فیزیک مدرن

(دکتر فرمان)

فهرست

۷۸/۷/۳

فیزیک کلاسیک { مکانیک نیوتنی
ترمودینامیک
الکتریسیته و مغناطیس (الکترومغناطیس)

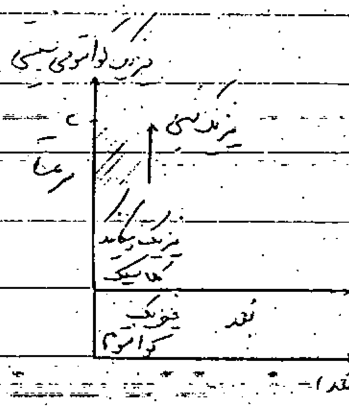
فیزیک مدرن

نسبیت { خاص 1905
عام 1915

یکی از عوامل موثر در نسبیت سرعت است. $\beta = \frac{v}{c}$

عامل دیگر ابعاد است.

۲- رفتار ذرات



مرجع:

فیزیک نوین Eisberg ، Resnick ، Ohanian ، Sells (ترجمه ... اصفهان ...)

... (دانشگاه یزد)

اصول نسبیت خاص Resnick ترجمه گودرزی

مبانی فیزیک کوانتومی Eisberg ترجمه ...

اصل تناظر (Corresponding Pri.): در شرایطی که حدود و مرزها را برای کلاسیک در نظر بگیریم، باید روابط فیزیک مدرن به همان روابط کلاسیک منجر می‌شوند.

نسبیت Relativity

عدم وجود یک مرجع مطلق

نسبیت خاص: مراجع بدون شتاب یعنی ساکن یا با سرعت ثابت

نسبیت عام: مراجع شتابدار - گرانش

اصول نسبیت خاص: ۱- اصل اول: کلیه قوانین فیزیکی در دستگاه‌های مختصات که نسبت به یکدیگر حرکت یکنواخت دارند، هموردا هستند.

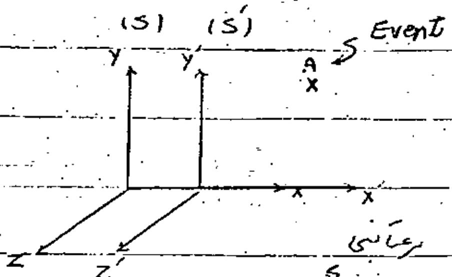
Covariant

دستگاه‌هایی که نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند.

۲- اصل دوم: سرعت سیر نور (در خلاء) در تمام دستگاه‌های مختصات اینرسی ثابت است. $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

برای تمام ناظرهای مختلف یکی است.

«اصل پایداری سرعت نور»



اصل اول

فرض کنیم دستگاه S' با سرعت ثابت V نسبت به S در حال حرکت باشد.

سرعت نسبی   سرعت A

تبدیلات مختصات گالیله کلاسیک

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{x'} = u_x - v \\ u_{z'} = u_z \\ u_{y'} = u_y \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{x'} = a_x \\ a_{y'} = a_y \\ a_{z'} = a_z \end{cases} \Rightarrow \vec{a'} = \vec{a}$$

در این حالت، دستگاه‌ها نسبت به هم شتاب ندارند اما متحرک می‌تواند شتاب داشته باشد.

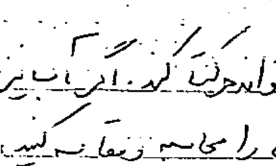
$$m\vec{a'} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F'} = \vec{F}$$

تمرین: از کتاب: اصل بقای اندازه حرکت و اصل بقای انرژی جنبشی

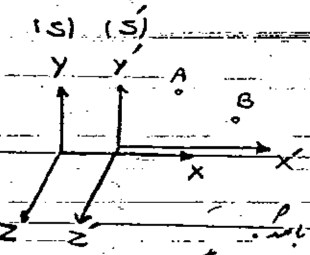
سؤال: قایقی در نظر بگیرید که در رودخانه‌ای با آب ساکن با سرعت v_1 می‌تواند حرکت کند. اگر آب نیز با سرعت v_2 حرکت کند و عرض رودخانه L باشد، در دو حالت زیر زمان حرکت قایق را محاسبه و مقایسه کنید.

۱- قایق مسافتی به اندازه L در جهت حرکت آب طی می‌کند و به نقطه شروع خود برمی‌گردد. این زمان را با T_1 نشان می‌دهیم. آیا برای مقادیر ممکن v_2 شرط خاصی نیز وجود دارد؟

۲- قایق مسافتی به اندازه L را طوری جابجا شود که در راستای عمود بر حرکت آب به نقطه مقابل رسیده برگردد (T_2).



فرض می‌کنیم دستگاه S' با سرعت ثابت V نسبت به دستگاه S در حال حرکت باشد.



اصل بقای اندازه حرکت $\rightarrow$ $m_1u_1+m_2u_2=m_1\bar{u}_1+m_2\bar{u}_2$ ①

برای سادگی، حرکت را فقط در جهت x می‌گیریم

در دستگاه S'
$$\begin{cases} x'=x-Vt \\ y'=y \\ z'=z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u'_x=u_x-V \\ u'_y=u_y \\ u'_z=u_z \end{cases}$$

باید ثابت کنیم $m_1u'_{1x}+m_2u'_{2x}=m_1\bar{u}'_{1x}+m_2\bar{u}'_{2x}$

با جایگذاری $m_1(u_{1x}-V)+m_2(u_{2x}-V)=m_1(\bar{u}_{1x}-V)+m_2(\bar{u}_{2x}-V)$

بنابراین به همان رابطهٔ ① خواهیم رسید که چون این رابطه در دستگاه S صادق است، پس مسأله ثابت می‌شود.

اصل بقای انرژی جنبشی $\rightarrow$ $\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2=\frac{1}{2}m_1\bar{u}_1^2+\frac{1}{2}m_2\bar{u}_2^2$

باید ثابت کنیم $m_1u'^2_{1x}+m_2u'^2_{2x}=m_1\bar{u}'^2_{1x}+m_2\bar{u}'^2_{2x}$

جایگذاری $\rightarrow$ $m_1(u_{1x}-V)^2+m_2(u_{2x}-V)^2=m_1(\bar{u}_{1x}-V)^2+m_2(\bar{u}_{2x}-V)^2$

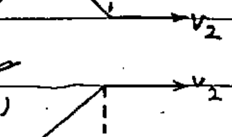
طرف اول $\rightarrow$ $m_1u_{1x}^2+m_2u_{2x}^2+(m_1+m_2)V^2-2V(m_1u_{1x}+m_2u_{2x})$

طرف دوم $\rightarrow$ $m_1\bar{u}_{1x}^2+m_2\bar{u}_{2x}^2+(m_1+m_2)V^2-2V(m_1\bar{u}_{1x}+m_2\bar{u}_{2x})$

با مقایسه دو طرف و در نظر گرفتن اصل بقای انرژی مسأله ثابت است.

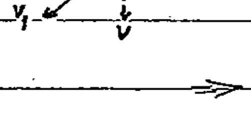
$$T_1=\frac{L}{V_1+V_2}+\frac{L}{V_1-V_2} \Rightarrow V_1>V_2 \quad , \quad T_1=\frac{2LV_1}{V_1^2-V_2^2}$$

(رفت)



$$|V|=\sqrt{|V_1|^2-|V_2|^2} \Rightarrow T_2=2\frac{L}{|V|}=2\frac{L}{\sqrt{|V_1|^2-|V_2|^2}}$$

(برگشت)



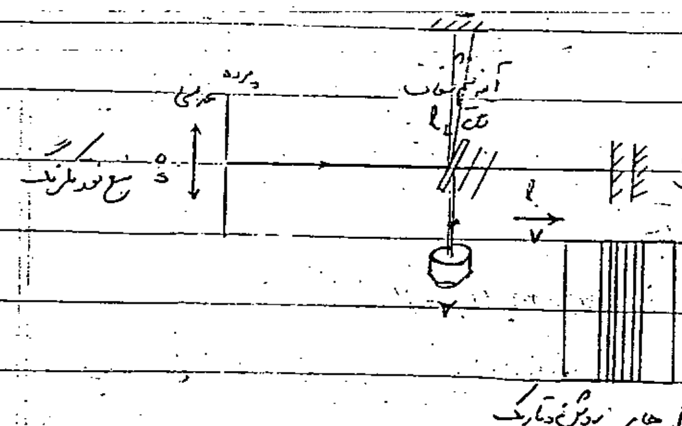
بنابراین مقایسه بین T_1 و $\frac{T_2}{2}$، منجر می‌شود به مقایسه $\frac{1}{\sqrt{V_1^2-V_2^2}}$ با $\frac{V_1}{V_1^2-V_2^2}$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2}=\frac{V_1}{\sqrt{V_1^2-V_2^2}}>1 \Rightarrow$$ همواره $T_1>T_2$

۷۸/۷/۱۰

اصل دوم

- آزمایش مایکلسون و مورلی: سرعت اصل نسبیت



اگر $l_2 = l_1$ باشد، نوار روشن خواهد بود (البته تئوری)

اگر سرعت زمین را با v نشان دهیم، همانند

حالت زیر خواهیم داشت،

$$T_{\parallel} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c(1-\beta^2)}$$

برای آینه بالا $c^2t^2 = l^2 + v^2t^2 \rightarrow T_{\perp} = \frac{2l}{c(1-\beta^2)^{1/2}}$, $\beta \approx 10^{-4}$

$$\Delta t = T_{\parallel} - T_{\perp} = \frac{2l}{c}\left[1+\beta^2-1-\frac{1}{2}\beta^2\right] \Rightarrow \Delta t = \frac{l\beta^2}{c}$$

بنابراین در محل نوار روشن، دقیقاً در مرکز نخواهد بود. پس برای مقایسه، جای آینه‌های عمودی و افقی را عوض می‌کنیم که در این حالت، $\Delta t' = -\frac{l\beta^2}{c}$

$\Delta T = \frac{2l}{c}\beta^2$

میزان جابجایی نوارها δ

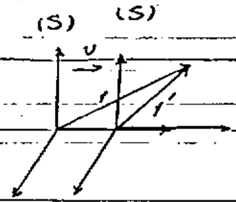
$\lambda = cT$, $\frac{\Delta T}{T} = \frac{2l\beta^2}{\lambda}$

δ

همه جا ||| فاصله ||| ||| δ ۴۰٪ $\frac{2\times10\times10^{-8}}{5\times10^{-7}} = 0.4$

با وجود اینکه دقت دستگاه‌های موجود حتی برای تغییر کمی است، اما تاکنون چنین انحرافاتی برای نور مشاهده نشده است.

