Subject:
Year. Month. Date. ( )

مهم ۹۰٪ معادله کلرو:

صورت کلی: $y = xy' + f(y')$

در معادله کلرو به جای y'، p قرار دهیم معادله حل می‌شود $y = xp + f(p)$

$dy = p\,dx = p\,dx + (x + f'(p))\,dp = 0$

جواب غیر عادی مسئله $x + f'(p) = 0$

جواب $dp = c$

$\Rightarrow y = xc + f(c)$

نسبت به c: $y' = 0 = x + f'(c)$

جواب غیر عادی به فرم پارامتری

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x = -f'(p) \end{cases} \Rightarrow y = -x f'(p) + f(p)$$

این دستگاه جواب غیر عادی را می‌دهد اگر p حذف شد

اگر p حذف نشد جواب غیر عادی به فرم پارامتری است

اگر از جواب عمومی نسبت به c مشتق بگیریم و c حذف شد جواب غیر عادی به فرم پارامتری و
c حذف شد 〃 〃 〃 است

۱- جواب عمومی

$y = xy' + \sqrt{y'}$

$y = xc + \sqrt{c}$

2- جواب غیر عادی

$y = xy' - y'^3$

$y = xc - c^3$

$x = 3c^2$

جواب $27y^2 = 4x^3$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴. پوش کدام است : جواب غیرعادی

$$y = xy' + \frac{1}{y'} \qquad y = xc + \frac{1}{c}$$

$$x = \frac{1}{c^2} \qquad y^2 = x + x + 2x = 4x$$

:5 جواب غیرعادی

$$y = xy' - \frac{y'^2}{4}$$

$$\begin{cases} y = xc - \dfrac{c^2}{4} \\ x = \dfrac{c}{2} \end{cases} \qquad y = x^2$$

:6 جواب غیرعادی

$$y = xy' + \cos y'$$

$$\begin{cases} y = xc + \cos c \\ x = \sin c \end{cases} \qquad y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$$

معادله لاگرانژ: جواب به فرم پارامتری است

$$y = x\,h(y') + f(y') \qquad \text{مثال} \quad y = xy'^2 + y'$$

$$\begin{cases} y = x\,h(p) + f(p) \\ x = \varphi(p, c) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = xp^2 + p \\ x = \dots \end{cases}$$

P4PCO

$$p\,dx = h(p)\,dx + (\underline{x}\,h'(p) + f'(p))\,dp$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$dy = p\,dx = p^2 dx + (2px+1)\,dp$ به صورت یک معادله خطی نسبت به x حل شود

$\underbrace{p(1-p)}\,dx = (2px+1)\,dp$

$$\frac{dx}{dp} + x\,\frac{2}{p-1} = \frac{1}{p(1-p)}$$

$2\ln(p-1)$ $\qquad x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{\int \frac{1-p}{p}\,dp + c\right\}$

$$\left.\begin{matrix} p=0 & y=0 \\ p=1 & y=x+1 \end{matrix}\right\}$$ دو جواب غیرعادی

$$y'^{\,n} + y'^{\,n-1} f_1(x,y) + \dots + f_n(x,y) = 0$$

$$(y' - h_1(x,y))(y' - h_2(x,y)) \dots (y' - h_n(x,y)) = 0$$

$y' = h_i(x,y) \qquad i = 1 \dots n$

برای هر یک c داریم

$\varphi_i = f(x, y, c)$

$\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ جواب عمومی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله مرتبه دوم:

معادله‌ای که الزاما y'' داشته باشد $F(x, y, y', y'')$

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

مرتبه دوم: خطی — ضرایب: f_1 و f_2 — غیرخطی

اگر f_1 و f_2 هر دو عدد باشند ⇐ معادله خطی با ضرایب ثابت $y'' + ay' + by = f(x)$

" " " هر دو یا یکی عدد نباشد ⇐ " " " متغیر

اگر $f(x)=0$ ⇐ همگن

مرتبه دوم: خطی (ضرایب ثابت، ضرایب متغیر) — غیرخطی

ضعیف

خطی همگن	خطی غیرهمگن	غیرخطی
$y'' + y = 0$	$y'' + y = 1$	$yy'' = xy'$
جواب $y = \sin x$	$y = \sin x + 1$	$y = x^2$
$y = c\sin x$	غ $\cancel{y = 2\sin x + 2}$	غ $\cancel{y = 3x^2}$

