مقاومت مصالح ۲

استاد محترم

جناب آقای دکتر جوهرزاده

علیرضا جوادیان

عمران ۸۲

نیمسال اول ـ ۸۵-۸۴

۱

علیرضا جوادیان - عمران ۸۲

مقاومت مصالح ۲ - ج ۱ — به نام خدا — ۸۴/۶/۲۶

حل تمرین ۲ نمره

میان ترم شنبه ۱۰ دی ماه ۸ نمره

پایان ترم شنبه ۱۷ دی ماه ۱۰ نمره

مباحث مقاومت ۲ :

۱ـ تیر با مقطع متغیر

۲ـ تیر از دو یا چند جنس   مثل تیرهای بتن آرمه

M_z , M_y

۳ـ خمش و پیچش ، خمش مرکب (نیروی محوری و لنگر خمشی N و M) ، خمش دو جانبه (نسبت به ۲ محور y و z)
تیر خمیده

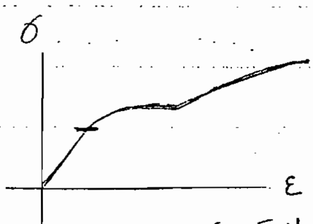
۴ـ کمانش   نیروی محوری تحت فشار

میله باید مستقیم بماند اما تجربه نشان می دهد اگر میله نازک باشد خم خواهد شد
از نظر ریاضی هم قابل اثبات است
کمانش یک خاصیت الاستیک است چون بعد از حذف نیرو دوباره به حالت اول برخواهد گشت.

۵ـ مخازن جدار نازک

۶ـ تئوری های مقاومت   عامل تسلیم شدن مواد را بررسی خواهیم کرد

۷ـ بار نهایی - طراحی پلاستیک سازه ها

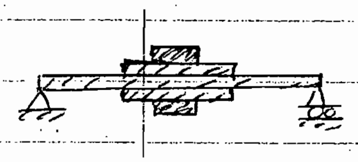


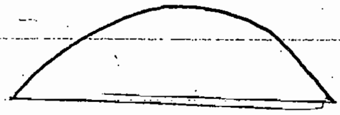
همه بحث ها در قسمت خطی منحنی σ-ε است
اما در بار نهایی وارد قسمت های دیگر خواهیم شد

* تیر با مقطع متغیر

چون لنگر خمشی در تیر ثابت نیست ممکن است مقطع تیر را تغییر بدهند یعنی جایی که لنگر خمشی کوچکتر است مقطع کمتر و جایی که لنگر بیشتر است مقطع بزرگتری داشته باشیم تا مصالح کمتر مصرف شود.

مثلاً در یک تیر فولادی



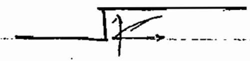


لنگر خمشی

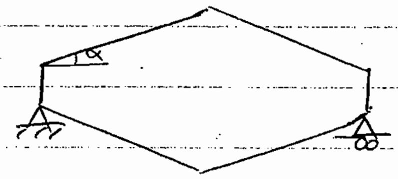
در قسمت وسط مقطع را بزرگتر می‌کنند

* $\sigma = \frac{-My}{I}$

طبق فرمول تنش در مقطع پله‌ای باید ناگهان تغییر زیادی کند اما عملاً این طور نیست



یعنی باید یک مقدار از محل تغییر مقطع دور شویم تا تنش به یک مقدار ثابتی برسد.



* در این جا مقطع پیوسته تغییر می‌کند
I و M هر دو دارند تغییر می‌کنند؛

در هر مقطع $\sigma_{max} = \pm\frac{MC}{I}$ ؛ هر ۳ I, C, M متغیرند باید مشتق‌گیری کرد

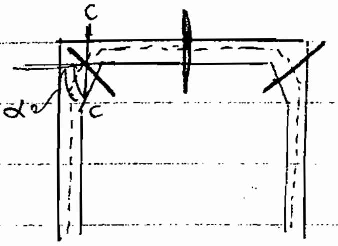
ولی در مقطع ثابت C و I ثابت بودند فقط M تغییر می‌کرد.

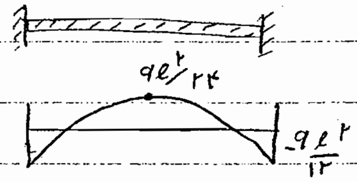
* $EI\frac{d^2v}{dx^2} = M$

در تغییر شکل این تیر I دیگر ثابت نیست

$$\Rightarrow E\frac{d^2v}{dx^2} = M/I$$

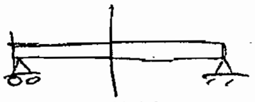
در اینجا فقط از روش انتگرال گیری استفاده می کنیم ؛ بقیه روشها در تحلیل سازه مطرح می شوند .





در این جا در یک تیر بتن آرمه
در گوشه ها تنش خیلی زیاد است
برای همین ارتفاع را زیاد می کنند
از زیر آن نه از بالا .

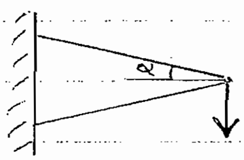
خود تیر مطابق خط چین است
و مقطع باید عمود بر آن باشد ولی
معمولاً به صورت C-C می گیرند و
Icc را محاسبه می کنند و C را نصف
این ارتفاع می گیرند و یک مقدار خطا
ایجاد می شود ولی دیگر متقارن چون متقارن
است خطایی ایجاد نمی شود مقطع عمود بر محور
خواهد بود .



$\frac{VQ}{Ib} \longrightarrow$ + جدار نازک

این فرمول به کلی تغییر می کند

* در تئوری ارتجاعی شکل زیر مورد مطالعه قرار گرفته است 8



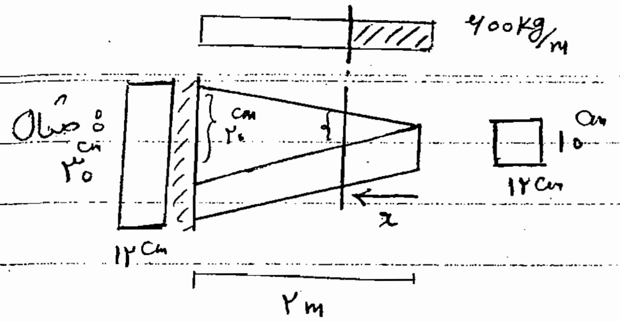
α هر چه کوچکتر باشد خطای روابط $\sigma_{max} = \pm\frac{MC}{I}$ کمتر خواهد بود

تا ۵° درجه خطا حدود ~~[illegible]~~ ۰/۹۹۴
۱۰° " " " ۱-۲‰ دو در هزار ۰/۹۷۶
۲۰° " " " ۱۰% ۰/۹۰۶
۱۵° " " " ۰/۹۴۶

تغییرات بیشتر از ۲۰° را نمی پذیرند که از این فرمولها استفاده کنیم
در بتن آرمه بالا چون ۵ از یک طرف ~~[illegible]~~ اضافه می شود تا حدود ۲۵° می شود از روابط استفاده کرد

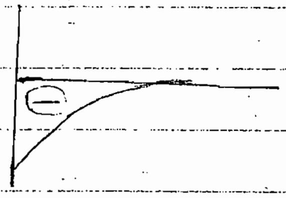
* تنشی که از فرمولها بدست می آوریم زیادتر از مقدار واقعی است پس در جهت اطمینان کار کرده ایم
پس به نفع ضریب اطمینان

تنش max در تیر را بیابید؟



حل -

لنگر خمشی



* $M = -(600x)(x/2) = -300x^2$

لنگر منفی max * $M_{max} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow M = -1200\ kg\cdot m$

در مقطع $\sigma_{max} = \pm\frac{MC}{I} = \pm\frac{M}{W}$ → مدول مقطع

در مقطع مستطیل $W = \dfrac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$

* $h^{(cm)} = 10 + \left(\frac{x}{200}\right)(20) = 10 + \frac{x}{10}$

$W = \frac{(12)(10+0.1x)^2}{6} = 2(10+0.1x)^2$

* $\sigma_{max} = \pm\frac{(-300x^2\times 100)\ kg\,cm}{2(10+0.1x)^2}$ لنگر منفی بالا را کشش می‌کند

* $\sigma_{max} = \mp\frac{15000x^2}{(10+0.1x)^2}$

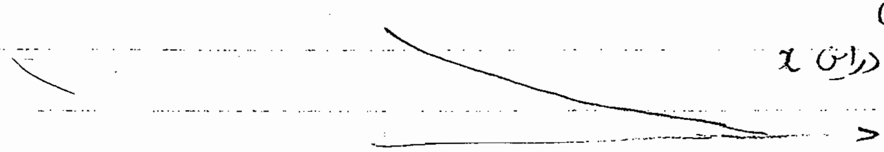
$\Rightarrow \frac{d(\sigma_{max})}{dx} = 0 \Rightarrow (10+0.1x)(20x+0.2x^2-0.2x^2) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

غیر معتبر

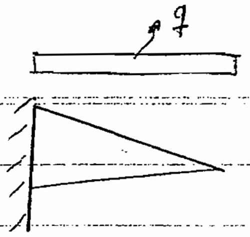
max یا min در ابتدای x

اتفاق می‌افتد



* اگر کمیت عددی قبل ۰ - یا ۲ درآید max جبری در این نقاط وجود دارد (وحتماً) باید دو انتها چک شود

۲/



در اینجا تنش همواره ثابت است

$$M = -\frac{qx^2}{2}$$

$$W = \frac{bh^2}{6} \quad , \quad h = (h_0)\frac{x}{l}$$

$$\Rightarrow w = \frac{b\left(\frac{h_0^2 x^2}{l^2}\right)}{6} \Rightarrow \sigma_{max} = \text{یک مقدار ثابت} = \frac{M}{W}$$

ولی در مثال قبل چون h یک مقدار اولیه داشت σ_{max} ثابت نبود

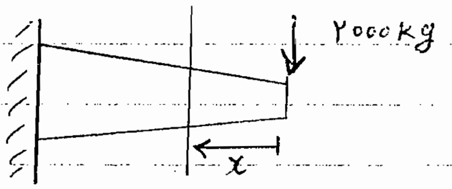
حل قبلی

$$\Rightarrow \quad x = 0 \Rightarrow \sigma_{max} = 0 \qquad \text{بر حسب } cm$$

$$x = 2^m \text{ یا } x = 200\,cm \Rightarrow \sigma_{max} = \pm \frac{-3x^2}{2(10+0.1x)^2} \quad \text{یا} \quad \pm \frac{-300x^2 \times 100}{2(10+0.1x)^2}$$

$$* \quad x = 200^{cm} \Rightarrow \pm \frac{(-3)(4)(10^4)}{2(10+20)^2} = -66.667$$

مثال:



$$* \quad M = 2000\,x \qquad \Rightarrow \sigma_{max} = \pm \frac{2000x}{2(10+0.1x)^2}$$

$$W = 2(10+0.1x)^2$$

$$\Rightarrow * \quad \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = 100^{cm}$$

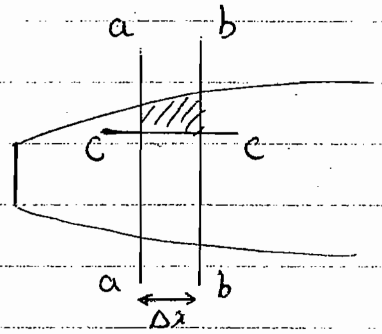
* در اینجا دقیقاً در وسط σ_{max} max بدست آمد البته باید دو انتها را کنترل کرد

اما چون می دانیم در $x=0$ که صفر است پس این مقدار max خواهد بود.

۸۴/۷/۲ بنام خدا ج ۲

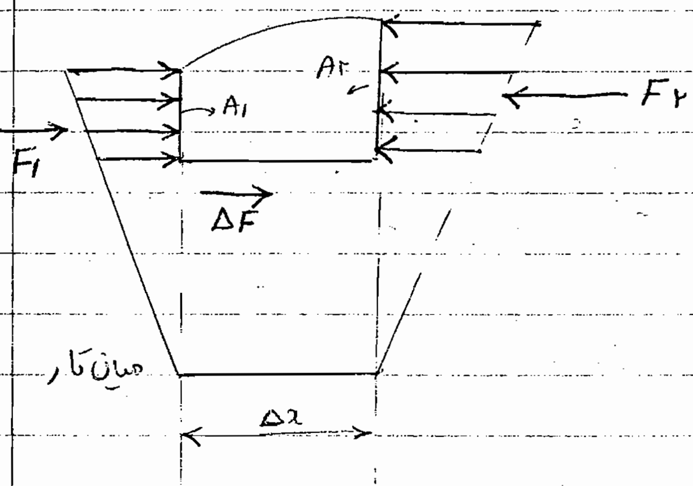
تیر با مقطع متغیر :

تنش برشی :



* موقعی که مقطع ثابت بود :

دو مقطع موازی به فاصله Δx از هم در نظر گرفته‌ایم به علاوه یک مقطع افقی c-c و تعادل آن قسمت را نشان دادیم .



$$F_1 = \int_{A_1} \sigma_1 dA$$

$$F_2 = \int_{A_2} \sigma_2 \, dA$$

وقتی مقطع ثابت بود A_1 و A_2 یکی بودند :

* $\Delta F = F_2 - F_1$

با مقطع ثابت

$$\Delta F = \int_{A_1} \frac{\overbrace{M_2}^{M_1+\Delta M} y}{I} dA - \int_{A_1} \frac{M_1 y}{I} dA = \frac{1}{I}\int \Delta M y dA$$

$$= \frac{\Delta M}{I} \cdot \int_{A_1} y dA = \frac{\Delta M \cdot Q_{1z}}{I}$$

$$q = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\Delta M}{\Delta x} \cdot \frac{Q_{1z}}{I} = \frac{V Q_{1z}}{I}$$ در مواردی ① داشتیم

$$* \; q = \frac{\Delta F}{\Delta x \to 0} = \frac{d}{dx} \int_{A_1} \frac{M y}{I} \, dA = \frac{d}{dx} \left(\frac{M Q_{1Z}}{I} \right)$$

اگر مقطع ثابت باشد $= \frac{V Q_{1Z}}{I}$

در مقطع متغیر :

$$q = \frac{d}{dx} \left(\frac{M Q_{1Z}}{I} \right)$$

$$= \frac{V Q_{1Z}}{I} + \frac{M}{I} \frac{dQ_{1Z}}{dx} - \frac{M Q_{1Z}}{I^2} \cdot \frac{dI}{dx}$$

$$* \quad q = \frac{V Q_{1Z}}{I} + \frac{M}{I} \left(\frac{dQ_{1Z}}{dx} - \frac{Q_{1Z}}{I} \cdot \frac{dI}{dx} \right)$$

یعنی دیگر با مقطع متغیر از همان روش استفاده نمودیم M ، I و Q تغییر می‌کنند که توانستیم شار برشی را تعیین کنیم ؟

تنش برشی $\tau = \frac{q}{b}$ شار برشی / ضخامت

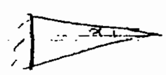
* تنش برشی در مقطع متغیر هم به نیروی برشی هم به لنگر خمشی بستگی دارد ؟

این رابطه یک رابطه کلی است چه جدار نازک باشد یا توپر و ... کلی است ؟

* خطای محاسبه σ :

$$\boxed{\sigma = \beta \left(\frac{-My}{I} \right)}$$

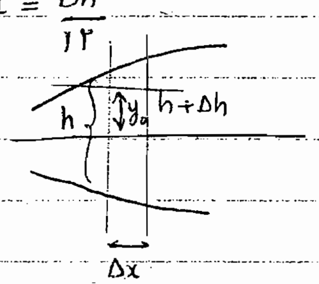
با زاویه α



* خط‌ها مثل همین خط‌های قبلی اند یعنی روش، خطای جدیدی ایجاد می کند .

* مقطع مستطیل :

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

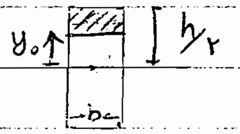


دو حالت داریم وقتی الف - میان تار افقی باشد :

نسبت به b جداگانه مشتق پذیری نمی شود

ولی در I تأثیر دارد

$$dI = \frac{h^3}{12}db + \frac{3bh^2}{12}dh$$



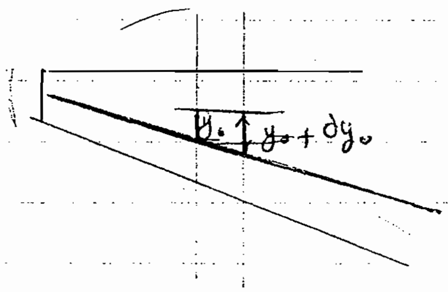
$$Q = b(h/2 - y_0)\frac{h/2 + y_0}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)$$

$$* \quad dQ = \frac{db}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{h\,dh}{2} - y_0^2\right)$$

db ساده می شود .

$$\tau = \frac{VQz}{Ib} + \frac{Mh}{4I}\left(1 - \frac{Qh}{I}\right)\frac{dh}{dx}$$

ب - میان تار افقی نباشد : لبه بالا افقی است

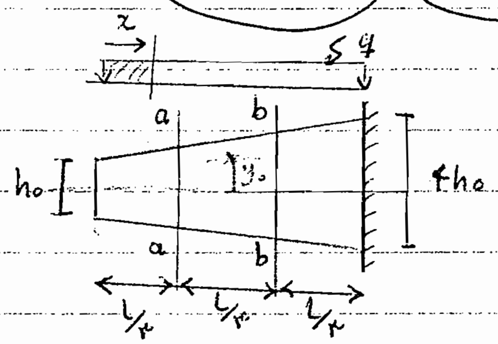


در اینجا y_0 هم تغییر می کند .

۵/

$$\boxed{\tau = \frac{VQ_{1z}}{Ib} + \frac{Mh}{4I}\left(1 - \frac{Qh}{I} - \frac{2y_0}{h}\right)\frac{dh}{dx}}$$

مثال:



حل-

$$V = -qx$$

$$M = -\frac{qx^2}{2} = V\left(\frac{x}{2}\right)$$

* $h = h_0 + \frac{x}{L}(3h_0)$ خطی اضافه می‌شود:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{3h_0}{L}$$

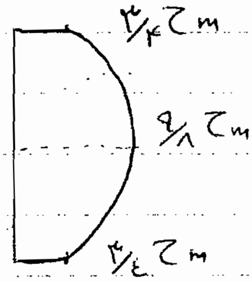
* $Q = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)$

در مقطع a-a : $x = L/3 \Rightarrow h = 2h_0 \ , \ h_0 = h/2$

$\Rightarrow \tau_{aa} = \frac{V}{8I}\left(\frac{3h^2}{4} - y_0^2\right)$ که سهمی است:

– اگر مقطع ثابت بود τ_{aa} در بالا و پایین صفر می‌شود ولی در اینجا اگر مقادیر مربوطه را بگذاریم:

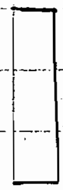
$$\begin{cases} \tau_{y_0=0} = \dfrac{9V}{8bh} \\ \tau_{y_0=\pm h/2} = \dfrac{3V}{4bh} \end{cases}$$



مقطع bb . $x = \frac{2L}{3} \quad , \quad h = 3h_0 \quad , \quad h_0 = \frac{h}{4}$

$$\tau_{bb} = \frac{V}{bh}$$

یعنی در این مقطع از بالا تا پایین τ ثابت است



$\frac{V}{bh} \times \left(\frac{6}{6} \times \frac{1}{8}\right)$

تکیه‌گاه ob :

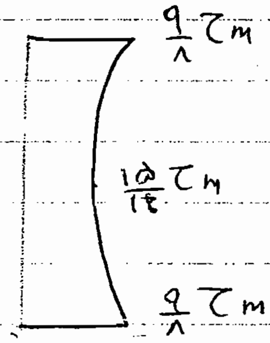
$$\tau = \frac{V}{8I}\left(\frac{5h^2}{8} + \frac{y_0^2}{2}\right)$$

$\frac{V}{8\frac{bh^3}{12}} \times \left(\frac{5h^2}{8}\right)$

* در اینجا علامت − به + تبدیل شده یعنی روی میان تار تنش کمترین مقدار را دارد.

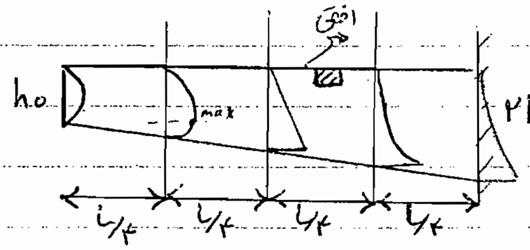
$$\tau_{y_0=0} = \frac{15V}{16bh}$$

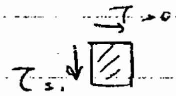
$$\tau_{y_0=\pm h/2} = \frac{9V}{8bh}$$



در مقطع ثابت همیشه τ_m روی میان تار قرار دارد.

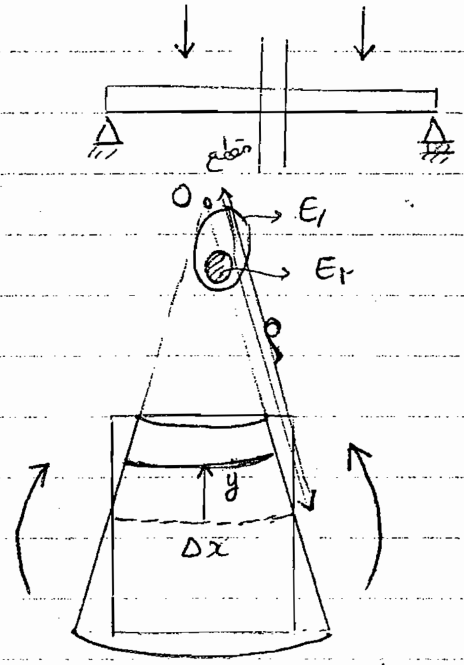
مثال :





* در سطح خارجی τ صفر است ؛
چون که بار افقی است . پس
در هر مقطع تنش در بالا صفر است
* در پایین $y_0 = h/2$ است
* روی میان تار $y_0 = 0$
بنابراین معادله میان تار نیست .

* تیر با دو جنس 8



با خمش خالص است یا طول را کوچک می‌گیریم.

ε کرنش $= -\dfrac{y}{\rho}$

$\rho\, d\theta$ طول اولیه

$(y-\rho)\, d\theta$ طول ثانویه

$$\sigma = \frac{-Ey}{\rho}$$

در اینجا چون دو ماده داریم در هر نقطه داریم

جایی که جنس اول است $\sigma_1 = -\dfrac{E_1 y}{\rho}$

$$\sigma_2 = -\frac{E_2 y}{\rho}$$

در یک جنسی $\int \sigma\, dA = 0$ بود و نتیجه گرفتیم میان تار از وسط مقطع می‌گذرد.

در اینجا چون دو جنس داریم باید دو انتگرال بگیریم

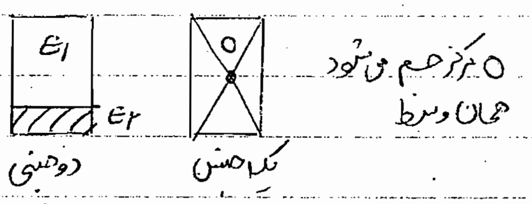
$$* \quad \int_{A_1} \frac{-E_1 y}{\rho}\, dA + \int_{A_2} -\frac{E_2 y}{\rho}\, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A_1} y\, dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y\, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A_1} y \left(\frac{E_1}{E_1} dA \right) + \int y \left(\frac{E_2}{E_1} dA \right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A} \left(\frac{E_i}{E_1} \right) y\, dA = 0$$ مثل مقاومت ①

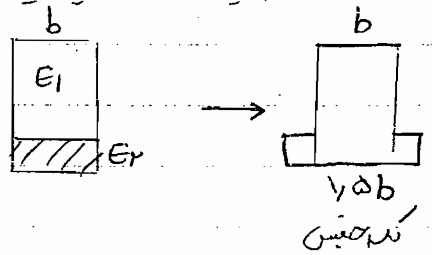
* این رابطه نشان می دهد که باز هم همان تار از مرکز جسم می گذرد اما نه وسط بلکه مرکز وزن دار جسم ؟

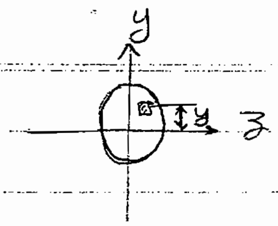


در اینجا دیگر وسط مرکز جسم نمی شود باید از روابط مرکز جسم را بدست آورد.

اگر یک ماده دو جنسی داشتیم می توان پهنا را اضافه کنیم و به یک جنس تبدیل کنیم

اگر $E_2 = 1.5 E_1$





$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

$$\int (\sigma\, dA) \cdot y = -M$$

گشتاور نسبت به محور z

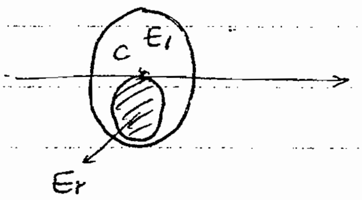
$$\Rightarrow \int_A -\frac{Ey}{\rho}\, dA \cdot y = -M$$

$$-\frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I} = -M \longrightarrow$$ مقایسه با $\sigma = -\frac{Ey}{\rho}$

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{My}{I}$$

مقاومت !

در اینجا 8



$$* \quad \int \sigma_1 dA\, y + \int \sigma_2 dA\, y = -M$$

$$\Rightarrow \int \left(-\frac{E_1 y}{\rho}\right) y\, dA + \int \left(-\frac{E_2 y}{\rho}\right) y\, dA = -M$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_1}{\rho}\right) \int y^2 dA + \left(\frac{E_2}{\rho}\right) \int y^2 dA = M$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{\rho} \left[\int_{A_1} y^2 dA + \left(\frac{E_2}{E_1}\right) \int_{A_2} y^2 dA \right] = M$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{\rho} \left[\int \frac{E_1}{E_1} y^2 dA + \int \frac{E_2}{E_1} y^2 dA \right] = M$$

$$\frac{E_1}{\rho} \left[\int \frac{E_i}{E_1} \cdot y^2 dA \right] = M$$

* $\sigma = -\dfrac{E_i y}{\rho}$

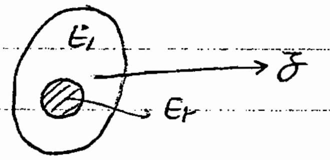
* $\dfrac{E_1 I}{\rho} = M$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{-E_i M y}{E_1 I}}$$

$$\boxed{I = \int \frac{E_i}{E_1} y^2 \, dA}$$

می‌توان اینجا هم y را تغییر نداد در عوض پهنا را تغییر دهیم و به یک جنس تبدیل کنیم

تیر از دو یا چند جنس 8

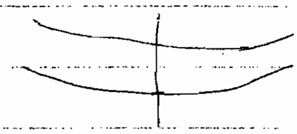


$$\bar{y}_c = \frac{\int_A y E_i \, dA}{\int_A E_i \, dA}$$

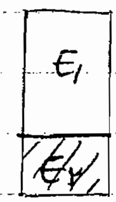
$$I_z = \int \frac{E_i}{E_1} \, y^2 dA$$

$$\sigma = -\frac{E_i}{E_1} \cdot \frac{My}{I}$$

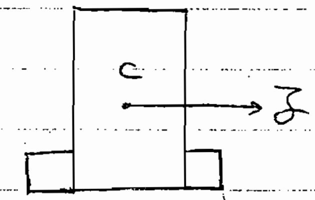
کرنش $\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$



خم شدن تیر طوری است که کرنش در ارتفاع تیر خطی تغییر می‌کند و به جنس کار ندارد
وقتی تبدیل به تنش می‌شود چون در E ضرب می‌شود به E_i بستگی پیدا می‌کند



اگر مقطعی به این صورت باشد می‌توان
به نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ پهنای جنس دوم
را زیاد کرد و یک جنسی گرفت



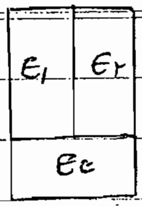
$$\bar{y}_c = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA}$$

از این روش در جاهایی که متقارن است می‌شود
استفاده کرد.

$$I = \int y^2 dA$$

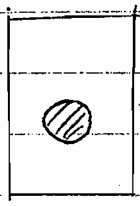
$$\sigma_1 = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_2 = -\frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{My}{I}$$



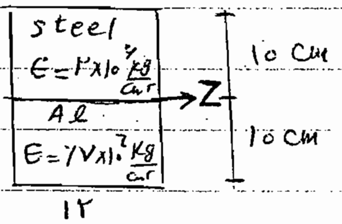
$$\bar{x}_c = \frac{\int_A x E_i \, dA}{\int_A E_i \, dA}$$

معمولاً در این مسائل محورهای اصلی خواسته نخواهد شد.



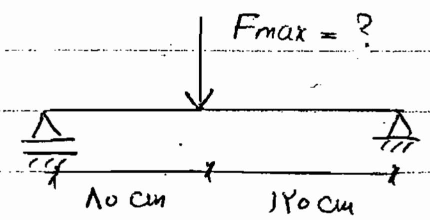
در این حالت دایره به صورت
بیضی در می آید.
بهتر است از همان روش قبلی
استفاده شود.
بیضی ای که فقط پهنای آن
تغییر می کند ارتفاع آن ثابت است

مثال:



$$\sigma_{sw} = 1500 \ kg/cm^2$$

$$\sigma_{aw} = 800 \ \frac{kg}{cm^2}$$



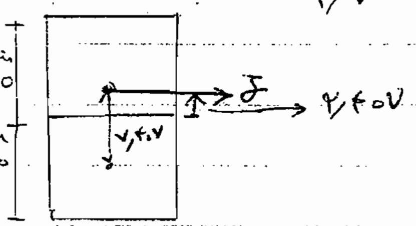
حل – اول مرکز مقطع ⇐ اول نسبت به z مرکز را تعیین می کنیم

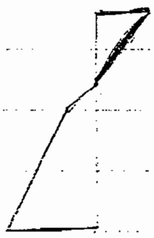
چون زیر محور z بود ⊖ شد

$$\bar{Y}_c = \frac{+(2\times10^6)(12\times10)(5) - (0.7\times10^6)(12\times10)(5)}{120\times2\times10^6 + 120\times0.7\times10^6}$$

$$= \frac{6.5}{2.7} = 2.407 \ cm$$

که به این شکل در می آید





$$* \quad I_T = \frac{12(10^3)}{12} + 120(7.407)^2 + \frac{2\times10^6}{0.7\times10^6}\left[\frac{12\times10^3}{12} + (120)(5-2.407)^2\right] \quad al \rightarrow E_1$$

$$I_T = 12746 \ cm^4$$

در اینجا هر دو جنس همزمان نمی‌توانند به تنش مجاز برسند.

در اینجا $\sigma \sim \frac{E_i}{E_1}$ همبستگی دارد.

فرض می‌کنیم $\Rightarrow \sigma_{st} = 1500 \ \frac{kg}{cm^2}$

تنش فشاری است با ۱۱ قرار دارد. $\quad -1500 = -\frac{2\times10^6}{0.7\times10^6} \times \frac{M}{I} \times \overbrace{7.593}^{y=10-2.407} \Rightarrow \frac{M}{I} = 69.14$

$\sigma_{Al} \Rightarrow \frac{M}{I} \times 12.407 = 857.85 > 800$ غ‌ق‌ق چون از مقدار مجاز بیشتر شد.