۷۸/۷/۱۲



اصل ۲. سرعت نور در خلاء همواره ثابت است (c)

$$x' = \gamma\left[x - vt\right]$$

$$x = \gamma\left[x' - vt\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} c^2t^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ c^2t'^2 = r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = a_{11}x + a_{12}t \\ t' = a_{21}x + a_{22}t \end{array}\right\} \Rightarrow a_{11} = \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - v^2/c^2}}$$

تبدیلات مختصات لورنتس - اینشتین

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{array}\right. \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

تبدیل زمان لورنتس $t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = \dfrac{dx}{dt} \ , \quad u_y = \dfrac{dy}{dt} \ , \quad u_z = \dfrac{dz}{dt} \\ u_{x'} = \dfrac{dx'}{dt'} \ , \quad u_{y'} = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{dt'} \ , \quad u_{z'} = \dfrac{dz}{dt'} \end{array}\right.$$

$$u_{x'} = \frac{\gamma\left[dx - v\,dt\right]}{\gamma\left[dt - \beta/c\,dx\right]} \Rightarrow u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \beta/c\,u_x}$$

(کلاسیک) $u_{x'} = u_x - v \xrightarrow{\text{فرض صحیح}} u_{x'} = \dfrac{u_x - v}{1 - \beta/c\,u_x}$

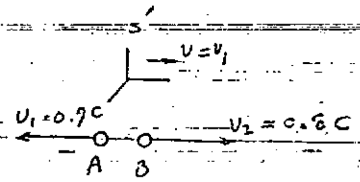
سرعتهای نسبیتی (تبدیلات نسبیتی سرعت)

$$\left\{\begin{array}{l} u_{y'} = \dfrac{dy}{dt'} = \dfrac{dy}{\gamma\left[dt - \beta/c\,dx\right]} = \dfrac{u_y}{\gamma(1 - \beta/c\,u_x)} \\ u_{z'} = \dfrac{u_z}{\gamma(1 - \beta/c\,u_x)} \end{array}\right.$$

تبدیلات مختصات معکوس

$$\left\{\begin{array}{l} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{array}\right. \qquad u_x = \frac{u_{x'} + v}{1 + \beta/c\,u_{x'}}$$

$$t = \gamma\left(t' + \beta/c\,x'\right)$$



مثال: $V_{21} = ?$

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1+\frac{\beta}{c}u'_x} = \frac{V_2+V_1}{1+\frac{V_1V_2}{c^2}} = \frac{(0.9+0.8)c}{1+\frac{0.9\times0.8}{c^2}c^2} = \frac{1.7}{1.72}c < c$$

شتاب در نسبیت

$$a_x = \frac{du_x}{dt}, \quad a_y = \frac{du_y}{dt}$$

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{\frac{du'_x}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{a_x(1-\frac{\beta}{c}u_x)+\frac{\beta}{c}a_x(u_x-V)}{(1-\frac{\beta}{c}u_x)^2}}{\gamma(1-\frac{\beta}{c}u_x)}$$

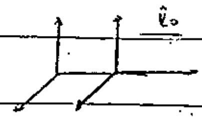
$$\Rightarrow a'_x = \frac{a_x(1-\beta^2)}{\gamma(1-\frac{\beta}{c}u_x)^3} = \frac{a_x}{[\gamma(1-\frac{\beta}{c}u_x)]^3}$$

تمرین: مسائل شماره‌های 5، 6، 9، 15، 18.

۷۸، ۷، ۱۷

* امتحان میان‌ترم ۱۰ آبان

انقباض طول (فضا)



جسمی که در راستای حرکت است، طولش کوتاه‌تر به نظر می‌رسد.

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = \gamma(x_1 - Vt_1) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{x'_2 - x'_1}_{l_0} = \gamma\left[\underbrace{(x_2-x_1)}_{l} - V(t_2-t_1)\right]$$

در اندازه‌گیری l، الزاماً باید $t_2=t_1$ باشد.

طول از دید ناظر ساکن

$$\Rightarrow l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ابعادی از جسم که در راستای حرکت قرار نمی‌گیرند، کوتاه‌تر به نظر نمی‌رسند.

اتساع زمان

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{\beta}{c}x'_1) \\ t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{\beta}{c}x'_2) \end{array}\right\} \Rightarrow t_2 - t_1 = \gamma\left[(t'_2-t'_1) + \frac{\beta}{c}(x'_2-x'_1)\right]$$

در اندازه‌گیری زمان، الزاماً $x'_1=x'_2$ است.

$$\Rightarrow T = \gamma T' \quad \text{یا} \quad T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

زمان ویژه (از دید ناظری که با خود سیستم حرکت می‌کند)

* ساعت‌های متحرک، از دید ناظر ساکن، کند حرکت می‌کنند. (پارادوکس دوقلوها)

هم‌زمانی

هم‌زمانی رویدادها، نسبی است.

ناورداست $\Delta = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$

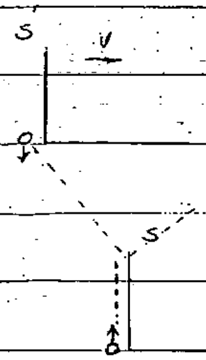
$\zeta \quad i^2 \qquad\qquad \zeta \quad i^2$

بر این اساس، بردار چاربعدی زمان-مکان تعریف می‌شود.

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t'ci \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{vmatrix}$$

جرم نسبی

دستگاه 'S را در نظر می‌گیریم.



$$\sum \vec{P} = 0$$

$$-2mu_y + 2mu_y = 0$$

$$(mu_y)' = mu_y$$

$$m'u_y' = mu_y$$

$$u_y' = \frac{u_y^0}{\gamma(1 - \beta/c \, u_x)}, \quad u_x = 0 \implies m' = \gamma m \rightsquigarrow M = \gamma M_0$$

تاکنون مباحث را از دید سینماتیک تحلیل کردیم، اکنون به دینامیک مسائل می‌پردازیم.

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \implies M^2c^2 - M^2v^2 = M_0^2c^2$$

کمیت‌های ناوردا $\left. \right\}$ c, M_0, e

از رابطه فوق دیفرانسیل می‌گیریم $\quad 2Mc^2\,dM - 2Mv^2\,dM - 2M^2v\,dv = 0$

$$dM\,c^2 = v^2\,dM + Mv\,dv \quad (A)$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{x} \rightarrow \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}$$

نیرو برابر تغییرات زمانی تکانه حرکت است $\quad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{V}) = \frac{dM}{dt}\vec{V} + \overbrace{M\frac{d\vec{V}}{dt}}^{m\vec{a}}$

$$\Rightarrow dW = \left(\frac{dM}{dt}\vec{V} + M\frac{d\vec{V}}{dt}\right)\cdot d\vec{x} = V^2 dM + M\vec{V}\cdot d\vec{V} \quad (B)$$

$$A, B \Rightarrow c^2 dM = dW = dK$$

$$\Rightarrow \int_{K=0}^{K} dK = c^2\int_{M_0}^{M} dM \Rightarrow \underbrace{K}_{\text{انرژی جنبشی}} = (M-M_0)c^2 = Mc^2 - \overbrace{M_0c^2}^{\text{انرژی ذاتی}}$$

تمرین: مسئله ۲۹

۷۸/۷/۲۴

$$K = E - E_0$$

انرژی حالت سکون $\quad E_0 = M_0c^2$

انرژی کل ذره $\quad E = Mc^2$

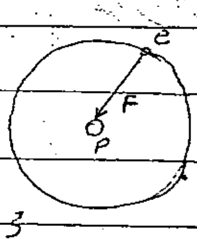
انرژی یک ذره متحرک همیشه برابر است با K. حال اگر سرعت را پایین فرض کنیم، با بسط دوجمله‌ای به همان رابطه انرژی جنبشی در کلاسیک خواهیم رسید.

$$K = (\gamma - 1)M_0c^2 = \left[(1-\beta^2)^{-1/2} - 1\right]M_0c^2$$

$$\text{if } \beta \ll 1 \Rightarrow K = \left[1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots - 1\right]M_0c^2 = \frac{1}{2}M_0v^2$$

$2M_0$

* اگر فرض کنیم جرم $2M_0$ به دو جرم ساکن متلاشی شده و این اجرام از یکدیگر دور شوند، در غیاب نیروهای خارجی، انتظار داریم که جرم هر ذره کمتر از M_0 باشد.



در سیستم یک اتم، به دلیل وجود نیروهای معینی داریم:

$m_H < m_e + m_p$

$m_H - (m_e + m_p) = \varepsilon \Rightarrow$ انرژی بستگی $= \varepsilon c^2$

(انرژی پتانسیل منفی است)

$m_H +$ انرژی $\longrightarrow m_p + m_e$

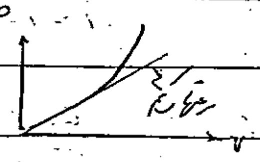
13.58 eV

انرژی ذاتی $E_0 = M_0 c^2$ $\quad J/e = eV \quad , \quad M_p = 1.66 \times 10^{-27}\ kg = u$

یکای جرم اتمی

$$[M_0c^2]_e = 0.51\ MeV \quad , \quad [M_0c^2]_p = 938\ MeV \quad , \quad [M_0c^2]_N = 939.5\ MeV$$

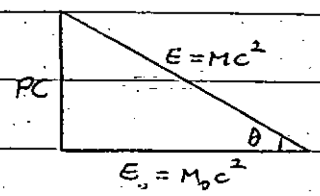
در سرعت‌های کم $\rightarrow K \simeq \frac{1}{2}MV^2 = \frac{P^2}{2}$



$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow M^2c^2 - M^2V^2 = M_0^2c^2 \Rightarrow M^2c^4 - M^2V^2c^2 = M_0^2c^4$$

$$\Rightarrow E^2 - P^2c^2 = E_0^2 \Rightarrow E^2 = E_0^2 + P^2c^2$$

ذرات بی‌جرم



$$\sin\theta = \frac{PC}{Mc^2} = \beta$$

افزایش V (تا حد c) $\rightsquigarrow \beta \to 1 \ , \ \theta \to \frac{\pi}{2}$

کاهش V (تا صفر) $\rightsquigarrow \beta \to 0 \ , \ \theta \to 0$

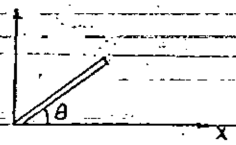
اگر در شکل فوق فرض کنیم E_0 صفر باشد، آنگاه باید فرض کنیم که ذراتی وجود دارند که جرم سکون ندارند و همواره با سرعت نور در حرکت‌اند. فوتون‌ها و نوترینوها از این نوع می‌باشند و بر همین اساس به تعریف نور می‌پردازند.

نور تشکیل شده است از ذراتی به نام فوتون که با سرعت $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ در فضا منتشر می‌شوند.

* هر فوتون دارای انرژی است که دارای اندازه حرکت P می‌باشد. $\quad P = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}$

واحد اندازه حرکت به صورت مگا الکترون‌ولت بر c می‌باشد.