درمعادلات خطی غیرهمگن و غیرخطی اگر یک جواب داشته باشیم C برابر آن جواب نیست

" " همگن " " " " " " " " " " است

واین قضیه ربطی به مرتبه معادله ندارد و برای مرتبه n صادق است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' + y = 0$	$y'' + y = 1$	$yy'' = 2xy'$
$y_1 = \sin x$	$y_1 = \sin x + 1$	$y_1 = x^2$
$y_2 = \cos x$	$y_2 = \cos x + 1$	$y_2 = 4$
$y = \sin x + \cos x$	$\cancel{y = \sin x + \cos x + 2}$	$\cancel{y = x^2 + 4}$

+ در معادلات خطی غیرهمگن و غیرخطی جمع جوابها جواب نیست
+ " " " همگن " " " است و برای مرتبه n صادق است

معادلات خطی همگن

$$\text{جواب} \begin{cases} y_1 & c_1 y_1 \\ y_2 & c_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = \text{جواب}$$

جواب عمومی است به شرط اینکه دو پارامتر داشته باشد و از دوتا کمتر نباشد.
n جواب مستقل " n " n ،

شرط اینکه $c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی باشد اینست که y_1 و y_2 مستقل از هم باشند

$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} \neq k \quad \text{مقدار ثابت}$$

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n$$

اگر y_1 تا y_n جوابهای یک معادله خطی همگن باشند $y_1, y_2, \dots, y_n$ استقلال دارند اگر

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

مستقل $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

مستقل $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$

استقلال ندارند $\begin{vmatrix} x & 4x \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

۱- اگر y_1 و y_2 دو جواب ـــــ مستقل خطی برای معادله $y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = 0$ باشند آنگاه رابطه زیر

$y_1 y_2' - y_2 y_1'$ $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

1 بیشتر از صفر است
2 کمتر ـ ـ
3 مخالف ـ ـ ✓
4 برابر ـ ـ

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲_ کدام یک از زیر مجموعه های زیر وابسته هستند

1. $1 , e^{x} , e^{2x}$
2. $\sin x , \cos x$
3. x , xe^{x}
4. $1 , \cos 2x , \sin^2 x$ ✓

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \sin^2 x \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

معادله خطی همگن با ضرایب ثابت :

$y' + ay = 0$

$\frac{dy}{y} = -a\,d\theta$

$y = ce^{-ax}$

$y'' + ay' + by = 0$

$y = e^{tx}$

$\Rightarrow e^{tx}(t^2 + at + b) = 0$ $\Rightarrow (t^2 + at + b) = 0$ معادله مشخصه

ریشه ها را پیدا کرده در جواب می گذاریم

ریشه ها

۱_ $\Delta > 0 \Rightarrow t_1 \neq t_2 \in R$

$\Rightarrow$ یک جواب $e^{t_1 x}$

$\Rightarrow$ یک جواب $e^{t_2 x}$

$\frac{e^{t_1 x}}{e^{t_2 x}} = e^{(t_1 - t_2)x} \neq 0$ مستقل هستند $\Rightarrow y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$

$y'' - 2y' - 3y = 0$ $t^2 - 2t - 3 = 0$

$3 , -1$ $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$y'' - 4y = 0$

$\pm 2 \qquad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$y'' - 2y' = 0$

$0, 2 \qquad \Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{2x}$

$t(t-1)(t+1)(t-2) = 0$ معادله مشخصه یک معادله دیفرانسیل

$c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{2x}$

تا وقتی که n ریشه حقیقی متمایز داریم جواب به صورت بالا محاسبه می‌شود

2: $\Delta = 0 \Rightarrow t$ یک ریشه

$y = (c_1 + c_2 x) e^{tx}$

مثال $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2$

$D^2 - 4D + 4$

$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$

پرانتز : نماد اپراتوری

$D = \frac{d}{dx} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx} y$

$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \qquad y'' = \frac{d^2}{dx^2} = D^2 y$