پس برعکس عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sigma_a = 800 \ \frac{kg}{cm^2} \\ \sigma_{st} = 1500 \times \frac{800}{857.85} = 1398.8 < 1500 \ \frac{kg}{cm^2} \end{cases}$$ قابل قبول

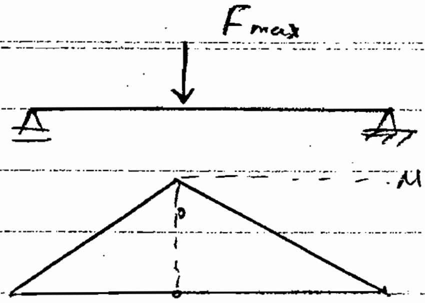
یا

$$\begin{cases} |\sigma_{st}| = \frac{2\times10^6}{0.7\times10^6}\frac{M}{I} \times 7.593 \leq 1500 \Rightarrow \frac{M}{I} \leq 69.14 \\ |\sigma_{al}| = \frac{M}{I} \times 12.407 \leq 800 \Rightarrow \frac{M}{I} \leq 64.47 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{I} = 64.47$$

با داشتن I و M را حساب می‌کنیم:

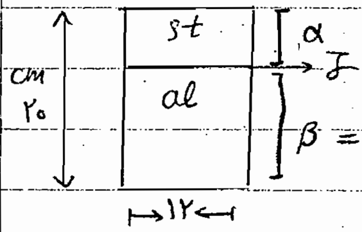
$$\Rightarrow M = 64.47 \times 12746 = 821730 \ kg\,cm$$



$$M_{max} = F_{max}\,\frac{ab}{L}$$

$$\frac{F_{max} \times 80 \times 120}{200} = 821720 \Rightarrow \boxed{F_{max} = 17119\ kg}$$

مثال: در مسئله قبل ارتفاع مقطع فولادی و آلومینیومی را طوری تعیین کنید که تار خنثی درست در خط جدایی این دو جنس باشد سپس F_{max} را بیابید ؟



$Q_{st} > 0$

$Q_{AL} < 0$

بالا ① $\quad (12\alpha)(2\times10^{6})(\alpha/2)$

پایین ① $\quad -(12)(20-\alpha)(0.7\times10^{6})\left(\frac{20-\alpha}{2}\right)$

$$\Rightarrow Q_{\text{بالا}} + Q_{\text{پایین}} = Q_Z^{\text{کل}} = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 - 0.7(20-\alpha)^2 = 0$$

یا $\quad \alpha^2 = 0.35(20-\alpha)^2$

یا $\quad \pm\alpha = \sqrt{0.35}\,(20-\alpha)$

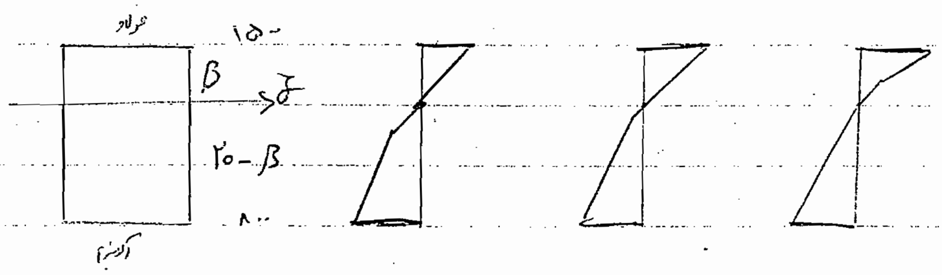
α مثبت قابل قبول است

$$\begin{cases} \alpha = 11.8 - 0.59\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 7.42} \\ -\alpha = 11.8 - 0.59\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha < 0$ غقق

بقیه را حل کنید ؟

مثال: در مسئله قبل ضخامت α فولاد و آلومینیوم را طوری تعیین کنید که تنش ها هر دو با هم به مقدار مجاز برسند



$$\begin{cases} |\sigma_{st}| = ۱۵۰۰ = \dfrac{M}{I}\,\beta \times \dfrac{۲\times۱۰^{۶}}{۰/۷\times۱۰^{۶}} \\ |\sigma_{al}| = ۸۰۰ = \dfrac{M}{I}\,(۲۰-\beta) \end{cases}$$

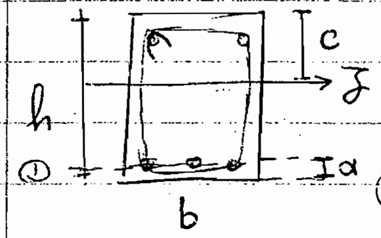
هر دو به مقدار مجاز رسند

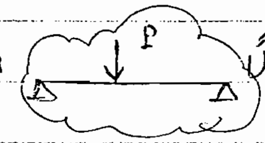
$$\frac{15}{8} = \frac{\beta \times 2}{(20-\beta)(6.7)}$$

از اینجا β بدست می آید یعنی محل تار خنثی معلوم می شود.

پس مثل مسئله قبل یک α می گیریم برای ضخامت فولاد و 1 کل را نسبت به تار خنثی ای که بدست آوردیم صفر قرار می دهیم یعنی اول محل تار خنثی را تعیین کردیم بعد ممان‌ها را چون تار خنثی از اول معلوم نبود کجا بود.

* بتن آرمه :





بتن فشار را می تواند تحمل کند اما کشش را نمی تواند تحمل
در این تیر بالا فشاری است پس
بتن فشار را تحمل می کند اصلاً می شود میلگرد نگذاشت

A_s مساحت فولادهای پایینی

– در سیستم‌های فشاری معمولاً فولادها را در نظر نمی گیرند یعنی در بالا

– در سیستم‌های کششی یعنی پایین فقط فولاد را در محاسبه در نظر می گیرند

ممان بالا فشاری — ممان فولادها — ممان پایین کششی = فولاد

مدول ارتجاعی بتن را مبنا قرار دهیم

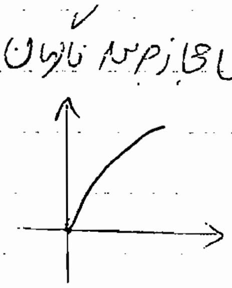
$$Q_Z = bc \times E_c \cdot \frac{c}{2} - A_s E_s (h-c-\alpha) = 0$$

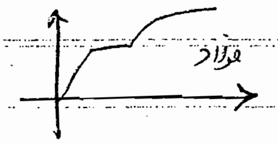
α یک مقدار بتن روی میلگردها می ریزند برای جلوگیری از آتش سوزی

$$I_Z = \frac{bc^3}{3} + A_s \frac{E_s}{E_c} (h-c-\alpha)^2$$

از اثر I محور 1 برای فولاد صرف نظر کردیم.

معمولاً بهتر است فولاد به تنش مجاز برسد چون اگر بتن به تنش مجاز برسد ناگهان ممکن است ترک بردارد و خراب شود





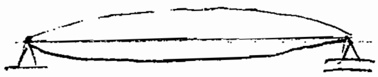
در مقطع بتنی نرم باید خطی فولاد قرار داد.

دیتن
در بتن و دیگر این فرمولها صادق نیستند چون الان آیین نامه برای طراحی از بارهای استفاده می کند تا تیر خراب شود.
وقتی از بارهای استفاده می کنیم معلوم نیست که آیا تنش وارد قسمت غیرخطی شده باشد.

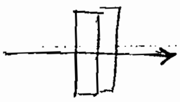
حل این قسمت حل الاستیک تیرهای بتن - آرمه است. در بتونها مقطع متقارن است یعنی فولاد بالا و پایین باهم برابر است. در تیر این طوری است.

* تغییر درجه حرارت در دو جنس ها ۵

برابر تغییر حرارت چون جنس ها متفاوت است و ضریب انبساط حرارتی متفاوت است

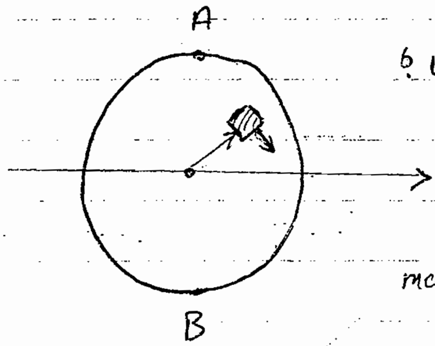


در حالت کلی خم می شوند حتی اگر باری روی آن نباشد



* می توان از دو فلز مختلف ساخته شده که به هم وصل می شوند طوری طراحی می شود که در درجه حرارت زیاد با خم شدن اتصال برقی از بین برود

* پیچش + خمش ۸



ساده ترین مقطعی که هر دو را خوب تحمل می کند مقطع دایره است ۶

پیچش

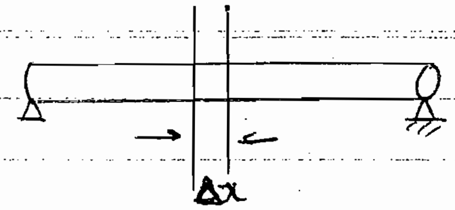
$$\tau = \frac{T\rho}{J_0}$$

فاصله از مرکز دایره

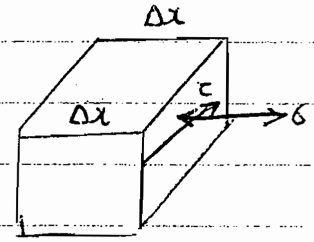
* گشتاور پیچشی در تمام دور دایره تنش برشی max ایجاد می کند

* گشتاور خمشی در بالا و پایین تنش محوری max ایجاد می کند.

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$



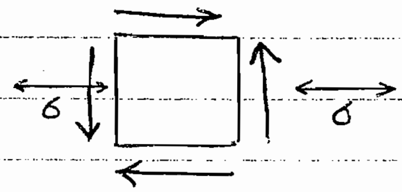
المان



تنش برشی عمود در شعاع

نقاط A و B بیشترین σ و τ را دارند

از بالا به المان نگاه کنیم



* با استفاده از آنالیز تنش تنش عمودی max و تنش برشی max را می یابیم ؟

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

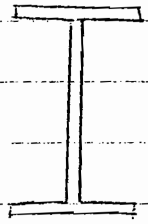
در اینجا می شود

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{max} &= \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \\ \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \end{aligned}}$$

تنش برشی در کل المان بیشینه شده در عین حال تنش عمودی هم بیشتر شده است ؟

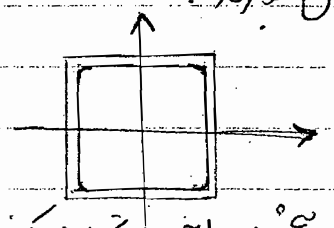
باید المان را از A و B بگیریم که هم σ و τ بیشتر باشد.

ما پیچش را در همه‌ی مقاطع می‌توانیم حساب کنیم 8



مقطع I در مقابل پیچش
ضعیف است

مقاطع بسته در مقابل پیچش بهترند ؛



این مقطع «قوطی» هم پیچش را خوب تحمل می‌کند هم خمش را .

پیچش $\tau = \frac{T}{2tA_m}$

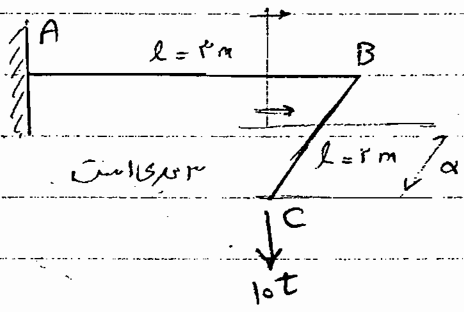
تمام المان‌هایی که در بالا هستند ؛
τ همین مقدار را دارد

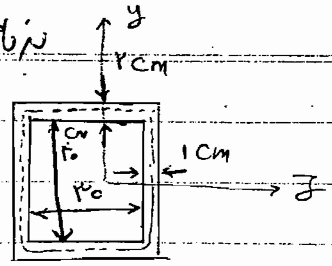
خمش $\sigma = \frac{M}{W}$

کنترل گوشه‌های داخلی الزامی است از طرفی بالا و پایین را هم باید چک کرد چون σ max است در گوشه‌های داخلی هم تنش برشی زیاد می‌شود .

۸۴/۷/۱۲ بنام خدا ج۴

مثال 8





تنش max عمودی و برشی در تمام سازه کجاست ؟

$0 \leq \alpha \leq 2$ $\quad\quad$ $0 \leq x \leq 3$

حل — $BC:\begin{cases} V_y = 10t \\ M = 10\alpha \\ T = 0 \end{cases}$ $\quad\quad$ $AB:\begin{cases} V_y = 10t \\ M = -10x \\ T = 10 \times 2 = 20 \end{cases}$

در تمام نقاط AB یکسان است.

نقطه B : $\begin{cases} V_y = 10 \\ M = 20\ tm \\ T = 0 \end{cases}$ $\quad\quad$ نقطه B $\begin{cases} V_y = 10 \\ M = 0 \\ T = 20 \end{cases}$

شکل ۳ بعدی است بار ۱۰t در BC نقطه B را خم می‌کند در حالیکه در مقطع AB بار ۱۰t باعث پیچش نقطه B می‌شود.

$A\begin{cases} V = 10 \\ M = 30 \\ T = 20 \end{cases}$

مقطعی که در آن اثر نیروهای بیشتر است مقطع A است که از همه خطرناکتر است

$* \quad \underset{\text{در نوارهای بالا و پایین مقطع}}{\tau} = \dfrac{T}{2tA_m} = \dfrac{20 \times 10^5}{2(2)(31 \times 42)} = 384.\ \dfrac{kg}{cm^2}$

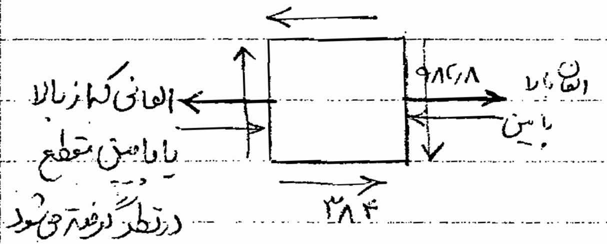
نوار قائم $\tau = \dfrac{20 \times 10^5}{2(1)(31 \times 42)} = 768.\ \dfrac{kg}{cm^2}$

$* \quad I_z = \dfrac{32(44)^3}{12} - \dfrac{30(40)^3}{12} = 67150\ cm^4$

$* \quad$ در بالا و پایین مقطع $\sigma = \pm \dfrac{30 \times 10^5 \times 22}{67150} = \pm 982/87\ \dfrac{kg}{cm^2}$

بالا کشش - پایین فشاری

در تراز اتصال نوارهای افقی و دائم $\sigma_2 = \pm \frac{40 \times 10^5 \times 20}{67150} = \pm 894.5 \ \frac{kg}{cm^2}$

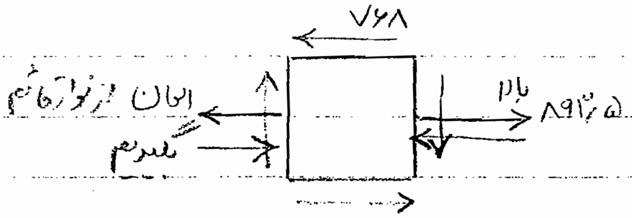


max تنش برشی $\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{982.8}{2}\right)^2 + (384)^2} = 623.6 \ kg/cm^2$

تنش‌های اصلی:

اتصال بالا بگیریم $\sigma_{1,2} = \frac{982.8}{2} \pm 623.6 < \begin{matrix} 1115 \\ -132 \end{matrix}$

پایین ← فشار $\sigma_{1,2} = -\frac{982.8}{2} \pm 623.6 < \begin{matrix} 132 \\ -1115 \end{matrix}$



$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{894.5}{2}\right)^2 + (768)^2} = 888.5 \ kg/cm^2$

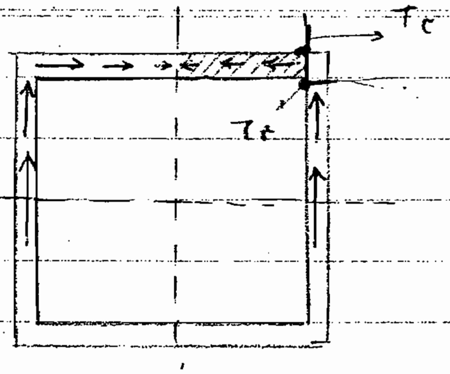
$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{894.5}{2} \pm 888.5 < \begin{matrix} 1335.2 \\ -441.7 \end{matrix}$

$\sigma_1, \sigma_2 = -\frac{894.5}{2} \pm 888.5 < \begin{matrix} -1335.2 \\ 441.7 \end{matrix}$

بیشترین کشش را در بالا داریم 1115 بیشترین تنش در نوار دائم

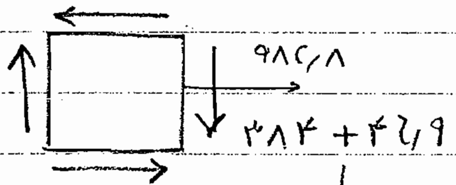
بیشترین فشار را در پایین داریم 1115

تنش برشی ناشی از پیچش



$$\tau_2 = \frac{VQ}{It} = \frac{10000\,(2\times 15)(21)}{67150 \times 2} = 46.9 \ \frac{kg}{cm^2}$$

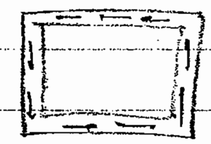
تنش برشی لازم ناشی
از پیچش در نوار بالا



در این المان اعمال قبلی را دوباره تکرار می‌کنیم
سپس τ_{max} را دوباره می‌یابیم

چرا جمع شد؟
چون به هر حال در ۲ تا از گوشه‌ها τ ناشی از پیچش و برش
با هم هم جهت می‌شوند!

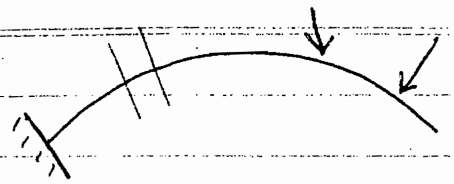
پیچش



چون تنش های برشی
ناشی از پیچش همه در یک
جهت اند

$$\tau_4 = \frac{10000 \times (2\times 16)(21)}{67150 \times 1} = 100.1 \ \frac{kg}{cm^2}$$

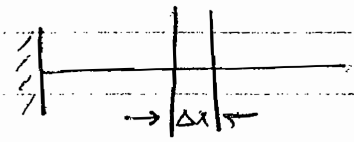
τ_4 را در المان قائم می‌گذاریم



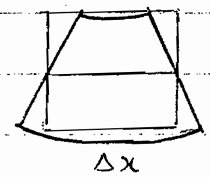
در هر مقطع اگر بخواهیم تنش های عمودی

را حساب کنیم با فرمول $\sigma = -\frac{My}{I}$

اختلاف داریم ؟

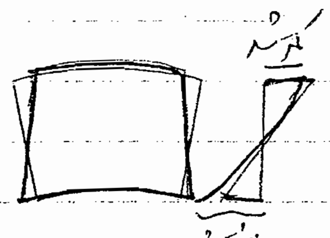


در تیر مستقیم دو مقطع به فاصله Δx می گرفتیم



ε خطی تغییر می کند $\varepsilon = -\frac{y}{\rho}$

اما در مقطع قوسی داریم که از ابتدا خود المان به حالت خمیده هست



در اینجا ε دیگر خطی نخواهد بود
چون طول اولیه خودش تغییر
می کند

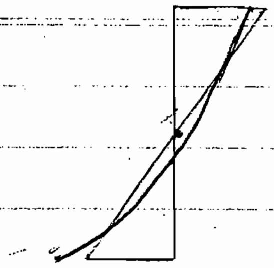
$$\varepsilon = \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}}$$

* خارج قوس طول های اولیه بزرگتر است پس تغییر ها **کمتر شد** و درون قوس هم چون طول اولیه کمتر است پس تغییر بیشتر از حالت خطی است

* تنش هم به همین صورت است

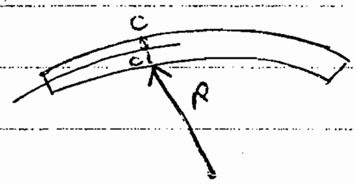
وقتی تنش خطی بود داشتیم $\int \sigma dA = 0$

و از آن نتیجه گرفتیم که تار خنثی در مرکز است اما در اینجا دیگر تار خنثی بر مرکز منطبق نیست



تارخنثی پایین‌تر آمده است چون باید
جمع دو نیروی بالا و پایین باید صفر شود
پس اندکی پایین می‌آید .

تارخنثی همیشه پایین‌تر می‌آید .



R شعاع قوس

c y_{max} است

$\frac{R}{c}$ 1/2 قوسی که خیلی خمیده شده است

$$\sigma = -K\frac{My}{I}$$

K inside , K oatsid

داده شده است

* هر چه $\frac{R}{c}$ بزرگتر باشد K خارج و داخل به هم نزدیکتر می‌شوند

برای قوسهای سنگی معمولاً $\frac{R}{c} \simeq$ ۵ تا ۶ است که قابل ملاحظه است

در قوس بتن آرمه و فولادی $\frac{R}{c}$ تا ۳۰ ، ۴۰ هم می‌رسد که خطا آنقدر کم می‌شود که اصلاً دخالت
داده نمی‌شود .

POOMAR

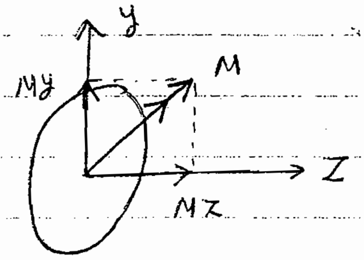
خمش دوجانبه :

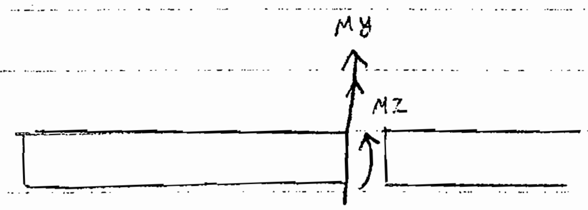
خمش خالص : فقط حول یک محور M_z یا M_y داریم ؛

خمش ساده : M_z, V_y یا M_y, V_z داریم ؛

اما در خمش دوجانبه هم M_z داریم هم M_y که می‌تواند خالص هم باشند ؛ یعنی V ندارد!

خمش مرکب : که هم M دارد و هم N — N, M_z / N, M_y, M_z





هر کدام یک تنشی دارند که

$$\sigma_1 = \frac{-M_z y}{I_z}$$

چون محورهای z,y را جابدیم

$$\sigma_2 = \frac{+M_y z}{I_y}$$

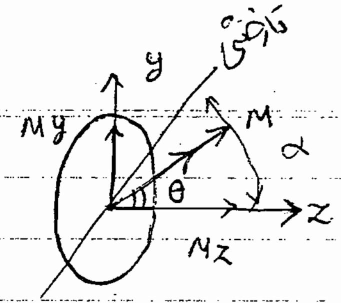
ناشی از هر دو

$$\sigma = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

* تار خنثی وقتی است که تنش ها صفر باشند :

$$0 = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

اگر فقط یکی از M ها باشد تار خنثی منطبق بر محور دیگر است در غیر این صورت تار خنثی محور نمی‌شود.



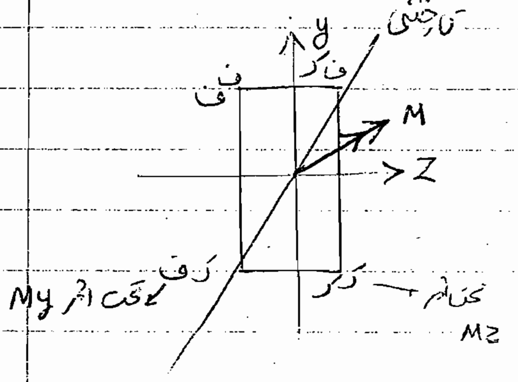
$$\begin{cases} M_z = M\cos\theta \\ M_y = M\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{-M\cos\theta\, y}{I_z} + \frac{M\sin\theta\, z}{I_y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y} \times \tan\theta$$

α وقتی با θ برابر است که $I_z = I_y$ باشد



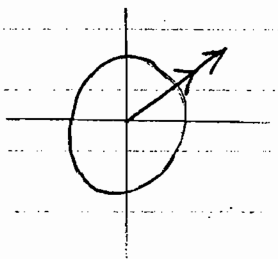
$I_y < I_z$ است

اگر تنک M داشته باشیم
تارخنثی به سمت y متمایل
می شود

* در اینجا هم تنش با فاصله از محور متناسب است هرچه از تارخنثی دور شویم σ ها زیاد می شوند

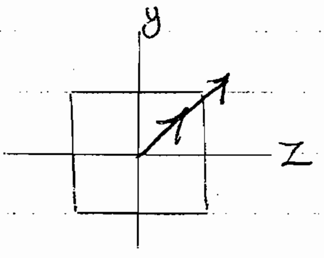
مثلاً در مقطع مستطیلی یکی از گوشه ها بزرگترین تنش را خواهد داشت ؛

دایره



خمش ؛ خمش ساده می شود
. تارخنثی منطبق بر محور خود M است

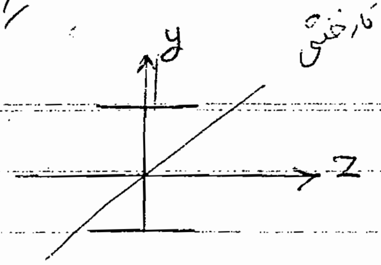
$I_z = I_y$ هر نوع مقطع 8



تارخنثی بر M منطبق است

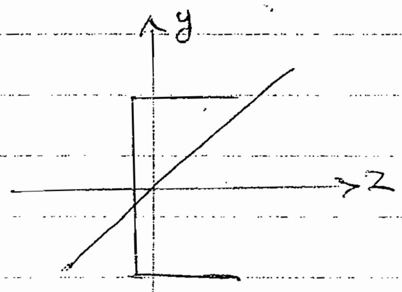
$I_z = I_y$

تار خنثی



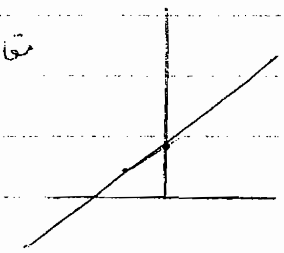
$$\left|\sigma_{max}\right| = \left|\frac{M_Z}{W_Z}\right| + \left|\frac{M_Y}{W_Y}\right|$$

در یک مقطع مستطیلی 8
با I شکل یا II
می توان تنش های max
را با هم جمع کرد



در این جا باید دورترین
نقاط را معین کنیم و تنش ها
را در آن جا بیابیم و کشش و فشاری
را مشخص کنیم

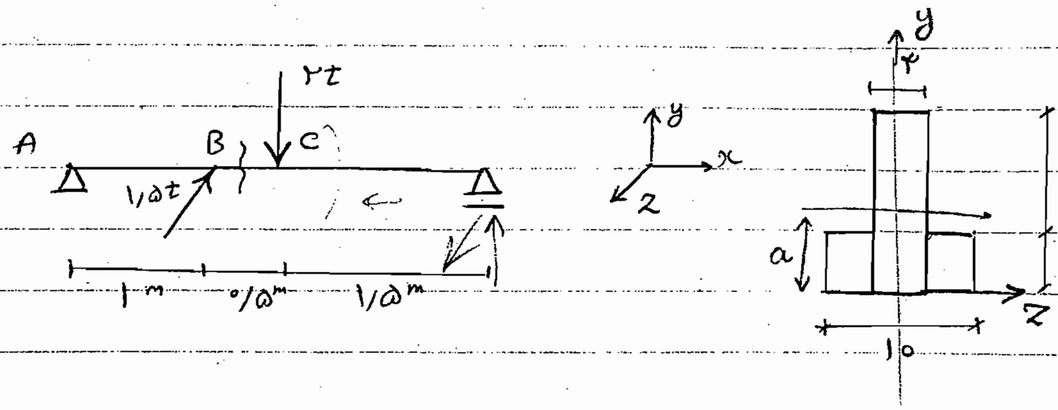
مقاطع شکسته



در این مقطع می توان تنش ها را در
تمام گوشه ها یافت و بالاخره به مقدار
max تنش فشاری و کششی می رسیم

۸۴/۷/۲۳ بنام خدا ج ۵

مثال ۴



تنش خمشی max را بیابید؟

اول تار خنثی $\Rightarrow \quad a = \dfrac{(10\times3)(1.5) + (20\times3)(13)}{10\times3 + 20\times3} = \dfrac{27.5}{3} = 9.167^{cm}$

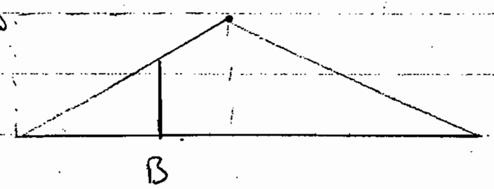
تشکیل پایین $\quad I_z = \dfrac{10(3)^3}{12} + (10\times3)(9.167-1.5)^2$

بالا $\quad I_z = \dfrac{3(20)^3}{12} + (3\times20)(13-9.167)^2$

$\Rightarrow I_{tz} = 4667\ cm^4$

$I_y = \dfrac{3(10)^3}{12} + \dfrac{20(3)^3}{12} = 295\ cm^4$

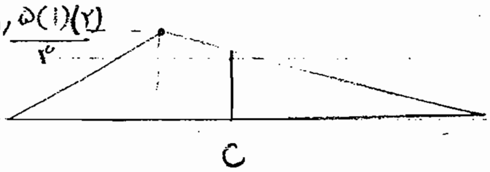
$\dfrac{2(3)}{4} = 1.5\ t.m$



: M_z

بار 1.5^t را در نظر نمی‌گیریم.

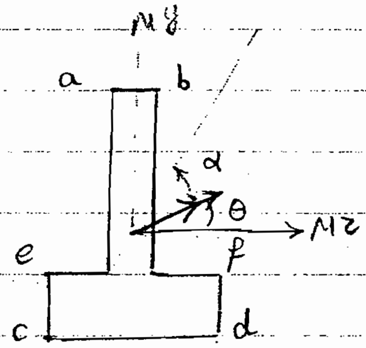
$\dfrac{Pab}{\ell} = \dfrac{1.5(1)(2)}{3} = 1\ t.m$



: M_y

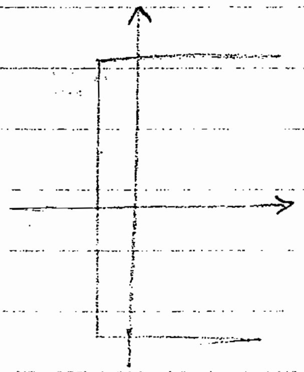
در مقطع B $\quad M_z = \dfrac{1}{1.5} \times 1.5 = 1\ t.m$

در مقطع C : M_y : $= \frac{۱/۵}{۲} \times ۱ = ۰/۷۵ \; t.m$



تارخنثی می‌تواند در مقاطع مختلف شکل‌های مختلفی بگیرد.