مسأله (۱-۸)



$$L\begin{cases} x = \ell\cos\theta \\ y = \ell\sin\theta \end{cases}$$

از دید ناظر L'
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\gamma} = \ell\cos\theta\sqrt{1-\beta^2} \\ y' = y = \ell\sin\theta \end{cases}$$

$$\tan\theta' = \frac{y'}{x'} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\tan\theta$$

بنابراین ناظر متحرک، خط‌کش را با زاویه θ' می‌بیند

$$L' = \sqrt{\ell^2\sin^2\theta + \ell^2\cos^2\theta(1-\beta^2)} = L\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

مسأله (۱-۲۶)

$$P_1 = MV_1 = \frac{M_0}{\sqrt{1-0.6^2}} \times 0.6C = \frac{3}{4}M_0C \quad (\mathrm{kg\,m/s})$$

$$P_2 =$$

۷۸/۷/۲۶

چهاربردار تکانه انرژی

اندازه حرکت و انرژی به ترتیب مؤلفه‌های چاربردار هستند

$$E^2 = E_0^2 + P^2C^2 \rightsquigarrow -\frac{E_0^2}{C^2} = P^2 - \frac{E^2}{C^2}$$

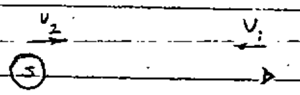
$$\left(i\frac{E_0}{C}\right)^2 = (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \left(i\frac{E}{C}\right)^2$$

ناوردایی $\rightsquigarrow \left(i\frac{E_0}{C}\right)^2 = P_{x'}^2 + P_{y'}^2 + P_{z'}^2 + \left(i\frac{E'}{C}\right)^2$

$$\begin{cases} P_x' = \gamma\left(P_x - \frac{\beta}{C}E\right) \\ P_y' = P_y \\ P_z' = P_z \end{cases} \qquad \frac{E'}{C} = \gamma(E - \beta C P_x)$$

$$\begin{vmatrix} P_x' \\ P_y' \\ P_z' \\ i\frac{E'}{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ i\frac{E}{C} \end{vmatrix}$$

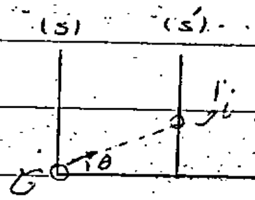
پدیده دوپلر



در مورد صوت: $f = f_0 \left[\dfrac{1+\frac{v_1}{v}}{1-\frac{v_2}{v}}\right]$

در مورد نور

انرژی هر فوتون $E = h\nu$ اندازه حرکت فوتون $P = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$



$$E' = \gamma(E - \beta c P_x)$$

$$h\nu' = \gamma\left(h\nu - v\frac{h\nu}{c}\cos\theta\right)$$

از آنجا که h یک ثابت جهانی است، پس باید ν تغییر کند: بنابراین

$$\nu' = \frac{\nu(1-\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{if } \theta = \pi \Rightarrow \nu = \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

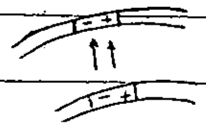
$$\text{if } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \nu = \gamma\nu_0$$ حالت عرضی نسبی

$$\text{if } \theta = 0 \Rightarrow \nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

در این حالت، برخلاف حالت صوت، حرکت منبع یا ناظر را نمی‌توان جابجا کرد. زیرا اساس تئوری، نسبی بودن حرکت است.

نیروی الکترومغناطیسی

نیروی مغناطیسی = نیروی الکتریکی + نسبیت



از دید ناظر همسفر سیم، چگالی بار منفی در یک المان بیشتر است.

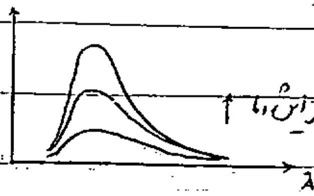
مسائل: ۱۵، ۱۸، ۳۶، ۴۲، ۴۳، ۴۷، ۵، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۲۹، ۲۱

۷۸/۸/۸

خاصیت کوانتومی نور

* اجسام چگونه در هر دمایی بجز صفر کلوین، از خود انرژی تابش می‌کنند.

* جسم سیاه، به جسمی گفته می‌شود که ضریب جذب آن ۱ باشد.



$\lambda_p T =$ ثابت

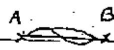
قانون استفان بولتزمان: انرژی کل واحد سطح $E \propto T^4$

$$E = e\,\sigma\,T^4$$

(ضریب تابش) emittion $\quad 5.67\times10^{-8}\ (J\cdot m^{-2}\cdot K^{-4})$

اتم‌ها در تابش کننده، جذب کننده هم هستند، پس برای تابش، بررسی می‌شود

حفره تابش، شبیه ارتعاش یک تار است.



$\ell = n\frac{\lambda}{2}$

$n = \frac{2\ell}{\lambda} \rightarrow \Delta n = -\frac{2\ell}{\lambda^2}d\lambda$

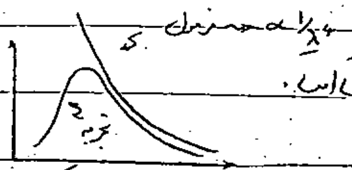
تعداد طول موج‌هایی که بین λ و $d\lambda$ در واحد حجم تولید می‌شود:

$$n(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda$$

عدد حجم

ثابت بولتزمن

اصل همپاری انرژی: در حالت تعادل، انرژی تمام مولکول‌های یک جسم با هم برابرند $\quad E = \frac{3}{2}kT$



فاجعه فرابنفش: نتایج تجربی با مدل، در طول موج‌های بالا، بسیار متفاوت است.

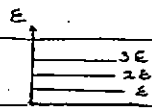
پلانک (۱۹۱۴) ← خاصیت کوانتومی نور: هر ذره در حرکت نوسانی دارد، انرژی دلخواهی ندارد بلکه با ضریب آن متناسب است.

$$\varepsilon_n = E = nh\nu$$

آمار استاتیک (ماکسول بولتزمن):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum N(n)\varepsilon_n}{\sum N(n)} \quad N(n) = N_0\, e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$



اصل پلانک: انرژی ذرات، دلخواه نیست.

۱-۴۷) راه حل: t_A ، t_B را با هم در نظر بگیرید

۱-۴۳) $\nu t - \frac{x}{\lambda} = \nu' t' - \frac{x'}{\lambda'}$: λ ها را بر حسب ν ها می‌نویسیم $\lambda = \frac{c}{\nu}$

مسائل شماره ۵۰، ۴۹، ۴۶

۱-۲۹)

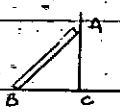
	S	S'
تولد A	(0,0)	(0,0)
مرگ A	(0,72)	(-54,90)
تولد B	(18,0)	(22.5,-13.5)
مرگ B	(18,72)	(-31.5,76.5)
تولد C	(0,0)	(0,0)
مرگ C		(0,72)

$x' = \gamma(x - vt)$

$t' = \gamma(t - \beta/c\, x)$

$13.5 \times 0.6 = 8.1 \sim 22.5 - 8.1 = 14.4$

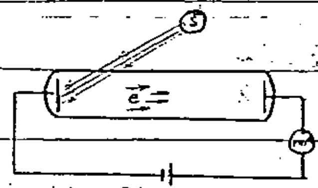
۱-۱۲) سرعت بازوی دوار فاصله AC را طی می‌کند تا با سرعت زاویه‌ای نقطه B به C می‌آید می‌باشد.



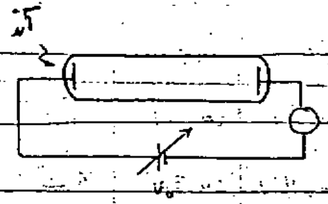
۷۸,۸,۲۲

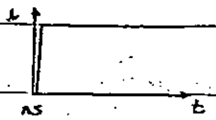
اثر فتوالکتریک

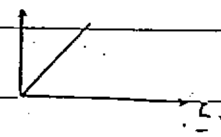
خاصیت تبدیل انرژی نورانی به الکتریکی



$E_b \approx 2\text{-}5^{eV}$

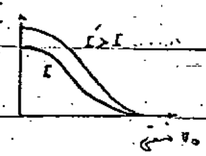


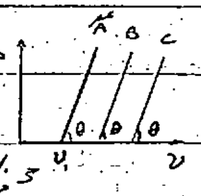




$I = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{A}$

انرژی جدا
$k = \frac{1}{2}mv^2 \geq eV_0$
پتانسیل بازدارنده





جنس آند

شیب ثابت است

حد بازده پتانسیل منفی

حد فرکانس آستانه

در حدود آنی بودن پدیده فتوالکتریک اگر فرض کنیم (از طریق محاسبه) در هر ثانیه اندازه الکترون وقت انرژی به هر اتم برسد انرژی مورد نیاز برای صادر کردن الکترون حدود ۱۰ ثانیه بدست می‌آید که ظاهراً پدیده آنی به نظر می‌رسد.

تفسیر فتوالکتریک از دید اینشتین ← (جایزه نوبل)

نور ذراتی است به نام فوتون، هر فوتون دارای انرژی معینی است $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$، بنابراین نورهای مختلف، فوتونهای مختلف دارند. وقتی نور به سطحی می‌خورد، هر فوتون با یک الکترون برهم کنش می‌کند. اگر انرژی فوتون، بیشتر از انرژی اتصال بود الکترون آزاد می‌شود. ← این فرضیه برای فوتونها فرضیه نور ذره‌ای است

بنابراین با این فرضیه پدیده آنی است.

در مورد شدت (توان) منبع، تعداد فوتونها فرق می‌کند نه انرژی فوتونها.

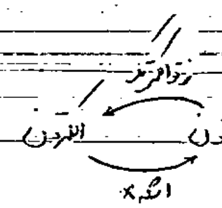
همچنین با افزایش V منبع، چون انرژی فوتونها تغییری نمی‌کند پس همگی در یک نقطه $E<E_b$ خواهند شد.