$\vdots \qquad \vdots$

$D^n = \frac{d^n}{dx^n} \qquad y^{n} = D^n y$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow D^2 y - 4Dy + 4y = 0$$

$$(D^2 - 4D + 4)y = 0 \Rightarrow (D-2)^2 y = 0 \qquad D = 2$$

مثال:

$$D(D-1)(D-2)^3 y = 0$$

ریشه صفر 0 ، ریشه 1 ، ریشه 2,2,2 =

$$y = c_1 + c_2 e^{x} + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) e^{2x}$$

3: $\Delta < 0$, $p \pm iq$, $q \neq 0$

$3 \pm \sqrt{-4}$ i

یک جواب $c_1 \times e^{(p+iq)x} = e^{px}(c_1 \cos qx + c_1 i \sin qx)$

$+$

جواب دیگر $c_2 \times e^{(p-iq)x} = e^{px}(c_2 \cos qx - c_2 i \sin qx)$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\Rightarrow y = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)$$ A,B حقیقی و y=... با ضرایب حقیقی

$A = c_1 + c_2$ $\qquad$ $A = c_1 + c_2$

$i \times (B = i(c_1 - c_2))$ $\qquad$ $-i \times (B = i(c_1 - c_2))$

$\frac{1}{2}(A + iB) = c_2$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(A - iB) = c_1$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $(D+1)(D-1)^2(D^2+1)(D^2-2D+5)y=0$ معادله از مرتبه ۷ است

$-1 \qquad 1 \qquad \pm i \qquad 1\pm 2i$

$\beta=0$
$q=1$

$$y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{x}+c_4\cos x+c_5\sin x+e^{x}(c_6\cos 2x+c_7\sin 2x)$$

1- $y''+2y'+10y=0 \qquad -1\pm 3i$

$$y=e^{-x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x) \qquad y=Ae^{-x}\sin(3x+\alpha)$$

$$y=e^{-x}(\underbrace{A\sin 3x\, A\cos\alpha}_{c_2}+\underbrace{A\cos 3x\,\sin\alpha}_{c_1})$$

2- مقدار a و b چه باشد تا $y_1=e^{-2x}$ و $y_2=e^{3x}$ دو جواب مستقل خطی معادله زیر باشد؟

$(t+2)(t-3)=0$ معادله مفسر $\Rightarrow t^2-t-6=0 \Rightarrow y''-y'-6y=0$

$ab=6$

3- ضریب y و y' در معادله دیفرانسیل مرتبه دومی که دو جواب مستقل آن e^{2x} و e^{-x} باشد کدام است

$(t-2)(t+1)=0 \qquad t^2-t-2=0 \qquad y''-y'-2y=0$

$-1y' \quad -2y$

4: کدام یک از توابع زیر در معادله دیفرانسیل $y''+2y'+2y=0$ صدق می‌کند

$y=e^{-t}(\cos^2 t-\sin^2 t) \qquad y=e^{-t}(\cos t+i\sin t)^2$

$y=2e^{-t}\sin t\cos t \qquad y=e^{-t}(\cos t+t\sin t)$ صدق نمی‌کند

نداریم

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$-1 \pm 2i$

$e^{-x} \cos 2x$

$e^{-x} \sin 2x$

5: برای آنکه معادله زیر خطی باشد:

$x^n y'' + y' + f(x) y^m = 0$

1. $m=1$ ✓
2. $n=0$ و $m=1$
3. $n=0$
4. $n=m=0$

$y'' + f_1(x) y' - f_2(x) y = f(x)$

معادله دیفرانسیل خطی غیر همگن:

$y'' + f_1(x) y' + f_2(x) y = f(x)$

$y'' + a y' + b y = f(x)$

$y = y_h + y_p$

y_h = جواب عمومی معادله همگن متناظر $\quad y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

y_p = یک جواب ساده بدون پارامتر معادله

— معادله با ضرایب ثابت $\quad y'' + a y' + b y = f(x)$

حل از راه مشتق گیری

کوتاه‌تر و حفظ کردنیه

روشهای y_p { ضرایب نامعین ↑ / اپراتورهای معکوس / عمومی (تغییر پارامتر) }

معایب: فقط برای معادلات با ضرایب ثابت و برای هر تابع $f(x)$ نمی‌توان استفاده کرد و فقط برای تابع‌های مشخص صادق است

