الکترومغناطیس

مهندس حمید آزادیان

بسم الله الرحمن الرحیم

فصل اول:

- جبر برداري

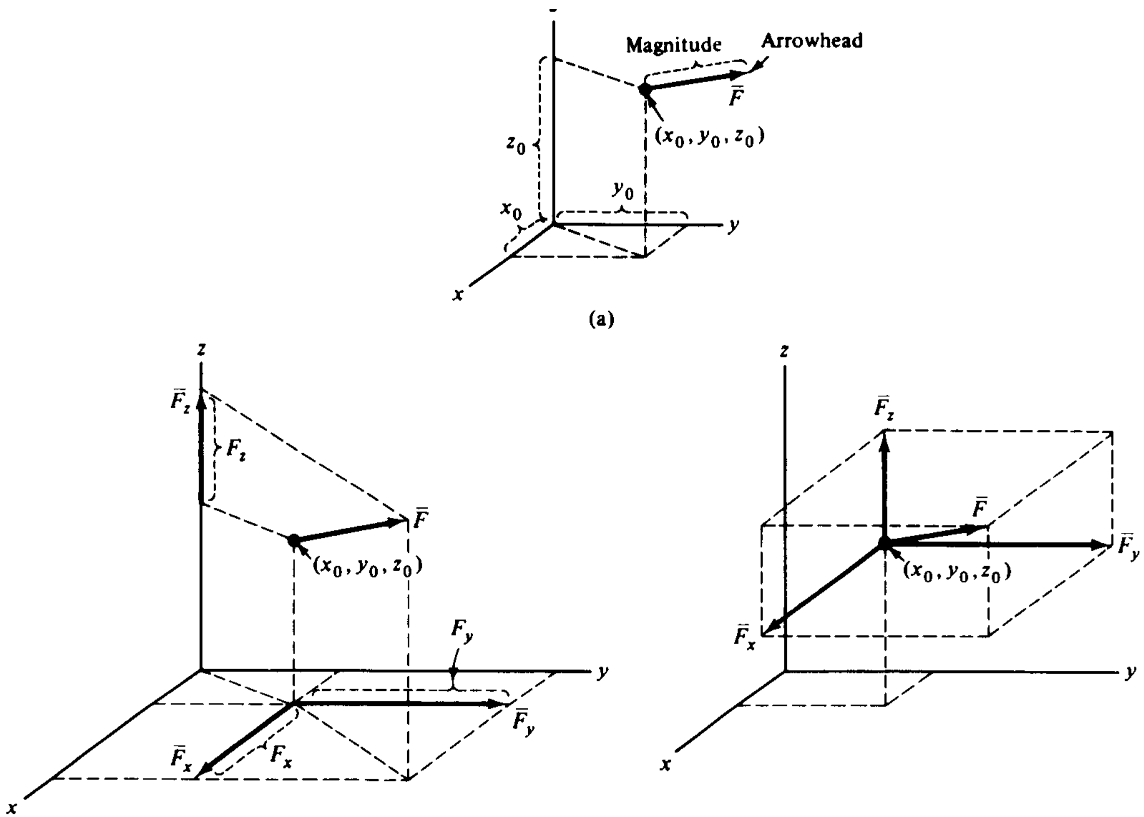
كميت هاي عددي و برداري

- اسكالر:
  - تعريف: كميتي است كه فقط داراي اندازه است،مثل؛ دما، زمان، جرم و...
  - قوانين: قوانين حاكم همان قوانين جبر اعداد حقيقي است.
- بردار:
  - تعريف:“كميتي كه اندازه و جهت دارد و از قوانين جمع برداري تبعيت مي كند.”

اسكالر	a, b, c, m, n,...
بردار	$\vec{A}, \bar{B}, \overline{C}, \overline{\overline{D}}, \hat{F}, A, B, E$

كميت هاي عددي و برداري

- نمايش:



(a)
(b)
(c)

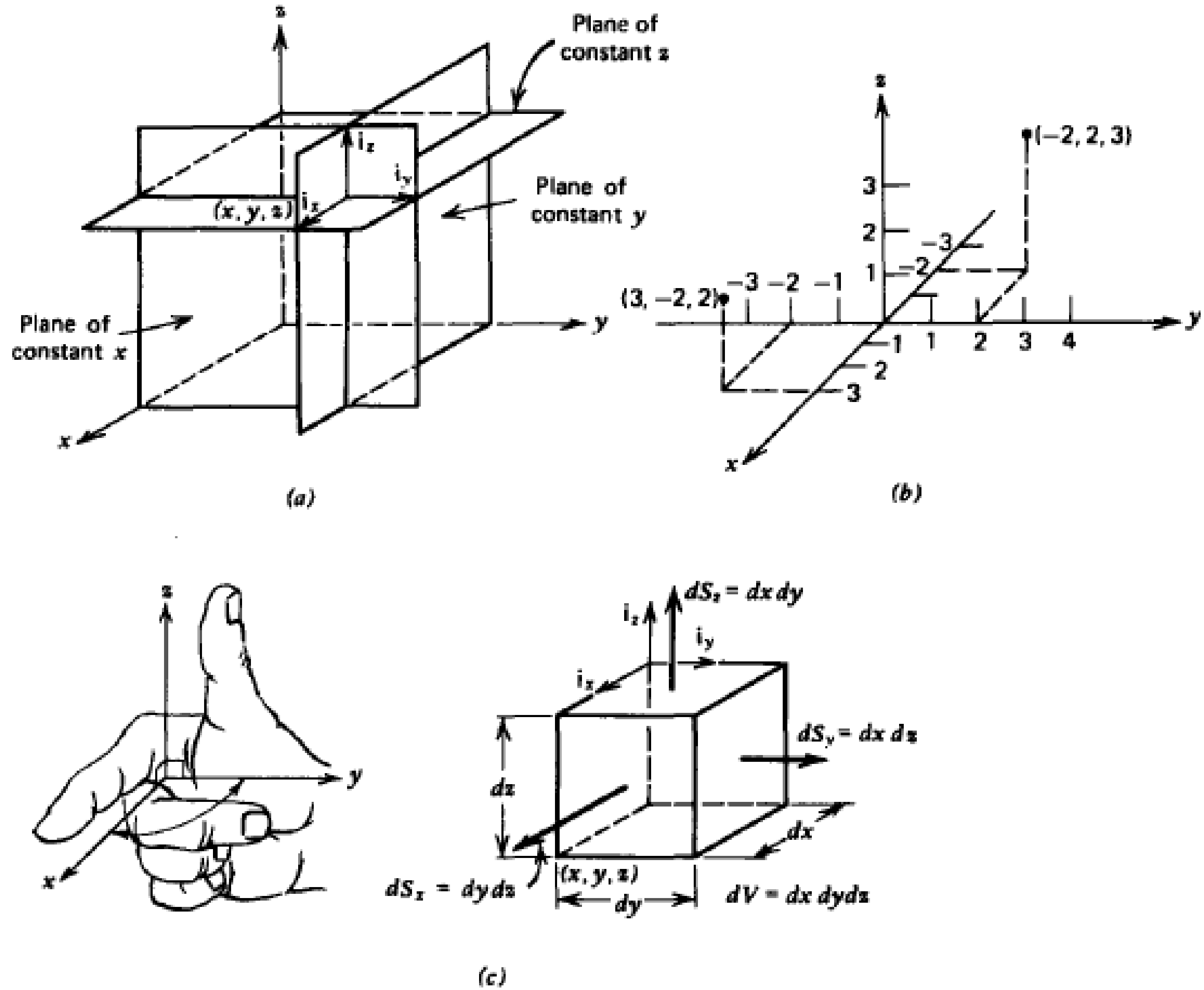


Figure 1-1 Cartesian coordinate system. (*a*) Intersection of three mutually perpendicular planes defines the Cartesian coordinates (x, y, z). (*b*) A point is located in space by specifying its x-, y- and z-directed distances from the origin. (*c*) Differential volume and surface area elements.

كميت هاي عددي و برداري

$\vec{A}$ بردار واحد بردار $= \hat{u}_A = \hat{a}_A$

$$\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

- با توجه به شكل 1,1(c) داريم:

$$\boxed{\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y + \overline{F}_z}$$

- بردار واحد (يكه):

از تقسيم بردار بر اندازه آن برداري به دست مي آيد كه طول آن واحد است و جهت آن همان جهت بردار اصلي است. به اين بردار، بردار يكه مي گوييم. واضح است كه هر بردار را مي توان حاصل ضرب اندازه بردار در بردار يكه اي دانست كه هم جهت با بردار اصلي است.

به اين ترتيب مي توانيم براي جهات مختلف در فضا يک بردار يكه نسبت بدهيم كه بدون بعد(يكا) است و هر بردار را با حاصل ضرب اندازه آن در اين بردار واحد نمايش دهيم. يكاي بردار به اندازه نسبت داده مي شود نه به بردار واحد.

کميت هاي عددي و برداري

از جملـه بردارهـاي يکـه، بردارهـايي هسـتند بـا طـول واحـد و در امتداد سـه محـور مختصـات کـارتزين، ايـن بردارهـاي يکـه بـا نمادهــاي $\hat{k}, \hat{j}, \hat{i}$ يــا $\hat{z}, \hat{y}, \hat{x}$ بــه ترتيــب در امتــدا محورهــاي z,y,xنمايش داده مي شوند.

پـس بـردار نشـان داده شـده در شـکل ۱،۱ را مـي تـوانيم بـه ايـن صورت نشان بدهيم:

$$\boxed{\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z}$$

که در آن:

$$\vec{F}_x = \hat{x}F_x, \vec{F}_y = \hat{y}F_y, \vec{F}_z = \hat{z}F_z$$

مي باشد، در اين رابطه F با انديس هاي z,y,x اندازه تصويربردار F در امتداد محورهاي سه گانـه اسـت و مـي توانند اعداد مثبت يا منفي باشند. حال مي توان نمايش ديگري براي F داشت:

$$\boxed{\bar{F} = \hat{x}F_x + \hat{y}F_y + \hat{z}F_z}$$

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}_x + A_y\mathbf{i}_y + A_z\mathbf{i}_z$$

كميت هاي عددي و برداري
نمايش گرافيكي بردارهاي يكه z,y,x

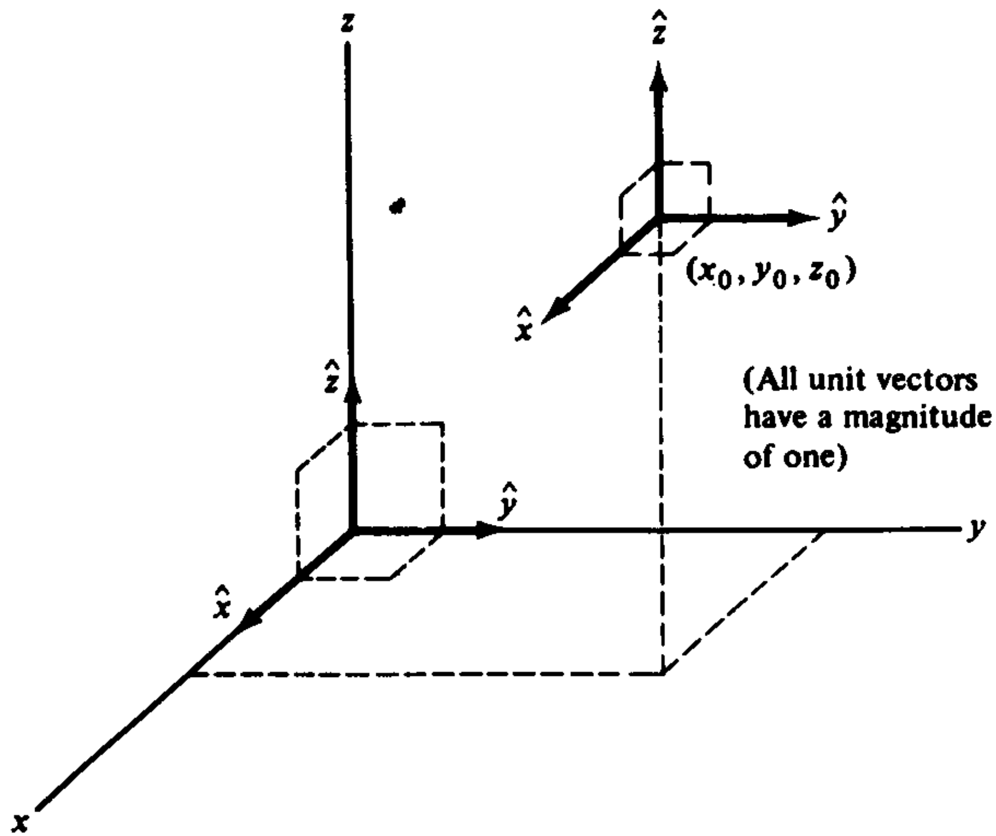


Figure 1-2 Graphical display of unit vectors $\hat{x}$, $\hat{y}$, and $\hat{z}$ at the origin and point (x_0, y_0, z_0) of a rectangular coordinate system.

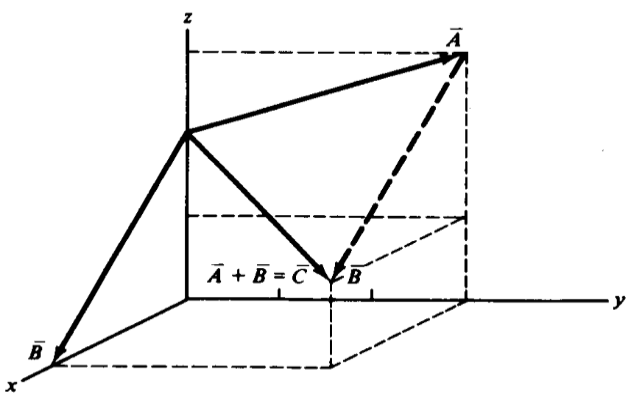
جمع و تفریق بردارها

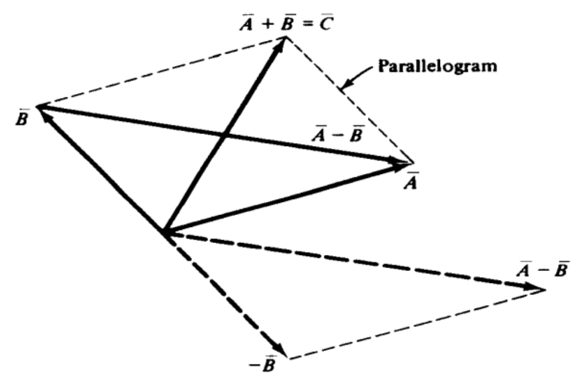
$$\boxed{\overline{A} + \overline{B} = (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) + (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z) = \overline{C}}$$

$$\boxed{\overline{A} + \overline{B} = \hat{x}(A_x + B_x) + \hat{y}(A_y + B_y) + \hat{z}(A_z + B_z) = \overline{C}}$$

$$C_x = (A_x + B_x), \qquad C_y = (A_y + B_y), \qquad C_z = (A_z + B_z)\,.$$

$$\boxed{\overline{A} - \overline{B} = \overline{A} + (-\overline{B}) = \hat{x}(A_x - B_x) + \hat{y}(A_y - B_y) + \hat{z}(A_z - B_z)}$$





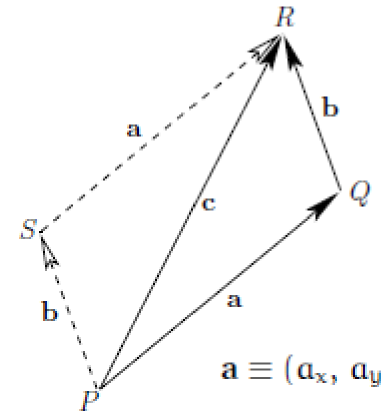
$\vec{F}$ اندازه بردار $= F = \left|\vec{F}\right|$

$$A = |\mathbf{A}| = [A_x^2 + A_y^2 + A_z^2]^{1/2}$$

$$\vec{A} = A_1\hat{a}_1 + A_2\hat{a}_2 + A_3\hat{a}_3$$

$$\vec{B} = B_1\hat{a}_1 + B_2\hat{a}_2 + B_3\hat{a}_3$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1)\hat{a}_1 + (A_2 + B_2)\hat{a}_2 + (A_3 + B_3)\hat{a}_3$$