$eV_0 = tg\theta(\nu-\nu_0) \longrightarrow \underbrace{h\nu}_{\text{انرژی فوتون}} - \underbrace{h\nu_0}_{E_b} = eV_0 = \frac{1}{2}mv^2$

تابع کار یا انرژی اتصال

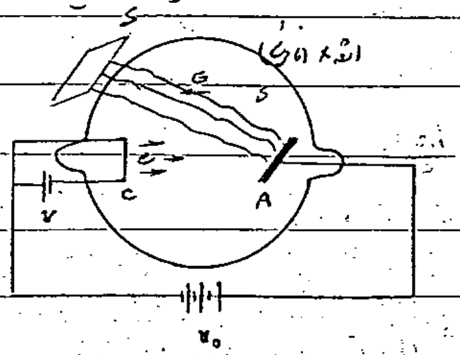
خواص ذره‌ای نور

۱- فوتو الکتریک .... برخورد نور داده (فوتون و الکترون)

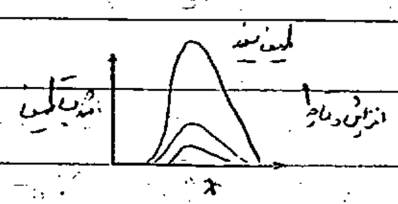


۲- اشعه x

(فوتون گرد با انرژی زیاد و همچنین فرکانس خاص)



$K_1 = eV_0$



انرژی پس از برخورد

$K_1 - K_2 = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$

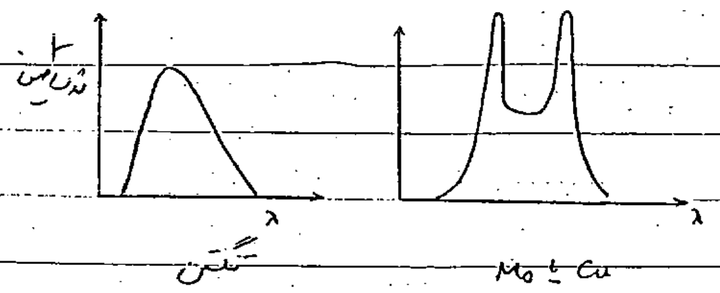
(تابش ترمزی)

x پرانرژی‌ترین فوتون اشعه $\rightsquigarrow K_2 = 0 \Rightarrow eV_0 = h\frac{c}{\lambda_{min}} = h\nu_{max}$

$\Rightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{eV_0} = \frac{6.63\times10^{-24}\times3\times10^{8}}{1.6\times10^{-19}\,V_0} = \frac{12.4\times10^{-7}}{\underbrace{V_0}_{40(kV)}} = 0.3\ A^\circ$

$E_3 > E_2 > E_1$

$E_2 - E_1 = \Delta E \rightsquigarrow$ تابش فوتون



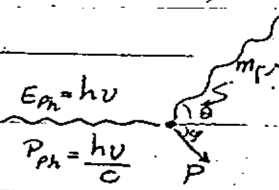
تنگستن　　　Mo یا Cu

مسائل: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶

٧٨/٨/٢٤

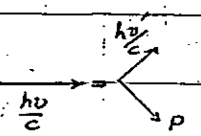
پدیده کامپتون Compton effect

در این پدیده، هر فوتون کسری از انرژی خود را به الکترون می‌دهد.



انرژی قبل از برخورد — انرژی بعد از برخورد

$$h\nu - h\nu' = K$$ اصل بقای انرژی



$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + P\cos\varphi \\ \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - P\sin\varphi = 0 \end{cases}$$ اصل بقای اندازه حرکت

مجموع مجذورات $\rightarrow$ $$P^2c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2(h\nu)(h\nu')\cos\theta \quad (i)$$

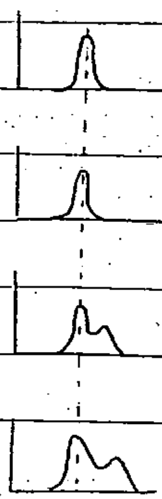
$$\begin{cases} E^2 = E_0^2 + P^2c^2 \\ E = E_0 + K \Rightarrow E^2 = E_0^2 + K^2 + 2E_0K \end{cases} \Rightarrow P^2c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2(h\nu)(h\nu') + 2M_0c^2(h\nu - h\nu') \quad (ii)$$

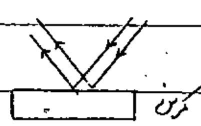
$$i, ii \Rightarrow (h\nu)(h\nu')[1-\cos\theta] = M_0c^2(h\nu - h\nu')$$

$$1-\cos\theta = M_0c^2\frac{h\nu - h\nu'}{(h\nu)(h\nu')} = M_0c^2\left(\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu}\right) = \frac{M_0c}{h}\left(\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{M_0c}(1-\cos\theta)$$

طول موج کامپتون $\lambda_c = \frac{h}{M_0c}$ $\qquad \lambda_{c\,\text{الکترون}} = \frac{6.63\times10^{-34}}{9.11\times10^{-31}\times3\times10^{8}} = 0.0224\ \text{Å}$





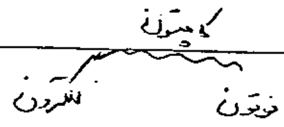
در تابش اشعه برروی جسم، برخی از فوتونها

به الکترونهای آزاد سطح جسم برخورد می‌کنند

پدیده کامپتون اتفاق می‌افتد.

در بعضی از شرایط تابش پس از اینکه بازتابش میده

طول موج جدیدی ایجاد می‌شود.



پدیده تولید زوج (جفت) و نابودی جفت

$h\nu \longrightarrow M_0c^2 + K$ تبدیل فوتون به جرم

$[M_0c^2] = 0.51\,MeV$ انرژی معادل جرم الکترون

با تولید الکترون، این اشکال را به دنبال دارد که فوتون بار ندارد، اما الکترون بار دارد پس اصل بقای بار الکتریکی نقض می‌شود.

دیراک در تأیید این نظریه فرض کرد که همراه الکترون باید ذره‌ای با بار مثبت بنام پوزیترون بوجود آید.

$h\nu \longrightarrow (M_0c^2 + k)^{-e} + (M_0c^2 + k)^{+e}$

لازم این اشکال بوجود می‌آید که اندازه حرکت از نظر تئوری برای جرم‌ها است صفر است، در حالی که در مورد فوتون همواره c است، پس اصل بقای اندازه حرکت نقض می‌شود.

در رفع این اشکال، فوتون خود بخود تبدیل به جرم نمی‌شود بلکه باید به یک جرم سنگین بخورد تا اندازه حرکت آن جسم سنگین بیشتر شود.

$\frac{hc}{\lambda} = 2\times 0.51\,MeV \Rightarrow \lambda = 0.012\,A^\circ$ اشعه γ

$\Rightarrow \quad \gamma \longrightarrow e^- + e^+$ فیزیک ذرات بنیادی

برای هر ذره‌ای یک پاد ذره وجود دارد.

$e^- \longrightarrow e^+$

$p^+ \longrightarrow p^-$

$N \longrightarrow N$ (عدد اسپینی ...)

ضد ذرات معمولاً ناپایدارند.

برعکس عمل تولید، یعنی عمل نابودی جفت، یک ذره و پادذره باید تولید دو فوتون با جهت‌های مخالف باشند تا اصل بقای اندازه حرکت نقض نشود.

فوتون و گرانش

وقتی فوتون‌ها در نیروی جاذبه قرار گیرند، چون جرم نسبیتی پیدا می‌کنند، جهتشان (۷) تغییر می‌کند

مسائل ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۷

۷۸، ۸، ۷۹

نور

امواج الکترومغناطیسی { ۱- رفتار موجی ، ۲- رفتار ذره‌ای

$$\begin{cases} P = \dfrac{h}{\lambda} \\ E = h\nu \end{cases}$$

امواج مادی (امواج دوبروی)

طبق نظریه دوبروی، هر ذره با اندازه حرکت $P = mv$، دارای موج راهبر است که $\lambda = \frac{h}{P}$

Pilot Wave

این طول موج، عملاً برای ذرات معمولی صفر است.

در شتاب‌دهنده، انرژی جنبشی یک الکترون به صورت $K = eV$ می‌باشد.

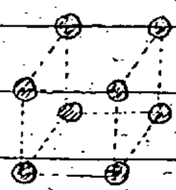
برای مثال، الکترونی که در پتانسیل $100\,V$ شتاب گرفته است دارای انرژی $100\,eV$ است و چون در مقایسه با $[M_0c^2]$ بسیار کم است، پس:

$$K = 100\,(eV) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow P = \sqrt{2mK}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} \approx 1.2\,A^\circ \longrightarrow \text{X-Ray}$$

کاربرد اشعه X

بحث در تعیین ساختار مولکول ~ علم بلورشناسی (کریستالوگرافی)



Simple Cubic

Body Center Cubic

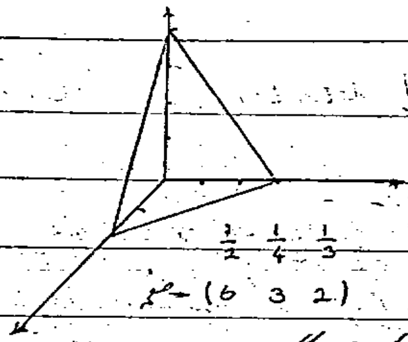
در مرکز این مکعب یک اتم وجود دارد.

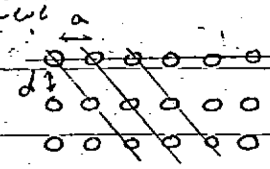
اگر در وسط هر سطح یک اتم وجود داشته باشد ~ Face Center Cubic

* ثابت می‌شود که ۱۴ شکل بلوری وجود دارد که اتم‌ها به صورت منظم خاصی کنار هم قرار گرفته باشند.

* بعضی از عناصر چند ساختاری هستند. مثلاً آهن تا 900° به صورت F.C.C. و بعد از آن به صورت B.C.C. است.

بر همین اساس محورهای مختصات را طبق شکل زیر تعریف می‌کنیم.



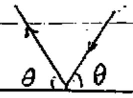


بی‌نهایت صفحه می‌توان برای بلور تعریف کرد.

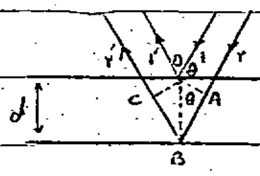
محل برخورد صفحه‌ای را با محورها در کوچکترین عددی که ثابت صحیح شوند عکس آن‌ها را گرد به صورت صفحه‌ای آن تعریف می‌گردد. هرچه اندیس صفحه‌ها کوچکتر باشد، مهم‌تر هستند.

* زمانی که پرتوهای اشعه x به صفحات یک بلوری تابیده، قسمتی عبور می‌کند و قسمتی نیز منعکس می‌شود.

با در نظر گرفتن صفحه مانند آینه زاویه پرتوهای تابش و انعکاس مساوی است.



diffraction (پراش)



* اگر اختلاف راه دو پرتو ۱ و ۲ مضرب λ باشد، دو پرتو یکدیگر را تقویت می‌کنند.

$ABC = \Delta = n\lambda$

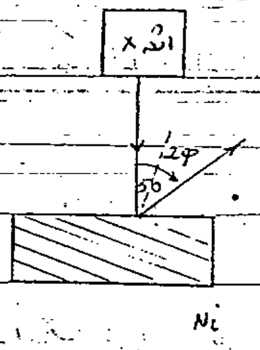
شرط تداخل اشعه x (قانون براگ) $2d\sin\theta = n\lambda$

معمولاً n، ۱، ۲، حداکثر ۳ است. d و λ باید حدود هم باشند $d < \frac{\lambda}{2}$

شرط آنکه بتوانیم این آثار را ببینیم این است که باید طول موج آن در حدود فاصله اتم‌ها باشد. به همین علت است که از اشعه x استفاده می‌شود.

برای ساختار مکعبی $d = \frac{a}{\sqrt{h^2+l^2+k^2}}$

آزمایش دیویسون و گرمر



$2d\sin\theta = n\lambda$

$d\sin 2\varphi = n\lambda$, $\lambda = 1.65$ Å

$a = 2.5$ Å

تجربه نشان داده که اگر detector را در وضعیتی قرار دهیم که $2\varphi = 50^\circ$ شود، تداخل [illegible] می‌گیرد.