محاسبه بالا را ندارد

حل از راه انتگرال گیری

PAPCO

ابوالقاسمی زاده مکانیک

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعیین y_p با استفاده از روش ضرایب نامعین:

۱- $f(x) = M(x)$ و $M(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n

$y'' - 2y' + 3y = 5$ یا $5x$ یا $4x^2 - 3$

$\Rightarrow y_p = x^m \, (\text{یک چندجمله‌ای کامل از درجه } n)$

m تعداد ریشه های صفر معادلهٔ مفسر.

مثال $y'' - 2y' + 3y = 5$

۵ درجه صفر ⇐ چندجمله‌ای از درجه صفر $m = 0$

$y_p = A x^0 = A$

درمعادله $0 - 0 + 3A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{3}$

مثال $y'' - 2y' + 3y = 5x$

$y_p = Ax + B$

درمعادله $0 - 2A + 3Ax + 3B = 5x \Rightarrow \begin{cases} 3A = 5 \\ -2A + 3B = 0 \end{cases}$

مثال

$D^2(D-1)y = 7x^2 + 3$

۰ دوبار ریشه معادله مفسر است

$y_p = x^2 (Ax^2 + Bx + C)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\ldots\ldots = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$

$y_{p_1} + y_{p_2} + \ldots + y_{p_n}$

2: اگر $f(x) = e^{p(x)} \mathcal{M}(x)$

$\Rightarrow y_p = x^m e^{px} \times$ (یک چندجمله‌ای کامل از درجه n)   m تعداد ریشه‌های p معادله مشخصه

p = ریشه چندبار

مثال: $y'' - 2y' - 3y = 5e^{x}$ $p=1$

3 و -1 $m=0 \Rightarrow$ ریشه معادله مشخصه نیست

$y_p = Ae^{x}$

در معادله $A - 2A - 3A = 5 \Rightarrow A = -4$

$y'' - 2y' - 3y = 5e^{x} + 2xe^{-x} + 7x$ $p=-1$

f_1 f_2 یکبار

$y_{p_1} = Ae^{x}$ $y_{p_2} = xe^{-x}(Bx + C)$ $y_{p_3} = Dx + E$

در معادله گذاشته شود و معادل با $2xe^{-x}$ قرار گیرد

مثال: $D(D-1)^3(D+1)y = x^2 + 4xe^{x} + 7x^2e^{-x} + 5e^{2x}$

$y_{p_1} = x(Ax^2 + Bx + C)$

$y_{p_2} = x^3 e^{x}(A_1 x + B_1)$

$y_{p_3} = xe^{-x}(A_2 x^2 + B_2 x + C_2)$

$y_{p_4} = A_3 e^{2x}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

3: $f(x) = M(x) \cos qx + N(x) \sin qx$

$$y_p = x^m \left(R(x) \cos qx + S(x) \sin qx \right)$$

m : تعداد ریشه‌های $p \pm iq$ معادله مفسر.

R و S دو چندجمله‌ای از درجه n و n بزرگترین درجه N و M است.

مثال $y'' + 4y = x \cos 2x + 7 \sin 3x$

$\pm 2i \qquad \pm 2i \qquad \pm 3i$

$$y_{p_1} = x \left((Ax+B) \cos 2x + (A_1 x + B_1) \sin 2x \right)$$

$$y_{p_2} = A_2 \cos 3x + B_2 \sin 3x$$

4: $f(x) = e^{px} \left(M(x) \cos qx + N(x) \sin qx \right)$

$$y_p = x^m e^{px} \left(R(x) \cos qx + S(x) \sin qx \right)$$

m تعداد ریشه‌های $p \pm iq$ معادله مفسر.