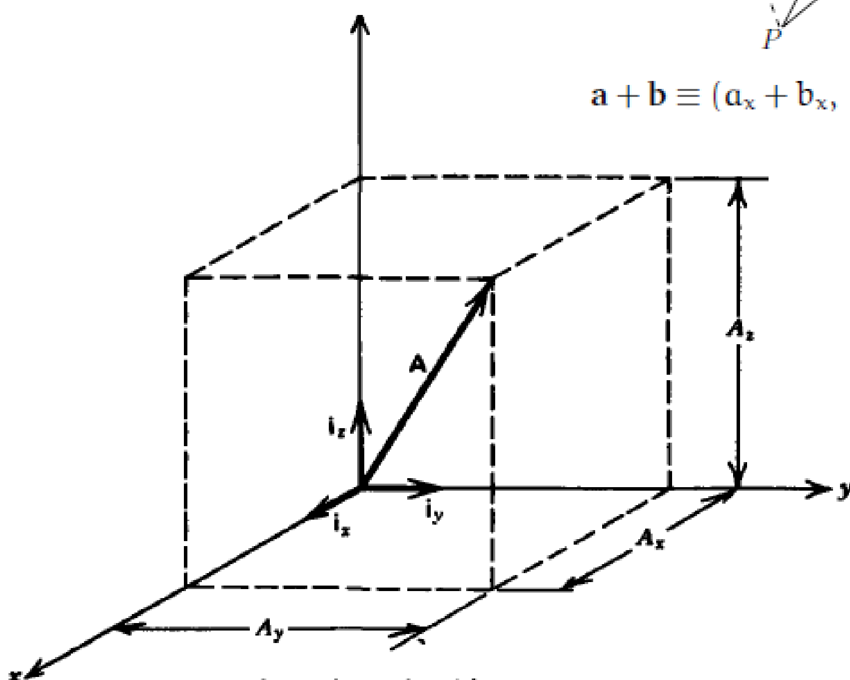


$$\mathbf{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \equiv (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

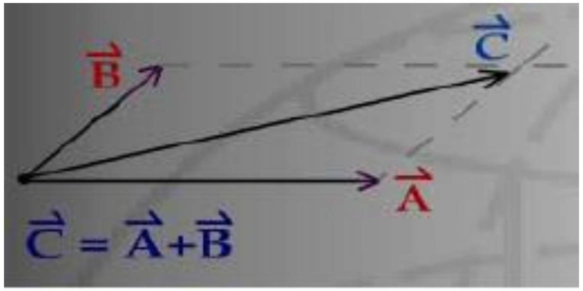


$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}_x + A_y\mathbf{i}_y + A_z\mathbf{i}_z$$

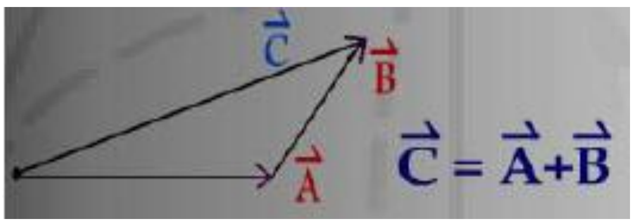
$$|\mathbf{A}| = A = [A_x^2 + A_y^2 + A_z^2]^{1/2}$$

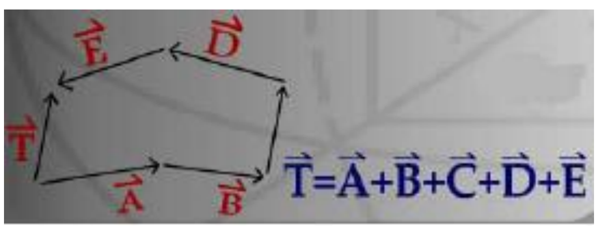
از نظر گرافيكي (هندسي) جمع چند بردار به دو روش انجام مي‌گيرد:

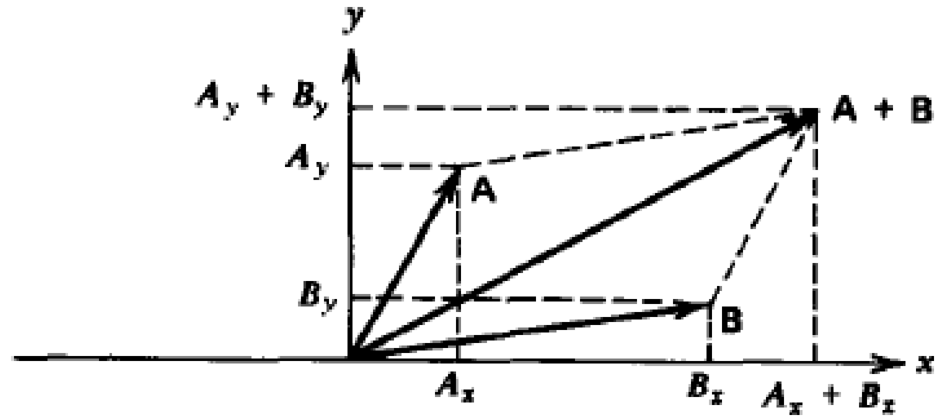
روش اول تشكيل متوازي‌الاضلاع است.

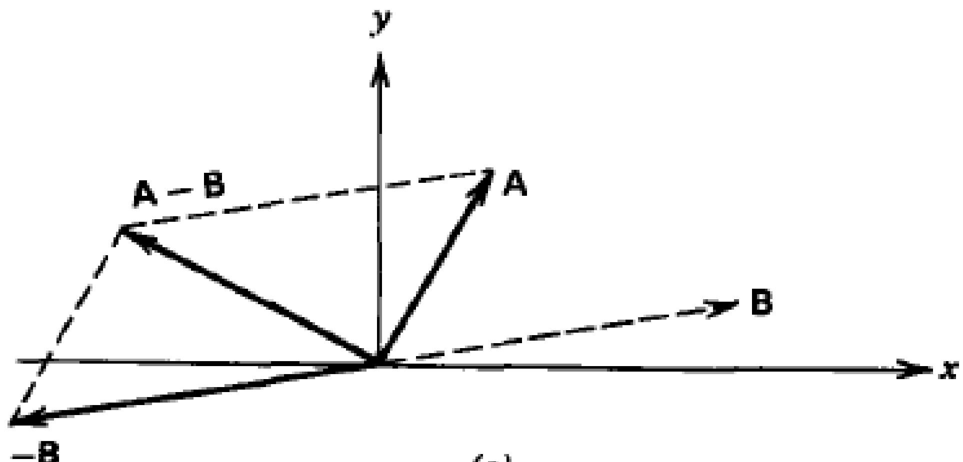


روش دوم روش چند ضلعي يا روش سربه‌دم است.

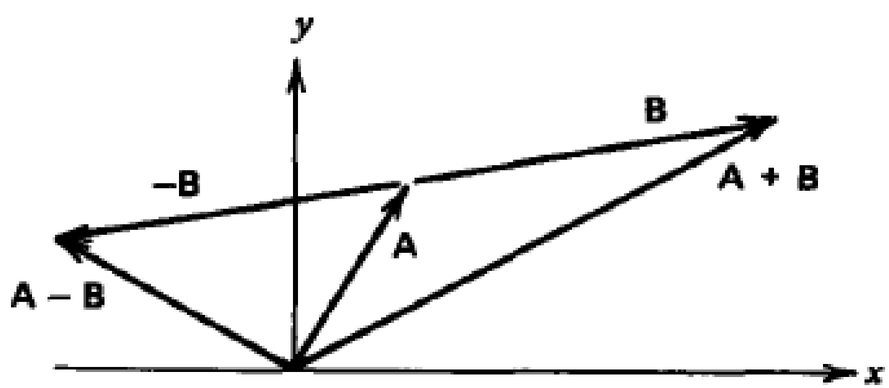




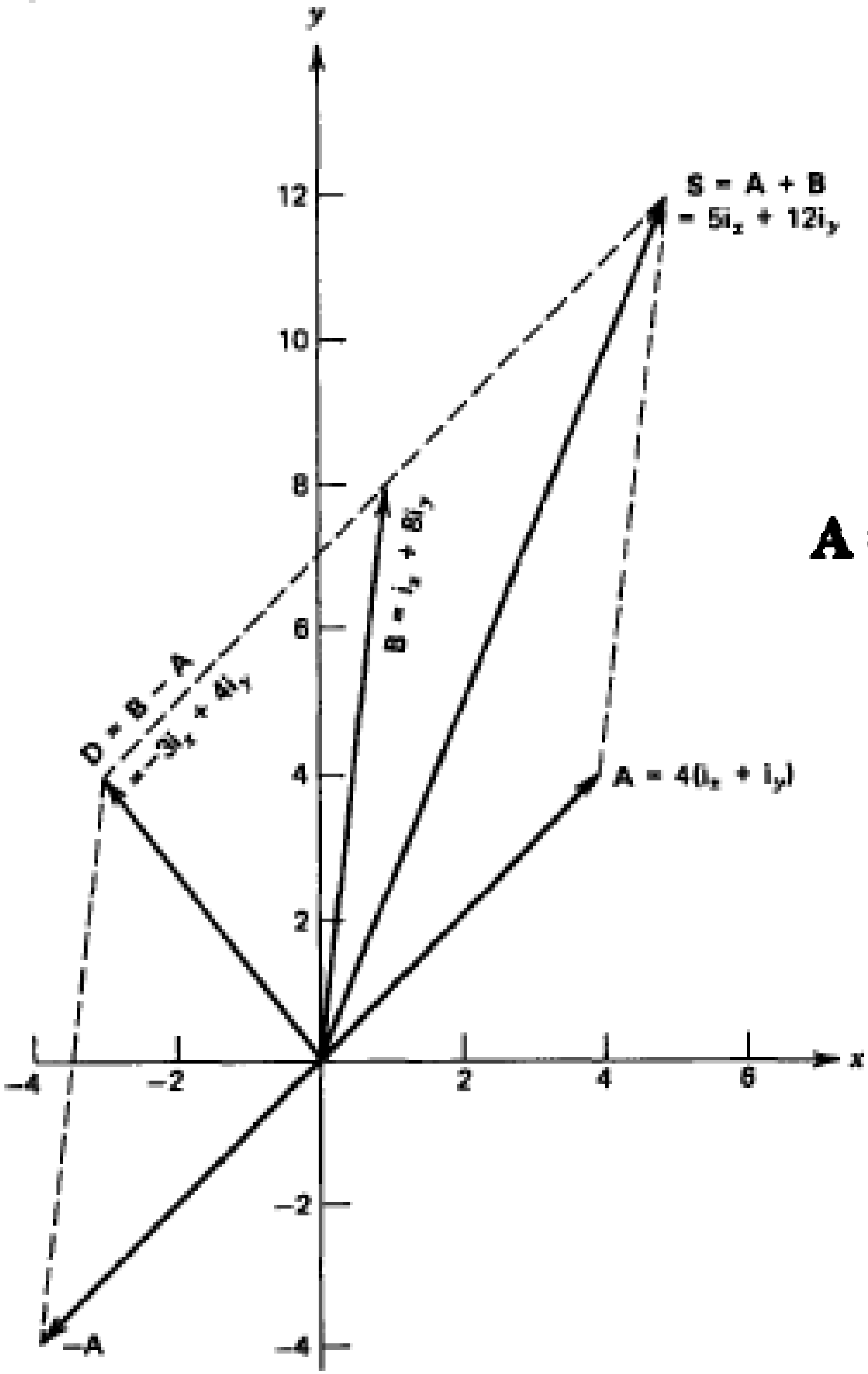




(a)



(b)



$$\mathbf{A} = 4\mathbf{i}_x + 4\mathbf{i}_y, \quad \mathbf{B} = \mathbf{i}_x + 8\mathbf{i}_y$$

مسائل

۱. اگر $\vec{A}-\vec{B}$ و $\vec{A}+\vec{B}$ را داشته باشیم، چگونه مي توانيم دو بردار A و B را بيابيم.

- پاسخ:

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B} \text{ و } \vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$$

$$\therefore C_x = A_x + B_x \text{ و } D_x = A_x - B_x$$

$$C_x + D_x = 2A_x \Rightarrow A_x = \frac{C_x + D_x}{2}$$

$$C_x - D_x = -2B_x \Rightarrow B_x = \frac{D_x - C_x}{2}$$

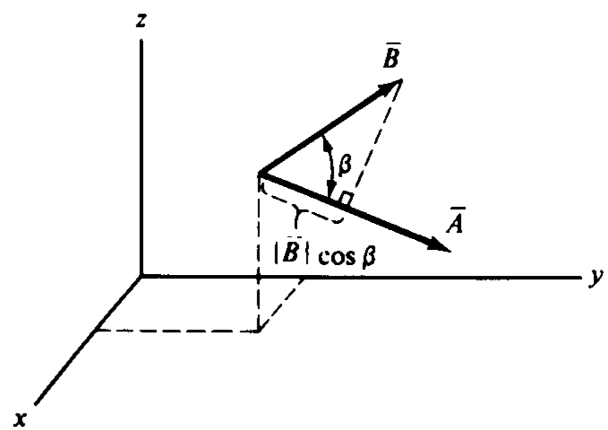
و به اين ترتيب بقيه مؤلفه ها را مي توان يافت.

ضرب بردارها
ضرب عددي

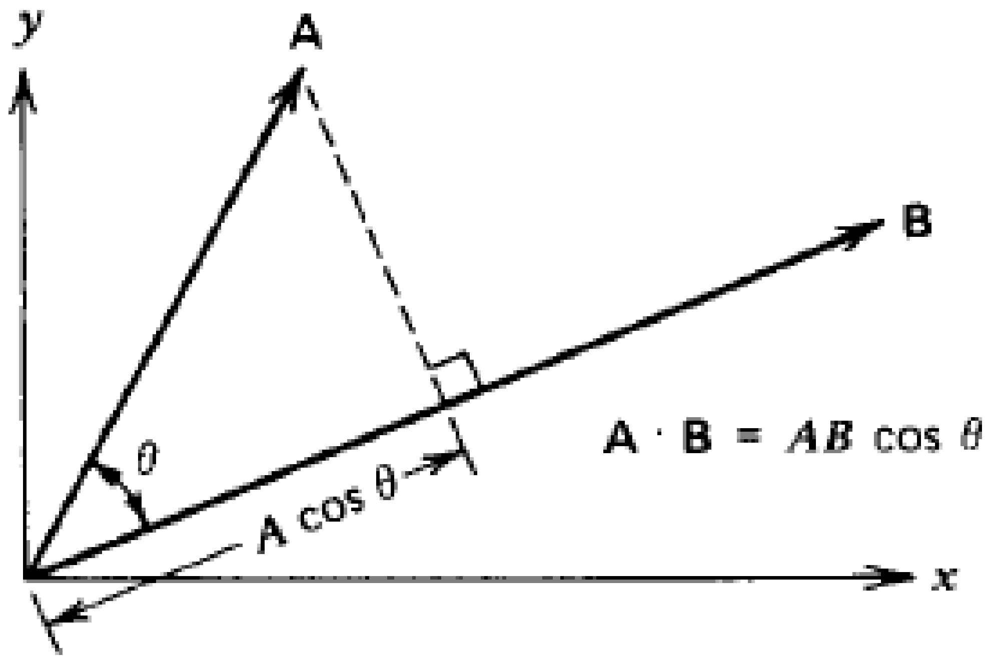
$$\boxed{\overline{A} \bullet \overline{B} \triangleq |\overline{A}|\,|\overline{B}| \cos \beta_{\overline{A}}^{\overline{B}} \quad \text{(smallest)}}$$