بجای منبع اشعه x، یک منبع تولیدکننده الکترون قرار داده شد و $K = eV$ را از صفر تا ۶۰ الکترون ولت تغییر دادند، مشاهده شد که الکترون‌های بازگشتی، در جهات مختلف پراکنده می‌شوند ولی برای $K = 54\,(eV)$ عمده الکترون‌ها در حول و حوش همان زاویه ۵۰ درجه جمع می‌شوند.

بنابراین در شرایط خاص، الکترون رفتار موجی دارد و عملاً پراش الکترون‌ها درست مثل اشعه x بکار می‌رود.

1) x-ray differaction

2) electron

3) notron — مراکز اتمی یکی از محصولاتشان نوترون است

ثابت می‌شود نوترون‌هایی که انرژی جنبشی آنها با انرژی ذرات مولکول برابر باشد می‌توانند بر روی هم نقش کنند نقش اشعه الکترون را ایفا کنند.

$\frac{1}{2}mv^2 = k = \frac{3}{2}KT$ نوترون‌های حرارتی

5

فرمول: طول موج حدود ۷ Å

۷۸/۹/۶

نور: ۱- خاصیت (رفتار) موجی → حالت تداخل - پراش | localized (جایگزیده)
۲- " " ذره‌ای → توزیع گسترده | برخورد، scattering (پراکندگی)

ذره: ۱- رفتار ذره‌گونه
۲- " موج‌گونه

* خاصیت مشترک بین موج و ذره: حامل انرژی

اصل مکملیت بوهر: رفتارهای موجی و ذره‌ای (نور) مکمل یکدیگرند.
بدین معنی که اگر بتوان پدیده‌ای را از طریق موجی بررسی و توصیف کرد، از طریق ذره‌ای نمی‌توان آنرا توصیف و تفسیر کرد.

خاصیت دوگانگی (duality) دو رفتار متفاوت

$I \propto E^2 \propto B^2$ (رفتار موجی)

انرژی که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر میدان می‌گذرد

$I \propto nh\nu \propto nh\frac{c}{\lambda}$ (رفتار ذره‌ای)

* میدان (الکتریکی و مغناطیسی) در هر نقطه کمیتی است که مجذور آن، احتمال یافتن فوتون را در آن نقطه نشان می‌دهد.

* برای هر ذره در حال حرکت، تابع موج را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
تابع موج: برای هر ذره مادی تابعی است که مجذور آن احتمال یافتن ذره را نشان می‌دهد.
این تابع، صرفاً یک تابع ریاضی است و اساس مکانیک موجی است.

$\psi^2(x) \propto$ احتمال یافتن ذره

$|\psi(x)|^2 dx =$ احتمال پیدا کردن ذره در نقطه x و فاصله dx

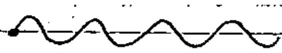
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

امواج وابسته به ذرات مادی

امواج دوبروی

$\frac{v}{c}$

(i) مورد قبول نیست $\rightsquigarrow$ $\frac{c^2}{V} = \frac{Mc^2}{MV} = \frac{E}{h} \cdot \frac{h}{P} = u = \lambda \nu$ سرعت موج وابسته به ذره



$$\Psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ عدد موج (انتشار)

$if \quad t = cte \rightsquigarrow$ تابع موج پریودیک نسبت به x

$if \quad x = cte \rightsquigarrow t$

$$\Psi(x,t) = 0 \rightsquigarrow kx - \omega t = n\pi \Rightarrow x = \frac{\omega}{k} t + n\frac{\pi}{k}$$

سرعت انتشار موج $u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$

$$P = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \rightsquigarrow P = \hbar k \ (ii)$$

$$E = h\nu = \frac{2\pi h \nu}{2\pi} = \hbar \omega \ (iii)$$

$$i, ii, iii \rightarrow \frac{E}{P} = \frac{\omega}{k}$$

بنابراین بعد از معادله به همان نتیجه می‌رسیم. پس باید فرض کنیم که امواج وابسته به ذره به صورت ساده سینوسی نباشند

بلکه باید چیزی دیگر آنها را در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} \Psi_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \\ \Psi_2(x,t) = A \sin[(k+dk)x - (\omega + d\omega)t] \end{cases}$$

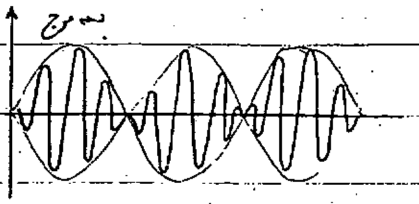
$$\Psi(x,t) = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \sin\left[\left(\frac{2k+dk}{2}\right)x - \left(\frac{2\omega+d\omega}{2}\right)t\right] \cos\left[\left(\frac{dk}{2}\right)x - \left(\frac{d\omega}{2}\right)t\right]$$

If $d\omega \ll \omega$, $dk \ll k$ then:

موج مدوله

$$\psi(x,t) = \underbrace{2A\sin(kx-\omega t)\cos\left(\frac{dk}{2}x-\frac{d\omega}{2}t\right)}_{A'}$$

بنابراین یک موج مرکب داریم که دامنه آن نیز ثابت نیست.



سرعت بار ذره ما. حالا سرعت ماده $u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dP}$

$$E^2 = E_0^2 + P^2C^2$$

$$2E\,dE = 2c^2P\,dP$$

$$\frac{dE}{dP} = \frac{c^2P}{E} = \frac{c^2mV}{mc^2} = V$$

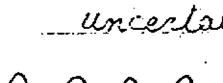
بنابراین، اگر موج را ترکیبی از دو موج با یک اختلاف کوچک در نظر بگیریم، سرعت انتشار موج با سرعت ذره یکی خواهد شد.

$v_g = V$ ← سرعت ذره

$v_{ph} = \frac{c^2}{V}$ ← سرعت فاز

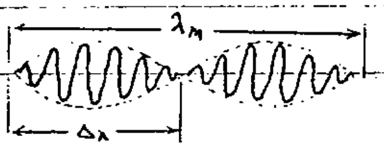
۷۸,۹,۱۳

اصل عدم قطعیت uncertainity Principle



(جایگزیده) $\Delta x = 0$, $\Delta v = \infty$, $\Delta \lambda = \infty$

(گسترده) $\Delta v = 0$, $\Delta \lambda = 0$, $\Delta x = \infty$



هر ذره بطور دقیق معلوم نیست اما می‌دانیم در داخل بسته موج است.

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = \frac{2\pi}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{4\pi}{\Delta k}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda_m}{2} = \frac{2\pi}{\Delta k} \;\rightarrow\; \Delta x \cdot \Delta k = 2\pi \quad i$$

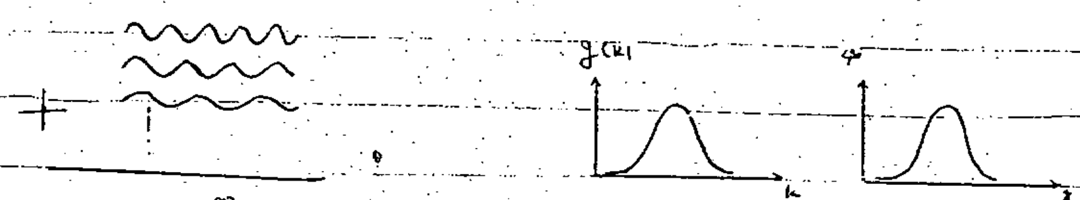
اصل عدم قطعیت: اگر دو کمیت A و B را هم اندازه بگیریم، بدون توجه به دقت دستگاه‌های اندازه‌گیری حاصلضرب خطاها صفر نخواهد بود.

$$P = \hbar k \rightarrow \Delta P = \hbar \Delta k \quad ii$$

$$i, ii \rightarrow \Delta x \cdot \Delta P = h$$ اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

بنابراین برای یک ذره نمی‌توان هم سرعت و هم مکان را بدون خطا اندازه‌گیری نمود.

$$\begin{cases} \Delta_x \cdot P_x = h \\ \Delta_y \cdot P_y = h \\ \Delta_z \cdot P_z = h \end{cases} \quad \text{But} \quad \Delta x \cdot P_y \overset{\text{می‌تواند}}{=} 0$$



$$\psi(x,t) = \int_{k=0}^{\infty} g(k) \cos kx \, dk$$

$$\Delta k \cdot \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$\Delta x \cdot \Delta P_x = \frac{\hbar}{2}$$

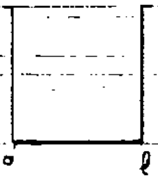
$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

تمرین: ثابت کنید $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ ، همچنین اگر ذره در مسیر منحنی حرکت کند، $\Delta \theta \cdot \Delta L \geq \frac{\hbar}{2}$

$$\Delta x \cdot \Delta \lambda \geq$$

بررسی حرکت ذره در یک چاه پتانسیل نامتناهی

(potential well):



$F = 0$ ذره آزاد است

$V = cte \quad , \quad l > x > 0 \rightarrow \psi(x,t) \neq 0$

$\left.\begin{matrix} x \geq l \\ x \leq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow V = \infty \rightarrow \psi(x,t) = 0$

با مقایسه این موج راجع به ذره با تار مرتعش باید $l = n\frac{\lambda}{2}$ باشد بنابراین:

$$l = n\frac{h}{2p}$$

$$P = n\frac{h}{2l} \quad , \quad E = \frac{p^2}{2m} = n^2\left(\frac{h^2}{8ml^2}\right)$$

یعنی این ذره اندازه حرکت دلخواهی ندارد و بنابراین سرعت آن دارای مقادیر متوالی می‌باشد.

همین طور انرژی ذره نیز کوانتیده است.

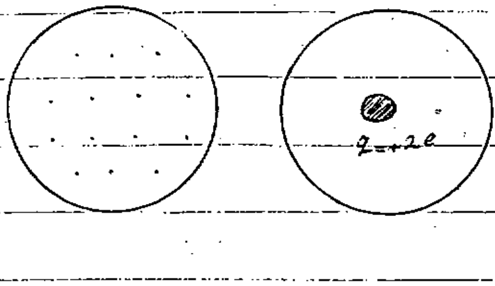
چگالی احتمال حضور ذره $P = |\psi(x,t)|^2$

احتمال یافتن ذره در وسط بیشتر است.

در حالت‌های کلاسیک که ظاهراً نتایج متفاوت از کوانتوم است، بدلیل بزرگ بودن n است.