مثال: $\pm i \qquad 1 \pm 2i \qquad -1 \pm 3i$

$$D(D^2+1)(D^2-2D+5)(D^2+2D+10)^2 y = x + x \cos x + x^2 e^x \sin 2x + 5e^{-x} \sin 3x + x e^x \cos 3x$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y_{p_1} = x(Ax+B)$$

$$y_{p_2} = x\big((A_1x+B_1)\cos x + (A_2x+B_2)\sin x\big)$$

$$y_{p_3} = xe^{x}\big((A_3x^2+B_3x+C_3)\cos 2x + (A_4x^2+B_4x+C_4)\sin 2x\big)$$

$$y_{p_4} = x^2e^{-x}(A_5\cos 3x + B_5\sin 3x)$$

$$y_{p_5} = e^{x}\big((A_6x+B_6)\cos 3x + (A_7x+B_7)\sin 3x\big)$$

$y'' - 4y' = -4$ 1- جواب عمومی

0
4

$C_1 + C_2\cancel{e}^{4x} - x$

$C_1 + C_2\cancel{e}^{4x} + x$ ✓

$C_1\cos\cancel{2}x + C_2\cancel{\sin}2x$ ✓

$C_1 x\cancel{e}^{4x} + x^2$

$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$ 2- [illegible]

$1, 3$

$y = Ae^{x} + B\cancel{e}^{2x} + \frac{1}{2}xe^{3x}$

$y = Ae^{x}\cancel{+Be^{2x}} + xe^{3x}$

$y = Ae^{x} + Be^{3x} + \frac{x}{2}e^{3x}$

$y = Ae^{x}\cancel{+Be^{3x}} + x^2\cancel{e^{3x}}$ [illegible]

P4PCO

:3

$(D^2-1)y = 8xe^{x}$

$1 , -1$

$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \cancel{\cos x}$

$y = c_1\cos x + \cancel{c_2\sin x} + \frac{x}{2}\sin x$

$y = e^{2x}(\cancel{c_1 + c_2x} + \frac{x^2}{2})$

✓ $y = c_1e^{-x} + \underbrace{e^{x}(c_1 - 2x + 2x^2)}$

$y_p = xe^{x}(Ax+B)$

:4 کدام گزینه یک جواب خصوصی معادله زیر است

$y''' + 2y'' + y' - 2y = e^{x} + \cos x$

اجزاء ریشه‌های معادله موثر نیست $\Leftarrow e^{1\alpha x} \Leftarrow e^{x}$

Ae^{x}

$B\cos x + C\sin x$

:5 جواب عمومی کدام است

$y'' - 4y' + 5y = 2e^{3x}$

$2 \pm i$ $\qquad y_h = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$

$y_p = Ae^{3x} \Rightarrow y_p = e^{3x}$

$y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{3x}$

1- $Ae^{2x}\sin(x+\alpha) - e^{3x}$

2- $Ae^{\cancel{x}}\sin(2x+\alpha) + e^{3x}$

3- ✗ 〃 $-2e^{3x}$

4- ✓ $Ae^{2x}\sin(x+\alpha) + e^{3x}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

6: کدام تابع در معادله صدق می کند

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$$

3 و -1

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + A e^{2x} \qquad A = -1$$

از ذکر نیزها

1. $e^{x} - e^{2x}$

2. $e^{x} + e^{2x}$

3. $e^{3x} - e^{2x}$ ✓

4. $e^{3x} + e^{2x}$

7: جواب عمومی معادله $y^{(4)} - y = x\sin x$ ضرایب نامعین جواب خصوصی را تعیین کنید

1 و -1 و i و -i

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

$$x[(c_5 + c_6 x)\cos x + (c_7 + c_8 x)\sin x]$$

8: جواب خصوصی معادله $y''' + 9y' = e^{x}\cos 2x$ در $x=0$ کدام است

$\pm 3i$

از روش ایراتور، عامل معکوس حل شود

$$e^{x} A \cos 2x$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' + 4y = \cos x$ اگر خود $\cos x$ را بگیریم کافی است و نیاز به $\sin$ ندارد

$y'' - 2y' + 7y = \sin x$ $A\sin x + B\cos x$

اگر معادله مشتق فرد نداشت کافیست همان را با رعایت همه روابط معادله را جواب [illegible] گرفت
(خصوصی)

Subject:

Year. Morth. Date. ( )