نقاط a و b و c و d می‌توانند بیشترین تنش را داشته باشند
باید بررسی کنیم که چه نقاطی ممکن است دورترین نقاط قرار بگیرند
اگر تعداد نقاط زیاد باشد بهتر است تارخنثی را بیابیم.



در بالا داریم
باید نقاط گوشه را
با تنش max
حساب کنیم تنش max
ها باهم جمع شوند.

مقطع B : $tg\alpha = \tan\theta \cdot \frac{I_z}{I_y}$ θ: زاویه تنش‌ها

$\tan\theta = ۱ \Leftarrow M_z = M_y$ *

$\Rightarrow \tan\alpha = ۱ \times \frac{۴۶۶۷}{۲۹۵} \Rightarrow tg\alpha = ۱۵/۸۲^\circ$

پس دورترین نقاط عبارتند از: d, e

$\sigma_{کل} = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$

* $\sigma_d = \frac{-۱۰^۵ \times (-۹/۱۲۷)}{۴۶۶۷} + \frac{۱۰^۵ (۵)}{۲۹۵} = ۱۸۹۱/۳$

فشاری

$$* \quad \sigma_e = \frac{-10^5(-6.167)}{4667} + \frac{10^5(-5)}{295} = -1562.8 \ \frac{kg}{cm^2}$$

مقطع C :

$$M_z = 1.5$$
$$M_y = 0.75$$

$$\tan\alpha = \frac{0.75}{1.5} \times \frac{4667}{295} \Rightarrow tg\alpha = 781$$ شیب زیاد

دورترین نقاط e , d :

$$\sigma_d = \frac{-1.5\times10^5(-9.167)}{4667} + \frac{0.75\times10^5(5)}{295}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_d = 1565.8 \ \frac{kg}{cm^2}}$$

$$\sigma_e = \frac{-1.5\times10^5(-6.167)}{4667} + \frac{0.75\times10^5(-5)}{295}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_e = -1073 \ \frac{kg}{cm^2}}$$

از A تا B هر دو تنش زیاد می‌شوند پس σ ها مرتباً بیشتر می‌شوند و مقطع خطرناک همان B است در ناحیه CD هم بدترین وضع مربوط به C است

بین C و B باید چک شود چون یکی زیاد می‌شود یکی کم.

تغییرات تنش خطی است پس داریم:

$$\sigma_e = f(x)$$ تابعی از x می‌شود که خطی است

چون خطی است یا به تدریج زیاد می‌شود یا به تدریج کم می‌شود

پس یا در مقطع B است یا در C ؛

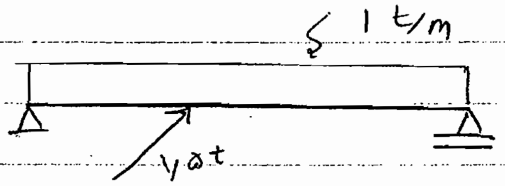
اگر تابع خطی نباشد باید تابع تنش را بنویسیم و مشتق‌گیری کنیم

مقطع B

$\sigma_d = ۱۸۹۱٫۴$

$\sigma_e = -۱۵۲۳٫۸$

مثال :

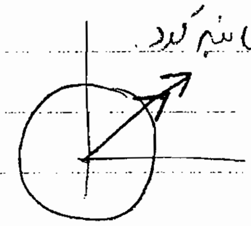


$d = ۲۰\ cm$

* $I = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi (10)^4}{4} = ۷۸۵۴\ cm^4$ اگر مقطع دایره باشد ؛

مقطع B

در مقطع دایره همیشه خمش را می‌توان یکجا بررسی کرد



$M_Z = M_y = 1$

$M = \sqrt{M_Z^2 + M_y^2} = \sqrt{2}$

$$\sigma_{max} = \pm \frac{MR}{I} = \pm \frac{\sqrt{2} \times 10^5 \times 10}{۷۸۵۴} = \pm ۱۸۰٫۶\ \frac{kg}{cm^2}$$

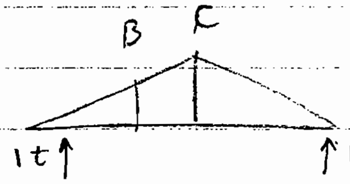
مقطع C

$M_Z = ۱٫۵ \ , \ M_y = ۰٫۷۵$

$\Rightarrow M = \sqrt{۱٫۵^2 + ۰٫۷۵^2} = ۱٫۶۸\ t.m$

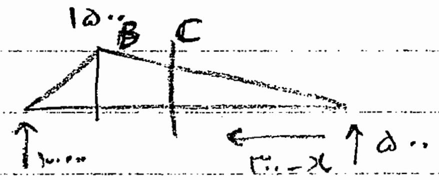
$$\Rightarrow \sigma_{max} = \pm \frac{MR}{I} = \pm \frac{۱٫۶۸ \times 10^5 \times 10}{۷۸۵۴} = \pm ۲۱۳٫۹\ \frac{kg}{cm^2}$$

از نقطه B به C می رویم محل σ_{max} تغییر می کند ؛ باید مشتق بگیری کرد ؛



$$M_x = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

$M_Z = (1000\,x)\,kg.cm$



$M_y = 500(300 - x)$

$$\Rightarrow M_x = 500\sqrt{5x^2 - 600x + 90000}$$

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{500\,(10x - 600)}{\bigcirc} = 0$$

$$x = 60$$

* چون x در فاصله $100 < x < 150$ باید قرار بگیرد ؛ پس قابل قبول نیست ؛

اگر عدد در محدوده قرار نگیرد باید M را بررسی کنیم .

* خمش مرکب 8

سر همراه لنگر نیروی محوری هم داریم ؛

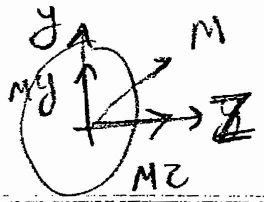
$$\begin{cases} M_Z, N \\ M_y, M_Z, N \end{cases}$$ یا

8 M_Z, N

$$\sigma_1 = \frac{-M_Z\,y}{I_Z}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A}$$

$+\frac{M_z y}{I_z}$ $\quad -\frac{M_y z}{I_y}$



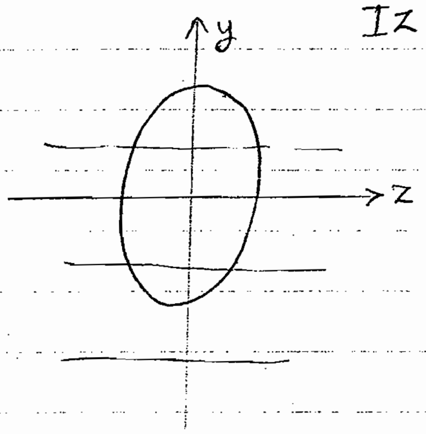
$$* \quad \sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{N}{A}$$

: N, M_z, M_y

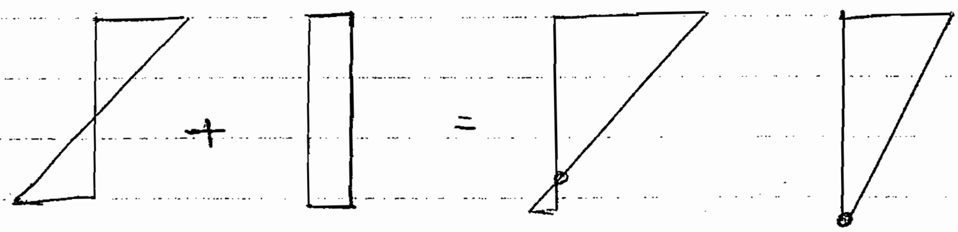
$$* \quad \sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{N}{A}$$

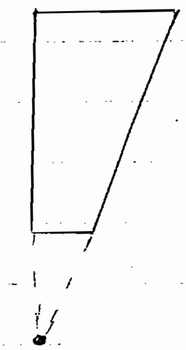
* حالت اول :

$$0 = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{N}{A}$$



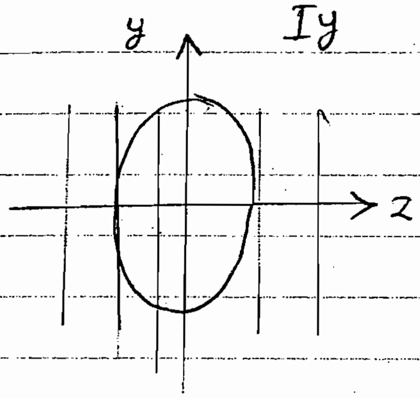
* « تار خنثی خطی است موازی محور z ها . »
ممکن است بالا یا پایین یا حتی مقطع را قطع نکند . یا مماس بر مقطع باشد .





$$\sigma = \frac{MyZ}{Iy} + \frac{N}{A}$$

8 My, N



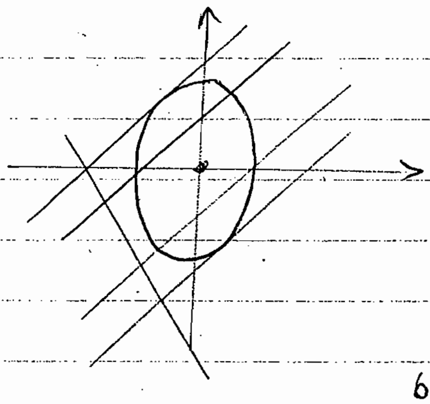
«تارخنثی خطی است موازی محور y»

N و Mz, My

$$\sigma = \frac{-MZy}{Iz} + \frac{MyZ}{Iy} + \frac{N}{A}$$

$$0 = ay + bz + c$$

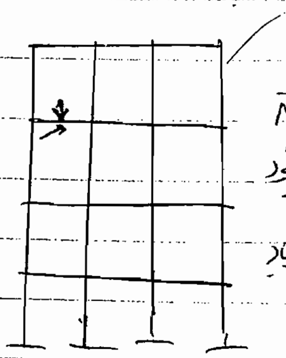
تارخنثی یک خط است



از مرکز نمی‌گذرد چون N داریم

* تنش باز هم با فاصله از تارخنثی متناسب است؟

بزرگترین تنش ها مربوط هستند به دورترین نقاط از تارخنثی



اگر تغییر درجه حرارت داشته باشیم نیروی محوری ایجاد می‌شود

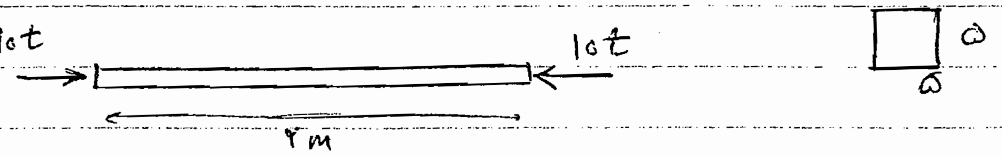
یا در اثر زلزله نیروی محوری ایجاد می‌شود.

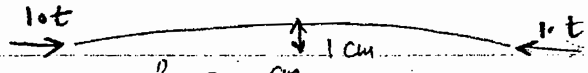
معمولاً ستون‌ها زیر خمش مرکب اند

در حالت کلی اعضای سازه زیر خمش مرکب اند

خمش دوجانبه، خمش مورب، خمش مایل، خمش اریب.

مثال





محور میله 1^{cm} بالاتر باشد

حل ـ σ_1 فقط فشار از نیروی محوری $= \dfrac{-10000}{25} = -400 \ \dfrac{kg}{cm^2}$

اما 1^{cm} تغییر مکان محور در وسط میله باعث می‌شود که نیروی محوری از وسط نگذرد

$$M = 10^{t} \times 1^{cm} = 10 \ t.cm$$

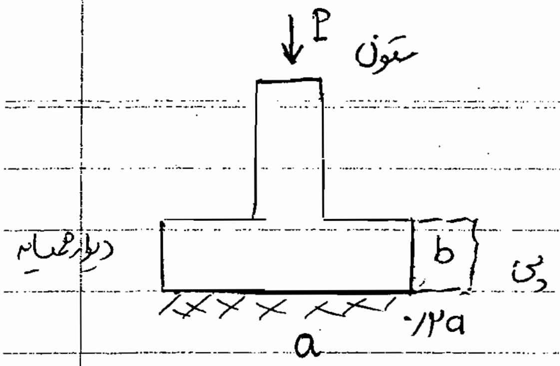
$$\sigma_{max} = -\left|\frac{M}{W}\right| + \frac{N}{A}$$

از نظر فشاری چون فشار بیشترین تنش را ایجاد می‌کند.

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{5 \times 5^2}{6} = 20/83$$

$$\Rightarrow \underset{\text{فشار}}{\sigma_{max}} = -\frac{10000}{20/83} - 400 = -880/1 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\underset{\text{کشش}}{\sigma_{max}} = 480/1 - 400 = 80/1 \ \frac{kg}{cm^2}$$



حالت اول $\frac{P}{ab}$

حالت دوم
$$\begin{cases} M = P(0.1a) = 0.1Pa \\ N = P \end{cases}$$

محور با اندازه ۰/۱a جابجا شده است

$$\sigma = \frac{P}{(1.2a)b} + \frac{(0.1)Pa}{\frac{b(1.2a)^2}{6}}$$

تنش اعمال شده به خاک اگر بیشتر از تنش خاک باشد می‌خواهیم طول خاک را زیادتر کنیم

$$= \frac{P}{1.2ab} + \frac{P}{2.4ab} = \frac{3P}{2.4ab}$$

پی نباید نامتقارن مقطع را زیاد کرد

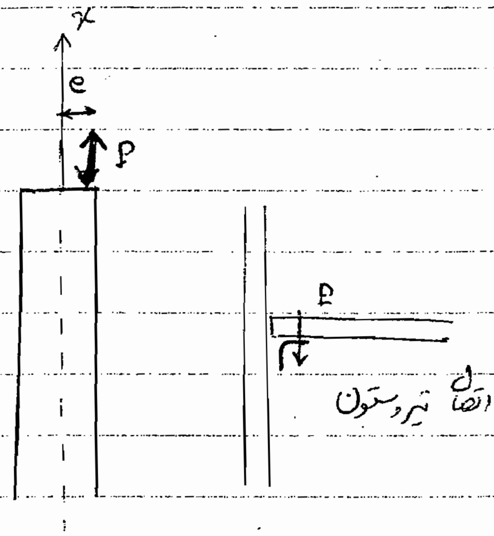
$$= \frac{P}{0.8ab}$$

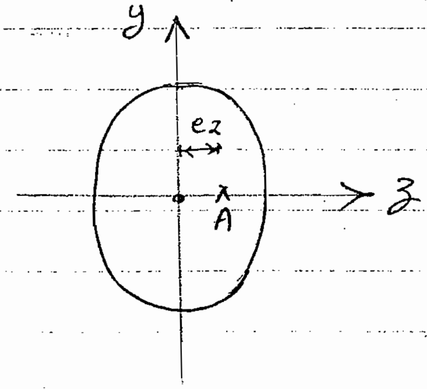
پی گاهی را بزرگ کنیم به این معنا نیست که تنش را کمتر کردیم بلکه وضع را بدتر کردیم

خمش مرکب :

وقتی بار خارج از محور باشد :

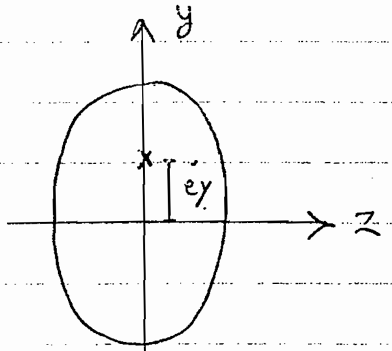
نیرو باعث ایجاد خمش مرکب می‌شود



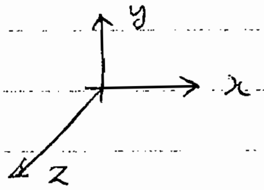


$$\begin{cases} N = P \\ M_y = P e_z \end{cases}$$

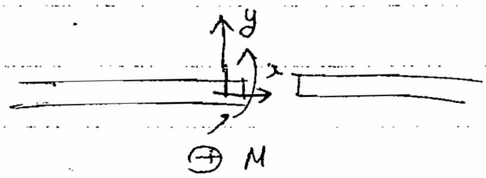
$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P e_z . Z}{I_y}$$ کششی P



$$M_z = -P e_y$$



گشتاور خمشی ⊕ x را روی y می‌برد ؟



$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{(-Pey)(y)}{Iz} = \frac{P}{A} + \frac{(Pey)Y}{Iz}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{(Pez)(Z)}{Iy}$$

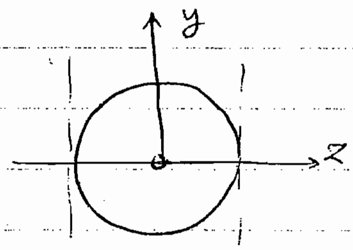
تار خنثی $\quad \frac{P}{A} + \frac{(Pez)Z}{\underbrace{Iy}_{(Ary^2)}} = 0 \Rightarrow \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ez Z}{ry^2}\right) = 0$

$$Z = -\frac{ry^2}{ez}$$

* اگر ez مثبت باشد تار خنثی در طرف مقابل قرار می‌گیرد

تار خنثی همیشه یکطرف آن کششی است یکطرف آن فشاری

اگر یک تکه فشاری بتن در دست داشته باشیم و فرض کنیم که اصلاً کشش تحمل نمی‌کند باید بار در جایی قرار بگیرد که تار خنثی مقطع را قطع نکند.



اگر بار در مرکز وارد شود تار خنثی در ∞ قرار می‌گیرد چون $ez=0$ است

هرچه از مرکز دور شویم $|z|$ کمتر می‌شود

تا جائی که مماس بر لبه مقطع شود از این بیشتر نباید بار را بیرون ببریم چون در این صورت تار خنثی مقطع را قطع می‌کند و مقطع ترک می‌خورد.

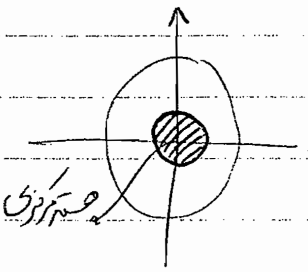
برای مختصات y تار خنثی داریم:

$$y = -\frac{rz^2}{ey}$$

در مورد y هم شکل z جهت y کشیم می بار را طوری تغییر می دهیم که تار خنثی مماس بر مقطع شود.

اگر نسبت به هر دو محور خروج از مرکز داشته باشیم :

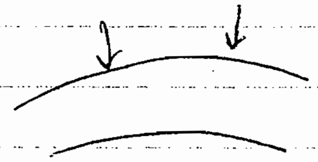
$$* \quad \sigma = \frac{P}{A} + \frac{(Pe_z)Z}{I_y} + \frac{(Pe_y)Y}{I_z}$$



تار خنثی $\quad \frac{P}{A}\left(1 + \frac{e_z Z}{r_y^2} + \frac{e_y Y}{r_z^2}\right) = 0$

در این حالت تار خنثی یک خط است که امتداد آن را می توان تغییر داد بنابراین بار وارد نقطه اثر آن باید روی دایره کوچک یا روی محیط آن باشد و از آن بیرون نرود این سطح را هسته مرکزی مقطع kern of section می گویند

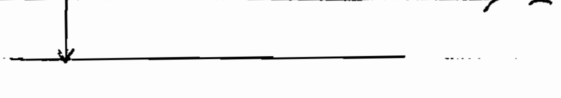
قسمتی از مقطع که نقطه اثر بار اگر در آن قسمت باشد تار خنثی مقطع را قطع نمی کند و روی محیط آن تار خنثی مماس می شود بار باید فشاری باشد تا تنش فشاری ایجاد کند :



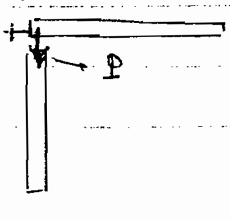
مثل در یک قوس ، همه مقاطع فشرده می شوند

بار باید طوری باشد که نقطه اثر نیرو از هسته مرکزی نگذرد

حالت اول :

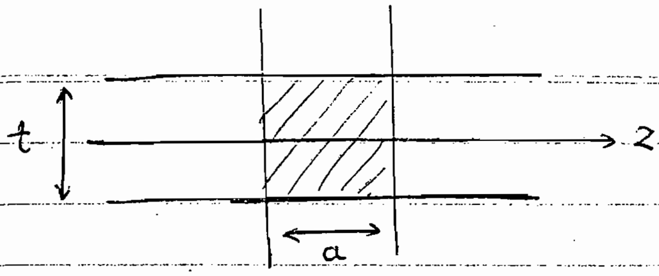


طول e دارد
بار روی آن قرار دارد



مثلاً دیوار آجری
در نظر بگیرید که تیر آهن هایی روی
آن قرار گرفته است ... روی ستون فاصله دارند یک مقدار عکس العمل ایجاد می کند

$$\frac{p}{n} = \frac{2h}{c}$$



$$y = -\frac{r_z^2}{e_y}$$

تار خنثی موازی محور Z است

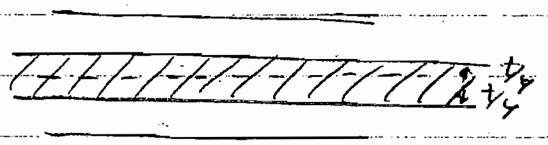
می‌خواهیم مماس بر دیوار شود

مرز می‌خواهیم y برابر $\pm \frac{t}{2}$ شود

$$\begin{cases} r_z^2 = \dfrac{I_z}{A} = \dfrac{at^3/12}{at} = \dfrac{t^2}{12} \\ y = \pm \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

$$\pm t/2 = -\frac{t^2/12}{e_y} \Rightarrow e_y = \mp (t/6)$$

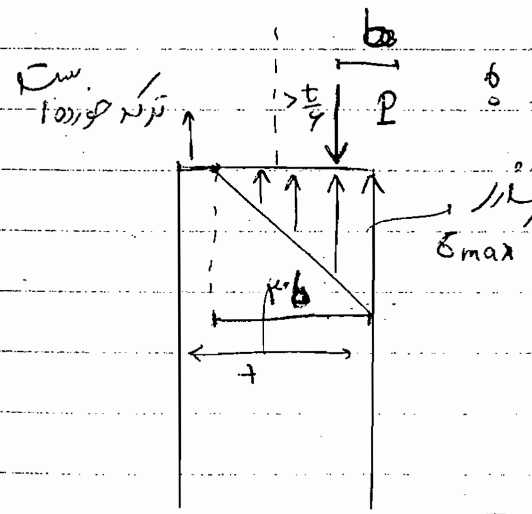
نیرو حداکثر تا $\frac{t}{6}$ می‌توانیم از محور دیوار فاصله بگیریم!



هسته مرکزی یک دیوار می‌شود ۱/۳ وسط آن؟

نیرو باید آن قدر تیر را حرکت داد تا هم آنجا در هسته قرار بگیرد. تیر را با تنها روی دیوار قرار نمی‌دهند (از لحاظ اقتصادی)!

اگر بار خارج از هسته مرکزی بود آیا دیوار خراب نمی‌شود؟



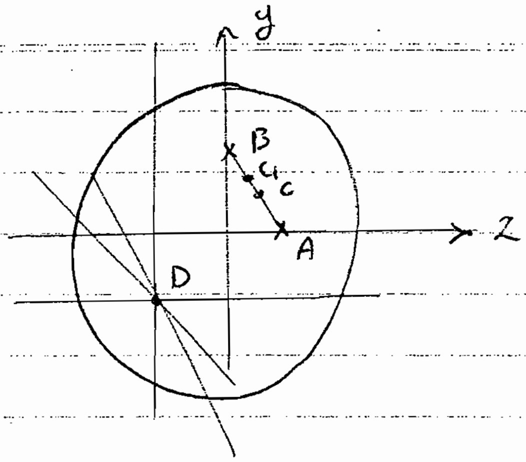
* یک طرف دیوار تحت کشش قرار می‌گیرد و ترک می‌خورد

«وزن را صرف نظر کردیم»

چون بار P باید مثلث را ارضا کند پس باید در ۱/۳ مثلث اعمال شود. پس طول مثلث 3a می‌شود.

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{a \cdot 3b} < \sigma_{cw}$$

مقدار max ۲ برابر متوسط است



اگر بار در نقطه B باشد تار خنثی موازی z است

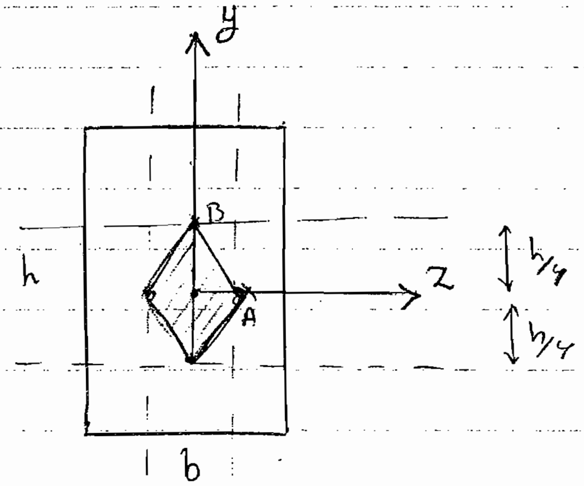
، در نقطه A موازی y است

اگر بار در نقطه C باشد حاصل تقسیم بر دو بار در A و B است

در نقطه D اگر بار P را در C بگذاریم تنش صفر خواهد بود

اگر بار در C_1 هم بگذاریم باز هم D تنش صفر دارد و D یک نقطه از هسته مرکزی است و تار خنثی

همیشه از D می‌گذرد اما با زوایای مختلف



روی خط می‌توان حرکت کرد

اگر بار را در نقطه A بگذاریم مثل محاسبات مربوط به دیوار حداکثر تغییر مکان A در $\pm b/6$ خواهد بود.

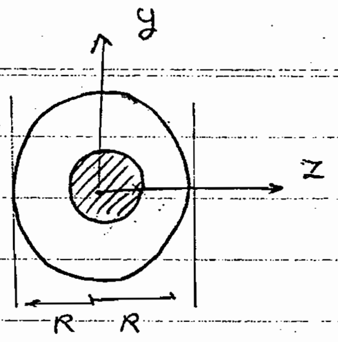
$$B \begin{cases} r_z^2 = \dfrac{h^2}{12} \\ y = -\dfrac{r_z^2}{e_y} \Rightarrow \pm h/2 = -\dfrac{h^2/12}{e_z} \Rightarrow \boxed{e_z = \mp h/6} \end{cases}$$

$$A : \{ e_z = \mp b/6$$

* یک لوزی درست می‌آید به قطرهای $h/3$ و $b/3$ *

روی اضلاع لوزی حرکت کنیم تار خنثی حول رئوس می‌شود

هسته مرکزی دایره 8

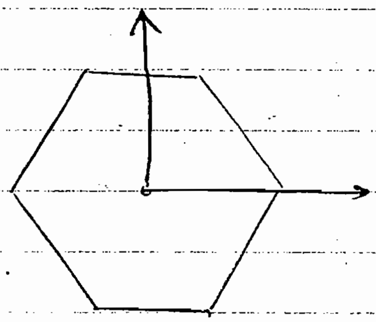


$$r_y^2 = \frac{R^2}{4}$$

$$z = -\frac{r_y^2}{e_z}$$

$$\pm R = \frac{-\frac{R^2}{4}}{e_z}$$

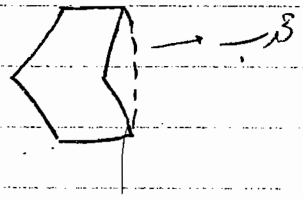
$$\boxed{e_z = \mp R/4}$$

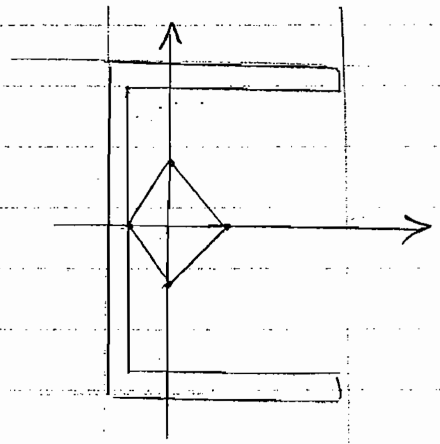


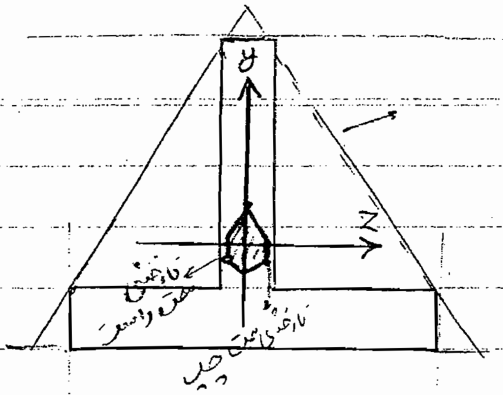
برای بدست آوردن تار خنثی باید ۶ بار تار خنثی را مماس فرض کنیم ومکیری نقاط بدست آوریم

اما اگر سطح مقعر باشد تار خنثی را مماس بر ضلع بدیم

در این صورت مقطع را قطع می‌کند و باید طوری مماس کنیم که سطح محدب را جانشین آن کنیم







باید یک سطح محدب بگیریم مثل ۶ ضلع هسته ما خواهد شد. باید طوری انتخاب شوند که بر شکل ما محیط باشند

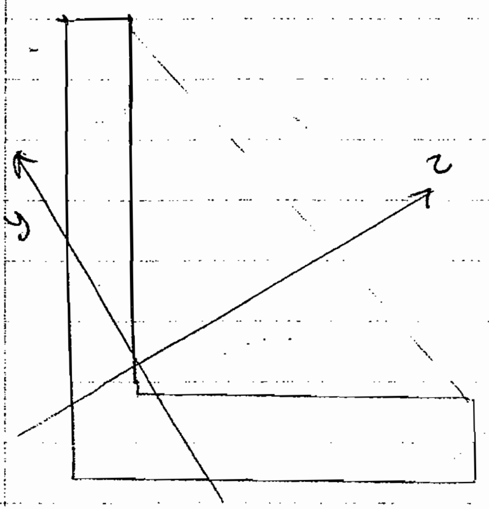
معادله خط مورب را هم با دانستن ابعاد مقطع می توان نوشت

$$\begin{cases} * \quad 1+\dfrac{e_y y}{r_z^2}+\dfrac{e_z z}{r_y^2}=0 \\ * \quad ay+bz+c=0 \end{cases}$$

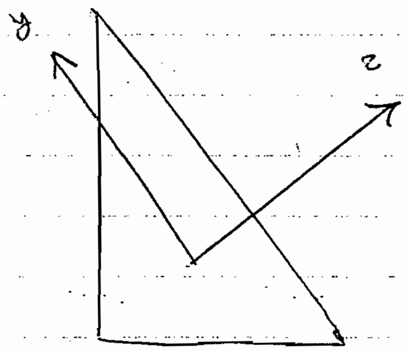
* وقتی هر دو لنگر باشند

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\dfrac{e_y}{r_z^2}}{a}=\dfrac{\dfrac{e_z}{r_y^2}}{b}=\dfrac{1}{c}}$$

همیشه باید سطح را محدب بگیریم و از طرفی هسته مرکزی که بدست می آورید محدب است.