۷۸/۹/۲۰

مدل تامسون — مدل رادرفورد



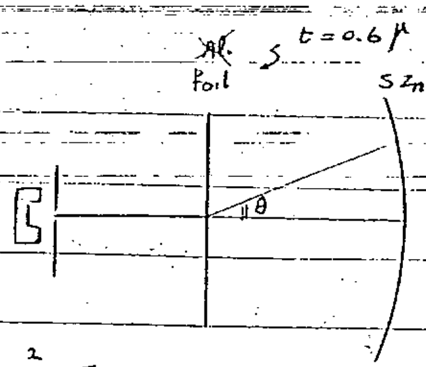
مدل‌های اتمی و اتم هیدروژن

ذره	بار الکتریکی	جرم
پروتون	+	+
الکترون	−	ناچیز
نوترون	۰	+

$m_n = m_p + \%10$

$m_e = \frac{1}{1800} m_p$

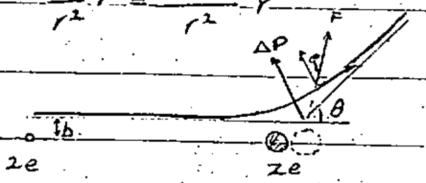
آزمایش رادرفورد



$$\alpha \rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} m v^2 = 7\,MeV \\ q = +2e \end{cases}$$

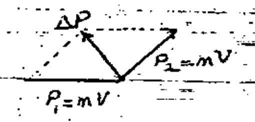
نیروهایی که متناسب با عکس مجذور فاصله‌ای هستند، ثابت می‌شود که در حالت نیروی دافعه، مسیر هذلولی شکل و در حالت نیروی جاذبه مسیر بیضی شکل یا دایره‌ای خواهد بود.

$$\vec{F} = k\frac{qq'}{r^2}\hat{r} = \frac{2kze^2}{r^2}\hat{r}$$



پارامتر برخورد $= b$

زاویه پراکندگی $= \theta$



در راستای $\vec{\Delta P}$

$$\vec{\Delta P} = \int \vec{F}\,dt = 2kze^2 \int \frac{\hat{r}}{r^2}\,dt = 2kze^2 \int \frac{\cos\varphi}{r^2}\,dt\;\hat{u}$$

چون نیروی F مرکزی است، پس نسبت به ذره، گشتاور ندارد.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow |L| = mr^2\omega = cte$

این مقدار ثابت را یک نقطه دور حساب می‌کنیم.

$$mr^2\omega = m\underbrace{b}_{r\sin\theta}v_0$$

$$|\vec{\Delta P}| = 2mV_0\sin\frac{\theta}{2} = 2kze^2\int\frac{\cos\varphi}{r^2}\,\frac{dt}{d\varphi}\,d\varphi$$

$$\Rightarrow mV_0\sin\frac{\theta}{2} = \frac{kze^2}{bV_0}\int_{-\frac{(\pi-\theta)}{2}}^{+\frac{(\pi-\theta)}{2}}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{2kze^2}{bV_0}\cos\theta/2$$

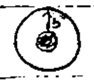
$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}mV_0^2\,b}{kze^2} = \cot\frac{\theta}{2} \Rightarrow b = \frac{kze^2}{K_0}\cot\theta/2$$

$b = 0 \longrightarrow \theta = \pi$

$$b = ? \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow b = \frac{9\times10^{9} \times 79 \times (1.6\times10^{-19})^2}{7\times10^{6} \times 1.6\times10^{-19}} \simeq 1.5\times10^{-4}\ \text{Å}$$

از طرفی شعاع هسته (اتم) حدود 10^{-4} آنگستروم است.

$\sigma = \pi b^2$ سطح مقطع برخورد



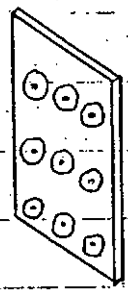
$10^{-28}\ m^2 = 1\ barn$

$\sigma = 3.14 \times (1.5\times10^{-14})^2 = 7\ barn$

$10^{-15}\ m = 1\ Fermi$

اگر میلیونها ذره را در فاصله ها این ها شلیک کنیم، زاویه پراکندگی بین 90 تا 180 خواهد بود.

$t = 0.6\,\mu$



تعداد اتمها در واحد حجم

$n \simeq \frac{\rho N_A}{M} \rightsquigarrow (5-6)\times10^{28}\ m^{-3}$

$n_{طلا} = 6\times10^{28}\ m^{-3}$

احتمال پراکندگی ۹۰-۱۸۰ با طلا برای $= \frac{n(At)\sigma}{A}$

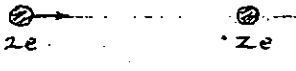
$= 6\times10^{28} \times 6\times10^{-7} \times 7\times10^{-28} = 25\times10^{-6}$

یعنی اگر یک میلیون ذره را شلیک کنیم حدود 25 ذره بین ۹۰ تا ۱۸۰ پراکنده می‌شوند.

در انحراف کم اگر محاسبه کنیم به نتیجه می‌رسیم که با مدل رادرفورد باید بیشتر ذرات بدون انحراف از صفحه بگذرند.

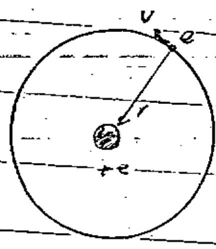
المان زاویه فضایی

تعداد ذرات پرت شده $dN \propto \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$



$\frac{2kZe^2}{r} = \frac{1}{2} m v^2$

انرژی جنبشی



مدل اتم هیدروژن

$$\omega = \sqrt{\frac{ke^2}{mr^3}}$$

از نظر نیرو: $F = \frac{ke^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$ ⟵ $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ke^2}{mr^3}}$

۲- از نظر انرژی

$$E = \underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2}_{\downarrow} + \underbrace{U}_{\downarrow}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ke^2}{r}\right) + \left(-\frac{ke^2}{r}\right)$$

انرژی اتم هیدروژن $E = -\frac{1}{2}k\frac{e^2}{r}$ ⟵ سیستم مقید است (انرژی پایین)

تمرین: فصل ۳: 2، 4، 6، 8، 10

فصل ۴: 1، 3، 5، 7، 9، 11، 13

۷۸/۹/۲۲

دوران الکترون

ذرات باردار شتاب دار، از خود انرژی تابش می‌کند.

$\nu = f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ke^2}{mr^3}}$ بسامد تابش

از طرفی بدلیل حرکت دورانی، الکترون باید تابش کند.

این انرژی باید از خود الکترون گرفته شود زیرا در این صورت،

از انرژی الکترون کاسته می‌شود و سرانجام الکترون به هسته می‌چسبد.

بنابراین این فرضیه نباید صحیح باشد یعنی الکترون نباید تابشی داشته باشد.

با تصورات تجربی، با انرژی دادن به الکترونهای اتم هیدروژن، طیفهایی مشاهده شد.

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n \geq 3$$ بالمر

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n \geq 2$$ لیمان

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\lambda} = \underbrace{R}_{1.6\times10^{-7}\,m^{-1}}\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_u^2}\right)$$ سری L (بالمر، لیمان، ...)

مطالعات تجربی نشان داد که می‌توان از گاز هیدروژن طیفهایی تشکیل داد.

طیف بالمر، خطی است.

مدل اتمی بوهر $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2\omega$

فرضیات Bohr: ۱- مدار چرخش الکترون دلخواه نیست بلکه بگونه‌ای است که اندازه حرکت زاویه‌ای آن $L = n\hbar$

۲- مادامی که الکترون روی مدار مشخصی است، تابش نمی‌کند. بلکه هنگامی که الکترون از یک مدار بالاتر به مدار پایین‌تری رود، تابش می‌کند $E_2 - E_1 = h\nu$

مدارهای مجاز:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ke^2}{r^2} &= m\frac{v^2}{r} \\ mvr &= n\hbar \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{ke^2}{r} = m\frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2} \Rightarrow r_n = n^2\frac{\hbar^2}{mke^2}$$

$$r_1 \simeq 5.3 \times 10^{-11}\,m = 0.53\,A^\circ \rightsquigarrow r_2 = 4r_1$$

$$E = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{ke^2\,mke^2}{n^2\hbar^2} \Rightarrow E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}$$

$$E_1 = -13.6\,ev \;,\; E_2 = 3.4\,ev$$

$$E_u - E_l = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

$$\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2}\right) = h\frac{c}{\lambda} \rightsquigarrow \frac{1}{\lambda} = \underbrace{\frac{me^4}{8\epsilon_0 h^3 c}}_{=R}\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2}\right)$$

مسئله ۱۰: ص ۱۴۱

$$E = E_0 = 0.51\,Mev \rightsquigarrow \nu, \lambda = ?$$

$$E = h\frac{c}{\lambda} = 0.51 \times 10^6 \times 10^{-19} \Rightarrow \lambda = \ldots \;,\; P = \frac{E}{c}$$

مسئله ۹: تابش عمود $\rightsquigarrow$ $1.94\,\frac{cal}{cm^2}$ ($8\,J/cm^2$, S) , $\bar{\lambda} = 5500\,A^\circ$

$$8 \times 10^4\left(\frac{J}{m^2\,min}\right) = nh\nu = nh\frac{c}{\lambda} \Rightarrow n = \ldots \;\; 1/m^2\,min$$

مسأله ۱۲:

$$\cot\frac{\theta}{2} = \left(1+\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)\operatorname{tg}\varphi$$

$$h\frac{\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + P\cos\varphi$$

$$\frac{h\nu'}{c}\sin\theta = P\sin\varphi$$

۷۸/۹/۲۷

آزمایش فرانک - هرتز

n —————— $E_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)E_1$

$n=2$ —————— $E_2 = -3.4\,(eV)$

$\downarrow 10.2 = h\nu$

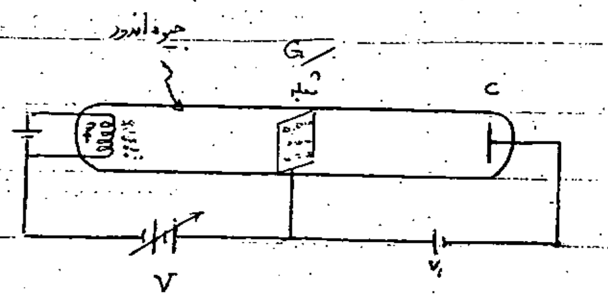
$n=1$ —————— $E_1 = -13.6\,(eV)$

* در برخورد دو ذره، هنگامی انتقال انرژی ماکزیمم خواهد بود که جرم دو ذره یکسان باشد.

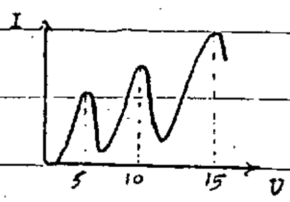
دو روش عملی برای انتقال الکترونها بین مدارها وجود دارد.

۱- برخورد با ذرات (الکترون) $K \geq \Delta E$

۲- برخورد فوتون با اتم



بر اثر گرما جیوه تبخیر می‌شود. $K = eV$



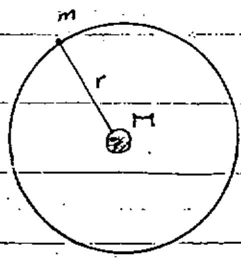
$$\Delta E_{21\,Hg} = 4.9\,(eV)$$

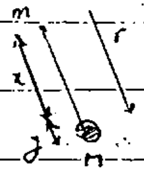
در نقاط پیک، انرژی الکترون به اندازه‌ای می‌رسد که بر اتم جیوه می‌تواند اثر بگذارد.