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

روش عمومی

در این روش یک w به صورت زیر حساب می کنیم

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$y = -y_1 \int \frac{f y_2}{w} dx + y_2 \int \frac{f y_1}{w} dx$$

-1 $$(D-1)^2 y = \frac{e^t}{t^2}$$

-2 $$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$$

-3 $$(D^2 - 9D + 18) y = e^{e^{-3x}}$$

حل 1:

$$y_1 = e^t \qquad e^t$$

$$y_2 = te^t \qquad e^t + te^t$$

$$\Rightarrow w = e^{2t} \qquad \Rightarrow y = -e^t \int \frac{e^t t e^t}{t^2 e^{2t}} dt + te^t \int \frac{e^t e^t}{t^2 e^{2t}} dt$$

حل 2:

$$y_1 = e^{2x} \qquad 2e^{2x}$$

$$y_2 = xe^{2x} \qquad e^{2x} + 2xe^{2x}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$w = e^{4x}$

$$y = -e^{2x}\int \frac{e^{2x} x e^{2x}}{x e^{4x}}\,dx + x e^{2x}\int \frac{e^{2x} e^{2x}}{x e^{4x}}\,dx$$

حل 3:

$y_1 = e^{3x} \quad 3e^{3x}$

$w = 3e^{9x}$

$y_2 = e^{6x} \quad 6e^{6x}$

$$y = -e^{3x}\int \frac{e^{e^{-3x}} e^{6x}}{3e^{9x}}\,dx + e^{6x}\int \frac{e^{e^{-3x}} e^{+3x}}{3e^{9x}}\,dx$$

دستورات کاهش مرتبه

برای معادلات مرتبه دوم غیرخطی

$F(x, y, y', y'') = 0$

حالت اول: $F(x, y', y'') = 0$ ناقد تابع

$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$

$\Rightarrow F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$

۱- ناقد y

$(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$

$p' + \frac{2x}{1+x^2}p = \frac{x^3}{1+x^2}$

$\ln(1+x^2)$

$\Rightarrow p = \frac{1}{1+x^2}\left[\int x^3\,dx + C_1\right]$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$p=\left(\frac{1}{4}\frac{x^4}{1+x^2}+\frac{c_1}{1+x^2}\right)=\frac{dy}{dx}$$

$$(1+x^2)y''+2xy'=\cancel{x}^3\times\frac{1}{1+x^2}$$ -2

$$xy'''-2y''=0 \qquad xp'=2p$$ -3

$$\frac{dp}{p}=2\frac{dx}{x}\Rightarrow p=c_1x^2 \qquad y''=c_1x^2 \qquad y'=c_1x^3+c_2$$

$$y=c_1x^4+c_2x+c_3$$

$$xy''+y'=2x\ln x \qquad p'+\frac{1}{x}p=2\ln x$$ -4

حالت دوم: $F(y,y',y'')=0$ فاقد متغیر

$$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$$

$F\left(y,p,\frac{dp}{dx}\right)=$ سه مجهول غیرخطی $\Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$

$$y''=p\frac{dp}{dy}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

-1

$y'' + y'^3 e^{2y} = 0 \qquad \cancel{p}\dfrac{dp}{dy} + p^{\cancel{3}\,2} e^{2y} = 0$

$\dfrac{dp}{p^2} + e^{2y}dy = 0 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2}e^{2y} = c_1$

$\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2}e^{2y} + c_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2}e^{2y} + c_1$

$dx = (\dfrac{1}{2}e^{2y} + c_1)dy \qquad x = \dfrac{1}{4}e^{2y} + c_1 y + c_2$

-2

$yy'' + y'^2 = 1 \qquad y'' = p\dfrac{dp}{dy} \qquad y$

$yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 1 \qquad \dfrac{dp}{dy} + \dfrac{p}{y} = \dfrac{1}{py}$

$p\dfrac{dp}{dy} + \dfrac{p^2}{y} = \dfrac{1}{y}$ برنولی $u = p^2$

$\dfrac{du}{dy} = 2p\dfrac{dp}{dy} \qquad \dfrac{du}{dy} + \dfrac{2}{y}u = \dfrac{2}{y}$