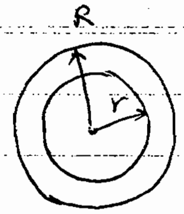


۶ ضلع



در این شکل اول محورهای اصلی باید محاسبه شوند

مثال:



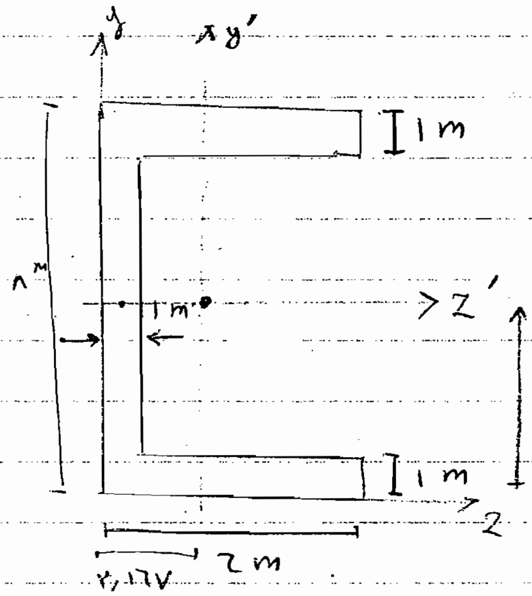
$$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$

$$r^2 = \frac{\frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)}{\pi(R^2 - r^2)} = \frac{1}{4}(R^2 + r^2)$$

$$e = ? \Rightarrow \pm R = \frac{\frac{1}{4}(R^2 + r^2)}{e_y}$$

$$e_z = e_y \Rightarrow e_y = \pm \frac{R^2 + r^2}{4R}$$

مثال:



$$\bar{y} = 4 \text{ cm}$$

$$\bar{z} = \frac{(1\times6)(3)(2) + (1\times6)(\frac{1}{2})}{2(1\times6) + (1\times6)} = 2.167 \text{ cm}$$

$$I_{z'} = 2(1\times6)(3.5)^2 + 2(\tfrac{1}{12})(6)(1^3) + \frac{1}{12}(1)(6^3) = 166 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'} = 2(\tfrac{1}{12})(1)(6^3) + (2)(1\times6)(1.833)^2 + (\tfrac{1}{12})(6)(1^3) + (6\times1)(1.667)^2$$

$$\Rightarrow I_{y'} = 61.5 \text{ cm}^4$$

$$r_z^2 = \frac{I_{z'}}{A} = \frac{166}{18} = 9.22 \text{ cm}^2$$

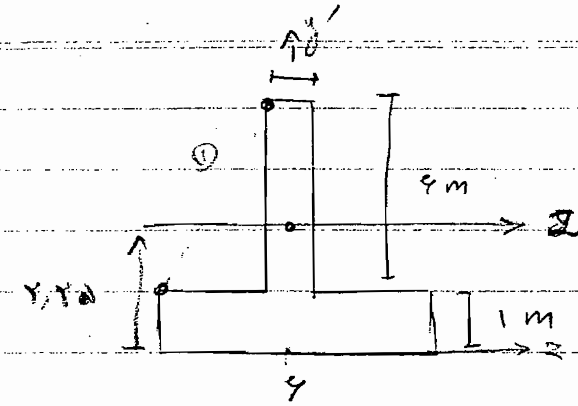
$$r_{y'}^2 = \frac{I_{y'}}{A} = \frac{61.5}{18} = 3.42 \text{ cm}^2$$

$$z = -2.167 \Rightarrow -2.167 = -\frac{3.42}{e_z} \Rightarrow e_z = 1.58$$

$$z = 3.833 \Rightarrow 3.833 = -\frac{3.42}{e_z} \Rightarrow e_z = 0.89$$

$$y = 4 \Rightarrow 4 = -\frac{9.22}{e_y} \Rightarrow e_y = -2.305$$

$$y = -4 \Rightarrow -4 = -\frac{9.22}{e_y} \Rightarrow e_y = 2.305$$



$$\bar{y} = \frac{(6)(1)(4) + (6\times1)(1/2)}{12} = 2.25$$

$$I_{z'} = (1/12)(6)(1) + (6)(1.75)^2 + (\tfrac{1}{12})(1)(6^3) + (6)(1.75)^2 = 55.25\ cm^4$$

$$I_{y'} = (\tfrac{1}{12})(6)(1) + (\tfrac{1}{12})(1)(6^3) = 18.5\ cm^4$$

$A = (1\times6) + (6\times1) = 12$

$$\begin{cases} r_z^2 = \dfrac{55.25}{12} = 4.6 \\ r_y^2 = \dfrac{18.5}{12} = 1.54 \end{cases}$$

① [illegible] $\Rightarrow \begin{array}{c|c|c} z & -1/2 & -3 \\ y & 4.75 & -1.25 \end{array} \Rightarrow y' = 2.4z' + 0.95$ ، $y' - 2.4z' - 0.95 = 0$

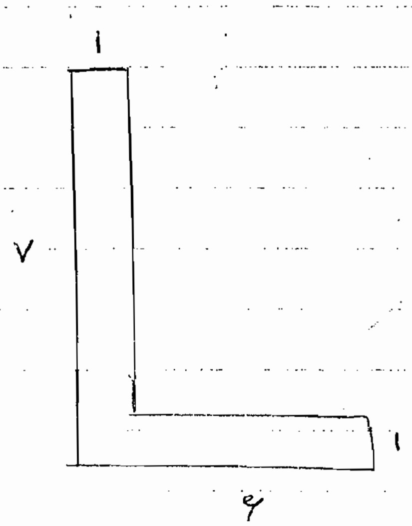
$$1 + \frac{e_y(y')}{4.6} + \frac{(e_z)(z')}{1.54} = 0$$

$$-0.95 + y' - 2.4z' = 0$$

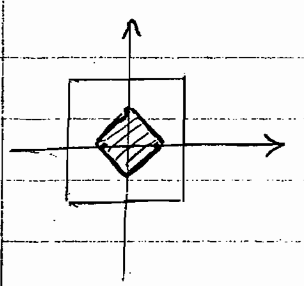
$$\Rightarrow \frac{1}{-0.95} = \frac{e_y}{4.6} = \frac{e_z}{1.54(-2.4)}$$

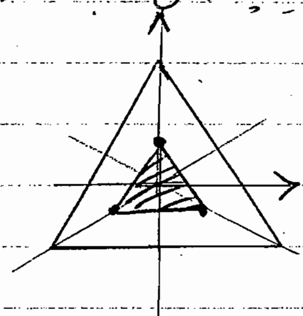
$$\Rightarrow e_y = -0.77$$

$$* \ e_z = 0.62$$



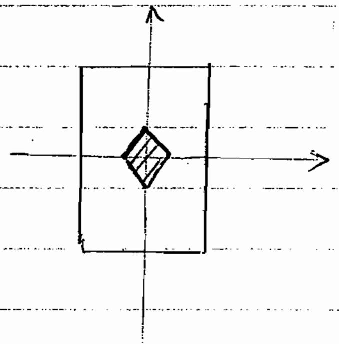
هسته مرکزی یک چند ضلعی محدب همواره یک چند ضلعی محدب است .



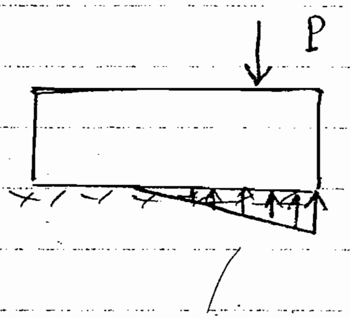


* ۵ ضلعی منتظم هسته مرکزی آن یک ۵ ضلعی منتظم می‌شود که اضلاع آن موازی اضلاع شکل اولند

* ۶ « « اضلاع هسته مرکزی آن ۴۵° می چرخند .



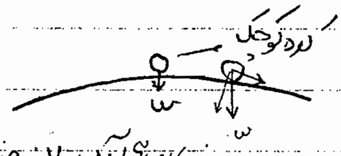
بار روی هسته مرکزی نباشد
مقطع کششی ترک می‌خورد یا
مقطع فشاری ممکن است آنش
آن از مقدار مجاز کمتر باشد
در این موارد از آزمون و خطا استفاده می‌کنیم
در پی ها یا در دیوارها بیشتر این اتفاق می‌افتد .



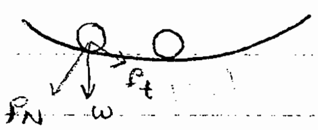
برای پی می‌توان راحت ترسیم کرد
مثل دیوار

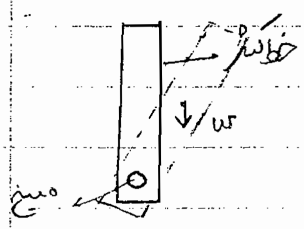
پایداری تعادل - کمانش 8 buckling - stability

بالای یک سطح کروی یک کره کوچک قرار دادیم تعادل دارد اما پایدار نیست چون یک نیروی افقی می تواند آن را حرکت دهد

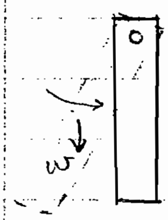


در اینجا تعادل پایدار است چون نیروی مماسی ناشی از وزن آن را به حالت اولیه برمی گرداند



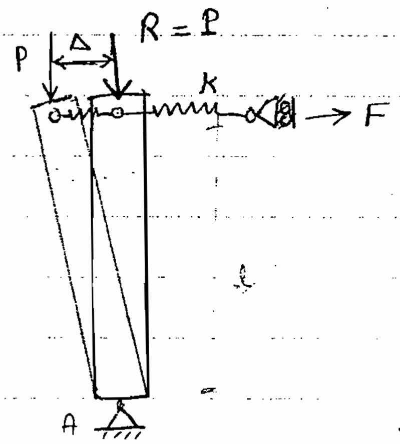


نیروی وزن یک گشتاوری ایجاد می کند حول میخ که باعث می شود از وضعیت تعادل دور شود



نیروی وزن جسم را به حالت اولیه میل می دهد. پس تعادل پایدار است

مثال 8



باید آن را اندکی از وضع تعادل دور کنیم سپس آن را رها کنیم.

فنر یک افزایش طولی خواهد داشت پس یک F داریم

$$\Sigma M_A = P\Delta - Fl$$
$$= P\Delta - (K\Delta)l$$

www.its-ok!.com

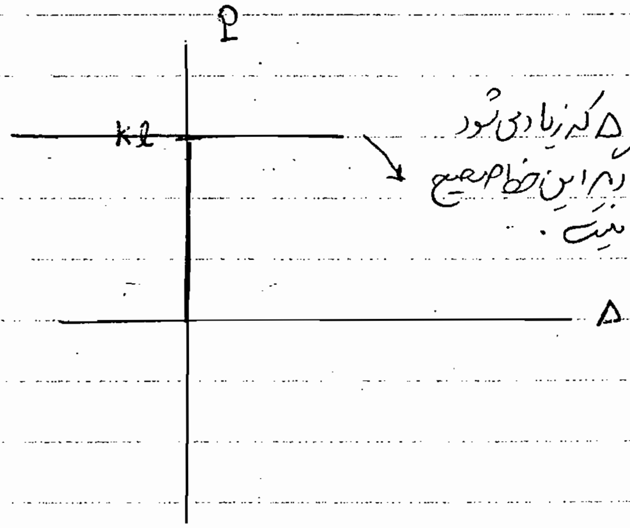
اگر لنگر مثبت باشد باعث می شود که از وضعیت اولیه دور شود اما اگر لنگر منفی باشد به حالت اولیه

میل می کند و تعادل پایدار است :

* $P > Kl$ تعادل ناپایدار

* $P < Kl$ تعادل پایدار میز دوباره به حالت اولیه بر می گردد $\Delta = 0$ می شود

* $P = Kl$ تعادل خنثی است یعنی در همین شکل باقی می ماند

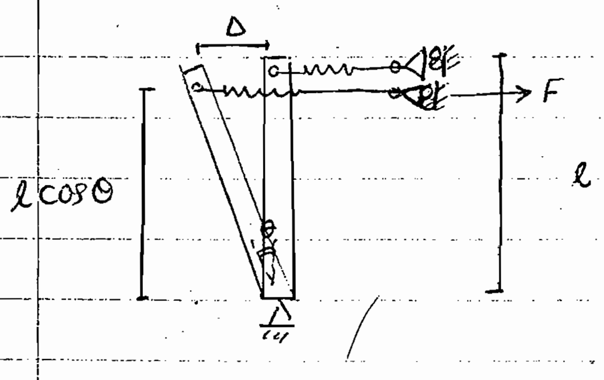


Δ که زیاد می شود دیگر این خط صحیح نیست.

$P = Kl$ با هر Δ ای می توان تعادل داشت

فرض کردیم که δ یا Δ کوچک باشد.

اگر تغییر مکان Δ کوچک نباشد :



* $\Sigma M_A = P\Delta - (K\Delta)\, l \cos\theta$

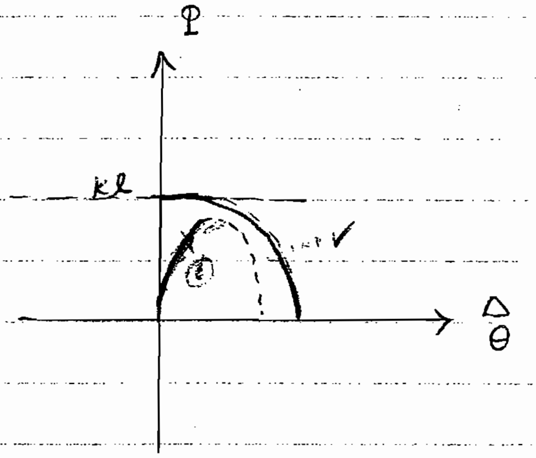
; $\sin\theta = \dfrac{\Delta}{l}$

$P = Kl\cos\theta$ تعادل خنثی

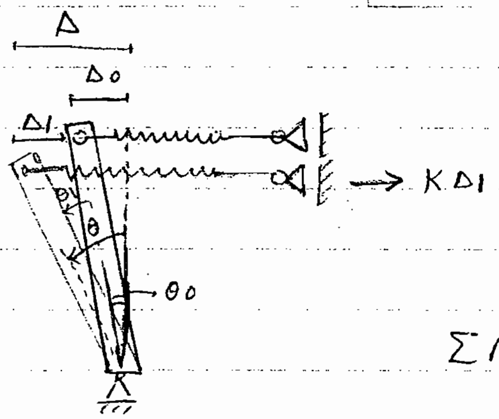
$P > Kl\cos\theta$ ناپایدار

$P < K\ell\cos\theta$ پایدار

در اینجا تعادل به مقدار θ هم بستگی دارد



P در اینجا از kL کوچکتر است.

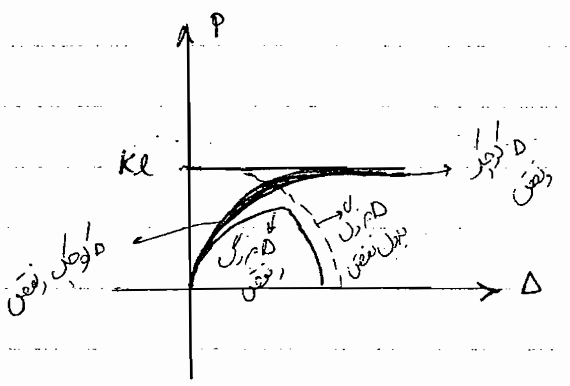


* ممکن است میله از اول با یک نقص ساخته شده باشد

ΣM_A

$$\Sigma M_A = P(\Delta_1+\Delta_0) - (K\Delta_1)\ell = 0$$

* $P = K\ell\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_0}\right)$ درجه اول از δ کوچک می‌باشد



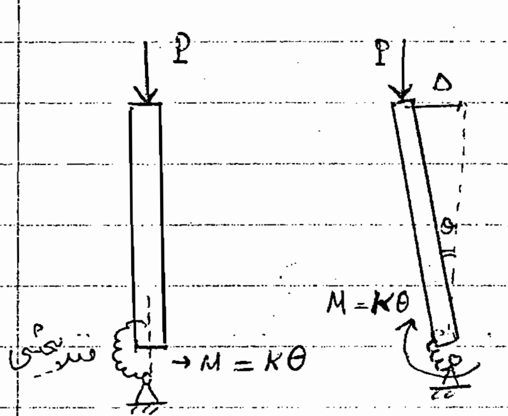
Δ بزرگ باشد

$$\Sigma M_A = P(\Delta_1+\Delta_0) - K\Delta_1 \, l \cos \overline{\theta}^{\,\theta_0+\theta_1} = 0$$

کمترین حالت

$$* \quad P = Kl\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_0}\right)\cos\theta$$

P همیشه از خط چین کوچکتر است و همیشه زیر منحنی جابجایی قرار می‌گیرند



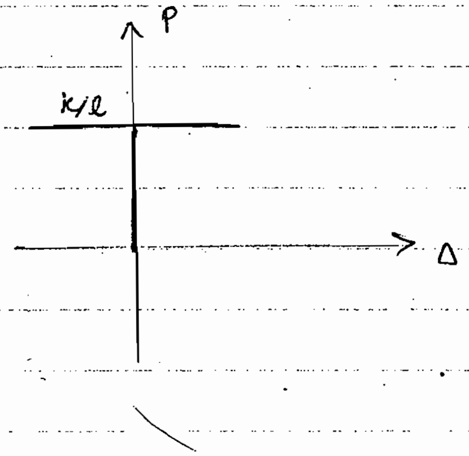
تغییر شکل کوچک :

$$\Sigma M_A = P\Delta - \underbrace{M}_{K\theta} = 0$$

$$; \quad \theta = \frac{\Delta}{l}$$

$$\Sigma M_A = P\Delta - K\frac{\Delta}{l} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{K}{l}}$$

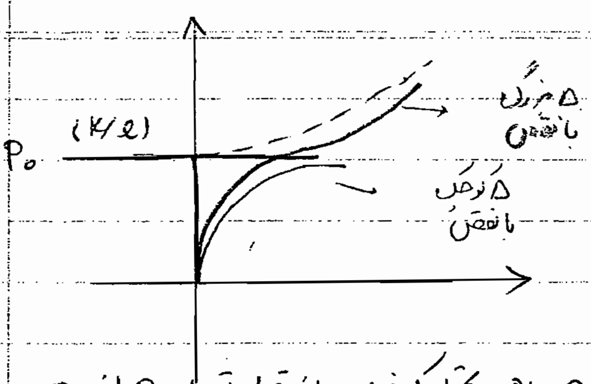


درجه دوم :

$$\Sigma M_A = P\Delta - K\theta = 0$$

$$= P\Delta - K \,\mathrm{ArcSin}\frac{\Delta}{L} = 0$$

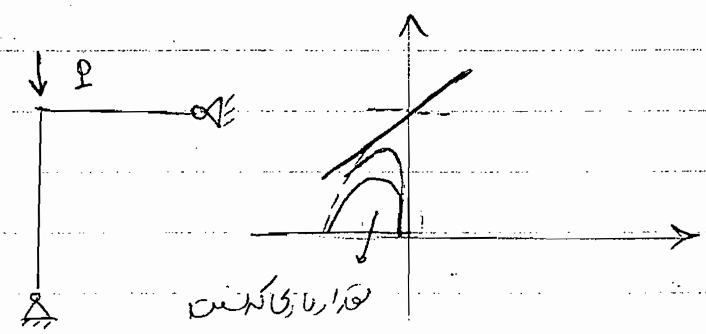
$$* \quad P = \frac{K}{l} \cdot \mathrm{ArcSin}\frac{\Delta}{l} \cdot \frac{l}{\Delta} = \frac{K}{l} \cdot \frac{\mathrm{ArcSin}\,\Delta/l}{\frac{\Delta}{l}}$$



چون توان از P_{in} آن بزرگتر است

در اینجا سازه زیاد خطرناک نیست

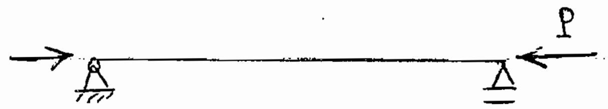
چون می‌تواند بدون نقص بیشتر از P_0 را هم تحمل کند اگر نقص هم داشته باشد می‌تواند بیشتر از P_0 را هم تحمل کند اما سازه‌ای که مقدار P از P_0 کمتر بود پس خطرناک بود .



به P_0 تحمل می‌کند خیلی کمتر است و خطرناکتر است .

خیلی از سازه‌هایی که ناگهان خراب می‌شوند ممکن است بررسی‌های لازم صورت نگرفته باشد

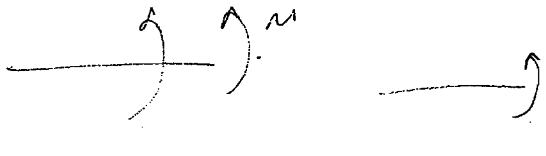
وقتی معادلات تغییر شکل کوچک را می‌نویسیم به مقدار P_0 به درستی می‌رسیم ولی به خط افقی نمی‌توان اعتماد کرد



* میله فشاری 8 کاملاً ایده آل

نقص‌های هم یک میله فشاری 8

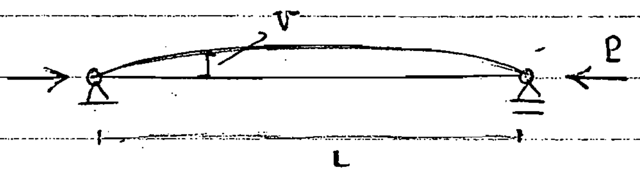
- بار P از محور میله نگذرد « محوری نباشد »
- ستون کاملاً مستقیم نباشد
- اثر تنش‌های پسماند یعنی بدون این که به میله نیرو وارد کنیم تنش داشته باشیم



ایده آل نیز نقص نداریم و تغییر شکلها کوچکند :

* $EIv'' = M$ تغییر شکل کوچک

* $\frac{EI}{\rho} = M$ تغییر شکل بزرگ



همه حالتها قبلی صلب بودند
ولی اینجا این طور نیست

تغییر شکلی برای آن درنظر گرفتیم

* $M = -Pv$

* $EIv'' = -Pv$

* $EIv'' + Pv = 0$

* $v'' + \mu^2 v = 0$

$$\mu^2 = \frac{P}{EI}$$

* $v = c_1 \sin \mu x + c_2 \cos \mu x$

$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases}$ $c_2 = 0$

$\begin{cases} x = l \\ v = 0 \end{cases}$ $c_1 \sin \mu l = 0 \Rightarrow \sin \mu l \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0$. if

* اگر $c_1 = 0$ باشد یعنی $v = 0$ است یعنی اگر نیروهای داخلی آن را به وضع مستقیم می گرداند

if, $\sin \mu l = 0 \Rightarrow c_1 =$ مجهول

* یعنی c_1 مجهول است پس v هر مقداری می تواند بگیرد و وضع خمیده را خواهیم داشت :

POOMAR

$\sin \mu l \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow P = 0$ جواب غیرقابل قبول است

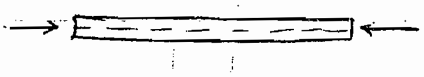
چون بار صفر میله را خم نمی‌کند

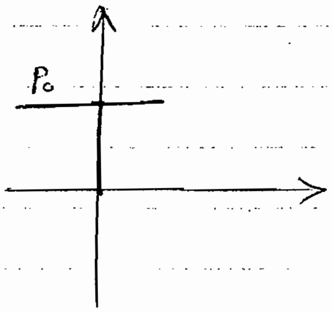
$$\sin \mu L = 0 \Rightarrow \mu L = \pi \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = \pi$$

$$\Rightarrow P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

اگر بار این مقدار باشد میله کمانه می‌کند و از وضع مستقیم خارج می‌شود

* اگر بار را ایده‌آل طوری بگذاریم و میله کاملاً مستقیم باشد بازای مقدار بالا میله کمانه می‌کند.





در P_0 کمانش اتفاق می‌افتد اما وقتی اتفاق افتاد چه خواهد شد

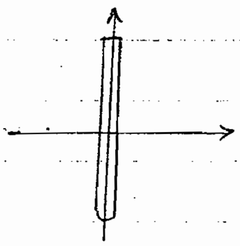
با معادلات تغییر شکل کوچک نمی‌توان انجام داد چون خطر تغییر شکل‌های بزرگ مطرح می‌شود.

این محاسبات را اولین بار اویلر در سال ۱۷۸۳ انجام داد و این بار را بار اویلر می‌نامند.

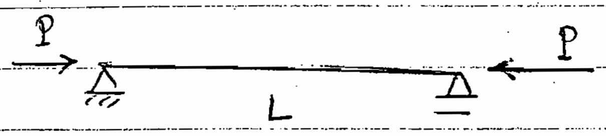
هرچه I کمتر باشد این اتفاق زودتر می‌افتد یعنی هرچه ستون نازکتر باشد این اتفاق زودتر می‌افتد

مثلاً یک خط‌کش نازک خیلی زود کمانه می‌کند نسبت به خط‌کش ضخیم

مقطع مستطیل



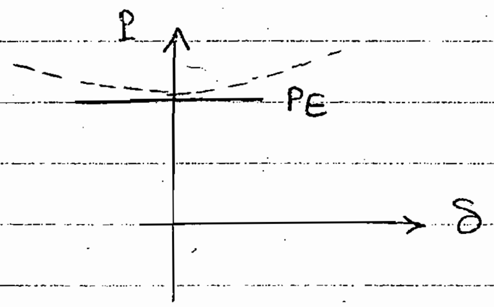
I را نسبت به محور y باید قرار داد که کمتر است



$$\boxed{P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

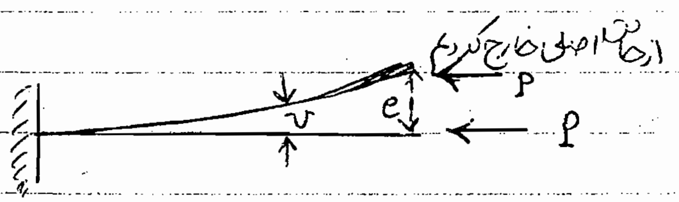
$$EIv'' = M$$

$$\frac{EI}{\rho} = M$$



اگر بار را در حالت
تغییر شکل کوچک
اعمال کنیم
از معادله اول
استفاده می کنیم
اگر تغییر شکل بزرگ را در نظر بگیریم
معادله دوم قابل استفاده خواهد بود
که در این صورت P_E به تدریج زیاد خواهد شد اما مقدار زیاد کردن نیرو ناچیز است

در معادلات معمولی سازه های پذیریم که P_E بزرگترین مقداری است که می تواند تحمل کند



$$M = P(e - v)$$

$$EIv'' = P(e - v) \Rightarrow \boxed{EIv'' + Pv = Pe}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

* $v = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x$

$v = e$ جواب خصوصی

$$v = c_1 \sin \mu x + c_2 \cos \mu x + e$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = c_1(0) + c_2 + e \Rightarrow c_2 = -e$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v' = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \mu c_1 - \mu c_2(0) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$* \quad v' = \mu c_1 \cos \mu x - \mu c_2 \sin \mu x$$

* مقدار e باید در معادله خود تیر صدق کند :

$$\begin{cases} x = L \\ v = e \end{cases} \quad * \quad e = -e \cos \mu L + e$$

$$\Rightarrow -e \cos \mu L = 0$$

① $\cos \mu L \neq 0 \Rightarrow e = 0$ در این صورت تمام ضرایب صفر می‌شوند

و v صفر خواهد شد و تغییر شکل به صفر خواهد گشت

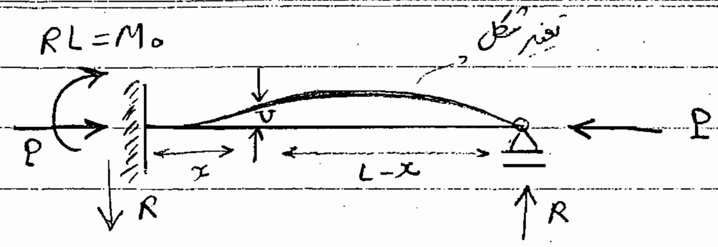
② $\cos \mu L = 0$

$e = ?$ هر مقداری می‌تواند بگیرد

$$\Rightarrow \mu L = \pi/2$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\, L = \pi/2 \Rightarrow P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$ بار اویلر

مقدار بار اویلر در این حالت $\frac{1}{4}$ تیر قبلی بود .



$*\quad M_0 = RL$

در اینجا مسئله هیپراستاتیک است

زیرا عکس العملها معلوم نیستند

R و M_0 هست اما مقدار آنها معلوم نیست

منفی

حول برش v زدیم: $EIV'' = M_0 - PV - Rx$

$\quad\quad = -PV + R(L-x)$

از سمت چپ و راست فرقی ندارد.

$$EIV'' = M_0 - PV - Rx$$
$$EIV'' + PV = M_0 - Rx$$
$$EIV'' + PV = RL - Rx$$

$$\begin{cases} V = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x \\ V = \dfrac{RL}{P} - \dfrac{Rx}{P} \quad \text{جواب خصوصی} \end{cases}$$

$$V = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x + \frac{RL}{P} - \frac{Rx}{P}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ V = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = C_2 + \frac{RL}{P} \Rightarrow C_2 = -\frac{RL}{P} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ V' = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = C_1 \mu - \frac{R}{P} \Rightarrow C_1 = \frac{R}{P\mu} \quad (2)$$

$$*\quad V' = C_1 \mu \cos \mu x - C_2 \mu \sin \mu x - \frac{R}{P}$$

$$\begin{cases} x = L \\ V = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = C_1 \sin \mu L + C_2 \cos \mu L + \frac{RL}{P} - \frac{RL}{P} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R}{\mu P} \sin \mu L - \frac{RL}{P} \cos \mu L = 0$$

$$\frac{R}{P}\left(\frac{\sin \mu L}{\mu} - L\cos \mu L\right) = 0$$

$$* \quad \tan \mu L = \mu L$$

* تجربه نشان می‌دهد که $P = 0$ کمانش اتفاق نمی‌افتد.