- مثالي كه براي حاصل ضرب عددي يا داخلي كاربرد زيادي دارد، كار انجام شده توسط نيروي F در مسافت l است.

$$\text{work} = |\overline{F}|\,|\overline{\ell}| \cos \beta = \overline{F} \bullet \overline{\ell} \qquad \text{(J)}$$

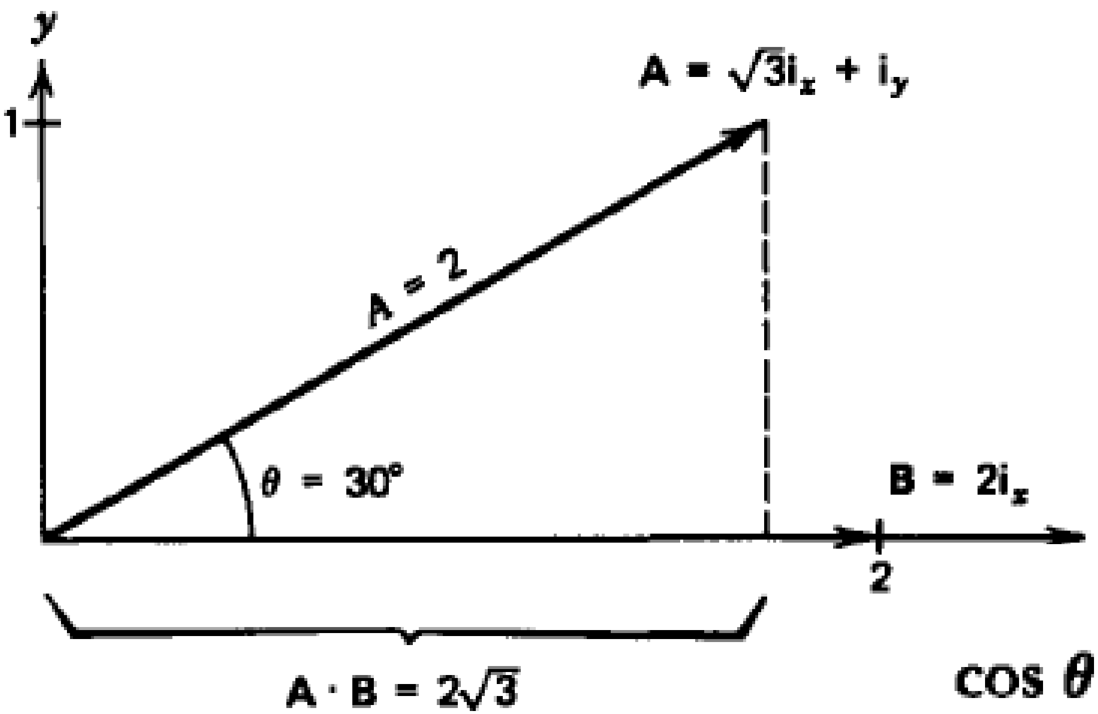


$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$



$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$$

$$\mathbf{A} = \sqrt{3}\,\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{B} = 2\mathbf{i}_x$$



$$\cos\theta = \frac{A_x B_x}{[A_x^2 + A_y^2]^{1/2} B_x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$$

ضرب بردارها
ضرب عددي

- با توجه به تعريف اين ضرب، مي توان نوشت $\overline{B} \cdot \overline{A} = |\overline{B}||\overline{A}| \cos \beta$

و از آنجا خاصيت جابجايي براي حاصل ضرب داخلي اثبات مي شود.

$$\boxed{\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{B} \cdot \overline{A}}$$

- و با روش ترسيم به سادگي خاصيت توزيع پذيري قابل اثبات است:

$$\boxed{\overline{A} \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C}}$$

- و روابط زير را خيلي سريع مي توان از اين روابط به دست آورد:

$$\begin{aligned}(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n) \cdot (\overline{B}_1 + \overline{B}_2 + \ldots + \overline{B}_m) &= \overline{A}_1 \cdot \overline{B}_1 + \overline{A}_1 \cdot \overline{B}_2 + \ldots + \overline{A}_1 \cdot \overline{B}_m + \ldots \\ &\quad + \overline{A}_n \cdot \overline{B}_1 + \overline{A}_n \cdot \overline{B}_2 + \ldots + \overline{A}_n \cdot \overline{B}_m\end{aligned}$$

ضرب بردارها

ضرب عددي

- بردارهاي يکه
- و بر حسب مؤلفه ها:

$$\hat{x}\bullet\hat{x} = \hat{y}\bullet\hat{y} = \hat{z}\bullet\hat{z} = 1$$
$$\hat{x}\bullet\hat{y} = \hat{x}\bullet\hat{z} = \hat{y}\bullet\hat{z} = 0$$

$$\mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_x = 1, \quad \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_y = 0$$
$$\mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_y = 1, \quad \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_z = 0$$
$$\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_z = 1, \quad \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_z = 0$$

$$\overline{A}\bullet\overline{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

- تصوير بردار Bروي بردار A

$$|\overline{B}|\cos\beta = \frac{\overline{A}\bullet\overline{B}}{|\overline{A}|}$$

- مثال۱: نيروي $\overline{F} = (\hat{x}5 + \hat{y}2 - \hat{z}2)\ (\mathrm{N})$ روي ذره اي اثر کرده و آن را به اندازه $\overline{\ell} = (\hat{x}3 + \hat{y}3 - \hat{z}4)\ (\mathrm{m})$ جابجا مي کند. کار انجام شده توسط اين نيرو را بر روي ذره پيدا کنيد.
- پاسخ: $W = \overline{F}\bullet\overline{\ell} = (\hat{x}5 + \hat{y}2 - \hat{z}2)\bullet(\hat{x}3 + \hat{y}3 - \hat{z}4) = (15 + 6 + 8) = 29 \quad (\mathrm{J})$

ضرب بردارها
ضرب عددي

- مثال۲: تصوير عددي بردار $\overline{A} = \hat{x}10 + \hat{y}2 + \hat{z}2$ روي بردار $\overline{B} = \hat{x}4 - \hat{z}3$ بيابيد.

پاسخ:

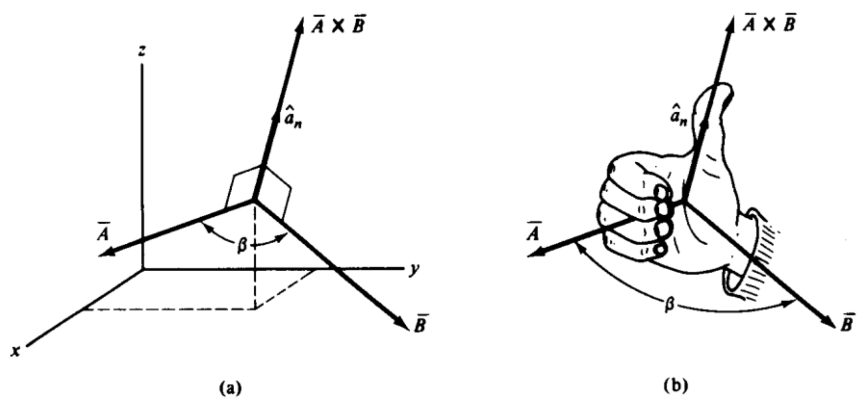
$$|\overline{A}|\cos\beta = \frac{\overline{A}\bullet\overline{B}}{|\overline{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{1/2}} = \frac{34}{5} = 6.8$$

ضرب بردارها
ضرب برداري

- تعريف:

$$\overline{A} \times \overline{B} \triangleq \hat{a}_n |\overline{A}|\,|\overline{B}| \sin \beta_{\overline{A}}^{\overline{B}} \quad \text{(smallest)}$$

- a_n بردار يكه عمود بر صفحه دو بردار است
- حاصل ضرب يک بردار است كه بر صفحه دو بردار عمود است

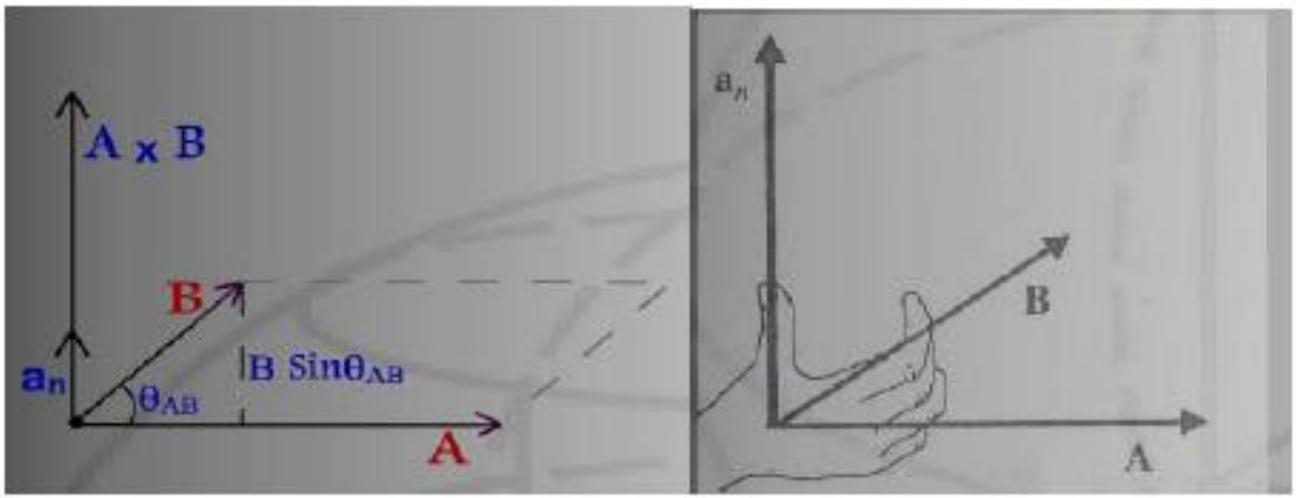


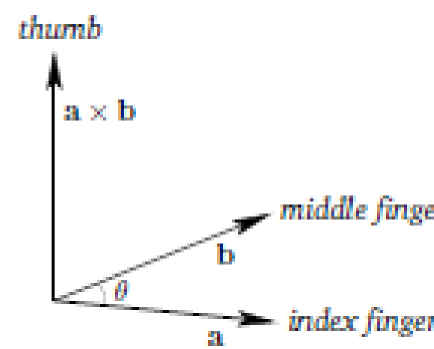
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = \left|\vec{C}\right| = AB\sin\theta_{AB}$$

θ_{AB} کوچکترین زاویه بین $\vec{A},\vec{B}$ است که بردار $\vec{A}$ را در امتداد بردار $\vec{B}$ قرار مي‌دهد.

جهت بردار $\vec{C}$ بر دو بردار $\vec{A},\vec{B}$ عمود است و طبق قانون دست راست بدست مي‌آيد.





ضرب بردارها
ضرب برداري

- از تعريف a_n تعريف معلوم مي شود:

$$\boxed{\overline{A} \times \overline{B} = -\overline{B} \times \overline{A}}$$

- قانون توزيع پذيري را خواهيم داشت

$$\boxed{\overline{A} \times (\overline{B} + \overline{C}) = \overline{A} \times \overline{B} + \overline{A} \times \overline{C}}$$

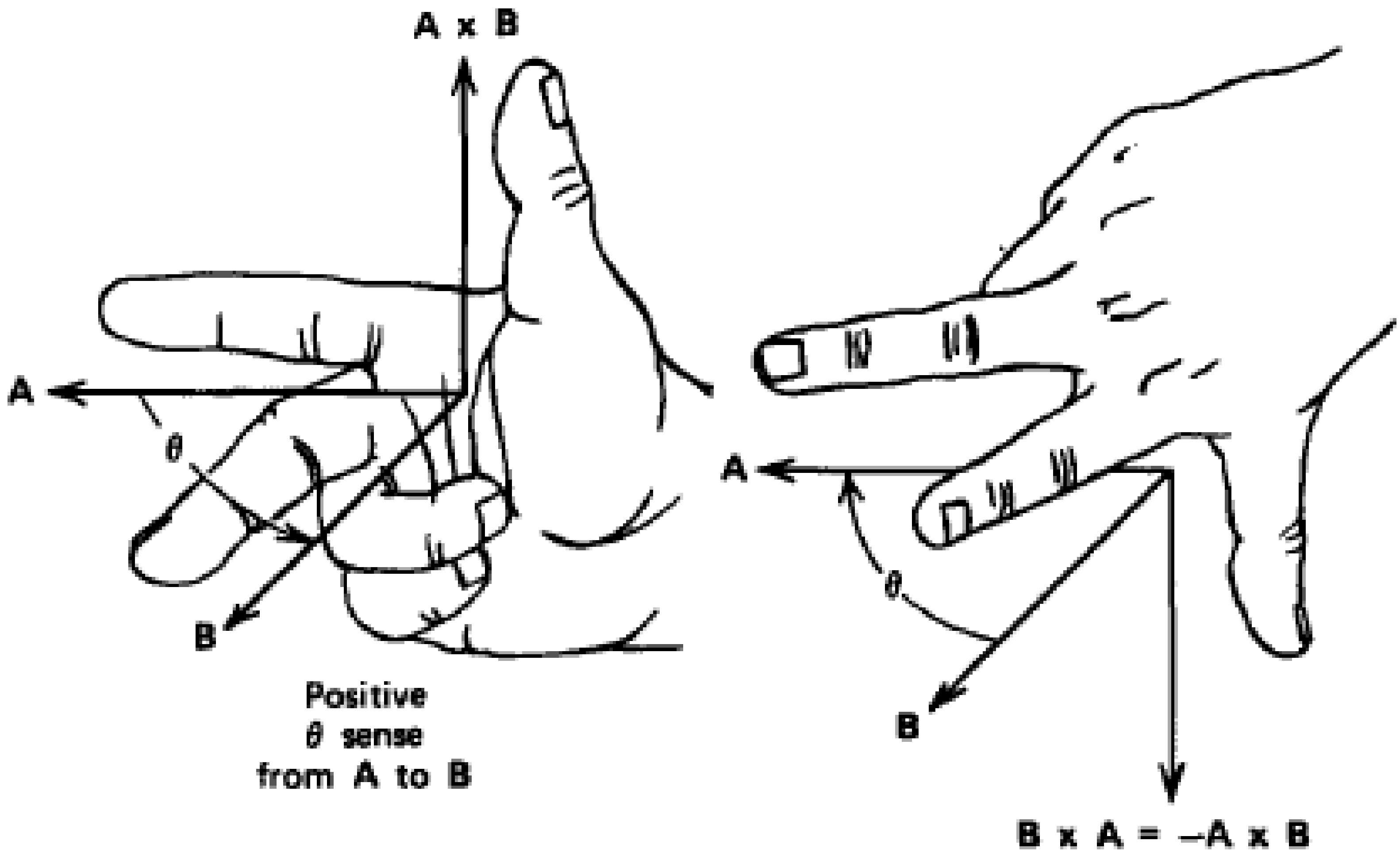
- براي بردارهاي يكه داريم:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0 & & \\ \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, & \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}, & \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \\ \hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}, & \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}, & \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x} \end{array}}$$

- در نتيجه:

$$\begin{aligned} \overline{A} \times \overline{B} &= (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \times (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z) \\ &= \hat{x} \times \hat{x}A_xB_x + \hat{x} \times \hat{y}A_xB_y + \hat{x} \times \hat{z}A_xB_z \\ &+ \hat{y} \times \hat{x}A_yB_x + \hat{y} \times \hat{y}A_yB_y + \hat{y} \times \hat{z}A_yB_z \\ &+ \hat{z} \times \hat{x}A_zB_x + \hat{z} \times \hat{y}A_zB_y + \hat{z} \times \hat{z}A_zB_z \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$