یا جداشدنی

$\dfrac{p\,dp}{1-p^2} + \dfrac{dy}{y} = 0$

-3

[illegible] $y'' + \sin y = 0 \quad \Rightarrow$ [illegible] $= ? \qquad y(0) = \dfrac{\pi}{3}$

$y'(0) = 0$

$p\dfrac{dp}{dy} + \sin y = 0 \qquad \dfrac{1}{2}p^2 = \cos y + c$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Rightarrow y' = p = \sqrt{2\cos y + c}$ $\quad c = -1$

$0 = \sqrt{2\cos\frac{\pi}{2} + c} \Rightarrow c = -1$

4

$2yy'' + y'^2 = 0 \qquad 2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$

$\frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\frac{dy}{y} = 0 \qquad \ln p y^{1/2} = \ln c_1$

$p y^{1/2} = c_1 \Rightarrow y^{1/2} dy = c_1 dx$

-5

$y'' = x y'^3$

$\frac{dp}{dx} = x p^3 \qquad \frac{dp}{p^3} = x dx \qquad \frac{1}{p^2} = -x^2 + c_1$

$y'^2 = \frac{1}{c_1 - x^2} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{1}{c_1 - x^2}}$

$y'' - 3y^2 = 0 \qquad y'(0) = 4 \qquad , y(0) = 2$ 6

$p\frac{dp}{dy} = 3y^2 \qquad p\,dp = 3y^2 dy \qquad p^2 = \frac{2}{2}y^3 + c_1$

$y' = \sqrt{\frac{2}{2}y^3 + c_1} \Rightarrow c_1 = 0 \qquad \Rightarrow y' = \sqrt{2y^3}$

$y' = \sqrt{2}\, y^{3/2} \qquad y^{-3/2} dy = \sqrt{2}\, dx$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$xy'' + y' = 1 + x^2$ 7

حالت سوم: $F(x, y, y', y'')$

نسبت به y و مشتقات همگن است هرگاه $F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^{\alpha} F(x, y, y', y'')$

$\Rightarrow y = e^{\int z\,dx} \qquad z = f(x)$

۱ـ $x^2yy'' = (y - xy')^2$ همگن نیست $x + yy''$

$y = e^{\int z\,dx} \Rightarrow y' = z e^{\int z\,dx} \Rightarrow y'' = z' e^{\int z\,dx} + z^2 e^{\int z\,dx}$

مرتبه ۱

$x^2yy'' - y^2 - x^2y'^2 + 2xyy' = 0 \qquad e^{2\int z\,dx}(x^2z' + \cancel{x^2z^2} - 1 - \cancel{x^2z^2} + 2xz) = 0$

1) $xz' = 2 + xz$ 2) $x^2z' = 1 - 2xz$ ✓ همیشه $e^{\alpha\int}$ بیرون می‌افتد

3) $xzz' = 1 + xz$ 4) $xzz' = 2 - 2xz$ درجه همگنی $= 2$

$x^2z' = 1 - 2xz \qquad z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$

$yy'' + y'^2 + xy^2 = 0$

معادلات خطی با ضرایب متغیر:

معادله کوشی از مرتبه دوم: $x^2y'' + axy' + by = f(x)$

تبدیل به معادله خطی با ضرایب ثابت $\Leftarrow$ $x = e^z$ تغییر متغیر

$z = \ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + a\frac{dy}{dz} + by = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + (a-1)\frac{dy}{dz} + by = f(x) \Rightarrow$$ معادله با ضرایب ثابت

$$t^2 + (a-1)t + b = 0$$ معادله مشخصه ای حفظ شود فقط از a یک واحد کم شود

$t_1 \neq t_2 \in R$ $\Delta > 0$

$$y = c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2}$$

t $\Delta = 0$

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^t$$

$p \pm iq$ $\Delta < 0$

$$y = x^p\left(c_1\cos(q\ln x) + c_2\sin(q\ln x)\right)$$

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$ -1

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \qquad t = 2$$

$$y = (c_1 + c_2\ln x)x^2$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

-2

$x^2 y'' + x y' + 9y = 0$

-3

$x^2 y'' + x y' + 5y = \ln x$

$r^2 - 2r + 5 = 0 \qquad 1 \pm 2i$

$y_h = x\left(c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x) \right)$

$r^2 - r + 5 = 0 \qquad \ddot{y} - \dot{y} + 5y = Z \qquad y_p = AZ + B$

$0 - 2A + 5\cancel{Z} + 5B = Z$

$5AZ = Z \qquad 5A = 1 \qquad A = \frac{1}{5} \qquad y_p = \frac{Z}{5} + \frac{2}{25}$