$\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ چون $\mu L = 0 \Rightarrow P = 0$

$$\boxed{\mu L \cong 4.49\ \text{rad}}$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\, L = 4.49$$

$$\boxed{P_E \simeq \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} ① & \text{-----} = 0 \\ ② & \text{-----} = 0 \\ ③ & \text{-----} = 0 \end{array}\right.$$

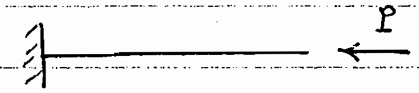
* درصورتی جواب غیرصفر داریم که دترمینان ضرایب صفر باشد

اگر در جایی نتوانستیم معادلات را ساده کنیم باید به صورت دستگاه معادلات بنویسیم 8

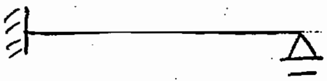
دترمینان

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & R \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{L}{P} \\ \mu & 0 & -\frac{1}{P} \\ \sin \mu L & \cos \mu L & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\mu L}{P}\cos \mu L - \frac{1}{P}\sin \mu L = 0$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$ $K=1$, $l_e = L$



$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$ $k=2$, $l_e = 2L$



$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(0/7L)^2}$$ $k = 0/7$, $l_e = 0/7l$

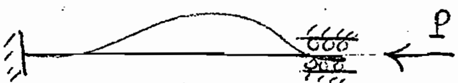
بار بحرانی $P_c = \dfrac{\pi^2 EI}{(kl)^2}$

$l_e = kl \longrightarrow$ طول مؤثر در کمانش

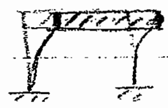
$K \longrightarrow$ ضریب کمانش

یعنی تیر اولی فصل یک پایه است بقیه از روی آن بدست می آید

باید امکان تغییر طول وجود داشته باشد تا کمانش رخ دهد

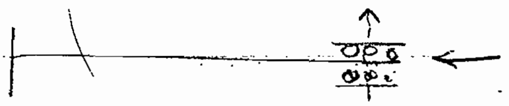


$K = 0/5$

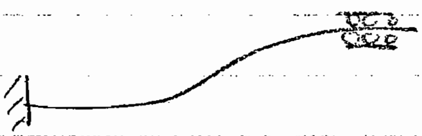


می تواند قید مکان افقی در حد خیلی ناچیز است،

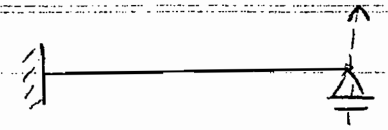
نصف یک منحنی کامل است $\Rightarrow K = 1/2$



حرکت قائم رو به بالا

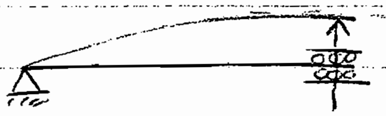


$K = 1$



$K = 2$

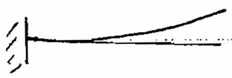
مثل یک سر آزاد است
حتی در جهت قائم میتواند حرکت کند دیگر
عکس العمل قائم را نمی‌گذاریم.



$K = 2$

مثل بالایی است.

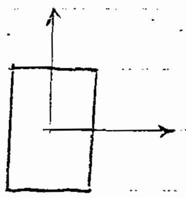
K برابر است با تعداد نیم منحنی $\sin$ یا $\cos$ که در تغییر شکل ایجاد وجود دارد



$$\text{تنش بحرانی} \quad \sigma_c = \frac{P_c}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2 A} = \frac{\pi^2 E r^2}{(kl)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{kL}{r}\right)^2}$$

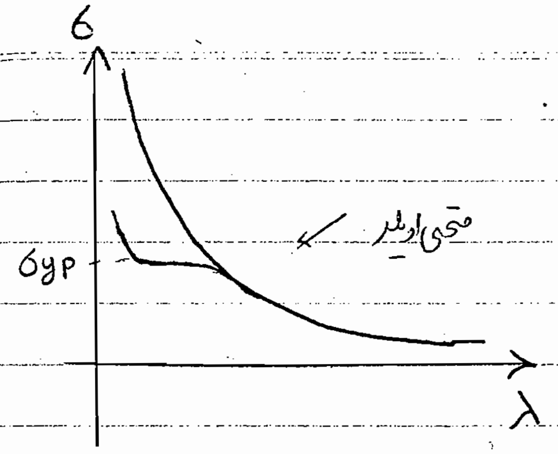
$$* \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$\Rightarrow \sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \lambda = \frac{kL}{r} \quad \text{ضریب لاغری}$$



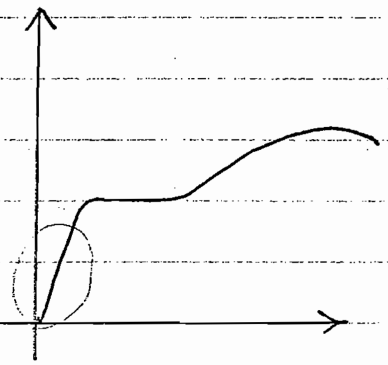
مثلاً مقطع از یک ستون از اطراف ممکن است k مختلفی داشته باشد
یعنی نسبت به دو محور در مقطع دو k و r مختلف داریم.

هر طرف که $\frac{kL}{r}$ بیشتر بود آن طرف بحرانی تر است یعنی σ_c کمتر خواهد بود.



λ صفر شود σ بی نهایت می شود .

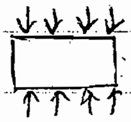
در مقادیر بزرگ λ ، σ خیلی کوچک خواهد بود



در منحنی σ-ε در قسمت خطی
اگر با شیم σ تا بی نهایت می تواند برود
یک مقدار حداکثری داریم ،

وقتی وارد قسمت تسلیم شد در مرحله کمانش
نمی تواند مقاومت بکند

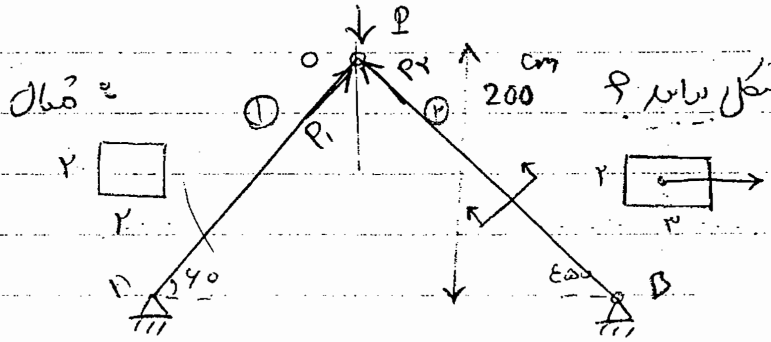
λ که کوچک شود تنش در مقدار تنش تسلیم محاسبه می شود



طول باید خیلی کوتاه باشد تا بتوانیم از تنش تسلیم رد شویم

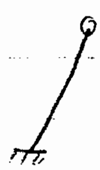
مثال :

بار بحرانی سازه روبرو را در داخل صفحه شکل بیابید ؟

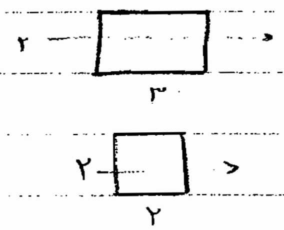


$E = 2\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$

در خرپا برای هر میله $K=1$
می گیریم با این که تکیه گاه ها
واقعاً مفصل نیست .

اگر  بود $K = 0/7$ می گیریم

کمانش در راستای محور z و در صفحه صورت می‌گیرد در جهت عمود بر صفحه کمانش نمی‌کند



$$I = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad r^2 = \frac{h^2}{12}$$

$$\Rightarrow r^2 = 1/3$$

$$L_{AO} = \frac{200}{\cos 30} = 231 \text{ cm}$$

$$\lambda_1 = \frac{231}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 400 \text{ cm} \qquad K = 1$$

$$L_{BO} = 200\sqrt{2} = 280 \text{ cm}$$

$$\lambda_2 = \frac{200\sqrt{2}}{1/\sqrt{3}} = 490$$

$$\sigma_{1c} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6}{(400)^2} = 123{,}4 \ \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_{2c} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6}{(490)^2} = 82{,}2 \ \text{kg/cm}^2$$

این شکل ها خیلی مهمند :

* هرچه طول را کمتر کنیم نیرویی که می‌گیرد بیشتر خواهد بود ؟

$$P_{1c} = 123{,}4 \times 4 = 493{,}6$$
$$P_{2c} = 82{,}2 \times 6 = 493{,}2$$

نیروی P را به دو نیرو تجزیه می‌کنیم .

$$\sum F_x = P_1\left(\tfrac{1}{2}\right) - P_2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$P_1 = P_2\sqrt{2}$$

$$\sum F_y = P_1\frac{\sqrt{3}}{2} + P_2\frac{\sqrt{2}}{2} + P = 0$$

$$P_2 = \frac{2P}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \qquad P_1 = \frac{2P}{\sqrt{3}+1}$$

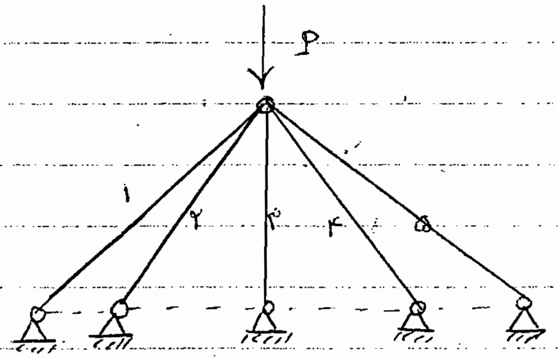
با P_{1C} و P_{2C} مقایسه می‌کنیم

$* \quad \dfrac{2P}{\sqrt{3}+1} \leqslant 493/6 \qquad P \leqslant 674/3 \text{ kg}$

$* \quad \dfrac{2P}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \leqslant 493/2 \qquad P \leqslant 952/8 \text{ kg}$

پس P_c برابر $674/3$ kg است :

در حالت دوم صفحه اگر بخواهیم P_c را باسیم فقط $8r$ عوض می‌شود : $r = \dfrac{9}{12}$



* بار بحرانی سازه روبرو را بیابید ؟

اولاً باید نیروهای میله‌ها تعیین شود ؛ که در مقاومت ۱ بررسی کردیم ؛

پس :

۱ - بار بحرانی هر میله تعیین شود

۲ - نیروی P بین میله‌ها تقسیم شود

۳ - با زیاد کردن P کدام میله به مقدار بحرانی خود می‌رسد که در آن مقدار برای P آن میله کمانش

می‌یابد ؛ یکی از میله‌ها کمانه کرد $P = \alpha$
از این به بعد که نیرو را اضافه
می‌کنیم از α بیشتر شود میله‌ای که کمانه کرده بار نمی‌گیرد

۴ - پس وقتی بار از α زیادتر شود بار بین ۴ میله دیگر تقسیم می‌گردد تا میله دیگری کمانش کند ؛

در اینجا چون سازه هیپراستاتیک است سازه خراب نمی‌شود بلکه میله‌های دیگر بار تحمل می‌کنند

تا جایی که :

۵ - فقط یک میله باقی بماند که در این صورت سازه به مقدار بار بحرانی رسیده است ؛

اگر بخواهیم به این نحو مسئله را حل کنیم مسئله طولانی خواهد شد چون تقسیم بار به ۵ میله و ۴ میله و ...

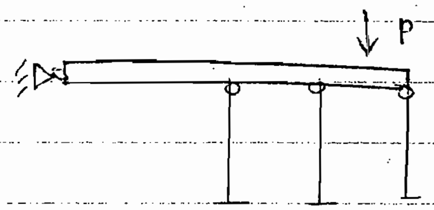
دشوار و طولانی است ؛

_ در حل نهایی ما باید چه چیزهایی را داشته باشیم ؟

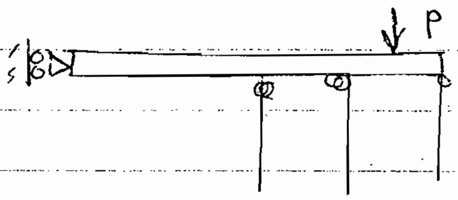
در حل نهایی باید ۲ میله کمانش کرده باشد و فقط یک میله الاستیک باقی بماند ؛

۱. شرط خرابی (کمانش سازه) ؛

* کافی نیست که فقط یک میله کمانش کند بلکه باید از ۳ تا میله همه کمانش کنند به جز یک میله



در این سازه اگر بخواهیم خراب شود
هر ۳ تا میله باید کمانش کنند



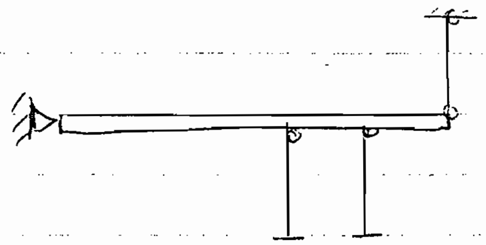
در اینجا ۲ میله کمانش کنند یعنی یک
میله باقی بماند سازه خراب می شود.
چون با ۲ میله و مفصل سازه تعادل
دارد ۲ میله که کمانش کنند سازه دیگر تعادل نخواهد داشت

یعنی در هر سازه باید شرط تعادل برقرار شود

۲. شرط تعادل ؛

در حالت خراب شدن ؛ معادلات تعادل باید برقرار باشند در هر حالتی ؛

۳. شرط تغییر شکل ؛

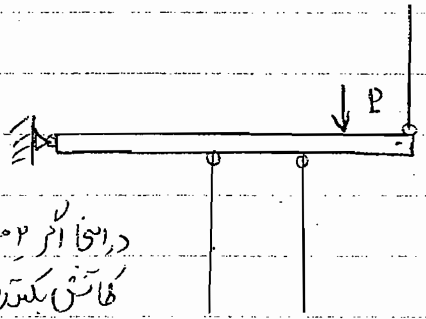


باید در هنگام خرابی به تغییر شکل توجه کرد

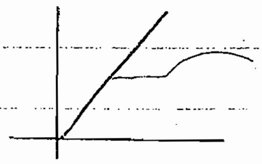
مثلا اگر میله ⑤ بخواهد الاستیک باقی بماند باید نقطه P روی دایره ای به شعاع AP حرکت کند
۴ میله دیگر می تواند کمانش کند

اگر میله ③ بخواهد الاستیک بماند در این صورت ۲ میله سمت راستی امتدادش طول می دهند و نمی توانند تحت کمانش قرار بگیرند چون طولشان نمی تواند کم شود.

— فقط میله اولی و آخری هستند که می توانند الاستیک باقی بمانند ؛ و کمانش نکنند ① و ⑤



میله الاستیک بماند یعنی ۴-۵ خطی تا آخر باشد.

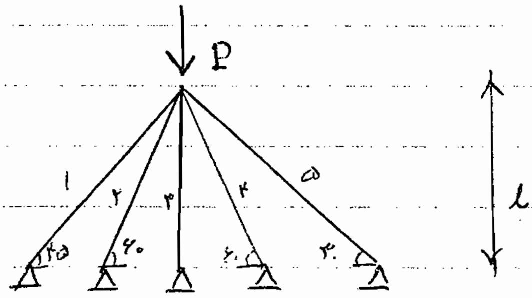


در اینجا اگر ۲ میله هم کمانش بکنند چون میله سوم بخواهد الاستیک بماند خراب نخواهد شد

۳- اضافه نشدن بار از مقدار بحرانی هر میله ؟

— هر میله زمانی کمانش کرده که بارش از مقدار بار بحرانی تجاوز کرده باشد ؟

مثال ؟



$P_3 = P_E$ بار بحرانی میله سوم

* $P_E = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$

بار بحرانی هر میله قابل محاسبه است ؛ $\Longrightarrow$ $l_1 = l\sqrt{2}$

* $P_{1E} = \frac{\pi^2 EI}{2l^2} = \frac{P_E}{2}$

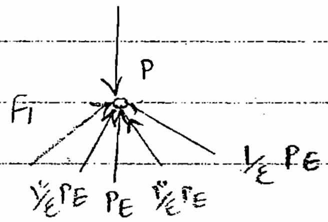
$\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{2}}$ ✓

* $P_{2E}=P_{4E}=\dfrac{\pi^2EI}{(\frac{2l}{\sqrt{3}})^2}=\dfrac{3}{4}P_E$

برای سادگی کار یکی را P_E درنظر گرفتیم بقیه را بر اساس آن محاسبه کردیم؛

* $P_{5E}=\dfrac{\pi^2EI}{(2l)^2}=\dfrac{1}{4}P_E$

در این نوع مسئله‌ها یا باید میله ① باقی بماند یا میله ⑤ ؛



شرط تیز شکل را در نظر گرفتیم ؛ شکل ①

تعادل گره : $\sum f_x = F_1\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{P_E}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow F_1=\frac{\sqrt{6}}{8}P_E < P_{1E}=\frac{P_E}{2}$ قابل قبول است؛

چون شرط ۲ برقرار شده است؛

نیازی نیست که معادله دوم را در میله ۵ بررسی کنیم چون حتماً یکی برقرار می‌شود نه هردو؛

میله ۵ : $\frac{P_E}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-F_5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

$\Rightarrow F_5=\frac{P_E\sqrt{6}}{6} > \underbrace{\frac{P_E}{4}}_{P_{5E}}$ غ‌ق‌ق

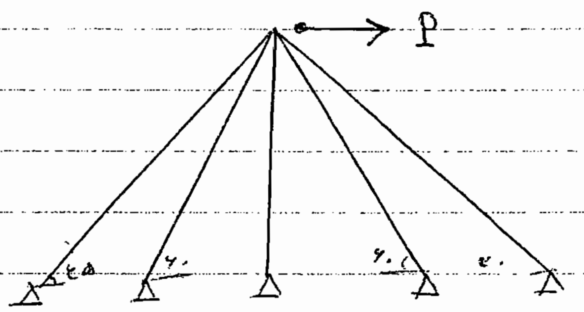
در میله ① تعادل $\sum F_y$ را بررسی می‌کنیم ؛ شکل ①

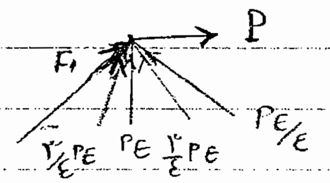
$\sum F_y = P_E\frac{\sqrt{6}}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\times\frac{3P_E}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+P_E\times\frac{1}{2}-P=0$

مقدار بار بحرانی $\Rightarrow$ $\boxed{P=2.94\,P_E}$

در هر مسائل ما باید شرط تغییر شکل را در نظر بگیریم :

مثال :





F_1 باید حتماً کششی باشد تا P در تعادل $\sum F_x$ برقرار باشد :

عضو ① را الاستیک فرض کردیم

$P_3 = P_E$ در این قسمت حل مثل مسئله قبل است :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\times\frac{3}{4}P_E\frac{\sqrt{3}}{2} + P_E + \frac{P_E}{4}\times\frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = -3/43\,P_E$$

یعنی F_1 کششی است درست است .

$$\sum F_x = -3/43\,P_E\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P_E}{2} = 0$$

$$P = 2/64\,P_E$$

در این حالت F_5 حتماً کششی خواهد بود در صورتیکه امکان ندارد ، چون تحت فشار است . ; برای میله ۵ حل کنیم

$\Rightarrow$ شرط تغییر شکل برقرار نخواهد بود چون نیرو P به سمت راست است و تغییر مکان باید به آن سمت باشد در حالیکه چون F_5 کششی است تغییر مکان به چپ خواهد بود

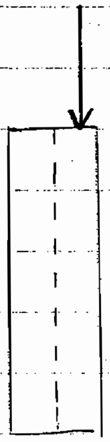
- شرط خرابی (کاهش سازه)

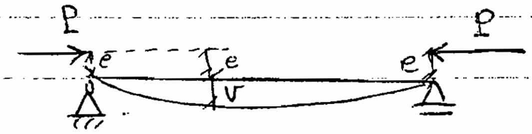
- شرط تعادل

- شرط تغییر شکل

- شرط اضافه نشدن بار از مقدار بحرانی

* نقص های ستونها : میله های فشاری





بار از محور میله نگذرد

وقتی نقص داریم از همان اول تغییر شکل داریم :

میله مستقیم باقی نماند بلکه از همان ابتدا خم می شود

$$EIv'' = M = P(e-v)$$

v منفی است

$$* \quad EIv'' + Pv = Pe \qquad ; \quad \mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$* \quad v = \underbrace{c_1 \sin \mu x + c_2 \cos \mu x}_{\text{عمومی}} + e$$

$x = 0$, $v = 0$: $\quad 0 = c_1(0) + c_2(1) + e \Rightarrow c_2 = -e$

$x = l$, $v = 0$: $\quad 0 = c_1 \sin \mu l - e \cos \mu l + e$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{-e(1-\cos \mu l)}{\sin \mu l} = \frac{-e\left(2\sin^2 \frac{\mu l}{2}\right)}{2\sin\frac{\mu l}{2}\cos\frac{\mu l}{2}}$$

$$\Rightarrow c_1 = -e \tan \frac{\mu l}{2}$$

اگر $\sin \mu l = 0$ باشد دوباره به بار بحرانی می‌رسیم در حالیکه اینجا نقص را می‌خواهیم ؟

$$\Rightarrow v = -e\tan\frac{\mu l}{2}\sin\mu x - e\cos\mu x + e$$

$$\begin{cases} x = l/2 \\ \delta = v_{max} = -e\tan\frac{\mu l}{2}\sin\frac{\mu l}{2} - e\cos\frac{\mu l}{2} + e \end{cases}$$

$$= \frac{-e}{\cos\frac{\mu l}{2}}\left(\sin^2\frac{\mu l}{2} + \cos^2\frac{\mu l}{2}\right) + e$$

$$v_{max} = \frac{-e\left(1-\cos\frac{\mu l}{2}\right)}{\cos\frac{\mu l}{2}}$$

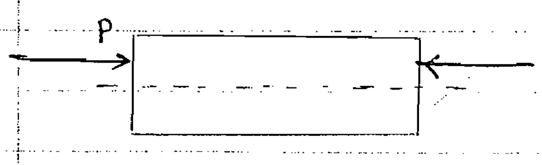
$$M_{max} = P\,(e - v_{max}) = P\left(\frac{e + e\left(1-\cos\frac{\mu l}{2}\right)}{\cos\frac{\mu l}{2}}\right)$$

$$M_{max} = P\,\frac{e}{\cos\frac{\mu l}{2}}$$

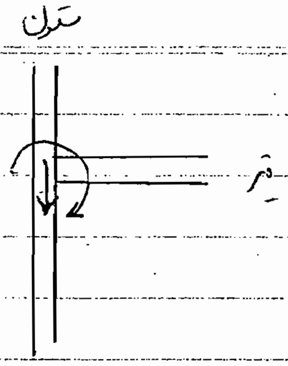
* اگر تیر خیلی با ابعاد بزرگ داشته باشیم با فشاری هم آن وارد کنیم $\cos\frac{\mu l}{2}$ با تقریب خوبی یک است

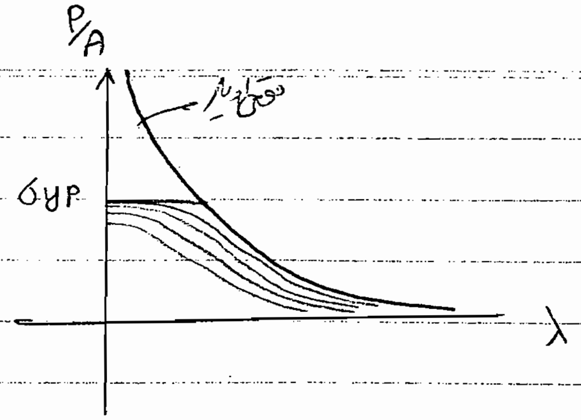
یعنی $M_{max} = Pe$

هرچه این تیر لاغرتر باشد خیلی بیشتر خم می‌شود و تنش زیادتر می‌شود



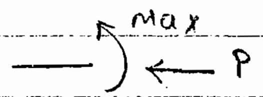
به هر حال در ستون‌ها یک مقدار نقص داریم





اگر نقص صفر باشد دقیقاً روی منحنی هستیم ؛ اما اگر نقص داشته باشیم هرچه e زیادتر باشد

خراب شدن ستون پایین تر از σyp است



$$* \quad \sigma_{max} = \frac{P}{A} + (M_{max})\frac{C}{I}$$

فشار ⊕ گرفتیم

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe \cdot C}{I \cos \frac{\mu l}{2}}$$

$$\Rightarrow \; = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e.c}{r^2 \cos\left[\sqrt{\frac{P}{EA}} \cdot \frac{l}{2r}\right]}\right]$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e.c}{r^2 \cos\left[\sqrt{\frac{P}{EA}} \cdot \frac{l}{2r}\right]}\right]$$

فرمول سکانت

* خطی شدن

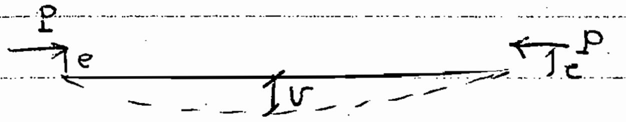
اگر P زیاد شود مثلاً α برابر شود تنش بیشتر از α افزایش می‌یابد چون تیر بیشتر خم می‌شود؛

با این فرمول می‌توان P را بازای δ_{yp} یافت.

* A-Javadian

از جلسه آینده ۱۰ صبح

۸٤/۹/۵ به نام خدا ج ۱۰

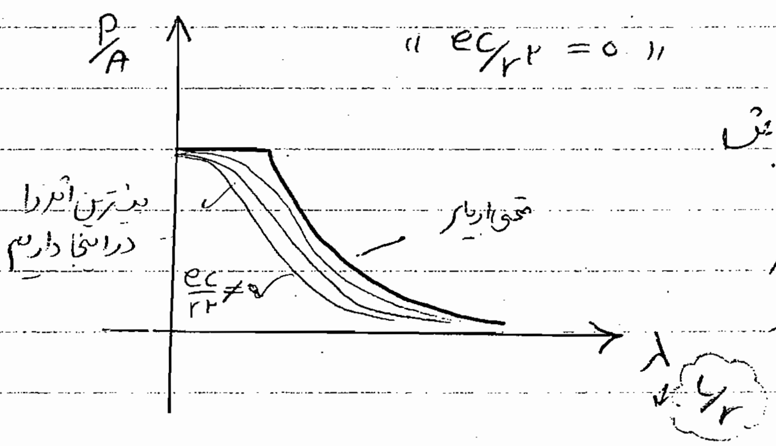


فرمول سکانت ٤

$$* \quad \sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec\cdot}{r^2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EA}}\cdot\frac{L}{2r}\right)}\right]$$

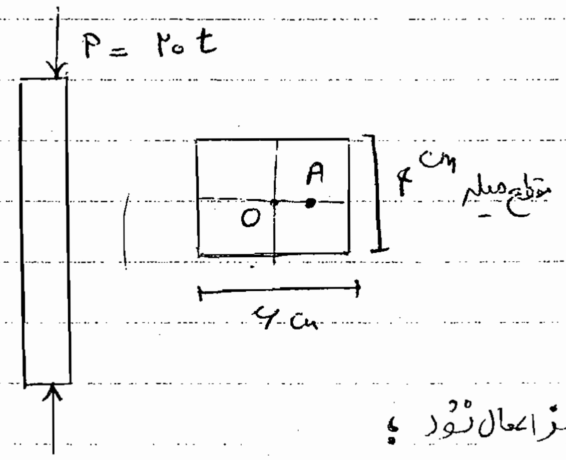
از نظر هندسی
٥-٤ غیر خطی است

* اگر بخواهیم با فرمول اویلر مقایسه کنیم به جای σ_{max} ، σ_{yp} می‌گذاریم؛



در مقادیر کم λ تنش تسلیم باعث خرابی خواهد شد
اما در مقادیر بزرگ λ عضو کمانه می‌کند در نتیجه تنگر و بالطبع ازراز می‌شود.

$ec/r^2 = 0 \Rightarrow \sigma_{yp} = P/A$ کمانه نمی‌کند



مثال ٤: بار در A وارد می‌شود؛

$OA = 0/5\ cm$

$L = 1\ m$

$L = 2\ m$

$L = 5\ m$

طول در چه تنش بستگی دارد وقتی بار در مرکز اعمال نشود؛

$e = 0/5\ cm$

$P < P_E$ باید باشد، اگر $P > P_E$ باشد تنش ∞ خواهد شد؛

در هر حالت P_E را می‌یابیم: برای $P_E = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$

$P_E = 20$ قرار می‌دهیم تا حداکثر L را بیابیم:

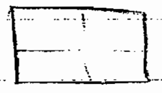
$$20000 = \frac{\pi(2\times10^6)(6\times\frac{4^3}{12})}{l} \Rightarrow l = 177.7\,cm$$

پس $L=2$, $L=5$ نمی‌تواند اتفاق بیفتد: چون در این دو حالت میله کمانش می‌کند و نمی‌تواند این بار را تحمل کند.

$$\Rightarrow L=1 \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{20000}{24}\times\Big[1 + (0.5)($$

$* \quad r = \sqrt{h^2/12}$ — r را باید نسبت به محوری بگیریم که خمش اتفاق می‌افتد:

$$\Rightarrow r = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$



$h = 6$

رادیان

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{2\times10^4}{2\times10^6\times24}}\cdot\frac{100}{2\sqrt{3}}\right) = 0.83$$

پس اول میله به خمش می‌افتد سپس به ازای بار اویلر به کمانش می‌افتد (در حالت عادی): برخی

حول محور خمش

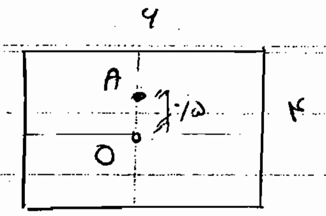
$$\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{2\times10^4}{24}\left[1+\frac{(0.5)(3)}{3}\cdot\frac{1}{0.83}\right] = 1165\ \frac{Kg}{cm^2}$$

* اگر L کمتر باشد σ_{max} کمتر خواهد بود.

اگر به طول توجه نداشتیم: $L = 200$ می‌گذاشتیم:

$$\Rightarrow \cos\sqrt{\frac{2\times10^4}{2\times10^6\times24}}\cdot\frac{200}{2\sqrt{3}} = 0.7$$

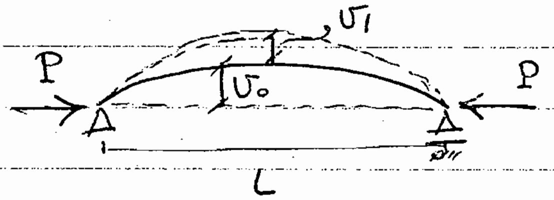
برای σ_{max} یک عدد کمتری از قبل بدست می‌آید در حالیکه کمانش اتفاق افتاده است!



cos اگر منفی باشد یعنی زاویه از $\frac{\pi}{2}$ بیشتر است یعنی کمانش اتفاق افتاده که در واقع ما به دنبال آن هستیم.