(a) *(b)*

$$\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_x = 0, \qquad \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y = \mathbf{i}_z, \qquad \mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_x = -\mathbf{i}_z$$

$$\mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_y = 0, \qquad \mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_x, \qquad \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_y = -\mathbf{i}_x$$

$$\mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_z = 0, \qquad \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_x = \mathbf{i}_y, \qquad \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_z = -\mathbf{i}_y$$

$$\underline{x\,y\,z}\,x\,\underline{y\,z\,x}\,y\,\underline{z\,x\,y}\,z\,\cdots$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x\mathbf{i}_x + A_y\mathbf{i}_y + A_z\mathbf{i}_z) \times (B_x\mathbf{i}_x + B_y\mathbf{i}_y + B_z\mathbf{i}_z)$$

$$= \mathbf{i}_x(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{i}_y(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{i}_z(A_xB_y - A_yB_x)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}_x(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{i}_y(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{i}_z(A_xB_y - A_yB_x)$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z, \quad \mathbf{B} = \mathbf{i}_x - \mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z$$

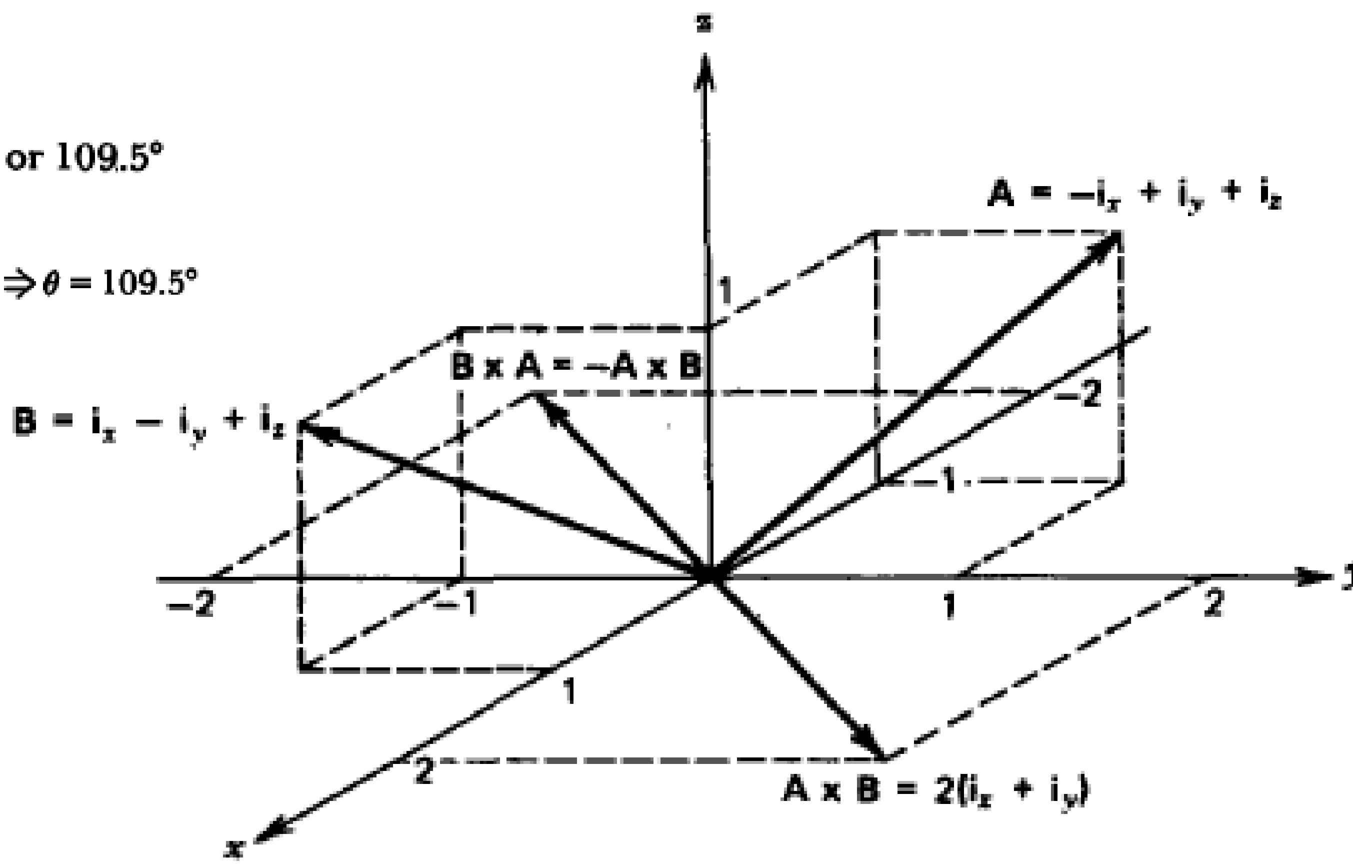
What is the angle between **A** and **B**?

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \det\begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y)$$

$$\mathbf{i}_n = \frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y)$$

$$\sin\theta = \frac{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \theta = 70.5° \text{ or } 109.5°$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\tfrac{1}{3} \Rightarrow \theta = 109.5°$$



ضرب بردارها
ضرب سه گانه عددي

- تعريف:

$$\boxed{\bar{A} \times \bar{B} \cdot \bar{C}}$$

- ترتيب رعايت شده به اين صورت است

$$\boxed{\bar{A} \times \bar{B} \cdot \bar{C} = (\bar{A} \times \bar{B}) \cdot C}$$

- بر اساس دترمينان خواهيم داشت:

$$\boxed{(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}}$$

- كه از آن همان قاعده دايره اي (ABCABC...) بـه دست مـي آيد و در نتيجه :

$$\begin{aligned}(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} &= \bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B} \cdot (\bar{C} \times \bar{A}) \\ &= (\bar{B} \times \bar{C}) \cdot \bar{A} = \bar{C} \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = (\bar{C} \times \bar{A}) \cdot \bar{B}\end{aligned}$$

- تكليف: رابطه بالا را به دست آوريد.

ضرب بردارها
ضرب سه گانه برداري

- تعريف:

$$\boxed{(\overline{A} \times \overline{B}) \times \overline{C}}$$

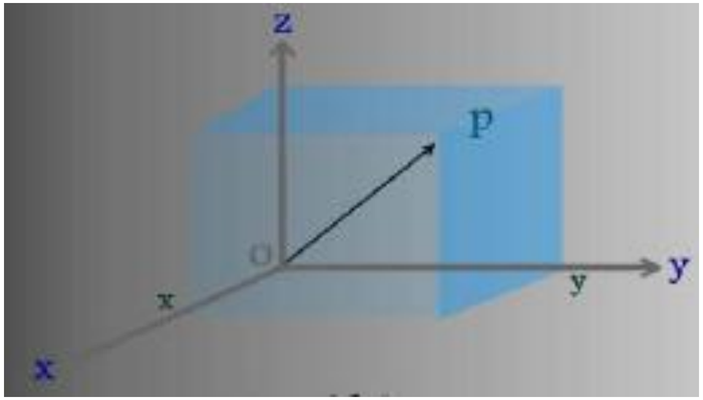
- بايد دقت كرد كه:

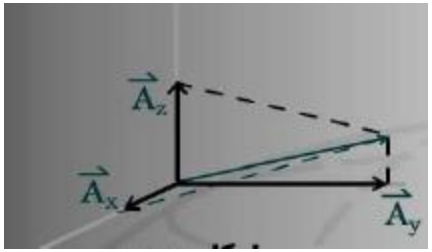
$$\boxed{(\overline{A} \times \overline{B}) \times \overline{C} \neq \overline{A} \times (\overline{B} \times \overline{C})}$$

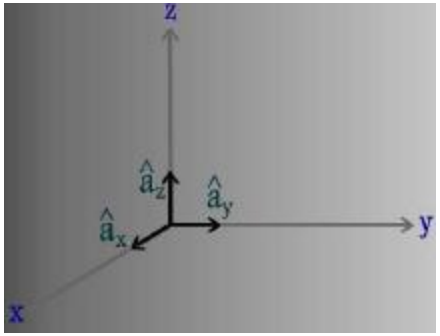
$$\boxed{(\overline{A} \times \overline{B}) \times \overline{C} = \overline{B}(\overline{C} \cdot \overline{A}) - \overline{A}(\overline{C} \cdot \overline{B})}$$

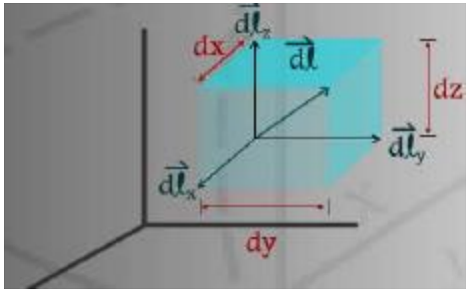
- تكليف: رابطه بالا را اثبات كنيد:

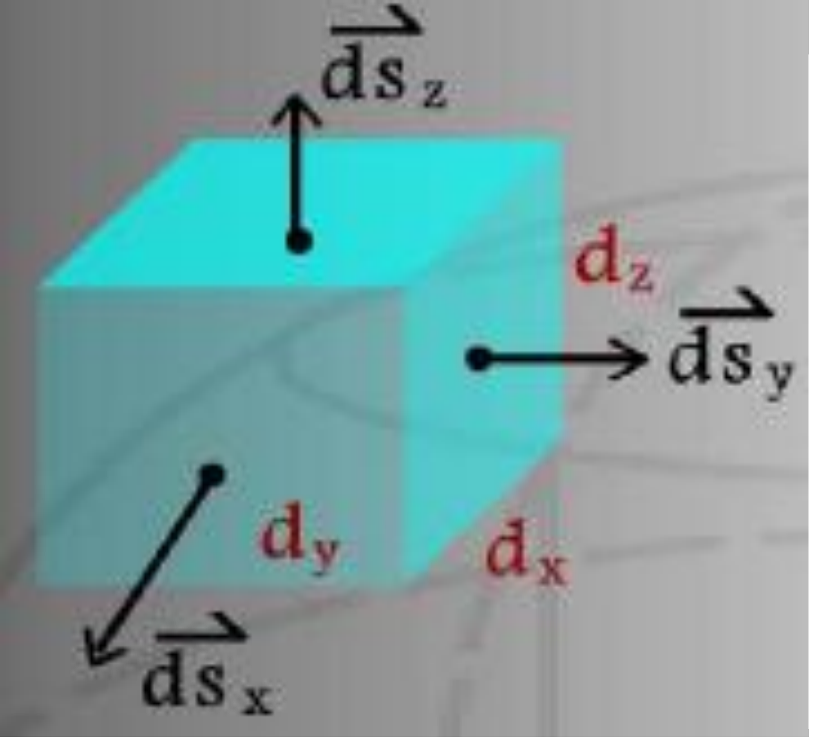
دستگاه مختصات مستطيلي











$$d\bar{s} = d\bar{s}_x + d\bar{s}_y + d\bar{s}_z$$

$$d\bar{s} = \hat{a}_x dydz \quad , \quad ds_x = dydz$$

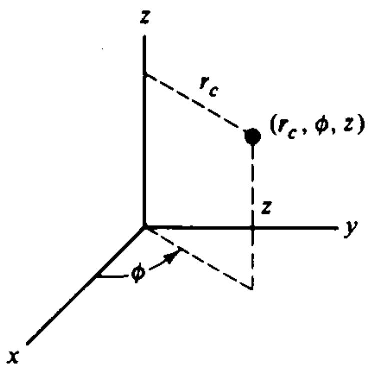
$$d\bar{s}_y = \hat{a}_y dxdz \quad , \quad ds_y = dxdz$$

$$d\bar{s}_z = \hat{a}_z dxdy \quad , \quad ds_z = dxdy$$

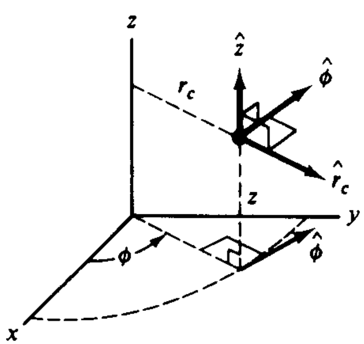
$$d\bar{s} = \hat{a}_x dydz + \hat{a}_y dxdz + \hat{a}_z dxdy$$

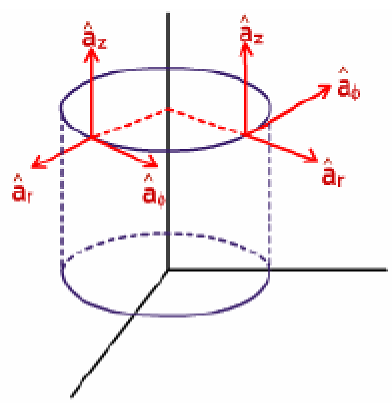
سيستم مختصات استوانه اي

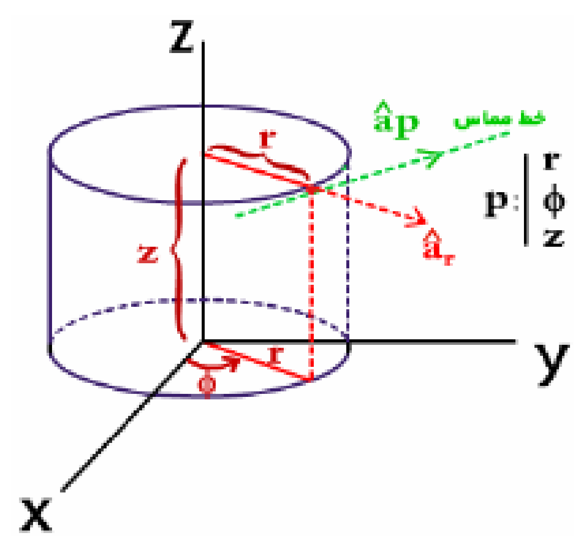
- چنانچه در شکل پيداست، يک نقطه در سيستم مختصات استوانه اي با سه متغير r_c، ϕ و z نمايش داده مي شود.
- برد متغيرها: $r_c \geqq 0,$ $0 \leqq \phi < 2\pi,$ and $-\infty < z < +\infty.$