$-2A + 5B = 0 \qquad B = \frac{2}{25}$

$x^2 y'' - 2y = 0 \qquad r^2 - r - 2 = 0$ -4

$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} + by = 0$ -5

کلیه مقادیری از ثابت b که به ازای آنها جواب کراندار می‌باشد

$t \to \infty$

$\lambda^2 + 2\lambda + b = 0 \qquad -1 \pm \sqrt{1-b}$

PAPCO

$$y_1 = c_1 t^{(-1-\sqrt{1-b})} + c_2 t^{-1+\sqrt{1-b}}$$

لازمه اینکه وقتی t به سمت بینهایت می‌رود رابطه و b محدود باشد آن است که

$$-1+\sqrt{1-b} < 0 \qquad 0 < \sqrt{1-b} < 1$$

$$0 < 1-b < 1 \Rightarrow -1 < -b < 0 \Rightarrow 0 < b < 1$$

معادله خطی با ضرایب متغیر 2 :

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

فرض، y_1 یک جواب معادله همگن متناظر موجود باشد

$$y_1'' + y_1' f_1 + y_1 f_2 = 0$$

پس جواب عمومی $y = uy_1$

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \quad , \quad u'y_1 + uy_1'$$

$$u''y_1 + 2u'y_1' + \underline{uy_1''} + f_1u'y_1 + \underline{f_1uy_1'} + \underline{uy_1f_2} = f$$

$$u(y_1'' + f_1y_1' + f_2y_1) = 0$$

$$\Rightarrow u'' + u'\left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1\right) = \frac{f}{y} \Rightarrow$$

معادله فاقد تابع

$$\Rightarrow u' = p \Rightarrow p' + p\left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1\right) = \frac{f}{y_1}$$

حذف شود،

معمولاً $f = 0$ است =

$$u'' + u'\left(\frac{2y_1'}{y} + f_1\right) = 0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{u''}{u'} + 2\frac{y_1'}{y_1} = -f_1 \qquad \ln u' y_1^2 = -\int f_1\,dx$$

$$u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1\,dx} \Rightarrow u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1\,dx}\,dx$$

u دو بار انتگرال دارد

چون معادله همگن است $\Leftarrow$ $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ، $y_2 = u y_1$ برای اینکه u مستقل است

تعیین y_1

اگر $f_1 + x f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = x$

اگر $1 + f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{x}$

اگر $1 - f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$

$$\alpha^2 + \alpha f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}$$

[illegible]

1- $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2} = 0$

$f_1 + x f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = x \quad , y_2 = u x$

$$u = \int \frac{1}{x^2} e^{+\int \frac{2x}{1-x^2}\,dx}\,dx = \int \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1-x^2}$$

PAPCO

۱۱. را می‌توان بدون نیاز به انتگرال‌گیری حساب کرد. ... $y_1 y_2 + \dots$

$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$ -2

$y_1 = x$

$p' + p\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x-1}\right) = (x-1)e^x$

$p \Rightarrow u \Rightarrow y = u y_1$

-3

$x^2(x^2-1)y'' - x(x^2+1)y' + (x^2+1)y = 0$ $y_1 = x$

$$u = \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} dx} dx$$

$(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0$ -4

$(x-2)\alpha^2 - (4x-7)\alpha + (4x-6) = 0$

$x(\alpha^2 - 4\alpha + 4) - 2\alpha^2 + 7\alpha - 6 = 0$ براساس قوای x مرتب شود

$\alpha = 2$

$y_1 = e^{2x}$, $y_2 = u\, e^{2x}$

$$u = \int \frac{1}{e^{4x}} e^{\int \frac{4x-\cancel{7}}{x-2} dx} = \int (x-2)\,dx$$