* حالت دیگر نقص

چون میله مستقیم نباشد :



اگر بار به این میله وارد شود باعث می‌شود که میله بیشتر خم شود اما اگر نیرو کششی بود میله می‌کوشد به حالت مستقیم درآید.

$$v_0 = a_0 \sin \frac{\pi x}{l}$$

بعد از وارد کردن بار v_0 بیشتر می‌شود

* $v = v_0 + v_1$

* $M = -Pv$ در هر مقطع

* تغییری که در اثر کمانش به وجود می‌آید ناشی از v_1 است :

* $EIv_1'' = M = -P(v_0 + v_1)$

* $EIv_1'' + Pv_1 = -Pv_0$

v_0 سینوسی $\Rightarrow$ $v_1 = a_1 \sin \frac{\pi x}{L}$

$$v_1'' = -a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{-a_1\pi^2}{L^2} EI \sin\frac{\pi x}{L} + Pa_1 \sin\frac{\pi x}{L} = -Pa_0 \sin\frac{\pi x}{L}$$

$$* \quad a_1 = \frac{-Pa_0}{-\frac{\pi^2 EI}{L^2} + P} = \frac{Pa}{P_E - P}$$

اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم باید v_0 را به صورت سری فوریه بنویسیم

$$* \quad v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{L}}$$

Cos اول آخر صفر است.

n=1 n=2 n=3

یعنی این خمیدگی می‌تواند مجموع بی‌نهایت sin ها باشد.

$$* \; v = v_0 + v_1$$
$$M = -P(v_0 + v_1)$$

$$* \quad EIv_1'' = M = -P(v_0 + v_1)$$

$$EIv_1'' + Pv_1 = -Pv_0$$

خمیدگی که اضافه می‌شود $\quad v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$

$$v_1'' = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n n^2\pi^2}{L^2} \cdot \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cdot \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI \sin\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} P b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} P a_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

چون x متغیر است باید رابطه به ازای هر n برقرار باشد تا طرفین $\sin n\pi$ بتواند ساده شود ؛

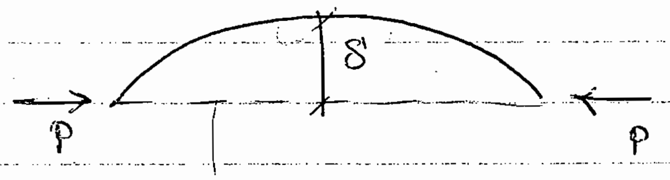
$$* \quad b_n = \frac{P a_n}{n^2 P_E - P} = \frac{P/P_E \cdot a_n}{n^2 - P/P_E}$$

وقتی بار زیاد می شود جمله اول به ازای $n=1$ ، b_1 به سمت ∞ میل می کند و جمله ای است

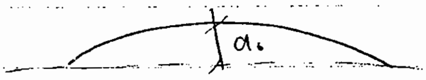
که برای ما مهم است

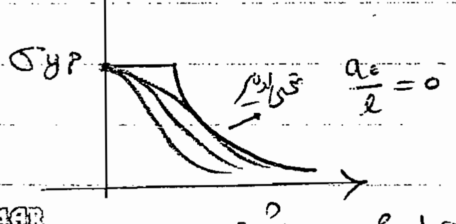
اگر میله ای خمیدگی داشته باشد وقتی بار را زیاد می کنیم و بار به سمت بار کرانی میل می کند

تغییر شکل به سمت $\sin$ ای میل می کند



$\frac{a_0}{L}$ خطا





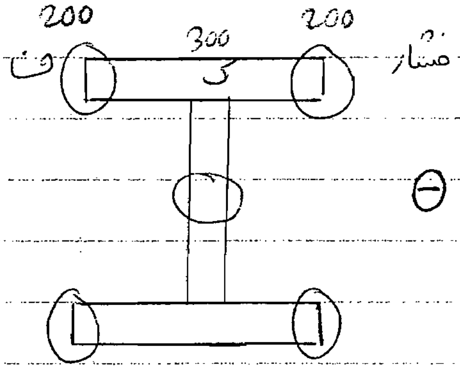
$\frac{a_0}{l} = 0$

اگر $\frac{a_0}{l}$ را زیاد کنیم "خطای نقص"

منحنی های حاصل نشان می دهند که کی تنش به تنش تسلیم می رسد .

اگر $a_0 = 0$ باشد خمیدگی اولیه معنی ندارد پس همه از یک نقطه شروع می شوند .

یعنی ابتدا اگر $o = l$ باشد $\frac{P}{A}$ باید به تنش تسلیم برسد ؟



* تنش های پسماند :

وقتی فولاد سرد می شود اول گوشه ها سرد می شوند و وسط مقطع.

θ $\theta = 300$

فولاد در یک درجه حرارتی مذاب است از آن به بعد با تغییر درجه حرارت اگر طول ثابت باشد تنش در آن ایجاد می شود.

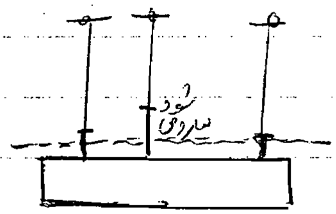
چون با ضربه می توان شکل فولاد را عوض کرد پس تنشی در آن ایجاد می شود یا باید یک حالت نیمه جامد داشته باشد یعنی به یک درجه حرارتی می رسد که تغییر طول آن آزاد باشد اگر آزاد نباشد تنش ایجاد می شود.

بالاتر از θ مذاب است پایین تر از آن مذاب نیست

نقاط ضعیف شده زودتر از θ پایین می آیند

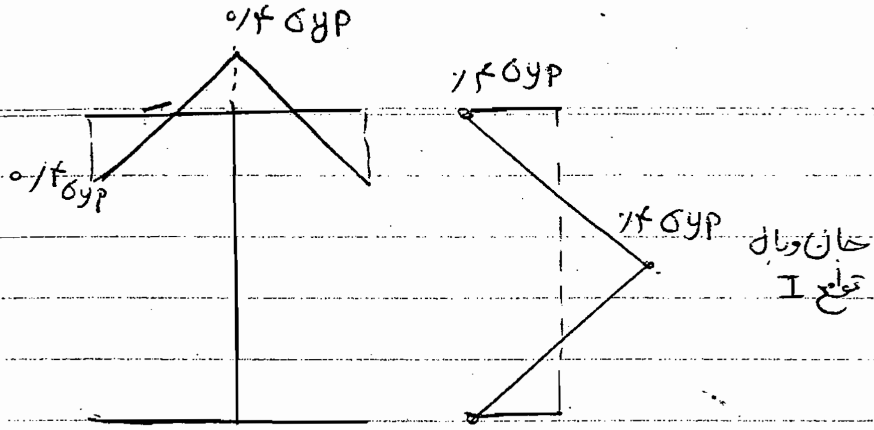
در یک حالتی که همه از θ کمتر شدند از این به بعد همه نقاط باید به یک اندازه درجه حرارتشان کم شود که

در این صورت تنش ایجاد می شود



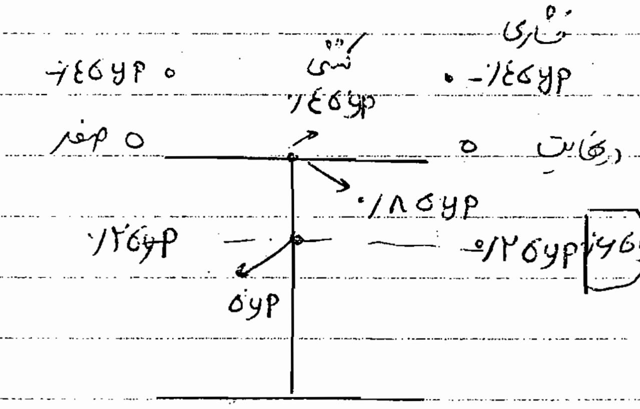
که تنش متعادل باید ایجاد شود چون تیر صلب است.

در حالتی که مقطع سرد شده و حالا به ۲۰° رسیده است گوشه تحت اثر فشار است و وسط تحت کشش ؟



— این انتگرال صفر خواهد بود چون هیچ نیروئی نداریم؟

$$\int_A \sigma dA = 0$$



فرض کنیم /۴۵σyp داشته باشیم

اگر تنش را به اندازه σyp از $\boxed{/۶۵σyp}$ کششی زیاد کنیم

تا /۴۵σyp تنش را اضافه کنیم

در گوشه تنش صفر می‌شود.

$F_1 = ٠/۶۵\sigma_{yp}$

در کتاب‌های مختلف ممکن است به جای ۰/۴ ، ۰/۳ باشد

یا شکل توزیع سهموی باشد.

وقتی به σyp برسیم بدون اعمال نیرو می‌توان تغییر طول ایجاد کرد یعنی اگر (/۶۵σypA) نیرو اعمال کنیم وسط به تنش تسلیم رسیده است از این به بعد با افزایش نیرو دیگر گوشه‌ها تنش نمی‌گیرند بلکه فقط وسط تنش آن تغییر می‌کند یعنی تنش‌ها به جاهایی می‌روند که تنش کمتر است

مثلاً F=٠/۷۵σyA باعث می‌شود که فقط وسط تنش آن تغییر می‌کند؟

اگر تنش های فشاری اعمال کنیم ؟

$-۰/۴ \sigma_{yp}$

$۰/۳\sigma_{yp}$ $-۰/۵\sigma_{yp}$

۰ $-۰/۸\sigma_{yp}$

$-۰/۲\sigma_{yp}$ $-\sigma_{yp}$

$F_1 = -۰/۱ \sigma_{yp} \cdot A$ فشاری

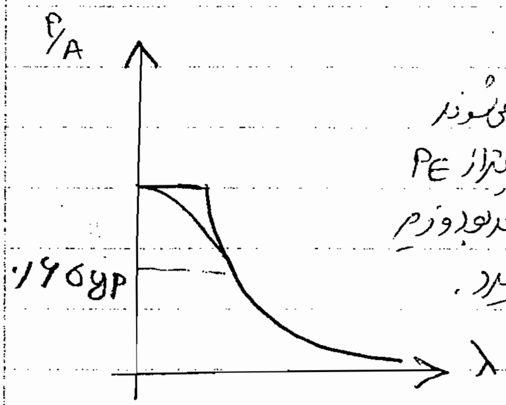
$F_2 = -۰/۴ \sigma_{yp} \cdot A$

$F_3 = -۰/۶ \sigma_{yp} \cdot A$

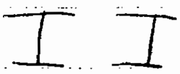
اما اگر طول زیاد باشد و کمانش مطرح باشد

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

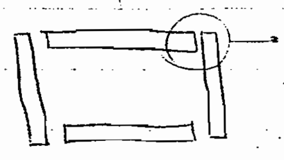
هرچه l کوچکتر باشد مقدار بار بحرانی افزایش می یابد.



می توان بار بیشتر اعمال کرد این بار اعمالی به مقطع اضافه نمی شود به
دوره که بیشتر اضافه می شود. بنابراین یک قسمت هایی در محاسبه I خارج می شوند
پس P_E کوچکتر از P_E
حقیقی خواهد بود و زیر P_E قرار می گیرد.

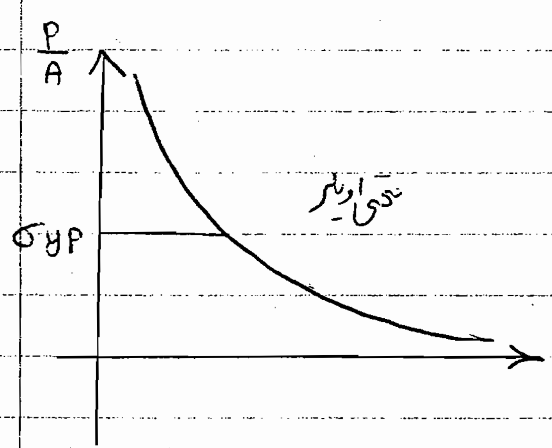


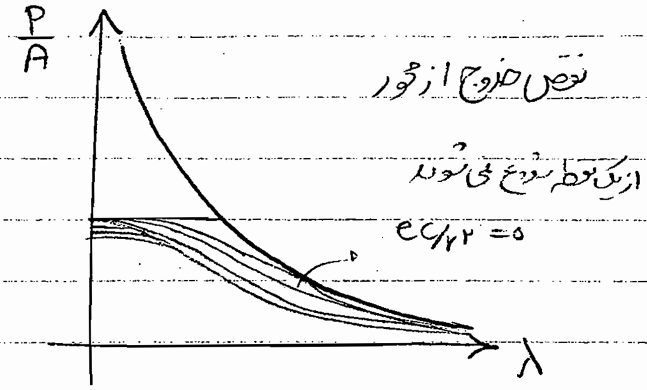
اگر دو I را به هم متصل کنیم اندیس ماند با I فرق دارد.



جوش داده می شود

چون در این حالت جوش داده می شود
تنش پسماند حتی ممکن است به تنش σ_{yp}
برسد



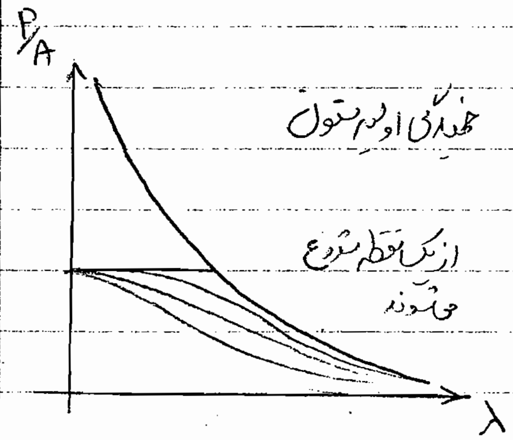


$\frac{ec}{r^2}$

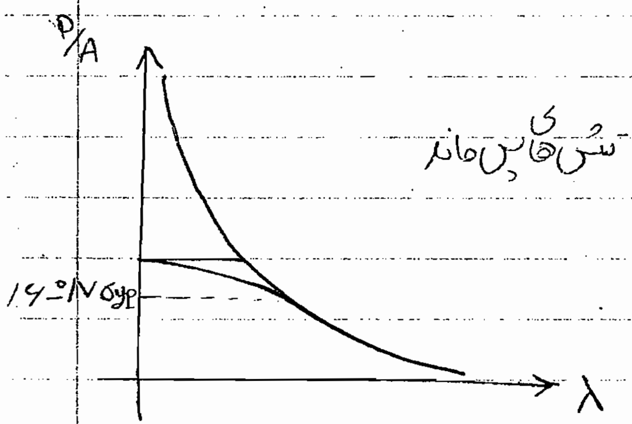
e مقدار واقعی خروج از مرکز

c فاصله از مرکز مقطع در خمش

r شعاع ژیراسیون

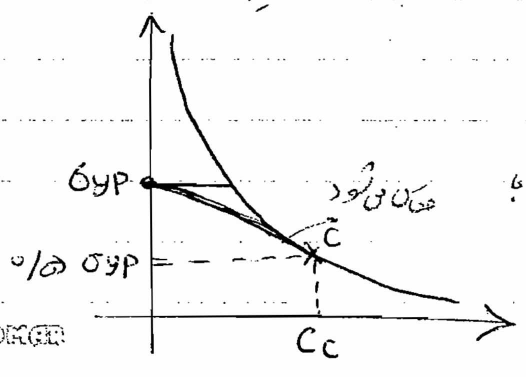


$\frac{a}{l}$ a مقدار δ در وسط تیر



هرچه قدر خروج از محور را بخواهید صفر کنید صفر نمی شود باید یک مقداری در نظر بگیرید

آیین نامه آمریکا که آیین نامه ایران از روی آن است به صورت زیر است ؟



یک سهمی است !

آیین نامه آمریکا اثرات مجموع نقص ها و تنش های پسماند را باهم بررسی کرده و مقدار $0/5\sigma_{yp}$ را درنظر گرفتند.

$$\sigma = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{P}{A} \quad * \text{ هذلولی منحنی اویلر}$$

$$\sigma = A - B\lambda^2 \quad * \text{ معادله سهمی}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow A = \sigma_{yp}$$

$$C \left| \begin{array}{l} C_c \\ 0/5\sigma_{yp} \end{array} \right.$$

C هم روی منحنی اویلر است هم روی سهمی آیین نامه.

$$0/5\sigma_{yp} = \frac{\pi^2 E}{C_c^2} \Rightarrow \boxed{C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}}}$$

این منحنی می تواند بکار رود اما یک ضریب اطمینان باید بکار برده شود:

درمنحنی اویلر بین از نقطه C ضریب اطمینان $23/12$

در $\lambda = 0$ ضریب اطمینان $5/3$ مثل کشش است

از 0 تا نقطه C ضریب اطمینان از $5/3$ تا $\frac{23}{12}$ تغییر می کند به صورت زیر:

$$\boxed{S.F = \frac{5}{3} + \frac{3\lambda}{8C_c} - \frac{\lambda^3}{8C_c^3}}$$

به تدریج که λ زیاد می شود SF زیاد می شود:

$$\lambda = C_c \qquad \boxed{SF = \frac{23}{12}}$$

"آیین نامه ایران - آمریکا"

$\xleftarrow{\quad\text{میله کششی}\quad}$

برای مقادیر مختلف λ ضریب $SF = 5/3$ بود

درمیله فشاری هرچه λ بیشتر می شود احتمال نقص بیشتر است پس ضریب اطمینان زیادتر شده است.

از نقطه C به بعد خطاها به مقدار max خود رسیده و از بین ضریب اطمینان ثابت می شود

در فشار خراب شدن در طول های کم با تسلیم است و در طول زیاد با کمانش هر چه طول زیادتر باشد

کمانش بیشتر است.

در همین مورد نظر تنش های پسماند بیشترین اثر را دارند

برای هر λ می توان یک تنش مجاز بدست آورد اول σ_{cr} مربوط به آن λ را می یابیم بر ضریب

اطمینان تقسیم می کنیم تا σ_{all} بدست آید

این منحنی بر اساس مقطع I بدست آمده و آیین نامه آمریکا می گوید همه مقاطع دیگر را از روی این منحنی

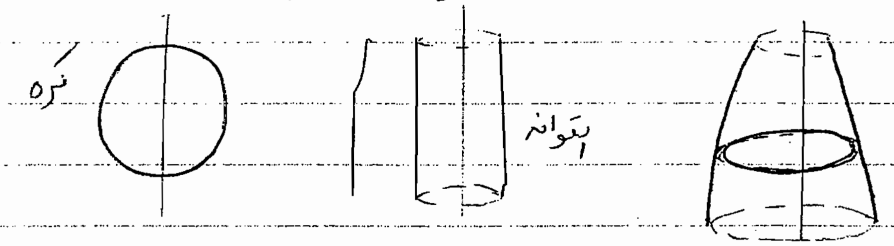
بیابید در حالیکه درست نیست

در آیین نامه آلمان $\omega \frac{P}{A} \leq \sigma_{all}$ باید این رابطه برقرار باشد در حالیکه $\omega \geq 1$ است یعنی

σ_{all} را از یاد می کند P را از روی آن می یابند

مخازن جدار نازک مدور :

هم بارگذاری و هم شکل مخزن طوری باشد که نسبت به یک محور متقارن باشد

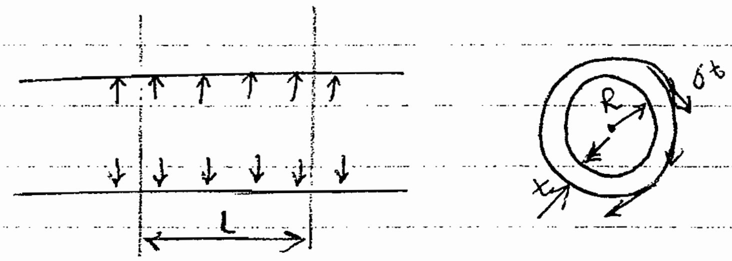


در حالت کلی یک انحنایی دور محور بچرخد

بارگذاری هم باید مدور باشد . تا تقارن از بین نرود

حالت های ساده تر استوانه و کره را ابتدا بررسی می کنیم :

یک استوانه طولانی داریم

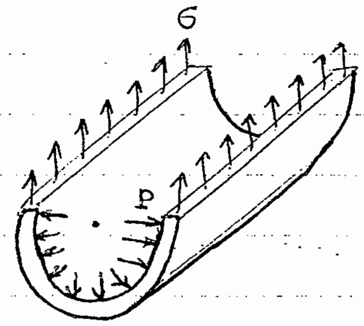


فرض کنیم فشار ثابت P در تمام نقاط داریم

مثلاً یک لوله گاز مستقیم

می توانیم فقط مقطعی از استوانه را به طول واحد یا طول l درنظر بگیریم ؟

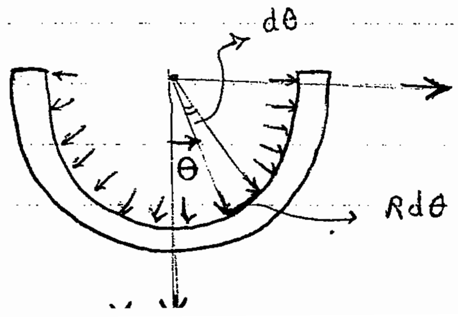
ازطرفی می توان آن را به دو نیم استوانه تبدیل کرد ؟



فشار سیال عمود بر جدار است

اگر استوانه کامل بود تقارن برقرار بود اما

اینجا نیم استوانه است .



$$\Rightarrow \quad dF = P(R\,d\theta)L$$
$$dF_y = P(R\,d\theta)L\cdot\cos\theta$$

$$F_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} PRL\cos\theta \, d\theta$$

چون متقارن است $\Sigma F_x = 0$ است

$$= PRL . \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$F_y = 2PRL$$

می‌توانستیم با تصور P عمود بر قطر هم F_y را بیابیم که می‌شد P ضرب در مساحت یک مستطیل به طول L و عرض 2R

برای حفظ تعادل σ در سطح جدار نازک داریم :

$$\sigma = \frac{2PRL}{\underbrace{2tL}_{\text{مساحت مستطیل‌ها}}}$$

$$\sigma_t = \frac{PR}{t}$$

در هر نقطه این تنش مماس بر محیط جدار نازک است

این تنش را تنش مماسی یا تنش محیطی یا تنش حلقوی می‌گویند

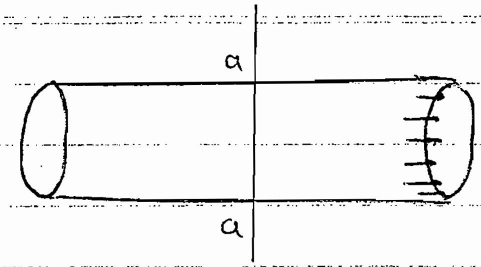
مماسی tangential stress

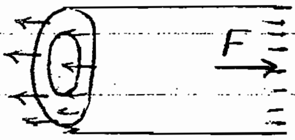
محیطی Circumferential "

حلقوی Hoop "

اگر طول استوانه را ∞ نگیریم یعنی استوانه از انتها بسته است به ته استوانه فشار وارد می‌شود

این فشارها در هر مقطعی که استوانه را قطع می‌کنیم باید در حال تعادل باشند :





$$\boxed{F = P \cdot \pi R^2}$$

جدار نازک $A = 2\pi R \cdot t$ R متوسط

$$\sigma = \frac{\pi R^2 \cdot P}{2\pi R t}$$

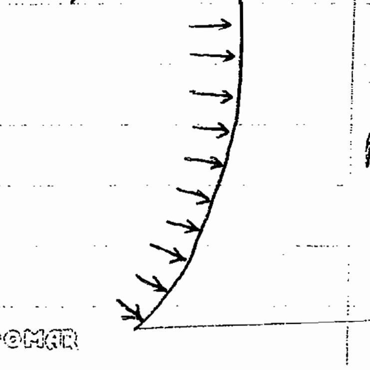
تنش طولی چون در امتداد طول استوانه است

$$\boxed{\sigma_l = \frac{PR}{2t}}$$

* تنش طولی در استوانه‌ها نصف تنش محیطی است ؛

اگر یک لوله را زیر آب ببریم اگر فشار آب دور لوله تقریباً ثابت باشد از همین رابطه استفاده می‌شود ولی تنش‌ها فشاری خواهند بود .

همیشه از R متوسط استفاده کنید ؛

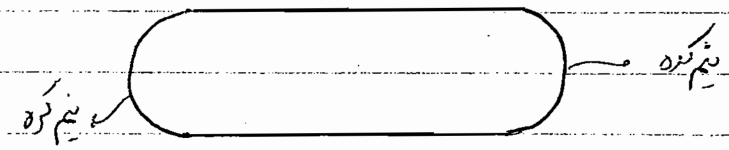


این که ته استوانه چطور بسته باشد فرقی ندارد ؛

مثلاً اگر بخواهیم نیروها را در جهت x بیابیم سطح را در جهت عمود بر x تصویر می‌کنیم

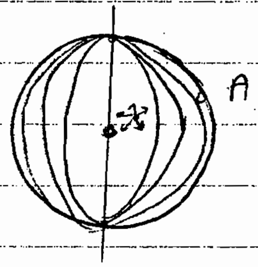
$$\boxed{F_x = P.A}$$

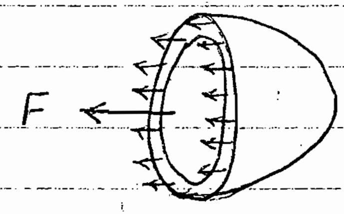
مثال :



هرچه طول استوانه را کم کنید باز هم تنش طولی را به همان مقدار خواهید داشت

تا جائیکه به یک کره تبدیل کنید ؟





$$F = P.\pi R^2$$

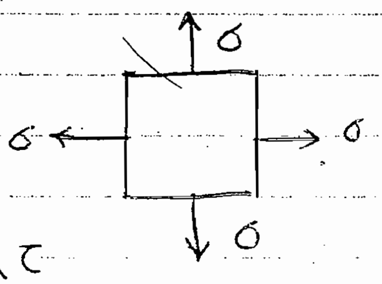
$$\sigma \quad \frac{P.\pi R^2}{2\pi R t}$$

$$\sigma = \frac{PR}{2t}$$

در کره تنشی که داریم با تنش طولی استوانه برابر است ؟

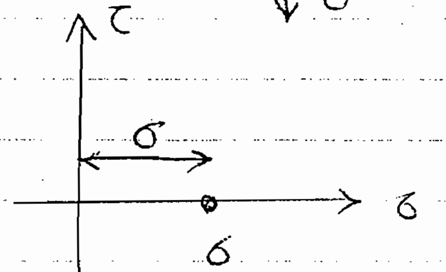
در نقطه ای مثل A تنش در همه جهات وجود دارد چون در نقطه روی کره می توان در هر جهتی یک

مقطع زد و کره را به دو نیم کره تقسیم کرد .



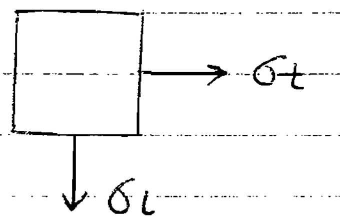
$A \mid \begin{matrix} \sigma \\ 0 \end{matrix}$

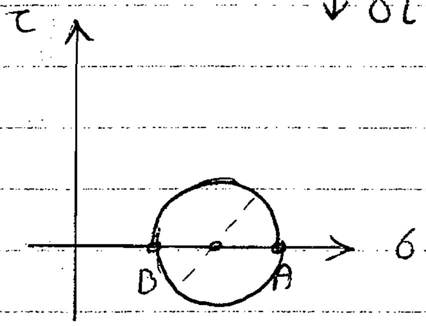
$B \mid \begin{matrix} \sigma \\ 0 \end{matrix}$



دایره به هر یک نقطه می شود

در استوانه





در صفحات حامل هم تنش عمودی داریم هم تنش برشی.

در مخزن جدار نازک به هر حال نه آن بسته است به هر نحوی پس هر دو تنش را داریم σ_t , σ_l

در کره این دو تنش وجود دارند ولی مقدار آن با مقدار تنش طولی استوانه برابر است در کتاب جابه

نام تنش مماسی اسم گذاشته می شود.

به خاطر وجود تنش ها ε داریم

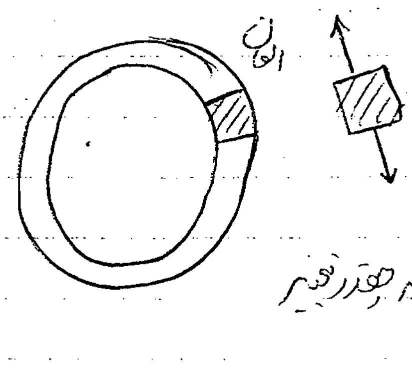
در استوانه داریم

$$* \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_l)$$

تنش طولی

$$* \quad \varepsilon_l = \frac{1}{E}(\sigma_l - \nu \sigma_t)$$

$$; \quad \varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$$



* ε_t 8

وقتی تغییر طول ها در این حالت جمع می شوند معلوم می شود که محیط استوانه چقدر تغییر کرده است.

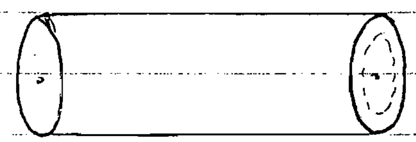
* $\varepsilon t = \frac{\Delta(2\pi R)}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta D}{D}$

در کره داریم :

* $\varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma - \nu\sigma) = \frac{\sigma}{E}(1-\nu)$

* $\varepsilon = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta D}{D}$

مثال :



$L = 10m$
$R = 2m$
$t = 3\ cm$
$E = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$
$\nu = 0/3$

فشار گاز داخل برابر است با $15\ \frac{kg}{cm^2}$.

اولاً تنش های طولی و مماسی ؟ ثانیاً تغییر ابعاد مخزن ؟

* $\sigma t = \frac{PR}{t} = \frac{15\times200}{3} = 1000\ kg/cm^2$

$\sigma l = \frac{PR}{2t} = 500$

* $\varepsilon t = \frac{1}{2\times10^{6}}(1000 - 0/3(500)) = 425\times10^{-6}\ cm$

* $\Delta R = R(\varepsilon t) = 200(425\times10^{-6}) = 0/085$ تغییر شعاع

* $\varepsilon_l = \frac{1}{2\times10^{6}}(500 - 0/3(1000)) = 10^{-4}$

* $\Delta l = \varepsilon_l \cdot l = 1000\times10^{-4} = 10^{-1}\ cm = 1\ mm$ تغییر طول

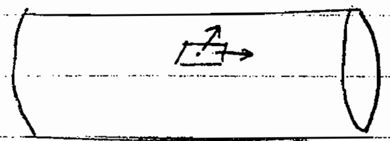
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta R}{2R} + \frac{\Delta l}{l}$$

تغییر حجم $\Rightarrow$ $V = \pi R^2 l$

$$\Delta V = 2\pi R(\Delta R)L + \pi R^2 \Delta l$$

کرنش حجمی $\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ *

$\varepsilon_1 \to \varepsilon_t$, $\varepsilon_2 \to \varepsilon_l$



$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

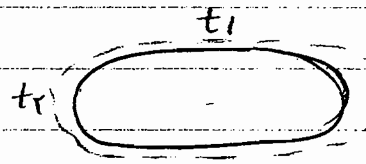
$$\varepsilon_3 = \frac{-0.3}{2\times 10^7}(\varepsilon_t + \varepsilon_l) = -225\times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_t + \varepsilon_l + \varepsilon_3$$

ε_V که بدست آوردیم تغییر حجم مصالح بکار رفته را به ما می‌دهد نه حجم فضای درونی را

در حالیکه ΔV که بدست آوردیم تغییر حجم خود گاز درون ظرف است.

مثال: در شکل نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ را چنان بیابید که در محل اتصال تنش اضافی ایجاد نشود؟



دو قسمت نیمکره و یک قسمت استوانه‌ای داریم.

استوانه $\varepsilon_t = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_l)$

کره $\varepsilon = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E}(\sigma - \nu\sigma) = \frac{\sigma}{E}(1-\nu)$

$$\varepsilon_t = \varepsilon$$

$$\sigma_t - \nu\sigma_l = \sigma(1-\nu)$$

$$\frac{PR}{t_1} - \nu\frac{PR}{2t_1} = \frac{PR}{2t_2}(1-\nu)$$

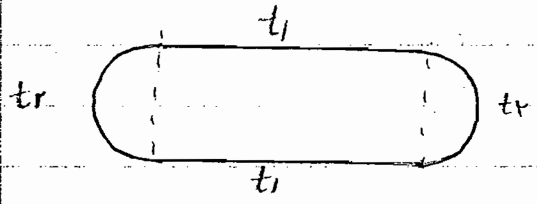
$$\frac{2-\nu}{2t_1} = \frac{1-\nu}{2t_2} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{1-\nu}{2-\nu}$$

باید همزمان با هم تغییر حجم بدهند.