- بردارهاي يکه $\hat{r}_c, \hat{\phi},$ and $\hat{z},$ دوبه دو برهم عمودند







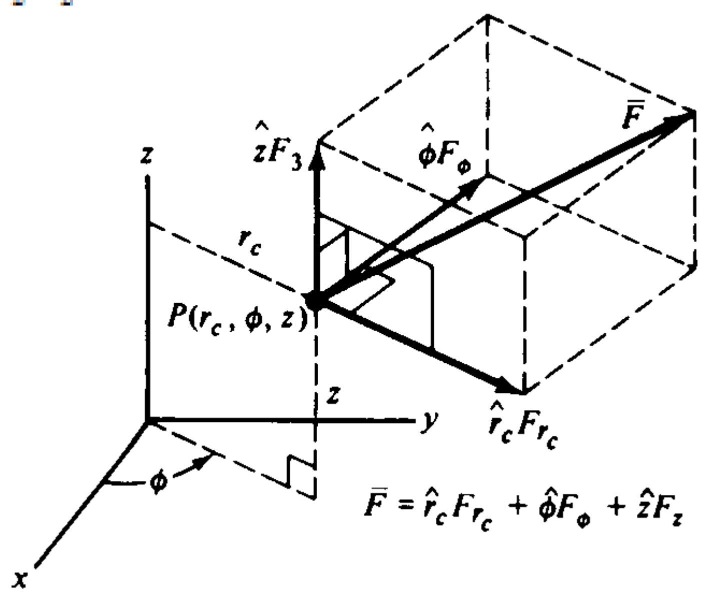
سيستم مختصات استوانه اي

- اندازه بردار F طبق تعريف از رابطه زير به دست مي آيد:

$$|\bar{F}| = F = (F_{r_c}^2 + F_\phi^2 + F_z^2)^{1/2}$$

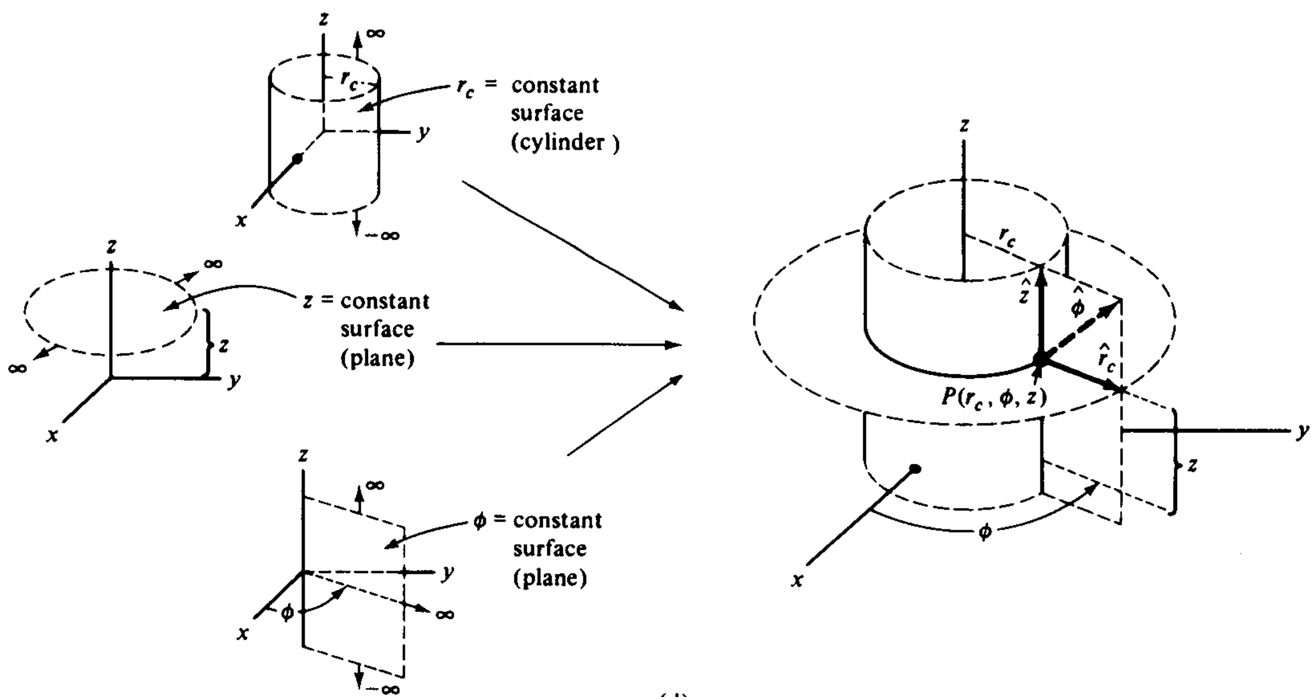
$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\varphi \hat{a}_\varphi + A_z \hat{a}_z$$

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_\varphi^2 + A_z^2}$$



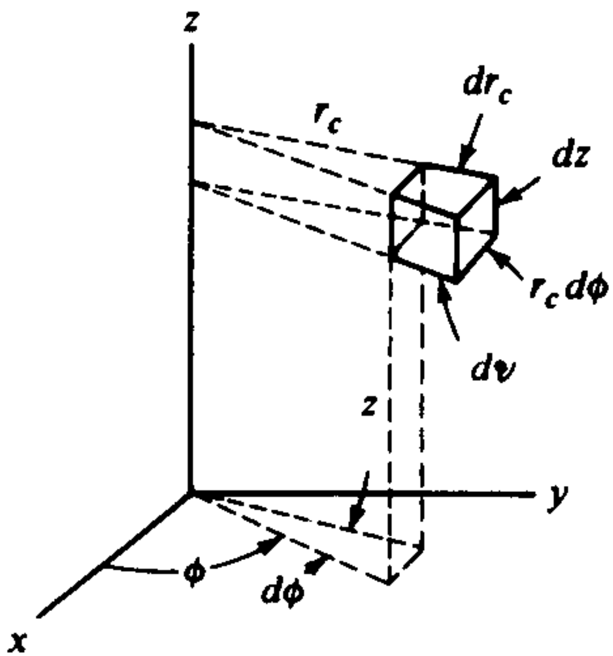
سيستم مختصات استوانه اي

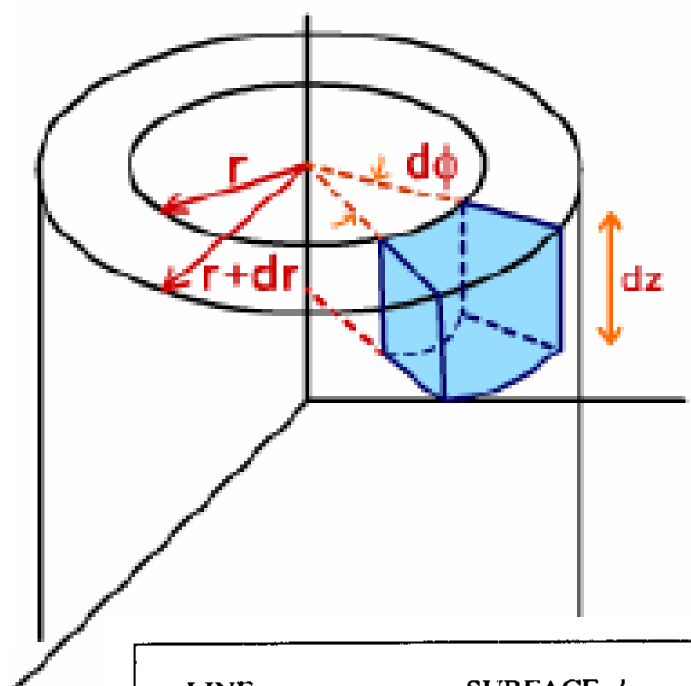
- با ثابت نگه داشتن متغيرها سطوح مختلف استوانه رسم مي شود:



سيستم مختصات استوانه اي

- المان هاي خط، سطح و حجم به شكل زير تعريف مي شود:





LINE	SURFACE ds	VOLUME dv
dr_c	$(dr_c)(r_c d\phi)$	
$(r_c d\phi)$	$(dr_c)(dz)$	$(dr_c)(r_c d\phi)(dz)$
dz	$(dz)(r_c d\phi)$	

سيستم مختصات استوانه اي

- طـول مسير بـرداري dl در يـک مسـير عـام بـه ايـن شـکل تعريف مي شود:

$$\overline{d\ell} = \hat{r}_c dr_c + \hat{\phi} r_c d\phi + \hat{z}\, dz$$

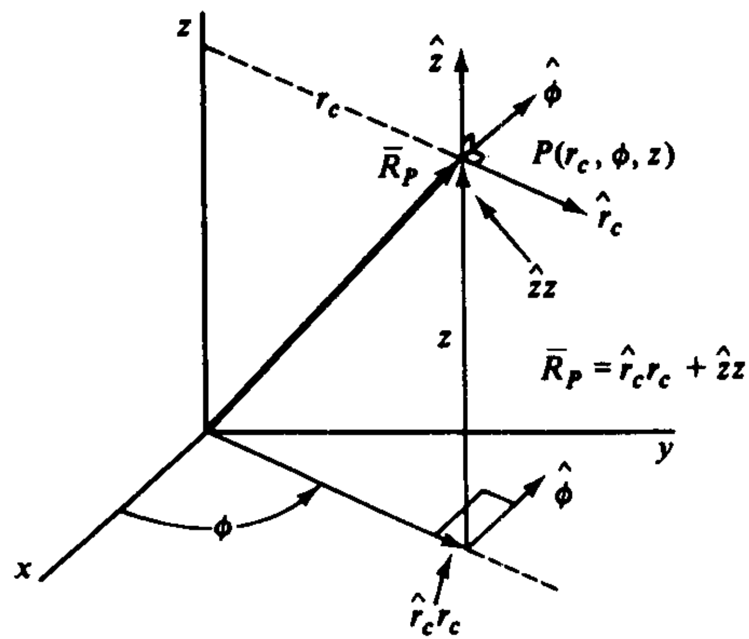
- بـا توجـه بـه شـکل مـي تـوان، بـراي بردارهـاي يکـه دسـتگاه مختصات استوانه اي را بـر اسـاس بردارهـاي يکـه کـارتزين با اين روابط به هم مرتبط ساخت:

$$\hat{r}_c = \hat{r}_c(\phi) = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$$
$$\hat{\phi} = \hat{\phi}(\phi) = \hat{x}(-\sin\phi) + \hat{y}\cos\phi$$

سيستم مختصات استوانه اي

- و در نهايت بردار R_p ،مکان يک ذره، در دستگاه مختصات استوانه اي به صورت زير نمايش داده مي شود:

$$\boxed{\overline{R}_{p(\text{cyl})} = \hat{r}_c r_c + \hat{z} z}$$

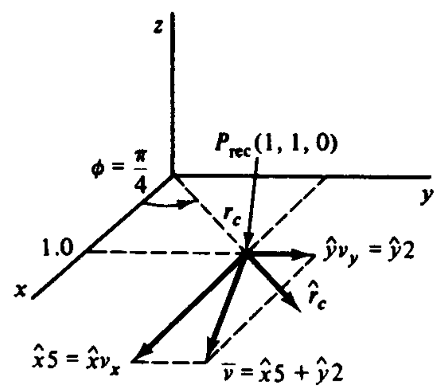


سيستم مختصات استوانه اي

- مثال۱: بردار سرعت $\bar{v} = (\hat{x}5x^2 + \hat{y}2y^2 - \hat{z}4z^2)\ (\mathrm{m\ s^{-1}})$ را در مکان $P_{rec}(1, 1, 0)$ داريم. تصوير سرعت v را روي بردار يکه r_c بيابيد.

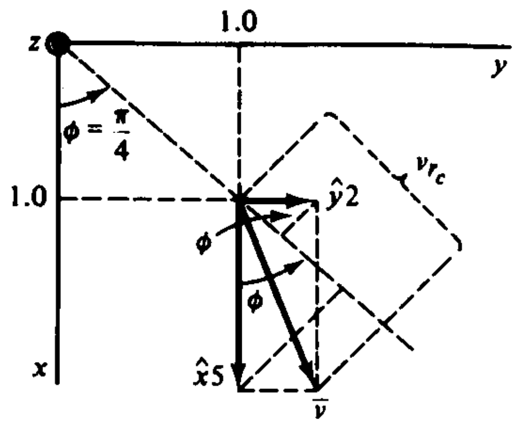
حل:براي حل به صورت ترسيمي، ابتدا بردار سرعت را در نقطه داده شده برآورد و رسم مي کنيم.

$$\bar{v}\,|_{(1,1,0)} = (\hat{x}5 + \hat{y}2) \quad (\mathrm{m\ s^{-1}})$$



سیستم مختصات استوانه اي

- وچنانچه در تصویر آمده است مي توانیم تصویر v را بر روي r_c پیدا نماییم.

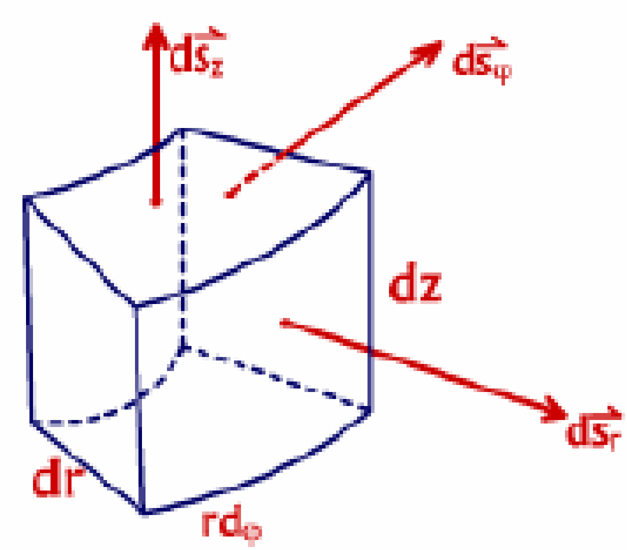


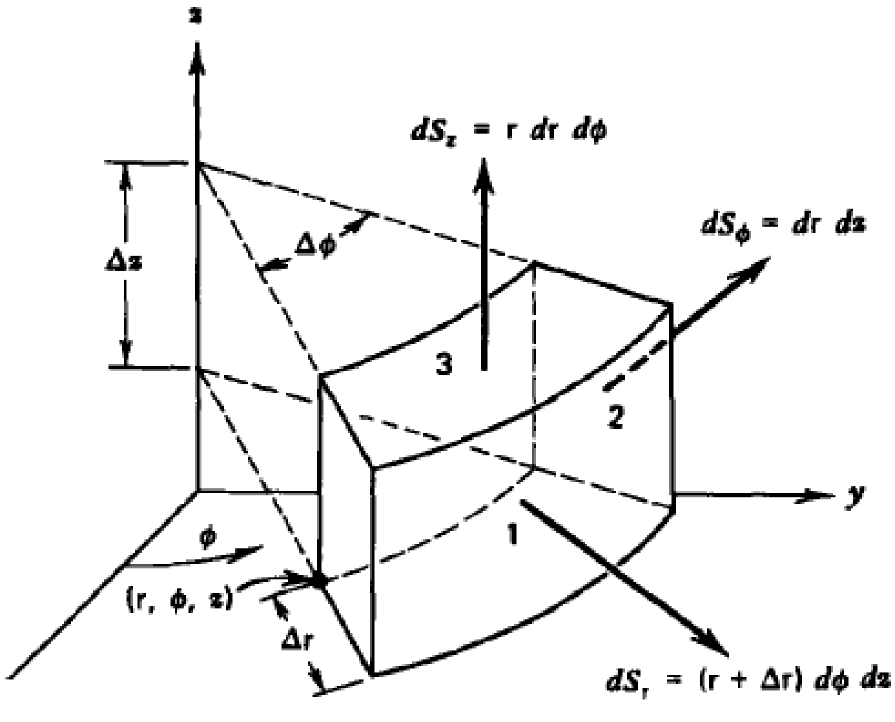
$$\text{projection} = v_{r_c} = (5\cos\phi + 2\sin\phi)\big|_{\phi=\pi/4} = 4.95\ \text{m}\ s^{-1}$$

- و با حاصل ضرب داخلي هم داریم:

$$\overline{v} \bullet \hat{r}_c\big|_{\phi=\pi/4} = v_{r_c} = (\hat{x}5 + \hat{y}2) \bullet (\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi)\big|_{\phi=\pi/4}$$
$$\text{projection} = (5\cos\phi + 2\sin\phi)\big|_{\phi=\pi/4} = 4.95\ (\text{m}\ s^{-1})$$

