 + e^{y'} - \cos y'$

$$\begin{cases} x = 4y^2 + e^p - \cos p \\ \ominus \leftarrow p \text{ نتیجه حل برای حذف } \end{cases}$$

$\frac{1}{p} dy = 8y\,dy + (e^p + \sin p)\,dp$

$(-\frac{1}{p} + 8y)\,dy + (e^p + \sin p)\,dp = 0$ نسبت به مشتق حل می شود

حالت چهارم:

$y = f(x, y')$

$y' = p \rightarrow dy = p\,dx$

$$\begin{cases} y = f(x, p) \\ \\ \end{cases}$$

$y = x^2 y'^2 + y'^3 \rightarrow \begin{cases} y = x^2 p^2 + p^3 \\ \text{برای حذف } p \text{ وارد شود} \end{cases}$

$p\,dx = 2xp^2\,dx + (2px^2 + 3p^2)\,dp$ نتیجه حل معادله