اگر ضخامت همه جا یکسان باشد حتماً در حوالی محل اتصال تنش‌ها از این فرمول‌ها تبعیت نمی‌کند

و تنش‌های فشاری یا کششی با فرمول‌ها جمع می‌شود.

مثال: مخزنی مطابق شکل با ورق‌هایی به ضخامت $t_1 = 17^{mm}$ ، $t_2 = 7mm$ و طول $L = 30\ m$ ، $D = 20\ m$

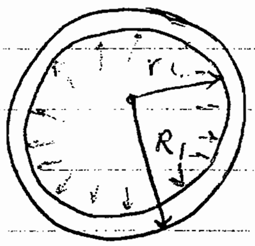


اگر داخل استوانه را پر از آب با فشار معمول کنیم و بعد از آن مقداری آب اضافی پمپ کنیم تا فشار $10\frac{kg}{cm^2}$ اضافه شود چقدر آب به داخل آن پمپ خواهد شد؟

ضریب تراکم آب $= 10^{-4}$

به دو علت آب طلب خواهد شد یکی به خاطر تغییر حجم استوانه و کره
دوم به خاطر این که آب تراکم پذیر است؛

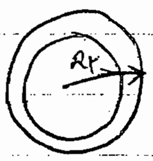
?



مثال: حلقه فولادی ① که شعاع داخلی آن کوچکتر از شعاع خارجی حلقه ② است می خواهیم روی حلقه ② قرار دهیم و این کار را با حرارت انجام می دهیم

$r_1 = 20^{cm}$

$R_2 = 20.01^{cm}$



وقتی مجموعه سرد می شود کشش هایی در حلقه ها ایجاد می شود و هر فشاری بین آنها رد و بدل می شود.

$t_1 = 1^{mm}$

$t_2 = 2^{mm}$ $\qquad E = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$

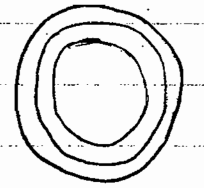
یعنی به حلقه ① فشارهایی ایجاد می شود تا شعاع آن بزرگتر شود؛
در نهایت شعاع ها باید برابر شوند؛ cm

$$|\Delta R_1| + |\Delta R_2| = 0.01$$

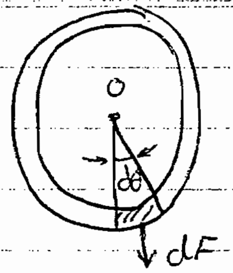
$$\Rightarrow \Delta R_1 - \Delta R_2 = 0.01^{cm}$$

R_1 زیاد می شود ، R_2 کم

?



مثال ۴ دو حلقه از دو جنس متفاوت
روی هم قرار بگیرند
مثلاً Al, St چون Al ضریب انبساطی
بزرگتری دارد وقتی گرم می‌شوند Al بیشتر تغییر قطر
می‌دهند، باید در این حالت ΔR ها مساوی
باشند که در این حالت ΔR های ناشی از فشار داخلی است یکی ناشی از حرارت



اگر یک حلقه ای داشته باشیم و حلقه حول محوری عمود بر صفحه شکل دوران کند در اثر این دوران نیروی گریز از مرکز به ذرات آن وارد می شود که می خواهد قطر آن را زیاد کند مثل این است که یک فشاری از داخل به آن اثر می کند.

ω سرعت زاویه ای

$$dF = dm\,(\omega^2 R)$$

$$* \quad dm = \rho \underbrace{dV}_{\text{حجم}}$$

$$* \quad dF = \rho dV (\omega^2 R)$$

$$= \rho\,(L \cdot t \cdot R d\theta)\,\omega^2 R$$

$$dF = \rho L t R^2 \omega^2 d\theta$$

فشار ایجاد کننده

$$P = \frac{dF}{\underbrace{L \cdot R d\theta}_{dA}} = \rho t R \omega^2$$

$$\sigma_t = \frac{PR}{t} = \rho R^2 \omega^2$$ تنش ماکزیمم

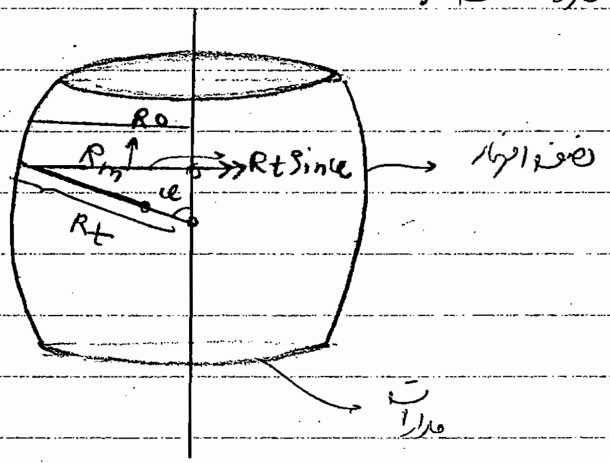
$$\sigma_t = \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2$$

$$R^2 \omega^2 = \underbrace{v^2}_{\text{سرعت خطی}} \quad *$$

حجم

حالت کلی 8

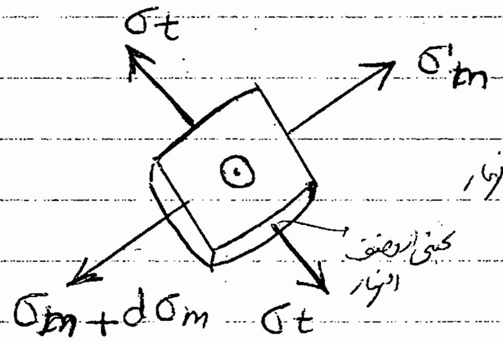
یک مخزن از دوران یک منحنی حول یک محور ایجاد شده است :



R_m شعاع انحنای صفحه انحنا

R_0 شعاع مدار

اگر تعادل یک المان از این مخزن را در نظر بگیریم



صفحه را عمود بر صفحه انحنا گرفتیم

σ_m مماس بر صفحه انحنا (σ_l)

σ_t عمود بر صفحه انحنا

⊙ فشار عمود بر المان از داخل

$$\boxed{\frac{\sigma_t}{R_t} + \frac{\sigma_m}{R_m} = \frac{p}{t}}$$

σ_t ها در یک راستا هستند

با هم زاویه خیلی کوچکی می سازند.

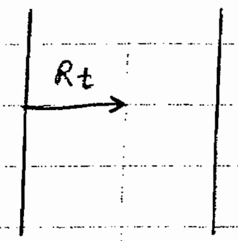
σ_m ها در بالا و پایین المان

متفاوت اند ؛ ولی برآیند

آنها در جهت امتداد p می افتد.

* σ_m معمولاً از تعادل نیروها در امتداد محور دوران بدست می آید :

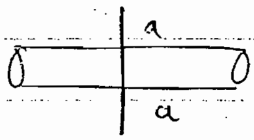
استوانه



$R_m = \infty$

$\sigma_m = \sigma_l$

برای بدست آوردن σ_m باید استوانه را قطع کنیم

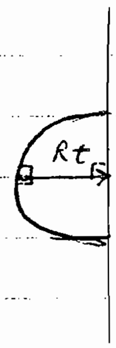


σ_m همان σ_l است.

$$\Rightarrow R_m = \infty \quad \frac{\sigma_m}{R_m} = 0$$

$$* \quad \frac{\sigma_t}{R_t} = \frac{P}{t} \Rightarrow \sigma_t = \frac{PR_t}{t} = \frac{PR}{t}$$

* برای یک کره :



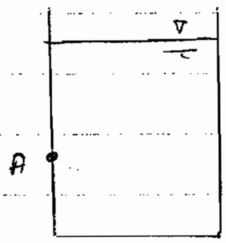
$R_t = R_m = R$

کره را از هر جهت قطع کنیم

یک شکل دارد به عبارتی شکل کره در همه جهات یکی است

پس $\sigma_m = \sigma_t$ است

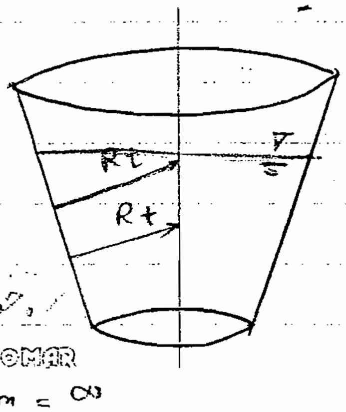
$$* \quad \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{P}{t} \Rightarrow \sigma = \frac{PR}{2t}$$

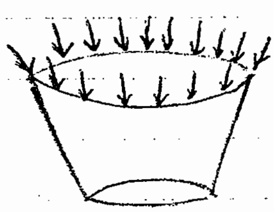


در نقطه A
با داشتن P
می توان σ را یافت

بارگذاری روی مخزن حتماً باید دوار باشد

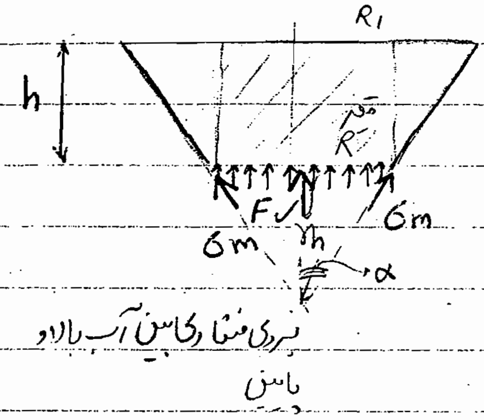
اگر استوانه به طور افقی باشد نمی توان از این روش رفت





σ_m را از روی تعادل می یابیم؟

$R_m = \infty$



$$P = \gamma h$$

$$\omega_{\text{آب}} = V\gamma = (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1A_2})\frac{h}{3}$$

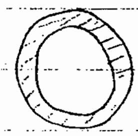
$$= (\pi R_1^2 + \pi R^2 + \pi R_1 R)\frac{h}{3}\gamma$$

$$F = \pi R^2 h \gamma$$ وزن آب بالای این مقطع

همه را در جهت y

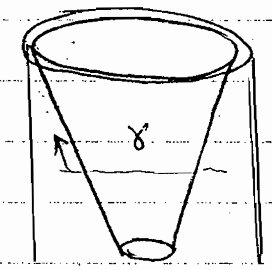
$$* \quad \int_0^{2\pi} \sigma_m \cdot t R\, d\theta \cos\alpha =$$ تصویر کردیم

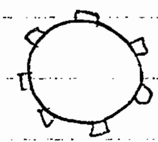
$$= \sigma_m t\, R(2\pi) \cos\alpha$$



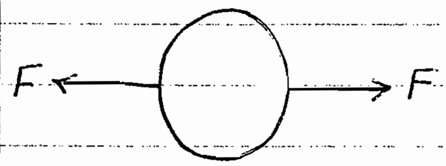
$$\omega - F = \sigma_m t\,(2\pi R)\cos\alpha$$

از بالا نگاه کنیم



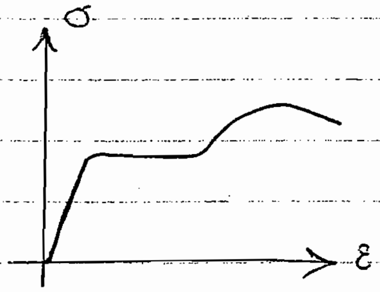


مثال :



?

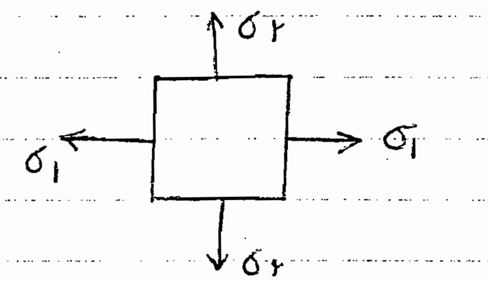
* تئوری های مقاومت 8

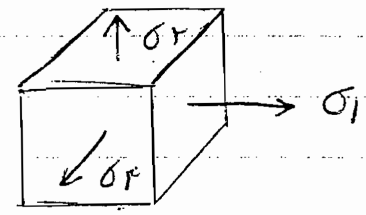


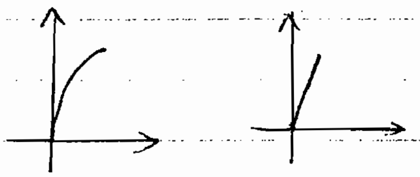
این نمودار را در مقاومت (۱) بررسی کردیم.

مقاومت در مقابل خرابی به چه چیزی بستگی دارد

می خواهیم ببینیم در حالت های دو محوری و ۳ محوری خرابی در کجاست ؟







در جاهایی که مثل فولاد تسلیم دارند خرابی را با تسلیم یکی می گیرند

اما جاهایی مثل بتن و شیشه که تسلیم ندارند خرابی آنها را با پارگی یکی می گیرند ؟

از این به بعد σ_0 را در نظر می گیریم اگر حد تسلیم داشته باشیم $\sigma_0 = \sigma_{yp}$ در غیر این صورت $\sigma_0 = \sigma_u$

* σ_0 را حد مقاومت می گویند ؟

فرضیه های زیادی ارائه شده است بعضی از این فرضیه ها امروزه رد شده اند اما از نظر تاریخی مهمترین فرضیه ها را بحث می کنیم

* فرضیه اول :

در حالت های ۲ بعدی و ۳ بعدی هر وقت بزرگترین تنش بین σ_1 و σ_2 و σ_3 به تنش تسلیم رسید

تسلیم اتفاق می افتد و اگر به تاب رسید جسم به تنش نهایی می رسد

این فرضیه ساده ترین فرضیه ای است که به ذهن می آید

این فرضیه را فرضیه تنش عمودی ماکزیمم یا فرضیه رانکین می گویند

در یک المان تنش های برشی هم داریم در این فرضیه تنش های اصلی را در نظر می گیرند

این فرضیه بعضی جاها جواب می دهد مثلاً در مورد شیشه و چدن نتایج نسبتاً قابل قبولی می دهد
آنهایی که σ_u دارند بهتر جواب می دهند

* فرضیه دوم : فرضیه پواسون

این فرضیه را فرضیه کرنش خطی ماکزیمم می گویند :

حالت ۳ بعدی

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2+\sigma_3)\right]$$

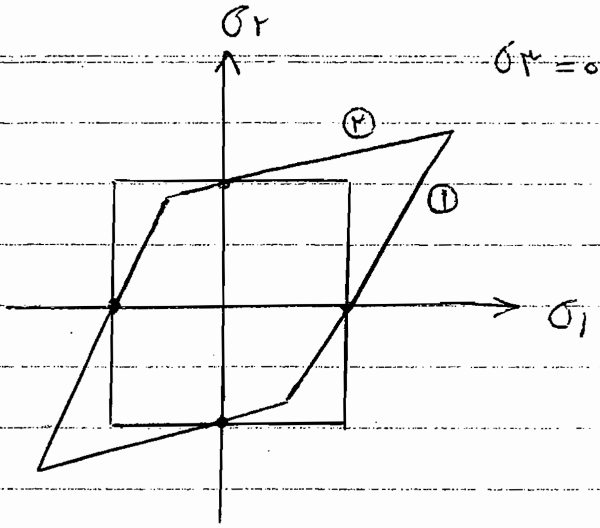
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_1+\sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_3+\sigma_1)\right]$$

بزرگترین تنش بین این ۳ را از روی بزرگترین کرنش در نظر می گیریم

ε معیار را از روی تنش معیار بدست می آورند یعنی $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$

$\sigma_3 = 0$



هرکدام از تنش ها که با σ_0 برابر شود
در آن تنش خراب می شود ؛
یعنی σ ای را می تواند بپذیرد که داخل
شکل باشد .

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \qquad \text{if } \sigma_1 > \sigma_2 > 0$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)$$

① $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \Rightarrow * \ \sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_0$ $\quad$ خط ①

هرچه σ_1 بزرگتر باشد خط
از σ_0 دورتر می شود ؛

② if $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ $\quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1$

$* \ \sigma_2 - \nu\sigma_1 = \cancel{\ } = \sigma_0$ $\quad$ خط ②

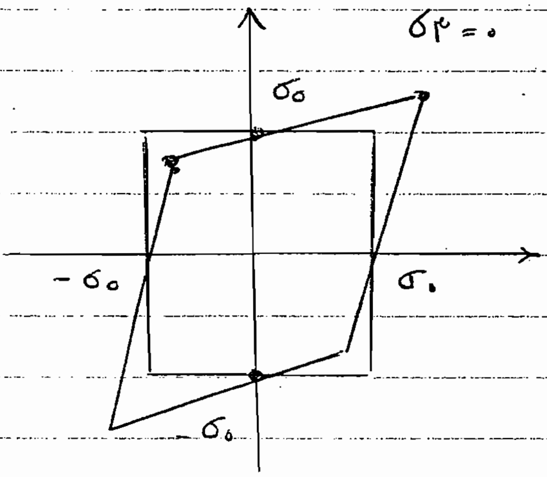
③ $\sigma_1 < 0$ $\quad$ if $|\sigma_1| > \sigma_2$ $\quad \sigma_1 - \nu\sigma_2 = -\sigma_0$
$\sigma_2 > 0$

درجاهایی که تنش ها هم علامت اند تنش های بیشتری را می توان اعمال کرد نسبت به فرضیه اول ؛

این فرضیه پواسن در خیلی جاها جواب درست نمی دهد ؛ نتیجه خوبی ندارد .

فرضیه های مقاومت :

۱ - فرضیه تنش عمودی ماکزیمم (رانکین)
۲ - " تغییر شکل خطی ماکزیمم (پواسن)
۳ - " برش ماکزیمم



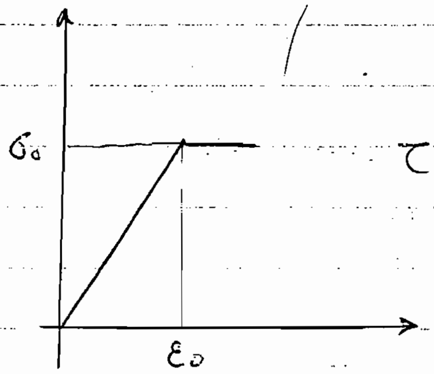
برش max : در این فرضیه برش را ملاک عمل قرار می دهد در رسیدن به حد مقاومت

یا فرضیه کوبن - ترسکا

- در این فرضیه تنش و تغییر شکل با هم متناسبند .

در برش τ_{xy} دارای γ_{xy} ، τ_{xz} دارای γ_{xz} است صفحات عمود بر آن روی γ این

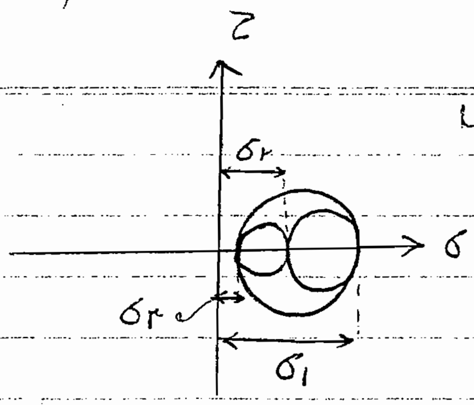
صفحه اثر ندارند



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$$

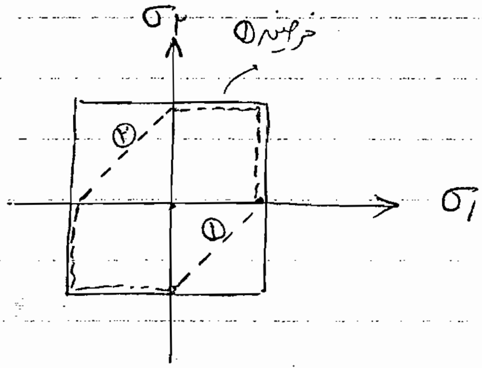
هر جا تنش برشی ماکزیمم به این مقدار برسد تسلیم داریم

در حالت ۳ بعدی



$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

- اگر $\sigma_3=0$ باشد و $\sigma_1>\sigma_2$ و هر دو مثبت باشند، بزرگترین تنش اصلی σ_1 و کوچکترین تنش اصلی σ_3 پس $\tau_{max}=\frac{\sigma_1-0}{2}$ و باید با $\frac{\sigma_0}{2}$ برابر باشد پس $\sigma_1=\sigma_0$



- $\sigma_2>\sigma_1>0$ پس $\tau_{max}=\frac{\sigma_2-0}{2}$ و $\tau_{max}=\frac{\sigma_0}{2}$ $\Leftarrow$ $\sigma_2=\sigma_0$

- $\sigma_1<\sigma_2<0$ $\Leftarrow$ $\tau_{max}=\frac{0-\sigma_1}{2}$ و $\tau_{max}=\frac{\sigma_0}{2}$ $\Leftarrow$ $\sigma_1=-\sigma_0$

پس در این ۴ منطقه فرضیه اول برقرار است؟

اگر $\sigma_1>0$ و $\sigma_2<0$ باشد

$$\Rightarrow \tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\frac{\sigma_0}{2}$$

خط ① $\sigma_1-\sigma_2=\sigma_0$ ع خط داریم به معادله

اگر $\sigma_1<0$, $\sigma_2>0$ باشد

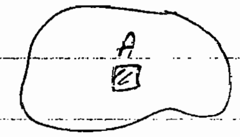
$$\Rightarrow \tau_{max}=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}=\frac{\sigma_0}{2} \quad ②$$

این فرضیه برای مصالحی که تسلیم دارند فرضیه خوبی است .

« به شکل ۶ ضلعی است »

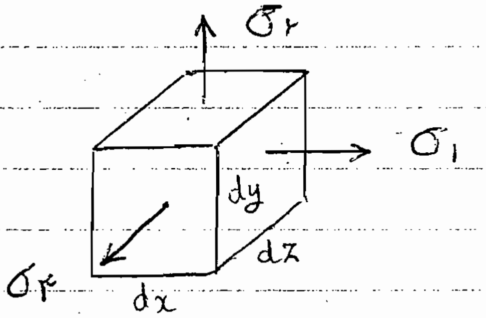
۴ـ فرضیه انرژی کرنش واحد حجم « بلترامی »

اگر یک نقطه بخواهد به تسلیم برسد انرژی در واحد حجم المان باید به معیار مورد نظر برسد ؟



معیار $u = \dfrac{\sigma_0^2}{2E}$

در هر حالتی انرژی به این مقدار که برسد به تسلیم رسیده‌ایم



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

$$* \quad \overset{\text{کل انرژی}}{U} = \overbrace{(\sigma_1\, dy\, dz)}^{\text{نیرو}} . \overbrace{(\varepsilon_x\, dx)}^{\text{تغییر مکان}\ \varepsilon_1}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}(\sigma_2\, dx\, dz).(\overset{\varepsilon_2}{\varepsilon_y}\, dy)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\sigma_3\, dx\, dy).(\overset{\varepsilon_3}{\varepsilon_z}\, dz)$$

$$\text{واحد حجم}\ u = \frac{U}{V} = \tfrac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)$$

با جاگذاری تواتر $= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right]$

$$u=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right]$$

که باید با $\frac{\sigma_0^2}{2E}$ برابر شود :

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)=\sigma_0^2$$

معادله یک بیضی‌گون است

در حالت ۲ بعدی معادله یک بیضی است : $\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\nu\sigma_1\sigma_2=\sigma_0^2$

روی یک خط با زاویه ۴۵° حرکت کردیم پس $\sigma_1=\sigma_2$ است.

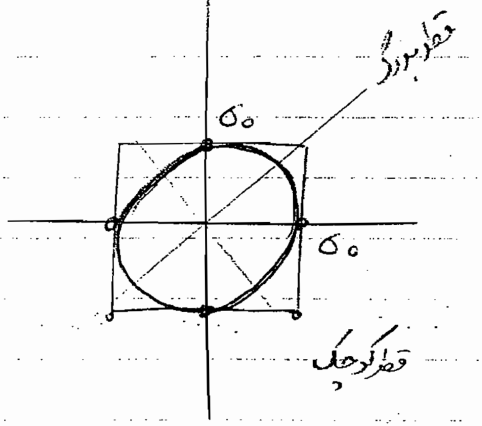
در نقاط گوشه در ربع اول مختصات

$* \quad \sigma'^2+\sigma'^2-2\nu\sigma'^2=\sigma_0^2$

$* \quad \sigma'^2=\frac{\sigma_0^2}{2(1-\nu)}$

$$\Rightarrow \sigma'=\frac{\sigma_0}{\sqrt{2(1-\nu)}}$$

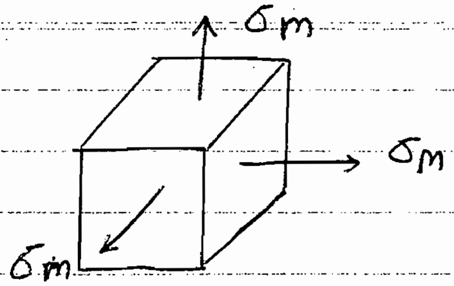
$$1-\nu>\tfrac{1}{2} \Rightarrow 2(1-\nu)>1 \Rightarrow \sqrt{2(1-\nu)}>1 \Rightarrow \sigma'<\sigma_0$$



این فرضیه هم تقریباً با هیچ حسی جور در نمی‌آید

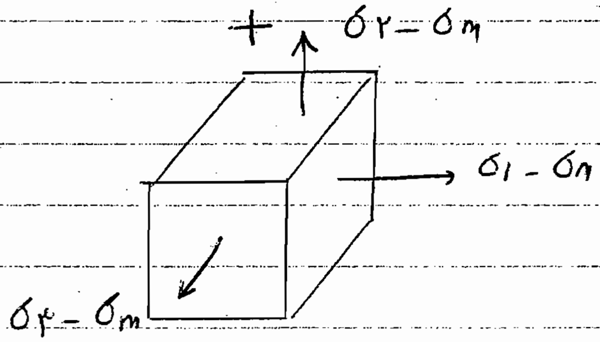
اما این فرضیه باعث شد تا فرضیه مهم و خوب دیگری با نام فرضیه انرژی کرنش اعوجاج واحد حجم ارائه شد

۵ - انرژی تنش اعوجاج واحد حجم 8



$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

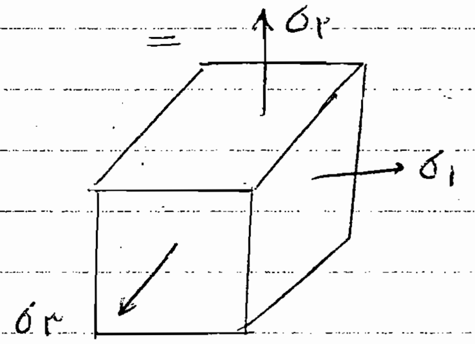
✓ این شکل اعوجاج ندارد چون برش نداریم
فقط تغییر حجم داریم



✓ این شکل تغییر حجم ندارد اگر ε_v را حساب کنیم

$$\varepsilon_v = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \Rightarrow \varepsilon_v = 0$$

فقط اعوجاج دارد



نظریه هوبر هنکی فون میسس

اگر یک تنش کروی داشته باشیم و از همه طرف حجم را تحت اثر تنش های مساوی قرار بدهیم اعوجاج نداریم پس انرژی تنش اعوجاج ندارد پس طبق این نظریه به تنش کروی هیچ وقت به تسلیم نمی رسد ؟

این نظریه نسبت به نظریه های دیگر قابل قبول تر است ؟

distortion اعوجاج

$$* \quad U_d = \frac{1}{2E}\Big[(\sigma_1-\sigma_m)^2 + (\sigma_2-\sigma_m)^2 + (\sigma_3-\sigma_m)^2 - 2\nu\big[(\sigma_1-\sigma_m)(\sigma_2-\sigma_m) + (\sigma_2-\sigma_m)(\sigma_3-\sigma_m) + (\sigma_3-\sigma_m)(\sigma_1-\sigma_m)\big]\Big]$$

$$u_d = \frac{1}{2E}\Big[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+3\sigma_m^2-2\sigma_m(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

$$+\ \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-3\sigma_m^2$$

$$\frac{2\sigma_1^2}{3}+\frac{2}{3}\sigma_2^2+\frac{2}{3}\sigma_3^2-\frac{2}{3}(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)$$

$$-2\nu\left[\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1+3\sigma_m^2-2\sigma_m(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\right]$$

$$+2\nu\left[(-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1+3\sigma_m^2)\right]$$

$$+2\nu\left[\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{3}-\frac{\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1}{3}\right]$$

$$u_d=\frac{1}{3E}(1+\nu)\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3)\right]$$

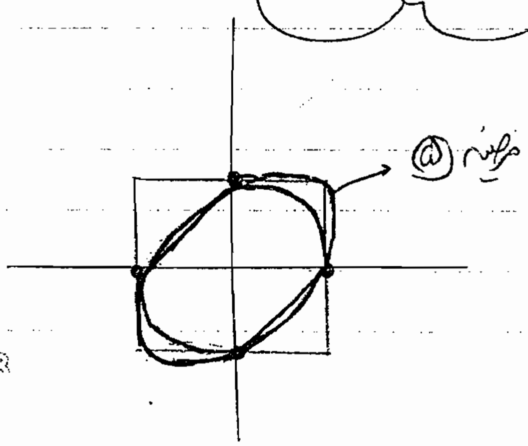
$$\sigma_2=\sigma_3=0 \Rightarrow u_d=\frac{\sigma_0^2(1+\nu)}{3E}$$

رابطه کلی

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\left[\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right]=\sigma_0^2$$

در فرضیه ④ ضریب 2ν داشتیم اما در اینجا نداریم.

دو بعدی:
$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2=\sigma_0^2$$



بیضی کشیده است
از داخل بیضی فرضیه ④ می گذرد

در واقع یک استوانه است که تا ∞ ادامه دارد

ولی فرضیه ④ یک مخروطی کون است

فرضیه ③ یک منشور است که محور آن همان محور استوانه است با هر ۳ محور زاویه های مساوی دارد

مقطع این فرضیه در حالت ۳ محوری با صفحه یک شکل ۶ ضلعی است که تا ∞ ادامه دارد

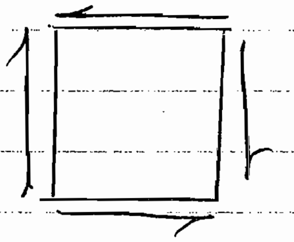
فرضیه یک مکعب است که محدود است تا ∞ نمی روند پس دارای اشکال است

مثلاً مواد در تنش کروی فشاری خراب نمی شود به تسلیم نمی رسد .

فرضیه دوم یک شکل متوازی السطوح است که حجم محدود دارد

۶ ـ فرضیه مور بعداً توضیح داده می شود .