بردارهاي ديفرانسيلي سطحي





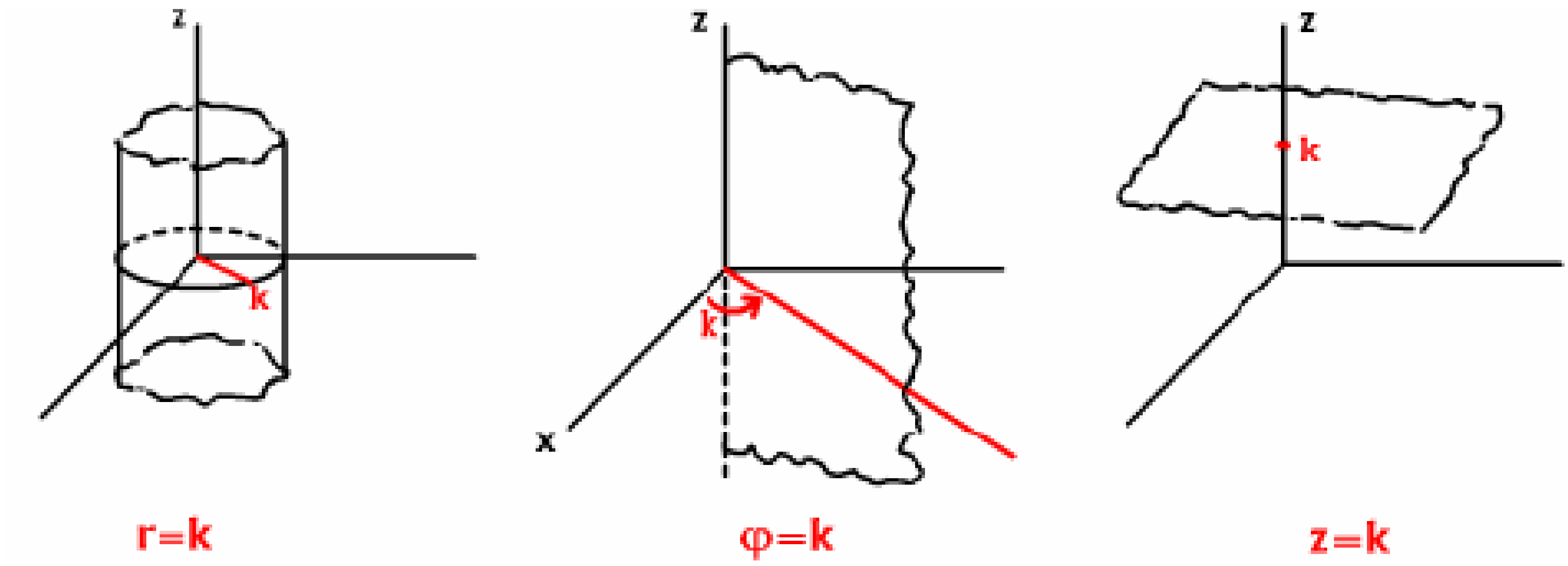
(a)

$$d\bar{s} = d\bar{s}_r + d\bar{s}_\varphi + d\bar{s}_z$$

$$d\bar{s}_r = \hat{a}_r r d\varphi dz \quad , \quad ds_r = rd\varphi \times dz$$

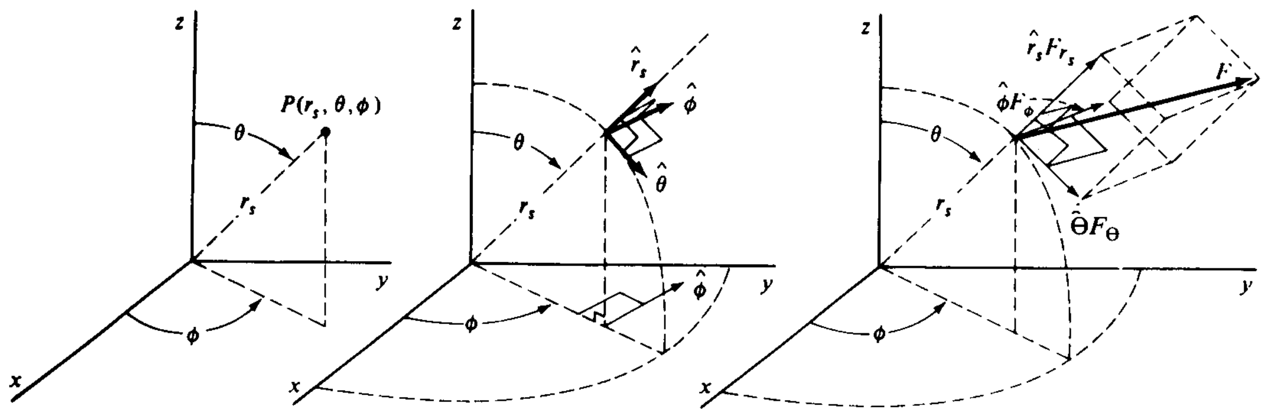
$$d\bar{s}_\varphi = \hat{a}_\varphi dr dz \quad , \quad ds_\varphi = dr \times dz$$

$$d\bar{s}_z = \hat{a}_z r dr d\varphi \quad , \quad ds_z = rd\varphi \times dr$$


z
k
r=k
z
k
x
φ=k
z
k
z=k

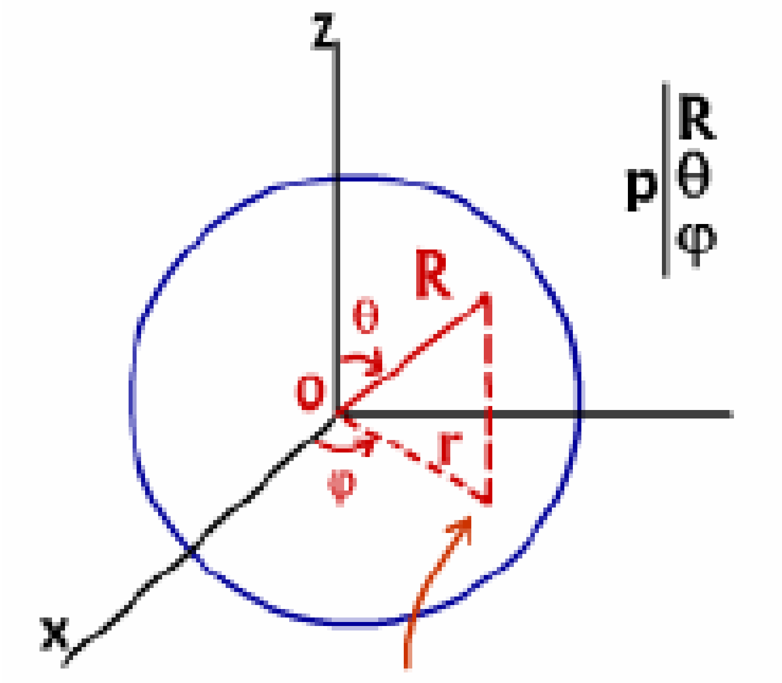
سيستم مختصات كروي

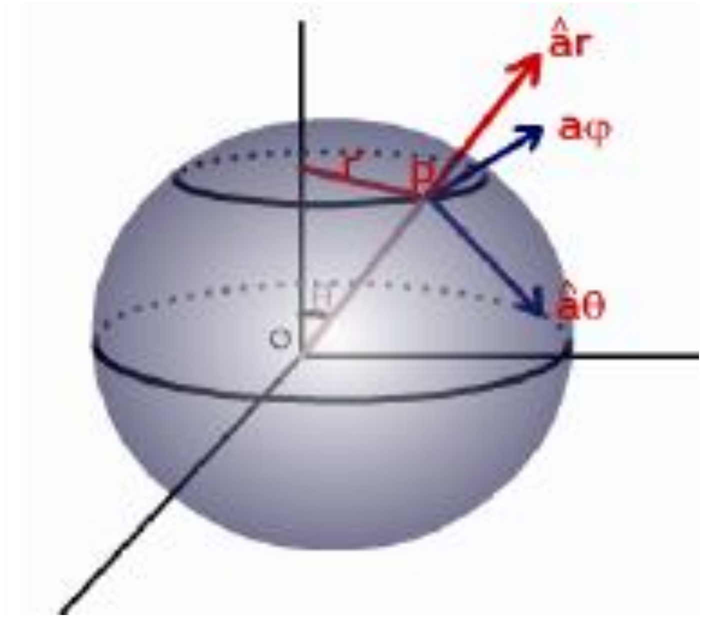
- در دستگاه مختصات كروي مكان يـک نقطـه يا يـک ذره بـا كميت هاي r_s، ϕ و θ نشان داده مي شود.



- برد اين كميت ها عبارتند از:

$$r_s \geqq 0, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad \text{and} \quad 0 \leqq \phi \leqq 2\pi.$$


z
R
p
θ
φ
R
θ
o
r
φ
x


âr
aφ
âθ
p
o

سيستم مختصات کروي

- بردارهاي يکه $\hat{r}_s, \hat{\theta},$ و $\hat{\phi}$ دو به دو بر هم عمودند.
- يـــک بـــردار نيـــروي F، گسســـته يـــا ميـــداني، در دســـتگاه مختصات کروی به صورت زير نشان داده مي شود:

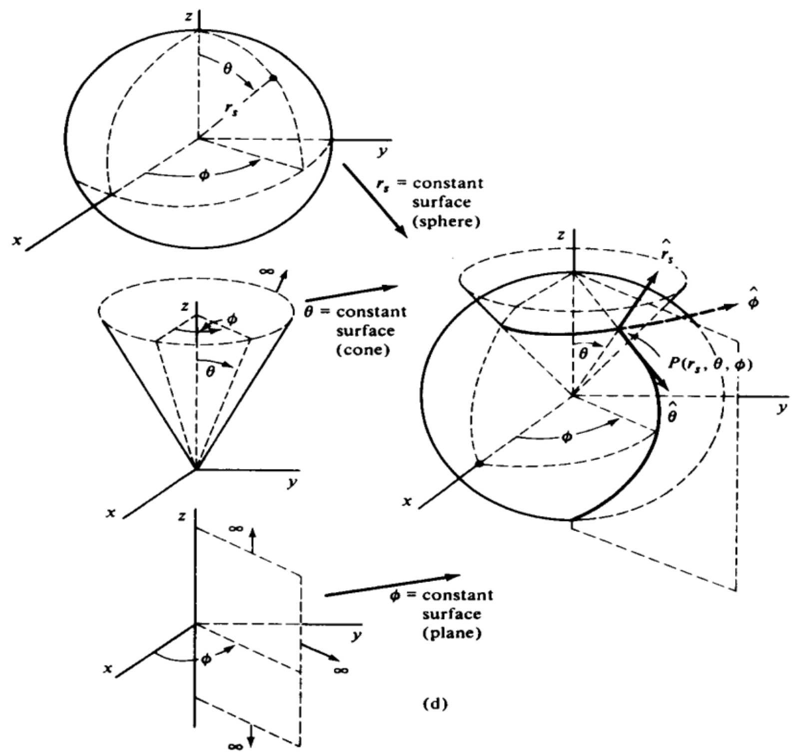
$$\boxed{\overline{F} = \hat{r}_s F_{r_s} + \hat{\theta} F_\theta + \hat{\phi} F_\phi}$$

$$\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\varphi \hat{a}_\varphi$$

$$A = \sqrt{A_R^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2}$$

- اين بـردار بـه صـورت تصـويري در شـکل اسـلايد قبـل آمـده است.

سيستم مختصات كروي



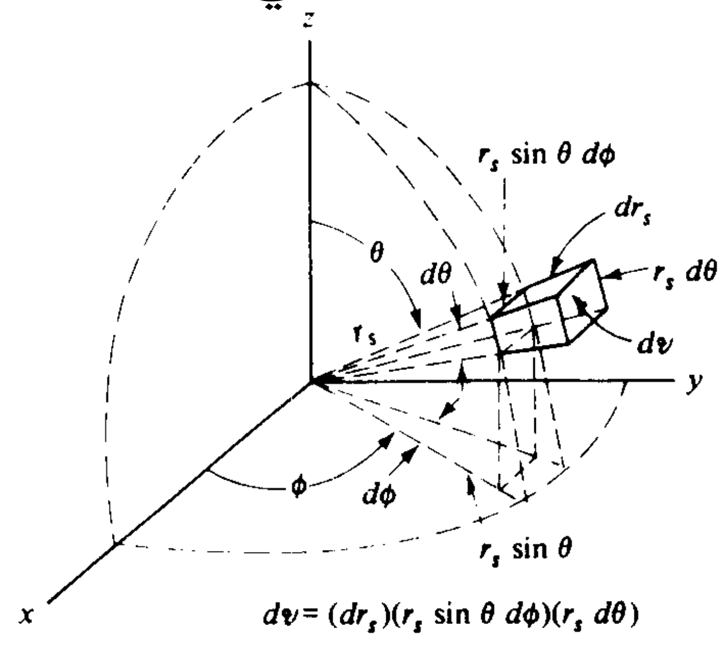
سيستم مختصات كروي

- عناصر جزئي طول، سطح و حجم به اين صورت تعريف مي شوند:

LINE	SURFACE ds	VOLUME dv
dr_s	$(dr_s)(r_s \sin\theta\, d\phi)$	$(dr_s)(r_s\, d\theta)(r_s \sin\theta\, d\phi)$
$r_s \sin\theta\, d\phi$	$(dr_s)(r_s\, d\theta)$	
$r_s\, d\theta$	$(r_s\, d\theta)(r_s \sin\theta\, d\phi)$	

- و عنصر جزئي مسير:

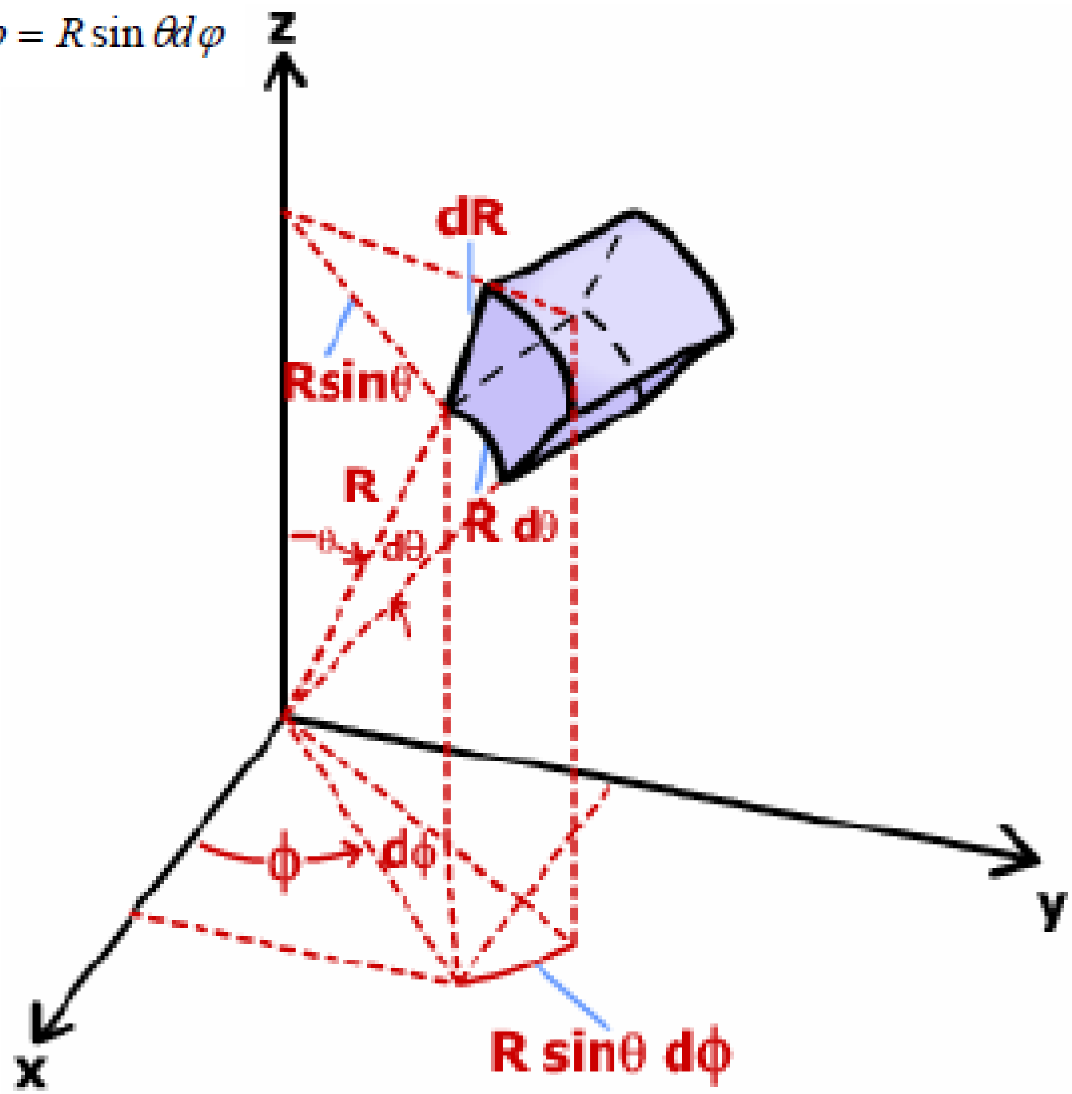
$$\overline{d\ell} = \hat{r}_s dr_s + \hat{\theta} r_s d\theta + \hat{\phi} r_s \sin\theta (d\phi)$$



$$d\vec{l}_R = \hat{a}_R dR \quad , \quad dl_R = dR$$

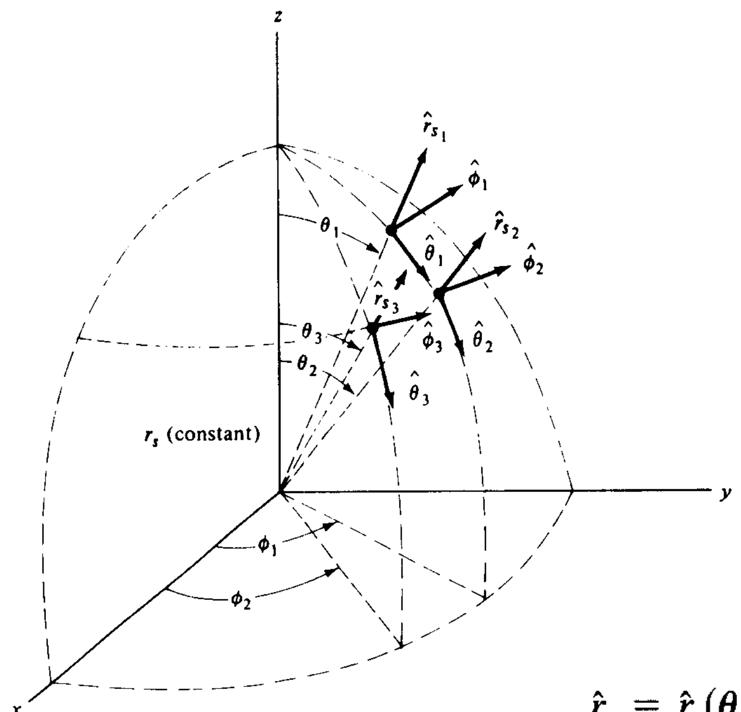
$$d\bar{l}_\theta = \hat{a}_\theta R d\theta \quad , \quad dl_\theta = R d\theta$$

$$d\vec{l}_\varphi = \hat{a}_\varphi R \sin\theta d\varphi \quad , \quad dl_\varphi = r d\varphi = R \sin\theta d\varphi$$