این آزمایش، مهر تأییدی بر مسأله کوانتومی بودن انرژی های اتمی است.

تصحیح روابط بوهر

اشکالی که به روابط بوهر وارد است:





اندازه حرکت باید نسبت به مرکز جرم سیستم سنجیده شود، نه فقط الکترون.

$$L = \underbrace{mr^2\omega} = n\hbar$$

$$m x^2 \omega + M y^2 \omega = n\hbar$$

$$\omega\left(m\frac{M^2}{(M+m)^2}r^2 + M\frac{m^2}{(M+m)^2}r^2\right) = n\hbar$$

$$\frac{\omega M m r^2}{M+m} = n\hbar$$

reduced mass (جرم کاهیده) $\mu = \frac{Mm}{M+m} \Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}$

$$L = \mu r^2 \omega = n\hbar$$

$$\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0 h^2}\right)\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2}\right) = h\nu \Rightarrow \nu = \alpha\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2}\right)$$

$$n_l, n_u \gg \ , \ n_u = n_l + 1 \rightsquigarrow \alpha\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \nu$$

$$\Rightarrow \nu \simeq \alpha\left(\frac{2}{n^3}\right) = \frac{me^4}{4\varepsilon_0 h^3}\frac{1}{n^3}$$

اصل همخوانی: $r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2}$, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ke^2}{mr^3}}$ ازطرفی

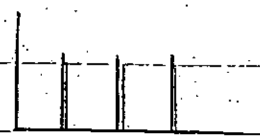
$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ke^2 m^3 k^3 e^6}{m n^6 \hbar^6}} = \frac{1}{2\pi}\frac{k^2 e^4 m}{\hbar^3 n^3} = \nu$$

نقاط قوت و ضعف نظریات بوهر

وقتی الکترون تحریک می‌شود به لایه‌های بالاتر می‌رود. در هنگام برگشت به کدام لایه برمی‌گردد؟ و شدت خطوط چگونه است؟ روابط بور هیچ پاسخی در این خصوص ندارد.

این مدل فقط برای اتم‌های تنها است. در ضمن اصول بور با اصل عدم قطعیت سازگاری ندارد. زیرا از نظر روابط ریاضی، هم ΔP و هم Δx (r) دقیقاً مشخص می‌شود.

اگر طیف‌ها قدرت تفکیک بالایی داشته باشند ($\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$) مشاهده می‌شود زیر هر یک از خطوط طیف، یک سری خطوط طیفی باریک‌تر نیز وجود دارد و این مسئله را با اصول بور نمی‌توان توجیه کرد:



fine Structure (ساختار ریز)

برای رفع این اشکالات مدل جدیدی به نام مدل زومرفلد مطرح شد که در آن، مدار الکترون الزاماً دایره‌ای نیست بلکه می‌تواند به صورت بیضوی نیز باشد.

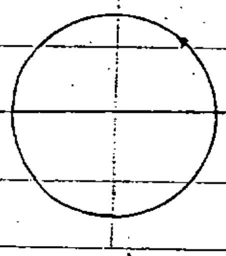
مسائل: فصل ۵، ... : 5, 7, 9, 13, 15

۷۸/۱۰/۴

قاعده کوانتش زومرفلد - ویلسون

برای ذره‌ای که حرکت تناوبی دارد، اگر در هر یک از مختصات، حرکت تناوبی باشد در این صورت:

$$\oint P_q \cdot dq = n_q h$$

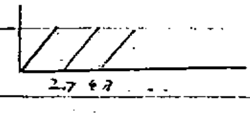


$$\oint P_\theta \, d\theta = n_\theta h$$

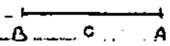
$$L \oint d\theta = n_\theta h$$

$$2\pi L = n_\theta h$$

اندازه حرکت زاویه‌ای $P_\theta = L$



$$\oint P_r \, dr = n_r h \implies n_r = 0$$

برای حرکت نوسانی $\rightsquigarrow$  $X = x_0 \sin \omega t$

$dx = x_0 \omega \cos \omega t \, dt$

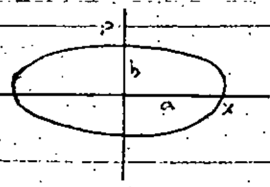
$\oint P_x dx = n_x h \Rightarrow m x_0^2 \omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t \, dt = nh$

$\Rightarrow \frac{m x_0^2 \omega^2 \pi}{\omega^2} = nh$

در حرکت نوسانی انرژی کل ثابت $\rightsquigarrow$ $E = K + U = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \begin{cases} E = \left(\frac{P^2}{2m}\right)_{max} = \frac{m x_0^2 \omega^2}{2} \\ U = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow E = n\hbar\omega = nh\nu$

$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{2E}{k}} + \frac{P^2}{2mE} = 1$ (معادله بیضی است)



$a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$, $b = \sqrt{2mE}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\underbrace{\oint P dx}_{\text{مساحت بیضی}} = nh \Rightarrow \pi ab = nh \Rightarrow \frac{\pi 2E}{\omega} = nh$

* کمترین مساحت این بیضی h می‌تواند باشد.

یکی از اشکالات مدل بوهر، مدارهای دایره‌ای بود. اکنون با این فرض اگر مسیر حرکت ذره را بصورت یک بیضی که هسته در یکی از کانونهای آن قرار دارد بگیریم:

$$\begin{cases} \oint P_\theta d\theta = n_\theta h \Rightarrow L = n_\theta \hbar & n_\theta = 1, 2, 3, \ldots \text{ (عدد کوانتومی زاویه‌ای (سمتی))} \\ \oint P_r dr = n_r h & \underbrace{n_r = 0}_{\text{دایره}}, 1, 2, 3, \ldots \text{ (عدد کوانتومی شعاعی)} \end{cases}$$

$E_n = \frac{1}{n^2} (E_1)$, $n = n_\theta + n_r$

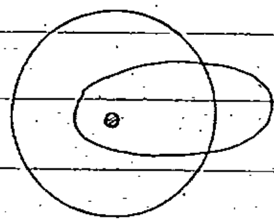
$L\left(\frac{a}{b}-1\right)=n_r h$

... مسیر دایره‌ای در حالت‌ها نیز درست است اما مسیر بیضوی چنین نیست.

مدار بور $\leadsto$ $\omega=\sqrt{\dfrac{ke^2}{mr^3}}$, $V=r\omega \leadsto \dfrac{V}{c}=10^{-2}$

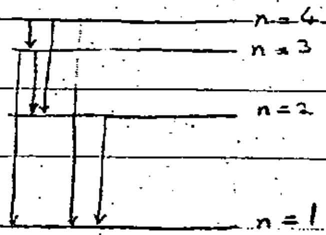
حالت پایه $n=1 \leadsto \begin{cases} n_\theta=1 \\ n_r=0 \end{cases} \leadsto$ مسیر دایره‌ای

$n=2 \leadsto \begin{cases} \begin{cases} n_\theta=2 \\ n_r=0 \end{cases} \leadsto \text{مسیر دایره‌ای} \\ \begin{cases} n_\theta=1 \\ n_r=1 \end{cases} \leadsto \text{مسیر بیضوی} \end{cases}$



بنابراین به ازای هر n، n مدار دایره‌ای و $n-1$ بیضی خواهیم داشت.

۵-۳۵) الف) 6 خط طیف



ب) اسپکترون هر دو تراز یک طول موج تولید می‌کند

$4\to3$) 400
$3\to2$) 200
$3\to1$) 200
$4\to2$) 400
$2\to1$) 400+200
$4\to1$) 400

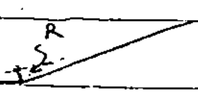
2200 فوتون

۵-۳۱) الف) باید دیاتون‌ها را طوری تنظیم کنیم که R دیاتیون طول شود.

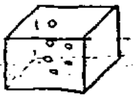
ب) $R=0.53\ A^\circ$

۵-۳۲) انرژی جنبشی باید با انرژی پتانسیل برابر باشد

$U=\dfrac{-Kqq'}{r}$



انرژی جنبشی اولیه $K_i=\frac{1}{2}mv_0^2$



(۲۱-۵ $\quad$ احتمال = $n\sigma\Delta t$

شعاع گلوله‌ها ← b

ب) (احتمال مستقل)^2

مسائل فصل ۵ — ۳۶ و ۲۷ و

فصل ۴: ۳۰، ۲۵، ۲۶، ۲۸، ۱۶، ۱۱، ۱۲، ۱۳،

فصل ۳: ۳۴

۷۸/۱۰/۱۳

معادله شرودینگر

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\psi(x,t) = \varphi(t)\cdot\psi(x)$$

برای حرکت یک بعدی:

$$\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \underbrace{V(x,t)}_{\text{تابع پتانسیل}}\,\psi(x,t)$$

برای حرکت سه بعدی باید ۳ بار مشتق بگیریم.

تابع پتانسیل $\begin{cases} \text{برای ذره} \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 \\ \text{برای بار} \rightarrow k\frac{qq'}{r} \end{cases}$

برای حل این معادله، از روش تفکیک استفاده می‌کنیم و در نهایت داریم:

$$\underbrace{\psi(x,t)}_{\text{تابع موج}} = \varphi(t)\cdot\underbrace{\psi(x)}_{\text{ویژه تابع}} \quad , \quad \varphi(t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi = 0$$

ما در این مبحث با نیروهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که $\vec{F} = -\nabla V$

تابع موج باید دارای شرایط زیر باشد: ۱- پیوسته باشد. ۲- تک مقدار باشد. ۳- متناهی باشد.

این شرایط را هر تابع موج باید داشته باشد.

انرژی‌های مجاز برای تابع موج را ویژه مقدار تابع گویند.

در مسائل معادله شرودینگر ← $V=0$ ، یعنی انرژی اثر نمی‌کند / $V\neq 0$

ذره‌ای که نیرویی بر آن وارد نشود (پتانسیل آن صفر است) ← ذره آزاد ← $V=0$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar}E\psi=0$$

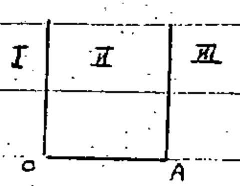
برای یک ذره (چون فقط در یک جهت حرکت می‌کند) ← $\psi(x)=Ae^{ikx}$, $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

برای مجموعه‌ای از ذرات که در دو جهت حرکت می‌کنند ← $\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$ دارند

برای نرمالیزه کردن: $\int_{-\infty}^{+\infty}P(x)\,dx=1 \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx=1$

با جایگذاری ← $A^2\int_{-\infty}^{+\infty}dx=1 \Rightarrow A=0$

بررسی حرکت ذره در چاه پتانسیل نامتناهی



$$V(x)=\begin{cases}0 & 0<x<l\\ \infty & x\geq l\,,\ x\leq 0\end{cases}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi=0$$

در مناطق I و III عملاً و منطقاً داریم $\psi(x)=0$

در ناحیه II ← $\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$

شکل قابل قبول برای ψ در این حالت باید بگونه‌ای باشد که در مرزها، مقدار صفر را بگیرد.

$$\Rightarrow \psi(x) = A\sin kx + B\cos kx \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\text{at } x = 0 \rightsquigarrow \psi(x) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\text{at } x = l \rightsquigarrow \psi(x) = 0 \Rightarrow kl = n\pi \qquad \Rightarrow \psi(x) = A\sin\frac{n\pi}{l}x$$

از طرفی $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \Rightarrow \hbar k = \sqrt{2mE} \Rightarrow P = \frac{h}{2\pi}k$

$$\Rightarrow P = \frac{nh}{2l} \quad , \quad E = \frac{n^2h^2}{8ml^2}$$

* بنابراین مجدداً به این نتیجه می‌رسیم که انرژی و اندازه حرکت یک ذره دیگر پیوسته نیست بلکه کوانتیده است.