اگر حد مقاومت را بخواهیم بیابیم



$\sigma_1 = \tau$

$\sigma_2 = -\tau$

$\sigma_3 = 0$

خط با زاویه ۴۵° لازم

در برش خالص

فرضیه ① بیشترین مقاومت را دارد

فرضیه ③ از همه کمتر مقاومت دارد ۱۰ خطی خودار

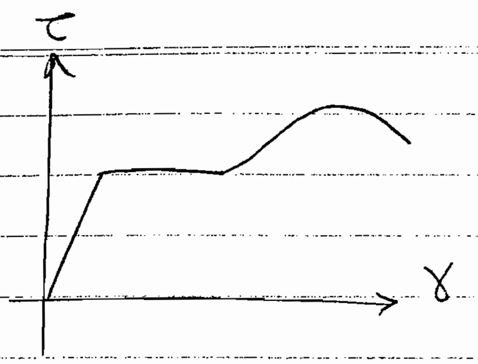
فرضیه ③ مقدار ماکزیمم را $\frac{\sigma_0}{2}$ می دهد

فرضیه فون ـ میسس :

$$3\tau^2 = \sigma_0^2 \Rightarrow \tau = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

$$\tau = 0/577\,\sigma_0$$

POOMAR



مقادیر مربوط به γ-τ تا حدود ۵۵-۶۰ درصد

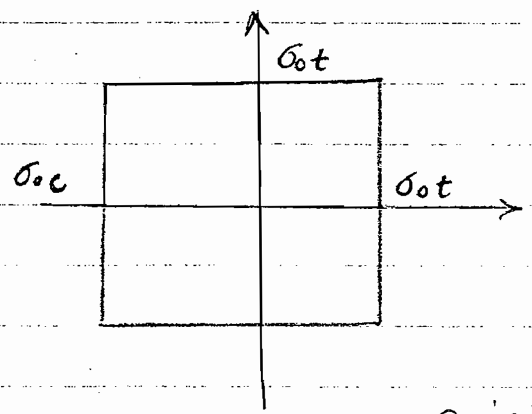
مقادیر مربوط به ۴-۵ هستند

به عبارتی فرضیه فوق بیشترین عددی است که با تجربه هم صادق است

* به عبارتی برای اجسامی که تسلیم دارند فرضیه ۵ بهترین فرضیه است؟

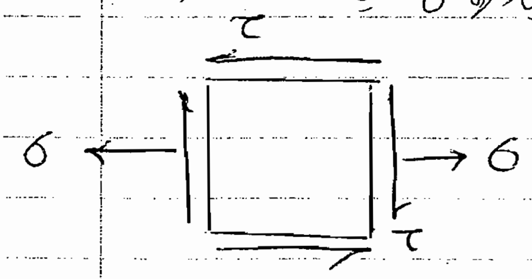
فرضیه ۳ و فرضیه ۵ این عیب را دارند که بین فشار و کشش تفاوتی نمی‌گذارند «تقارن دارند»

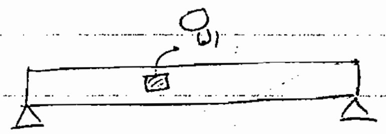
مثلاً فرضیه ۱ را می‌شود اصلاح کرد



در بعضی اجسام مثل مصالح بنایی که فشار را خوب تحمل می‌کنند این فرضیه ۱ می‌شود مورد استفاده قرار بگیرد.

خیلی وقت‌ها تنش‌ها این حالت را دارند





دو فرضیه مهمی که باید بدانید ۳ و ۵ اند.

برای این الان این فرضیه‌ها را می‌نویسیم:

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_y = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}}$$

$$\sigma_{1,2} \quad \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \cdots$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \end{cases}$$ تنش های اصلی

* فرضیه ترسکا : max تنش

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\boxed{\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_0^2}$$ برای یک تیر صادق است

* فرضیه فون میسس :

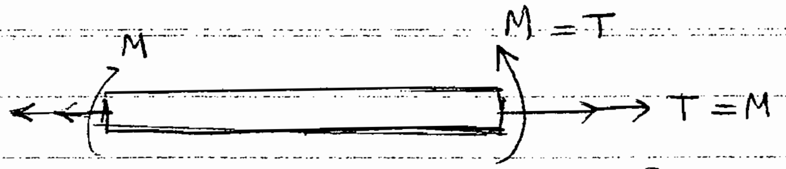
$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right)^2 + \left[\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right]^2 -$$

$$- \left(\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right)\left(\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right) = \sigma_0^2$$

$$\frac{\sigma^2}{4} + 3\left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2\right) = \sigma_0^2$$

$$\boxed{\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2}$$



مثال ۴ میله دایره‌ای

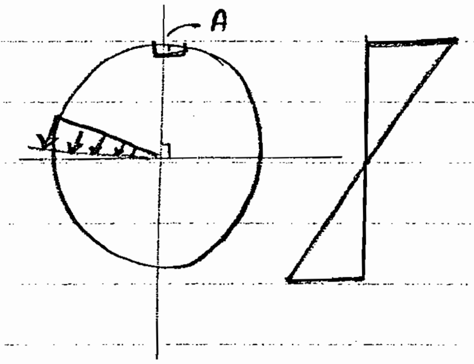
طبق فرضیه ۳ و ۵ چه مقدار M و T داریم؟
تا به مرحله تسلیم برسیم

$\sigma_{yp} = 2400 \ kg/cm^2$

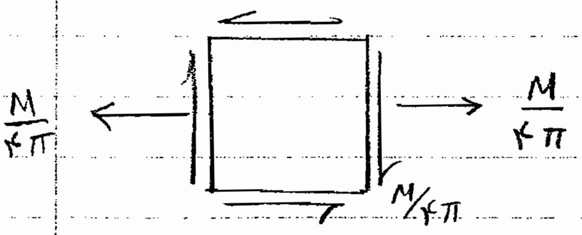
قطر میله $D = 4cm$

خمشی $\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \frac{M}{\frac{\pi R^3}{4}} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M}{2\pi}$

پیچشی $\tau_{max} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{2T}{\pi (2)^3} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T}{4\pi} = \frac{M}{4\pi}$



یعنی اگر یک المان از A بیرون بیاوریم
هم σ max است هم τ



فرضیه ۳ :

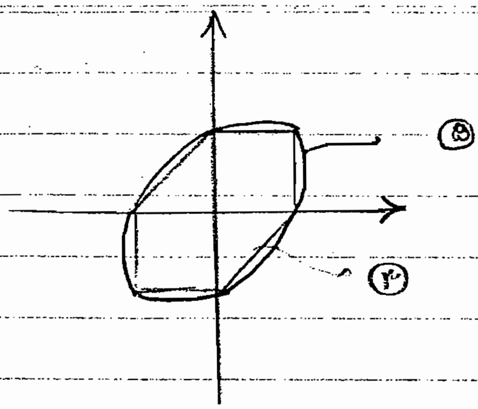
$$\left(\frac{M}{4\pi}\right)^2 + 4\left(\frac{M}{4\pi}\right)^2 = (2400)^2$$

$$\frac{M^2}{4\pi^2} + \frac{M^2}{4\pi^2} = (2400)^2$$

$$M^2 = (2400)^2 \times 2\pi^2$$

$$\boxed{M = 2400\pi\sqrt{2} \ kg.cm}$$

$$M = 10663$$



* همیشه فون میسز تنش های بیشتری را تحمل می کند

اگر ترسکا بدست آوردید اشتباه کردید ؛

$$\left(\frac{M}{2\pi}\right)^2+3\left(\frac{M}{4\pi}\right)^2=(2400)^2$$

$$\frac{M^2}{4\pi^2}+\frac{3M^2}{16\pi^2}=(2400)^2$$

$$\Rightarrow M = 11399\ kg\cdot cm$$

ممکن بود نیروها را بدهند و ضریب اطمینان را بخواهند در این صورت هر M و T را در یک K ضرب می کردیم و در رابطه بکار می بردیم

مثال: استوانه جدار نازکی (بسته) زیر اثر فشار داخلی $20\ kg/cm^2$ قرار دارد ؟

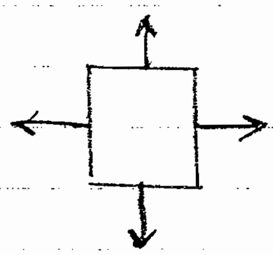
$D = 4\ (m)$ استوانه

$t = 5\ (cm)$

$P = 20\ \frac{kg}{cm^2}$

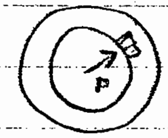
$\sigma_0 = 2400\ kg/cm^2$ ضریب اطمینان را تا خرابی بیابید ؟

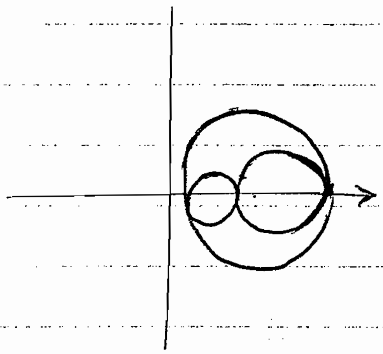
در استوانه جدار نازک دو تا تنش داریم طولی و محیطی



معمولاً کافی است همین دو تنش را بگذاریم ولی گاهی اوقات ابعاد را ۳ بعدی می گیرند.

تنش P را هم در نظر می گیرند



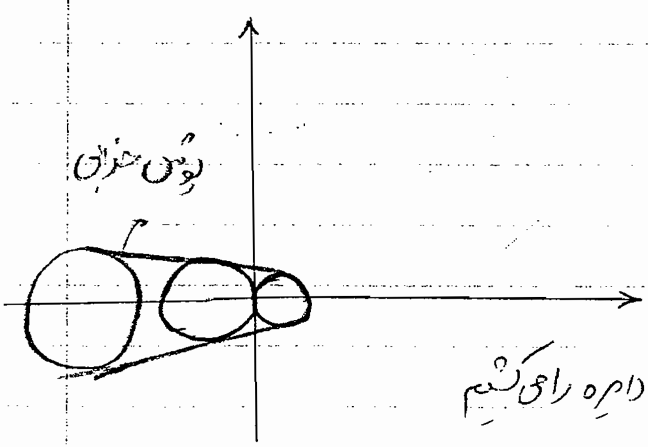


۶- فرضیه مور ؟

فرضیه مور بیان می کند که دایره بزرگ عامل خرابی است

هر نقطه روی دایره بزرگ نظیر یک صفحه است
این فرضیه بیشتر در بتن و خاک استفاده می شود

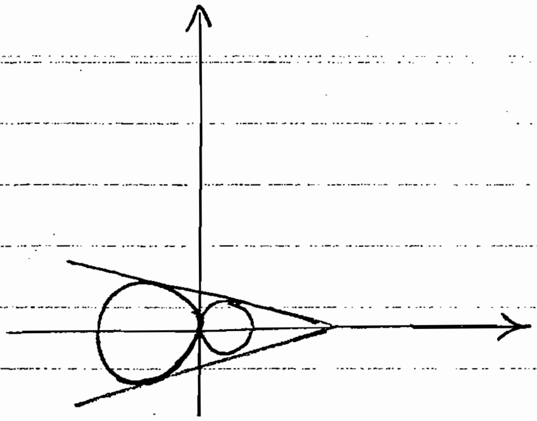
خاک که خراب می شود صفحه آن معلوم است ؟



خرابی در جایی است که پوش مماس است

برای تعیین پوش باید یک منحنی را بر این دوایر مماس کرد. در حالت های بعدی که تنش ها را اضافه می کنیم دایره را می کشیم اگر مماس شد خرابی اتفاق می افتد اگر مماس نشد خیر.

* حالت ساده این است که پوش را یک خط بگیریم



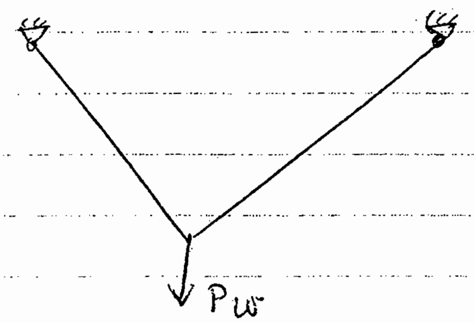
برای خاک رس این فرضیه خیلی خوبی است اما برای فولاد بکار نمی رود

اگر خاک را بگذاریم از یک طرف منبسط نشود بیشتر تنش می توان به آن وارد کرد

بار نهائی 8

حداکثر باری که یک سازه می تواند تحمل کند

به نظر می آید که باید ضریب اطمینان باید عددی باشد که اگر در بار مجاز ضرب شود می شود بار نهایی اما خواهیم



دید که در تمام سازه ها این طور نیست

یکی از میله ها تنش آن با تنش مجاز مساوی می شود

$\sigma = \sigma_w$ در یکی از میله ها

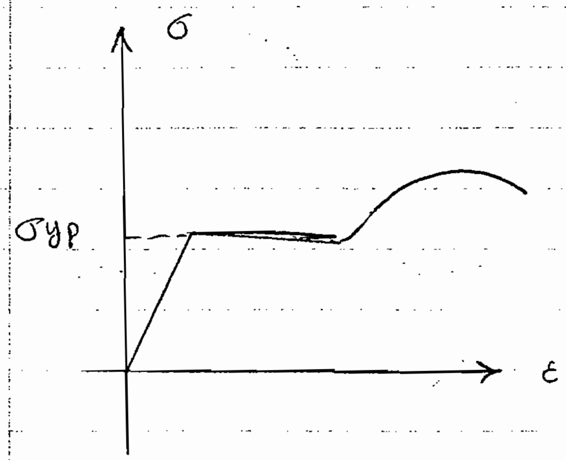
اگر بار P_w را در ضریب اطمینان ضرب کنیم تنش در همان میله ای که تنش آن با مقدار مجاز برابر بود

می شود $k\sigma_w$ از طرفی $k\sigma_w$ می شود σ_{yp}

وقتی که یکی از میله ها به تنش تسلیم می رسد

$$P \xrightarrow{S.F} kP_w$$
$$\sigma \rightarrow k\sigma_w = \sigma_{yp}$$

اگر بار را بخواهیم اندکی بیشتر کنیم تنش نمی تواند



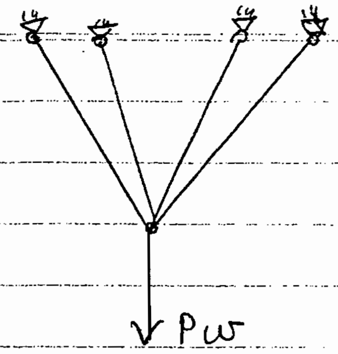
زیاد شود و ε بدون افزایش تنش زیاد می شود

و تغییر طول زیاد داریم به عبارتی خراب می شود

چون تغییر شکل هایی داریم که بدون افزایش

نیرو به وجود می آیند

این سازه هیپراستاتیک است



باز هم تنش یکی از میله‌ها با تنش مجاز برابر خواهد بود

و اگر بار را در k ضرب کنیم تنش همان میله k برابر

می‌شود که با تنش تسلیم برابر می‌شود ؛

$Pw \longrightarrow Pwk$

$\sigma = \sigma w$ یکی از میله‌ها

$\sigma = k\sigma w = \sigma yp$

میله‌ای که به تنش تسلیم رسید دیگر بار آن اضافه نمی‌شود

در سازه ایزو استاتیک میله‌ای که به تنش تسلیم رسید باعث می‌شود که نتوان بار را اضافه کرد

اما در سازه نامعین میله‌ای که به تنش تسلیم رسید دیگر بار اضافی نمی‌گیرد اما بقیه میله‌ها بار می‌توانند بگیرند

تا موقعی که فقط یک میله باقی بماند که به تسلیم نرسیده است

پس بارهای ما باید بزرگتر از Pwk باشد

$$P_u \geqslant Pwk$$

در حالت خاص مساوی است

ممکن است در حالت اول به جای این

که یک میله به تنش مجاز برسد ۳ میله

باهم به مجاز برسند پس ۳ میله باهم

به تسلیم می‌رسند و بارهای همان بار مجاز

می‌شود

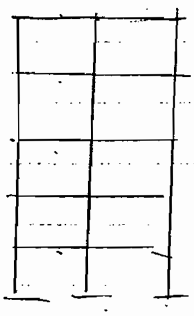
ولی در سازه معین

$$P_u = Pwk$$

در سازه نامعین در مورد ضریب اطمینان نمی‌توان نظر داد

پس در طراحی‌ها ما را دچار شک و تردید می‌کند که نتوانیم یک ساختمان

را با یک ساختمان دیگر مقایسه کنیم ؛



حداقل یک نقطه هست

که زیر بارهای معمولی

به تنش مجاز رسیده است

وقتی در ضریب اطمینان

ضرب می‌شود به تسلیم می‌رسد

ولی اگر یک نقطه به تسلیم برسد دلیل بر خرابی نیست

معین شده که آیین نامه ها به طرف طراحی با بار نهایی می روند یعنی اول ببینیم که چقدر بار می تواند تحمل کند

بعد ضریب اطمینان را تعیین کنیم یا اگر بار را داریم P آن را در ضریب اطمینان دلخواه ضرب می کنیم

در این صورت سازه را برای بار نهایی KP طراحی می کنیم .

به این روش طرح خمیری یا طرح پلاستیک می گویند که بر عکس طرح تنش مجاز است .

آیین نامه های الان یعنی به چند سال پیش دیگر طرح با تنش مجاز را قبول ندارند از این روش استفاده می کنند

در بتن آرمه در مقاومت ۲ از روش تنش مجاز استفاده کردیم اما در درس بتن آرمه از طرح پلاستیک استفاده

می کنند روش طرح خمیری اولین بار در سال ۱۹۵۶ برای سازه فلزی مطرح شد ولی برای سازه های

بتن آرمه زودتر بکار رفت الان در طرح سازه های فولادی روش خمیری و تعدیل شده خمیری داریم که

به آن LRFD می گویند .

تا چند سال پیش یعنی سازه ها را اجازه می دادند با تنش مجاز حل کنیم اما امروزه از طرح خمیری استفاده

می کنیم .

برای حل بر عکس عمل می کنیم می نویسیم که یک میله باید الاستیک بماند اگر هم کاهش مد نظر ما باشد و هم تسلیم باید

۳ میله حذف شوند .

۱- شرط مکانیزم یعنی به تعداد کافی میله به تسلیم رسیده باشد و از پایداری خارج شود

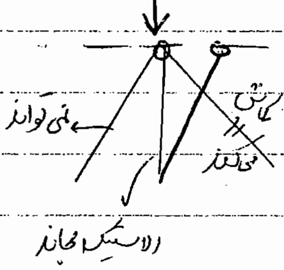
* مکانیزم = سیستمی که حرکت داشته باشد گویند .

۲ - شرط تعادل

۳ - شرط تسلیم ((یا کمانش)) یعنی تنش را بالاتر از تنش تسلیم بدست نیاوریم یا بار بیشتری از کمانش بدست نیاوریم در هر میله.

۴ - شرط تغییر شکل‌ها   باید هم کشش را در نظر بگیریم هم فشار

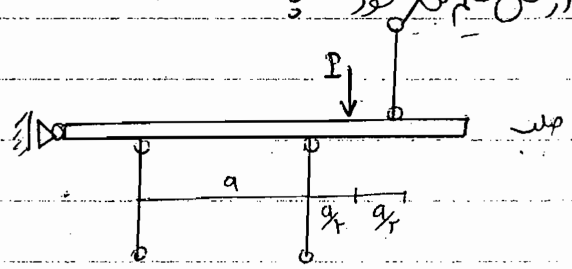
برای فشار دو نکته است یکی رسیدن به کمانش یکی تسلیم
در کشش فقط تسلیم مطرح است



شرط کمانش در این مثال مطرح نیست ولی شرط تسلیم می‌تواند مطرح باشد

* میله‌ای که الاستیک در نظر گرفتیم تنش آن نباید از تنش تسلیم بیشتر شود؟

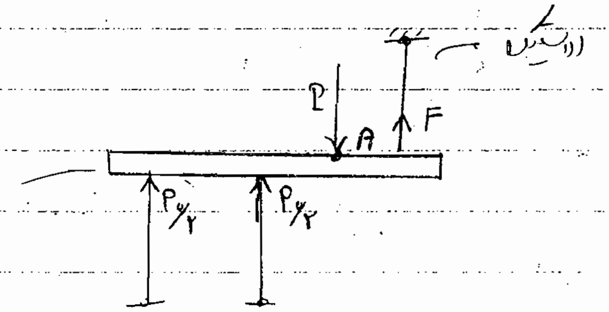
مثال:



در کشش تسلیم تمام میله‌ها یکسان باشد P_0 در فشار

در کمانش «فشار» $P_E = P_0/2$

با این فرض در فشار همه میله‌ها کمانش می‌کنند چون بار کمانشی از بار تسلیم فشاری کمتر است؛
و تسلیم در کشش اتفاق می‌افتد نه در فشار.



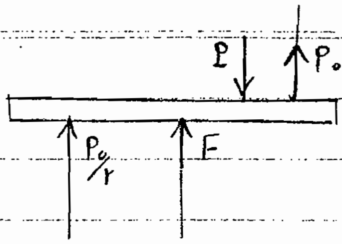
باید حداقل ۲ میله به تسلیم یا کمانش برسد؟

دو میله باقی را فرض کنیم کمانش کنند؛

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 0/5\,Fa = \frac{P_0}{4}a + \frac{3P_0}{4}a \Rightarrow \boxed{F = 2P_0}$$

در این میله نیرویی داریم که از P_0 بیشتر است پس مانع شرط تسلیم است؛
شرط مکانیزم رعایت شده چون یک میله الاستیک داریم

(۲)

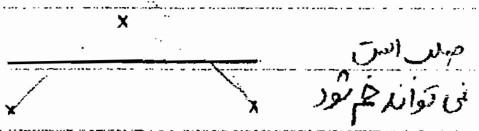


F را الاستیک گرفتیم!

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F\frac{a}{2} + \frac{3}{4}P_0 a = P_0\frac{a}{2}$$

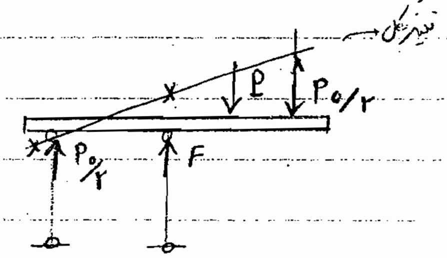
$$\Rightarrow F = -\frac{P_0}{2}$$

پس F کششی است!



اما از نظر تغییر شکل ناسازگار است!

(۳)



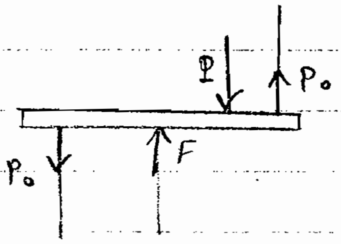
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F\frac{a}{2} + P_0\left(\frac{3}{4}\right)a + \frac{P_0}{2}\left(\frac{1}{2}a\right) = 0$$

$$\Rightarrow F = -2P_0$$

باز هم تسلیم برقرار نیست

اما شرط تغییر شکل برقرار است

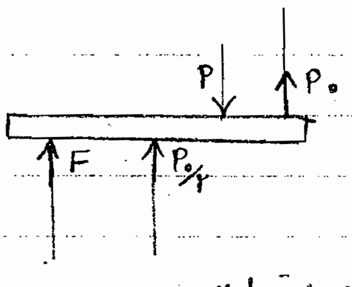
(۴)



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F\frac{a}{2} - \frac{3}{2}P_0 a = P_0\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow F = 4P_0 > \frac{P_0}{2}$$

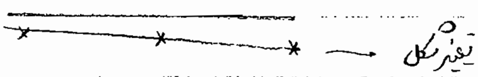
برقرار نیست



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \frac{P_0}{2}a - \frac{P_0}{2}\frac{a}{2} - F\left(\frac{3}{2}a\right) = 0$$

$$F = \frac{P_0}{6} < \frac{P_0}{2}$$

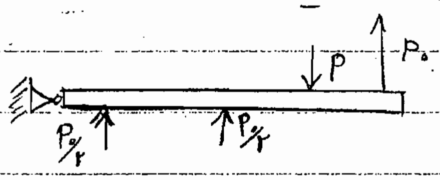
F هم فشاری است هم از بار کشش کمتر است شرط قابل قبول است



۱- مکانیزم ✓
۲- تعادل ✓
۳- شرط تسلیم $P_0/6$
۴- " تغییر شکل

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{P_0}{4} + \frac{P_0}{2} - P + P_0 = 0 \Rightarrow \boxed{P_u = \frac{5P_0}{2}}$$

اگر بحای شکل معضل بود چون بزرد را به سمت پاسین داشتیم مسئله خیلی راحت تر حل می‌شد



چون در فشار کمانش زودتر اتفاق
می افتد میله های فشاری را فقط
برای کمانش محاسبه می کنیم :

در حالت کلی مسئله بیشتر از یک جواب ندارد

* اگر در یک مسئله شرط مکانیزم و تعادل را رعایت کردیم P ای که از این دو شرط بدست می آید ممکن است

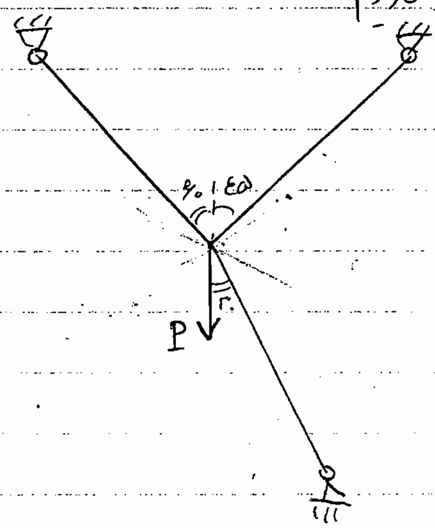
$P \geq P_u$ باشد شرط تغییر شکل را می توان رعایت کرد یا نه کرد علامت تساوی برای وقتی است که شاید دو شرط دیگر رعایت نشده باشند
نهایی

* اگر شرط تعادل و تسلیم را رعایت کردیم مکانیزم رعایت نشود P بدست آمده از P_u کوچکتر است

اگر ندانیم مکانیزم شده یا نشده $P = P_u$ است

ولی وقتی هر ۴ شرط را رعایت می کنیم یک جواب بیشتر نداریم

مثال :



* تسلیم ← P_0
کمانش ← $\frac{P_0}{2}$

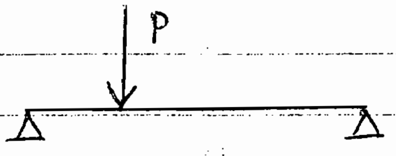
کشش تسلیم ← P_0 .
کمانش ← $1/5 P_0$

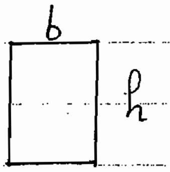
در حالت نهایی همه به تسلیم می رسند
- در واقع مثل این است که از کمانش صرفنظر می شود .

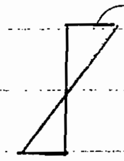
POOMAR

* خمش 8

خمش بیشترین عامل در طراحی سازه هاست



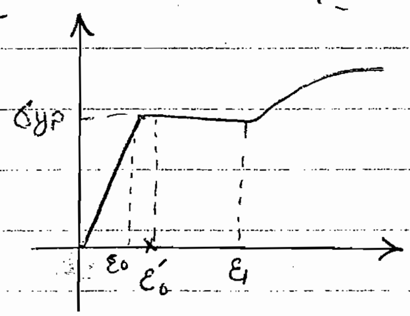




$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{w}$

$w = \frac{bh^2}{6}$

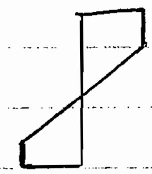
تا وقتی این رابطه خطی را می توان نوشت که حتی σ-ε را خطی بگیریم و تنش max از تنش تسلیم بیشتر نشود



تنش همیشه از بالا به پایین یا پایین به بالا خطی است

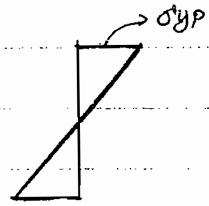
مثلاً اگر به ε_0 رسیدیم تنش همان تسلیم است

تا جایی که به ε_1 برسیم



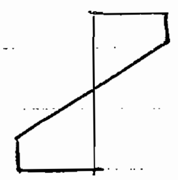
در سازه های خمشی تا وقتی بارها کمند تنش خطی است

اما اگر $\sigma_{yp} = \frac{M_{max}}{\frac{bh^2}{6}}$ برقرار شود اگر $M_{max} = \sigma_{yp}\frac{1}{6}bh^2$ باشد تنش در بالا می شود تنش تسلیم یعنی بار



این لنگر در لبه مرز هستیم

اما اگر $M > \sigma_{yp}.\frac{bh^2}{6}$ باشد σ

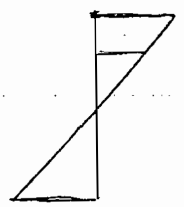


چون تیر که خم می شود در هر حال تنش خطی است

* $\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$

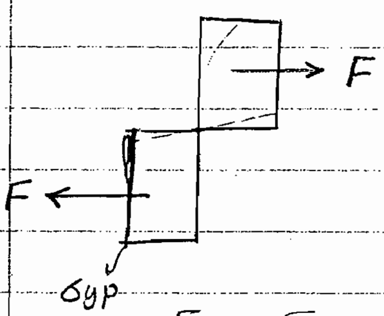
این رابطه به پلاستیک شدن مقطع کاری ندارد

ε



POOMAR

$$* \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{yp}}{E}$$



وقتی بار زیاد می‌شود در نهایتاً
بیشترین تنشی که می‌گیرد این
حالت است

$$F = \sigma_{yp} \cdot \frac{bh}{2}$$

مساحت تنش‌ها

$$M_F = \sigma_{yp} \cdot \frac{bh^2}{4}$$

بیشترین گشتاوری است که می‌شود تصور کرد مقطع
می‌تواند داشته باشد؟

این گشتاور را گشتاور پلاستیک - خمیری کامل گویند

یعنی اگر خمیری شود حداکثر گشتاور در این مقدار است؟

M_F ۱/۵ برابر M_{max} شده

یعنی از وقتی مقطع شروع به پلاستیک شدن کرده M_0 برابر $\sigma_{yp}\frac{bh^2}{6}$

بود وقتی پلاستیک کامل شد $M_p = \sigma_{yp}\frac{bh^2}{4}$

گشتاور پلاستیک $M_p = \sigma_{yp}\frac{bh^2}{4}$

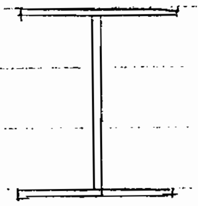
$\frac{bh^2}{4} = w_p$

مدول پلاستیک مقطع

ضریب شکل $\nu = \frac{M_p}{M_0}$

ν به شکل مقطع بستگی دارد

ν مستطیل = ۱/۵



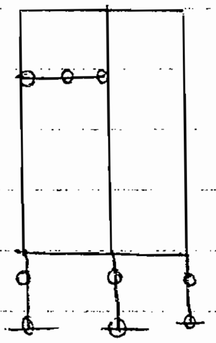
* ν = ۱/۱ حدود

یعنی خیلی سریع تر تمام مقطع پلاستیک می شود

تنش تسلیم $\frac{3}{5}$ = تنش مجاز $\xrightarrow{\text{کشش}}$ در

درخمش $\rightarrow$ $\sigma_w = \frac{2}{3}\sigma_{yp}$ تنش تسلیم

در آیین نامه ها معیار خمیری را هم درنظر می گیرند.



اگر در این مفصل ها سازه به حالت پلاستیک برسد این سقف خراب می شود.
سعی می شود که یک سری تنش های مجاز را تغییر می دهند در نتیجه ضرایب اطمینان در خمش با برش یا پیچش فرق می کند.