سیستم مختصات كروي

- با توجه به تصویرمقابل



- خواهیم داشت:

$$\hat{r}_s = \hat{r}_s(\theta, \phi) = \hat{x} \sin\theta \cos\phi + \hat{y} \sin\theta \sin\phi + \hat{z} \cos\theta$$

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\theta, \phi) = \hat{x} \cos\theta \cos\phi + \hat{y} \cos\theta \sin\phi + \hat{z}(-\sin\theta)$$

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}(\phi) = \hat{x}(-\sin\phi) + \hat{y} \cos\phi$$

سيستم مختصات كروي

- به اين ترتيب بردار مكان فقط با يک بردار يکه r_s نشان داده مي شود. $\boxed{\overline{R}_{P(\mathrm{sph})} = \hat{r}_s r_s}$
- بـا اسـتفاده از قاعـده چرخشــي xyzxyz كـه مشـابه آن را در دستگاه هاي مختصات استوانه اي و كروي داريم، بر اساس قاعده دست راست در ضرب خارجی به دست می آوریم:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad \text{or} \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \text{ etc.} \qquad \text{(rectangular)}$$

$$\hat{r}_c \times \hat{\phi} = \hat{z} \quad \text{or} \quad \hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{r}_c \text{ etc.} \qquad \text{(cylindrical)}$$

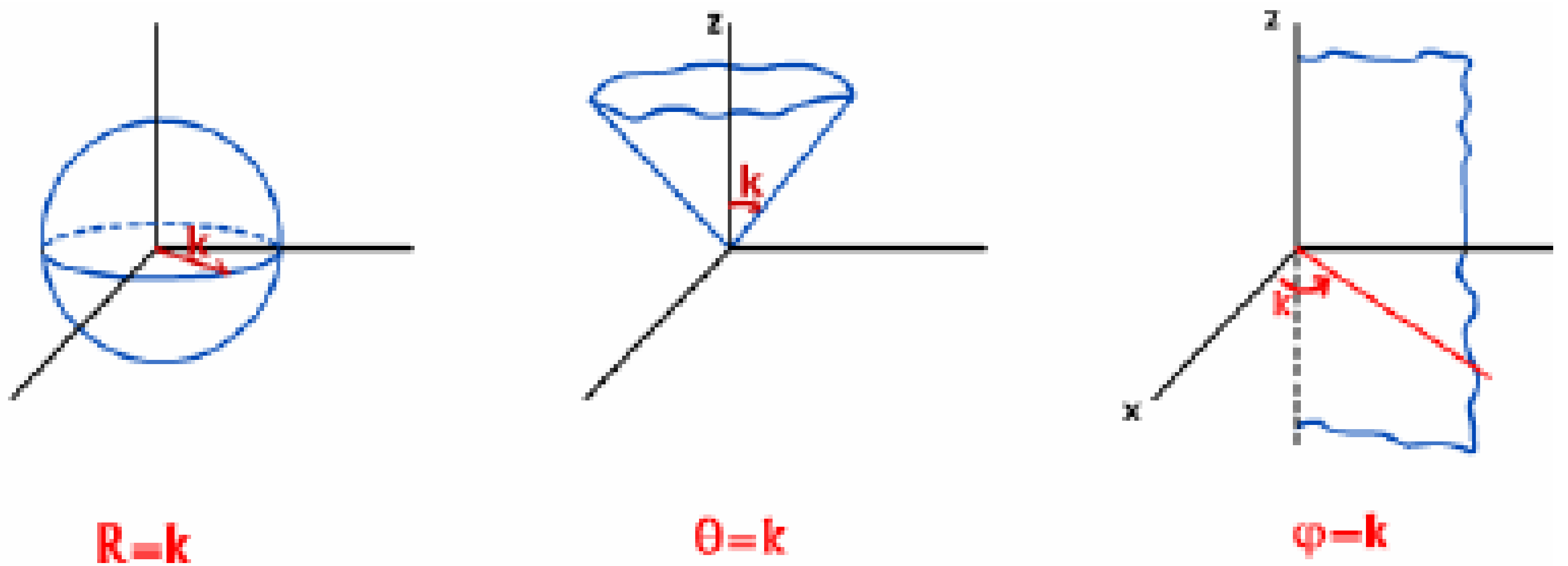
$$\hat{r}_s \times \hat{\theta} = \hat{\phi} \quad \text{or} \quad \hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}_s \text{ etc.} \qquad \text{(spherical)}$$

- كه همان دستگاه هاي راستگرد را تعريف مي كند.

$$\hat{a}_R.\hat{a}_R = \hat{a}_\theta.\hat{a}_\theta = \hat{a}_\varphi.\hat{a}_\varphi = 1$$

$$\hat{a}_R.\hat{a}_\theta = \hat{a}_R.\hat{a}_\varphi = \hat{a}_\theta.\hat{a}_\varphi = 0$$

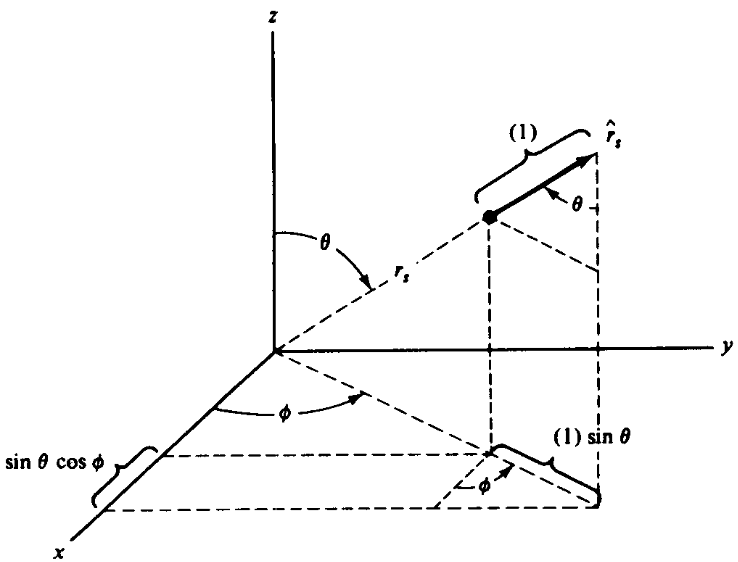
$$\hat{a}_R \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\varphi \quad , \quad \hat{a}_\theta \times \hat{a}_\varphi = \hat{a}_R \quad , \quad \hat{a}_\varphi \times \hat{a}_R = \hat{a}_\theta$$



k
R=k
z
k
θ=k
z
x
k
φ=k

سيستم مختصات كروي

- مثـــال:تصـــوير بـــردار يكـــه r_s را روي محـــور x؛ الـــف) تصويري، ب) با استفاده از معادله $\hat{r}_s = \hat{r}_s(\theta,\phi) = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta$ پيدا كنيد:



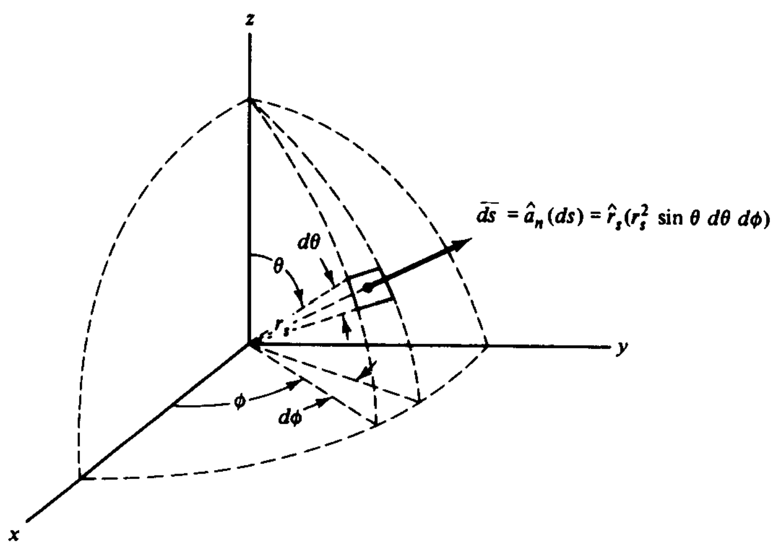
- پاسخ: الف)بر اساس تصوير:

- ب)بر اساس معادله:

$$\hat{r}_s \bullet \hat{x} = (\hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta)\bullet\hat{x} = \sin\theta\cos\phi$$

بردار سطح

- در ارزيـابي كميـات اسـكالري مثـل شـار و جريـان، مناسـب تـر است با برداري به نام بردار سطح كار كنيم.
- اندازه اين بردار مساحت فيزيكي سطح و جهت آن بـردار يكـه عمود بر سطح است.



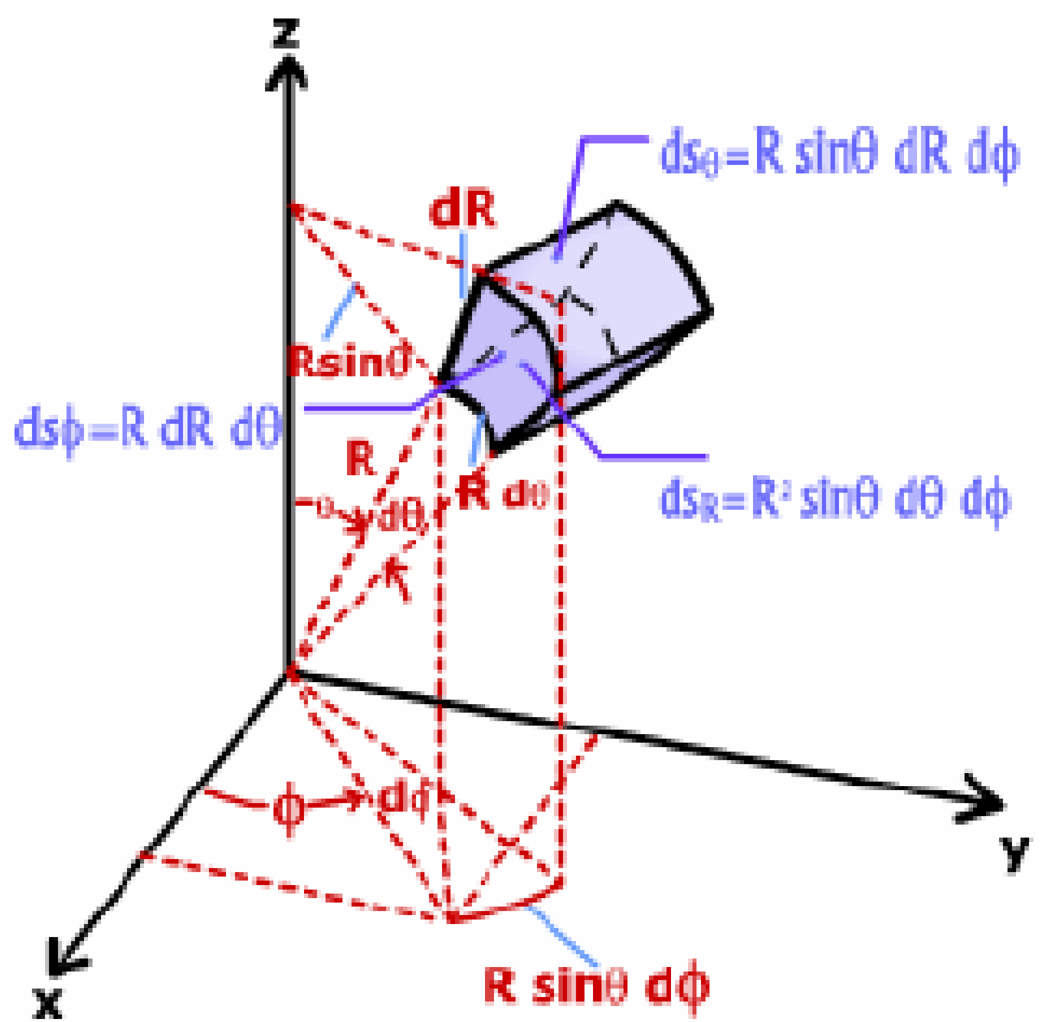
- يک بردار سطح جزئي در شكل نشان داده شده است.
- دقت كنيد كه r_s ثابت است و برداريكه ds با بردار يكه r_s برابر است. ds= $r_s^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

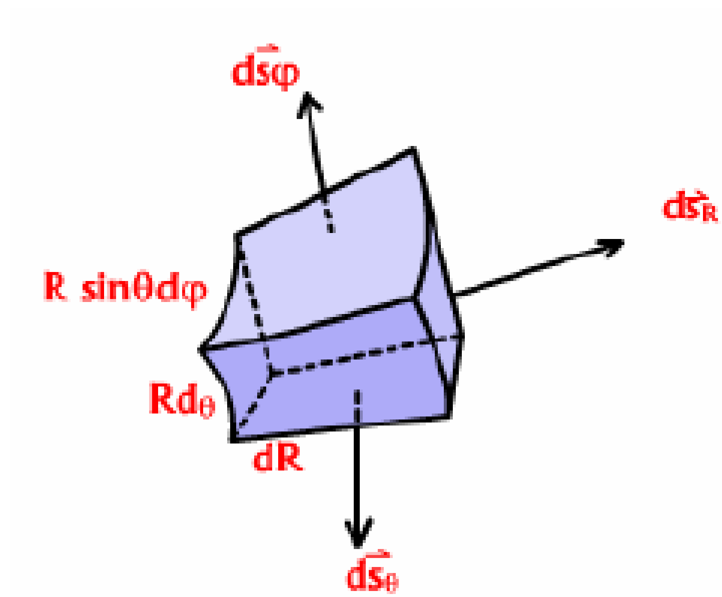
$$d\vec{s} = d\vec{s}_R + d\vec{s}_\theta + d\vec{s}_\varphi$$

$$d\vec{s}_R = \hat{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad , \quad ds_R = R\sin\theta d\varphi \times R d\theta$$

$$d\vec{s}_\theta = \hat{a}_\theta R\sin\theta dR d\varphi \quad , \quad ds_\theta = R\sin\theta d\varphi \times dR$$

$$d\vec{s}_\varphi = \hat{a}_\varphi R dR d\theta \quad , \quad ds\varphi = R d\theta \times dR$$





بردار سطح

- مثال: عبارت $\oint_s \overline{D} \cdot \overline{ds}$ در شرایط $r_s=0.2$ و $\overline{D} = \hat{r}_s/r_s^2$ برآورد نمایید.
- پاسخ:

$$\oint_s \overline{D} \cdot \overline{ds} = \int_0^{\phi=2\pi} \int_0^{\theta=\pi} \left(\frac{\hat{r}_s}{r_s^2}\right) \cdot (\hat{r}_s r_s^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi)$$

$$= \int_0^{\phi=2\pi} \int_0^{\theta=\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi$$

تبديل بردارها

- گاهي مجبوريم (بنا به شرايطي که مسئله تحميل مي کند)يک بردار را از يک دستگاه مثلا راستگوشه به دستگاهي ديگر مثلا استوانه اي يا کروي ببريم. اين عمل را تبديل بردار مي گويند.
- بردارها در دستگاه هاي مختلف در شکل عمومي به اين صورت تعريف مي شوند:

$$\overline{A}_{\text{rec}} = \hat{x}A_x(x,y,z) + \hat{y}A_y(x,y,z) + \hat{z}A_z(x,y,z)$$
$$\overline{A}_{\text{cyl}} = \hat{r}_c A_{r_c}(r_c,\phi,z) + \hat{\phi}A_\phi(r_c,\phi,z) + \hat{z}A_z(r_c,\phi,z)$$
$$\overline{A}_{\text{sph}} = \hat{r}_s A_{r_s}(r_s,\theta,\phi) + \hat{\theta}A_\theta(r_s,\theta,\phi) + \hat{\phi}A_\phi(r_s,\theta,\phi)$$

- براي تبديل به صورت زير عمل مي کنيم:

۱. بردار را در دستگاه جديد به صورت يکي از معادلات بالا مي نويسيم.
۲. تصوير عددي بردار را در جهت بردار يکه دستگاه جديد مي نويسيم.
۳. متغيرها به متغيرهاي دستگاه جديد تبديل مي کنيم.