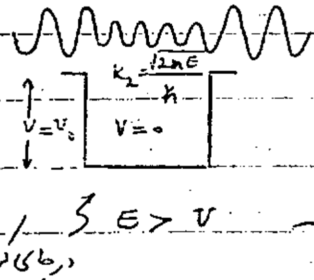
برای پیدا کردن دامنه نوسان، از شرط نرمالیزاسیون (بهنجارش) استفاده می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx = 1 \Rightarrow \int_0^l A^2\sin^2\frac{n\pi}{l}x\,dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2/l}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

در مقایسه با حالت قبلی، مشاهده می‌شود که دامنه نوسان با طول مسیر، نسبت عکس دارد بنابراین در صورتی که $l \to \infty$ ، $A \to 0$.

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(E_0 - V)}}{\hbar}$$



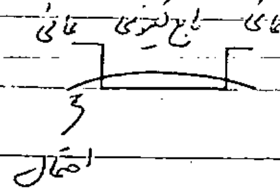
در مورد یک چاه پتانسیل متناهی، احتمال دارد ذره از چاه خارج شود.
بنابراین باید دو حالت را در نظر بگیریم:

الف) انرژی سد پتانسیل > انرژی جنبشی ذره ⟵ $E > V$

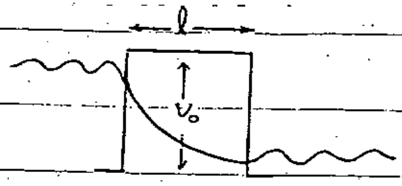
در جایی که انرژی وجود ندارد، هم دامنه و هم طول موج کم است.

در منطقه‌ی $V=0$ سرعت بیشتر است و بنابراین احتمال یافتن ذره (دامنه) نیز کم است.	برای حل معادلات این مسئله { شرط نرمالیزاسیون / پیوسته بودن ψ در نقاط مرزی

۱۱- اگر انرژی جنبشی ذره کمتر از سد پتانسیل بود، برخلاف مسائل کلاسیک ممکن است ذره به خارج از چاه نیز نفوذ کند.



پدیده تونل



در این حالت نیز برخلاف مسائل کلاسیک، ذره می‌تواند از سد پتانسیل بگذرد.

* مسأله چاه پتانسیل نامتناهی
* مسأله ذره‌ای که حرکت هارمونیک دارد.

} ← یکی از سؤالات امتحانی.

simple harmony motion

ذره با حرکت هارمونیک

در حرکت نوسانی ← $F = -kx$, $V = \frac{1}{2}kx^2$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0$$

ثابت می‌شود که یکی از روش‌های حل، جواب زیر مشخص می‌شود:

$$\psi(x) = Ae^{-\gamma x^2}$$

اکنون این جواب را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{d\psi}{dx} = -2A\gamma x e^{-\gamma x^2} = -2\gamma x\,\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -2\gamma\left[-2\gamma x^2\psi(x) + \psi(x)\right] = 2\gamma(2\gamma x^2 - 1)\psi(x)$$

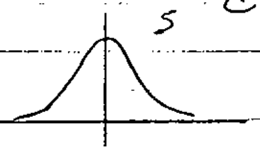
$$\Rightarrow 2\gamma(2\gamma x^2 - 1)\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\gamma = \frac{2mE}{\hbar^2} \\ 4\gamma^2 = \frac{mk}{\hbar^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\hbar}{2}\omega = \frac{1}{2}h\nu \\ \gamma = \frac{m\omega}{2\hbar} \end{cases}$$

* بنابراین فرم جواب بصورت زیر خواهد بود:

$$\psi(x) = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

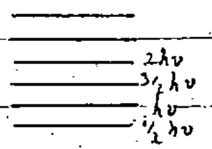
تابع گوسی S



ثابت می‌شود که در حالت کلی، رابطه انرژی بصورت زیر است:

$$E_n = (n+\tfrac{1}{2}) h\nu$$

و ما در مسائل بالا، حالت پایه $(n=1)$ را بررسی کردیم.



۷۸/۱۰/۲۰

پادپروتون

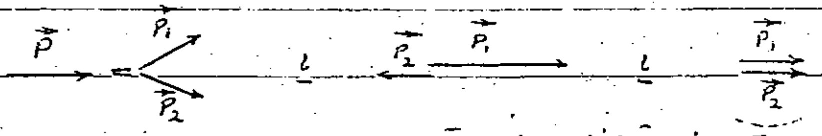
$$\vec{p}^{+} + \underset{\text{ساکن}}{p^{+}} \longrightarrow p^{+} + p^{+} + (p^{+} + \bar{p})$$ (۳٤-۳

با توجه به قوانین بقاء برقرار است ← اصل بقای بار الکتریکی

اصل بقای جرم + انرژی ← $(m_0c^2 + K) + m_0c^2 \longrightarrow 4m_0c^2 + K_1 + K_2 + K_3 + K_4$ (ن)

اصل بقای اندازه حرکت ← $\vec{P} + 0 \longrightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4$ (ث)

درحالت کلی بدلیل رابطه برداری اندازه حرکت، حالات بسیار مختلفی موجود است. اما با توجه به اینکه می‌خواهیم مقدار انرژی K مینیمم مقدار باشد باید هر چهار بردار P، در حقیقت راستا، مساوی و هم جهت باشند.



که در این حالت انرژی مینیمم است.

برای داشتن انرژی جنبشی اولیه مینیمم، باید ۴ ذره حاصل از برخورد (که هم جرم هستند) دارای سرعتهای مساوی و هم جهت باشند.

$$\text{ن} \rightarrow \quad 2m_0c^2 + \overset{(\gamma-1)m_0c^2}{K} \longrightarrow 4m_0c^2 + 4K_1 \implies (\gamma-1)m_0c^2 = 2m_0c^2 + 4(\gamma'-1)m_0c^2$$

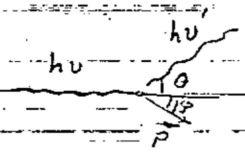
$$\text{ث} \rightarrow \quad \gamma m_0 V + 0 \longrightarrow 4(\gamma' m_0)V' \implies \gamma V = 4\gamma' V'$$

از طرفی $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ یا $V = c\sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}$

پس از انجام حل معادلات ← $\gamma = 7$, $\gamma' = 2$

(۲۷-۳

* مسأله ۲۷ + مسائل مربوط به کامپتون و فوتوالکتریک



$h\nu - h\nu' = K$ (۱۷-۳

برای یافتن حداکثر K می‌توان فرض کرد که فوتون نابود شود و تماماً تبدیل به K شود زیرا دیگر پدیده کامپتون نخواهد بود.
اما می‌دانیم که هرچه $h\nu'$ کمتر باشد، K بیشتر خواهد شد.

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

بنابراین باید ببینیم چه λ' ای است که ماکزیمم ($h\nu'$ مینیمم) خواهد شد.

$1-\cos\theta = max \Rightarrow \cos\theta = -1 \rightsquigarrow$ برخورد مرکزی

$$\Rightarrow \lambda'_{max} = \lambda + \frac{2h}{m_0 c} = \frac{\lambda m_0 c + 2h}{m_0 c}$$

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc\left[\frac{\Delta\lambda}{\lambda\lambda'}\right] = hc\left[\frac{\frac{2h}{m_0 c}}{\lambda(\lambda + \frac{2h}{m_0 c})}\right]$$

(۱۱-۵ $V_{ph} = \frac{\omega}{k}$, $V_g = \frac{d\omega}{dk}$, $\longrightarrow V_g = \frac{d\nu}{d(\frac{1}{\lambda})}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow V_g = \frac{d(2\pi\nu)}{d(\frac{2\pi}{\lambda})}$$

(۱۲-۵ رابطه رایلی $V_{ph} = u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

$$\omega = ku = k\left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} = (gk)^{1/2} \longrightarrow V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}u$$

* مسائل اصل عدم قطعیت و روابط سرعت فاز و گروه

(۲۶-٤

$r = 10^{-4}\,\mathring{A}$

$R = \mathring{A}$

فرض کنیم که الکترون بتواند در هسته حرکت کند.

اصل عدم قطعیت $\rightarrow$ $\underbrace{\Delta P\,\Delta r}_{}=\frac{h}{4\pi}$

اگر حد خطا این فرض $= 10^{-14}$

$$\Rightarrow \Delta P_{min}=\frac{h}{4\pi r}=\frac{6.63\times10^{-34}}{4\pi\times10^{-14}}$$

اندازه حرکت الکترون

$$\Rightarrow P > \Delta P_{min} \qquad , \qquad k=\frac{P^2}{2m}$$

اگر محاسبات را انجام دهیم، سرعت و انرژی الکترون بسیار زیاد می‌شود و این در حالی است که می‌دانیم حداکثر انرژی الکترون، 13.6 eV است. بنابراین، با این فرض، اصل عدم قطعیت نقض می‌شود.

(۲۸-٤ 10^{23} ذره به جرم 9×10^{-31} kg در چاه پتانسیل است. طول چاه 1^{cm} ، مجموع انرژی دستگاه ذرات در صورتی که در هر تراز دو ذره داشته باشیم.

انرژی ذره در چاه نامتناهی

$$E_n=(n^2)\left(\frac{h^2}{8ml^2}\right)$$

$$E_1=(1)\frac{(6.63\times10^{-34})^2}{8\times9.1\times10^{-31}\times10^{-4}} \rightsquigarrow E_t=10^{23}E_1$$

حال فرض کنیم برای هر حالت ذاتی دو ذره داشته باشیم:

در این حالت، تعداد ترازها به صورت $10^{23}\div2=5\times10^{22}$ خواهد بود

$$E_t=2\sum_{n=1}^{5\times10^{22}}n^2E_1$$

چون تعداد زیاد است

$$E_t=2E_1\int n^2\,dn$$

* فصل پنجم: ۲۷-۳۲-۳۵-۳۶

* فصل ششم: ۱۳ و ۲۰