-تبدیل مختصات استوانه‌اي به مستطیلي و برعکس

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

برعکس:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1} y/x$$
$$z = z$$

اگر

$$\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$$

براي رسيدن به نمايش اين بردار در مختصات استوانه‌اي بايد A_z, A_φ, A_r را بدست آورد.

بنابراين:

$$A_r = \hat{a}_r.\vec{A} \quad , \quad A_\varphi = \hat{a}_\varphi.\vec{A} \quad , \quad A_z = \hat{a}_z.\vec{A}$$

$$A_r = \hat{a}_r.(A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)$$
$$= A_x\hat{a}_r.\hat{a}_x + A_y\hat{a}_r.\hat{a}_y + A_z\hat{a}_r.\hat{a}_z$$

$$\hat{a}_r.\hat{a}_x = 1\times1\times\cos\varphi$$
$$\hat{a}_r.\hat{a}_y = \cos(90-\varphi) = \sin\varphi$$
$$\hat{a}_r.\hat{a}_z = 0$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_x = \cos(90+\varphi) = -\sin\varphi$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_y = \cos\varphi$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_z = 0$$
$$\hat{a}_z.\hat{a}_x = \hat{a}_z.\hat{a}_y = 0 \quad , \quad \hat{a}_z.\hat{a}_z = 1$$

ماتريس تبديل مختصات مستطيلي به استوانه‌اي:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعكس:ماتريس تبديل مختصات استوانه‌اي به مستطيلي:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

مثال: مطلوبست نمايش بردار A در مختصات مستطيلي:

$$\vec{A} = \hat{a}_r 3\cos\varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5$$

بنابراين $A_r = 3\cos\varphi \quad , \quad A_\varphi = -2r \quad , \quad A_z = 5$

روش اول:

$$A_x = \hat{a}_x.\vec{A} = \hat{a}_x.\left(\hat{a}_r 3\cos\varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5\right)$$

$$= \hat{a}_x.\hat{a}_y 3\cos\varphi - \hat{a}_x.\hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_x.\hat{a}_z$$

$$= \cos\varphi \times 3\cos\varphi - (-\sin\varphi)2r + 0 = 3\cos^2\varphi + 2r\sin\varphi$$

$$A_y = \hat{a}_y.\vec{A} = 3\sin\varphi\cos\varphi - 2r\cos\varphi$$

$$A_z = \hat{a}_z.\vec{A} = 5$$

سپس پارامترهاي موجود در مؤلفه‌هاي بدست آمده را به مختصات مستطيلي تبديل مي‌كنيم:

$$A_x = 3\frac{x^2}{x^2+y^z} + 2y \quad , \quad A_y = 3\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2x = \frac{3xy}{x^2+y^2} - 2x$$

بنابراين: $\vec{A} = \hat{a}_x\left(\frac{3x^2}{x^2+y^2} + 2y\right) + \hat{a}_y\left(\frac{3xy}{x^2+y^2} - 2x\right) + \hat{a}_z 5$

روش دوم:

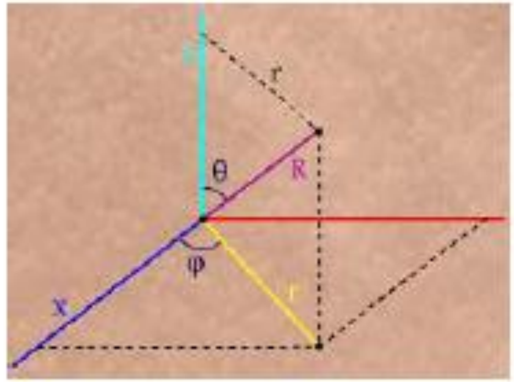
استفاده از ضرب ماتريسي:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cos\varphi \\ -2r \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos^2\varphi + 2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi\cos\varphi - 2r\cos\varphi \\ 5 \end{bmatrix}$$

كه همان نتيجه روش قبل است.

-تبديل متغيرهاي مختصات كروي به مستطيلي و برعكس

تبديل متغيرهاي مختصات كروي به مستطيلي



$$x = R\sin\theta\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = R\cos\theta$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\hat{a}_R.\hat{a}_x = \cos(90-\theta)\hat{a}_r.\hat{a}_x = \sin\theta \times \cos\varphi$$

ماتریس تبدیل مختصات مستطیلي به کروي:

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعکس: ماتریس تبدیل مختصات کروي به مستطیلي:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

مثال:

بردار مكان يك نقطه كلي در مختصات كروي را بدست آوريد:

$$\vec{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos\theta \\ y\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi - z\sin\theta \\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi + 0 \end{bmatrix}$$

$$A_R = x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos$$

$$= R\sin^2\theta\cos^2\varphi + R\sin^2\theta\sin^2\varphi + R\cos^2\theta$$

$$= R\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + R\cos^2\theta$$

$$= R\sin^2\theta + R\cos^2\theta$$

$$= R(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = R$$

-تبديل مختصات كروي به استوانه‌اي و برعكس:

اين تبديل بندرت استفاده مي‌شود:

تبديل پارمترها

$$\begin{cases} r = R\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

تبدیل بردارها

- مثال: بردار راستگوشه $\overline{A}_{rec} = \hat{x}x^2y + \hat{y}y^2z + \hat{z}x^2z$ به بردار A_{cyl} تبدیل کنید.
- پاسخ: بردار به صورت عمومي در دستگاه راستگوشه به شکل $\overline{A}_{rec} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$ نوشته مي شود.

1. مرحله ۱:

$$\overline{A}_{cyl} = \hat{r}_c A_{r_c} + \hat{\phi}A_\phi + \hat{z}A_z$$

2. مرحله ۲:

$$A_{r_c} = \overline{A}_{rec} \cdot \hat{r}_c = (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \cdot (\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi)$$
$$= A_x \cos\phi + A_y \sin\phi$$

$$A_\phi = \overline{A}_{rec} \cdot \hat{\phi} = (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \cdot [\hat{x}(-\sin\phi) + \hat{y}\cos\phi]$$
$$= -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi$$

$$A_z = \overline{A}_{rec} \cdot \hat{z} = (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \cdot (\hat{z}) = A_z$$

تبدیل بردارها

- سـپس $A_x = x^2y,\ A_y = y^2z,\ \text{and}\ A_z = x^2z$ را در مؤلفـه هـاي فـوق وارد مـی کنیم.

$$A_{r_c} = x^2y\cos\phi + y^2z\sin\phi$$
$$A_\phi = -x^2y\sin\phi + y^2z\cos\phi$$
$$A_z = x^2z$$

۳. مرحلـه ۳- سـپس بـا اسـتفاده از جـدول B-2 متغیرهـاي x,y و z را بـا متغیرهاي r_c,ϕ وz جایگزین مي کنیم.

$$A_{r_c} = (r_c^2\cos^2\phi)(r_c\sin\phi)(\cos\phi) + (r_c^2\sin^2\phi)(z)\sin\phi$$
$$A_\phi = -(r_c^2\cos^2\phi)(r_c\sin\phi)(\sin\phi) + (r_c^2\sin^2\phi)(z)\cos\phi$$
$$A_z = (r_c^2\cos^2\phi)z$$

- فاکتورگيري کرده و در معادله A_{cyl} جایگزین مي کنیم

$$\begin{aligned}\overline{A}_{\text{cyl}} = {} & \hat{r}_c(r_c^3\cos^3\phi\sin\phi + r_c^2z\sin^3\phi) \\ & - \hat{\phi}(r_c^3\cos^2\phi\sin^2\phi - r_c^2z\sin^2\phi\cos\phi) + \hat{z}(r_c^2\cos^2\phi)z\end{aligned}$$

جدول B-1

TABLE B-1 DOT PRODUCTS BETWEEN UNIT VECTORS OF RECTANGULAR, CYLINDRICAL, AND SPHERICAL COORDINATE SYSTEM

	Rectangular			Cylindrical			Spherical		
$\bullet$	$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{z}$	$\hat{r}_c$	$\hat{\phi}$	$\hat{z}$	$\hat{r}_s$	$\hat{\theta}$	$\hat{\phi}$
$\hat{x}$	1	0	0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
$\hat{y}$	0	1	0	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
$\hat{z}$	0	0	1	0	0	1	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0
$\hat{r}_c$	$\cos\phi$	$\sin\phi$	0	1	0	0	$\sin\theta$	$\cos\theta$	0
$\hat{\phi}$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0	0	1	0	0	0	1
$\hat{z}$	0	0	1	0	0	1	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0
$\hat{r}_s$	$\sin\theta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$	1	0	0
$\hat{\theta}$	$\cos\theta\cos\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$	0	1	0
$\hat{\phi}$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0	0	1	0	0	0	1

جدول B-2

TABLE B-2 RELATIONSHIPS BETWEEN VARIABLES OF RECTANGULAR, CYLINDRICAL, AND SPHERICAL COORDINATE SYSTEMS

	=	Cylindrical	Spherical	Rectangular
Rectangular	x	$r_c \cos\phi$	$r_s \sin\theta \cos\phi$	x
	y	$r_c \sin\phi$	$r_s \sin\theta \sin\phi$	y
	z	z	$r_s \cos\theta$	z
Cylindrical	r_c	r_c	$r_s \sin\theta$	$(x^2 + y^2)^{1/2}$
	ϕ	ϕ	ϕ	$\tan^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$
	z	z	$r_s \cos\theta$	z
Spherical	r_s	$\frac{r_c}{\sin\theta}$	r_s	$(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$
	θ	$\tan^{-1}\left[\frac{r_c}{z}\right]$	θ	$\tan^{-1}\left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}\right]$
	ϕ	ϕ	ϕ	$\tan^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$

جدول B-3

TABLE B-3 RELATIONSHIPS BETWEEN SCALAR PROJECTIONS OF VECTORS IN THE RECTANGULAR, CYLINDRICAL, AND SPHERICAL COORDINATE SYSTEMS

=	Cylindrical	Spherical	Rectangular
A_x	$A_{r_c} \cos\phi - A_\phi \sin\phi$	$A_{r_s} \sin\theta \cos\phi + A_\theta \cos\theta \cos\phi - A_\phi \sin\phi$	A_x
A_y	$A_{r_c} \sin\phi + A_\phi \cos\phi$	$A_{r_s} \sin\theta \sin\phi + A_\theta \cos\theta \sin\phi + A_\phi \cos\phi$	A_y
A_z	A_z	$A_{r_s} \cos\theta - A_\theta \sin\theta$	A_z
A_{r_c}	A_{r_c}	$A_{r_s} \sin\theta + A_\theta \cos\theta$	$A_x \cos\phi + A_y \sin\phi$
A_ϕ	A_ϕ	A_ϕ	$-A_x \sin\phi + A_y \cos\phi$
A_z	A_z	$A_{r_s} \cos\theta - A_\theta \sin\theta$	A_z
A_{r_s}	$A_{r_c} \sin\theta + A_z \cos\theta$	A_{r_s}	$A_x \sin\theta \cos\phi + A_y \sin\theta \sin\phi + A_z \cos\theta$
A_θ	$A_{r_c} \cos\theta - A_z \sin\theta$	A_θ	$A_x \cos\theta \cos\phi + A_y \cos\theta \sin\phi - A_z \sin\theta$
A_ϕ	A_ϕ	A_ϕ	$-A_x \sin\phi + A_y \cos\phi$

TABLE B-4 VECTOR IDENTITIES

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{B} \cdot \overline{A} \tag{1}$$

$$\overline{A} \times \overline{B} = -\overline{B} \times \overline{A} \tag{2}$$

$$\overline{A} \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C} \tag{3}$$

$$\overline{A} \times (\overline{B} + \overline{C}) = \overline{A} \times \overline{B} + \overline{A} \times \overline{C} \tag{4}$$

$$\overline{A} \cdot (\overline{B} \times \overline{C}) = \overline{B} \cdot (\overline{C} \times \overline{A}) = (\overline{B} \times \overline{C}) \cdot \overline{A} = \overline{C} \cdot (\overline{A} \times \overline{B}) \tag{5}$$

$$\overline{A} \times (\overline{B} \times \overline{C}) = (\overline{A} \cdot \overline{C})\overline{B} - (\overline{A} \cdot \overline{B})\overline{C} \tag{6}$$

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \tag{7}$$

$$\nabla \cdot (\overline{A} + \overline{B}) = \nabla \cdot \overline{A} + \nabla \cdot \overline{B} \tag{8}$$

$$\nabla \times (\overline{A} + \overline{B}) = \nabla \times \overline{A} + \nabla \times \overline{B} \tag{9}$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{10}$$

$$\nabla \cdot (f\overline{A}) = f(\nabla \cdot \overline{A}) + \overline{A} \cdot \nabla f \tag{11}$$

$$\nabla \cdot (\overline{A} \times \overline{B}) = \overline{B} \cdot (\nabla \times \overline{A}) - \overline{A} \cdot (\nabla \times \overline{B}) \tag{12}$$

$$\nabla \times (f\overline{A}) = \nabla f \times \overline{A} + f\nabla \times \overline{A} \tag{13}$$

$$\nabla(\overline{A} \cdot \overline{B}) = (\overline{A} \cdot \nabla)\overline{B} + (\overline{B} \cdot \nabla)\overline{A} + \overline{A} \times (\nabla \times \overline{B}) + \overline{B} \times (\nabla \times \overline{A}) \tag{14}$$

$$\nabla \times (\overline{A} \times \overline{B}) = \overline{A}(\nabla \cdot \overline{B}) - \overline{B}(\nabla \cdot \overline{A}) + (\overline{B} \cdot \nabla)\overline{A} - (\overline{A} \cdot \nabla)\overline{B} \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f \tag{16}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{17}$$

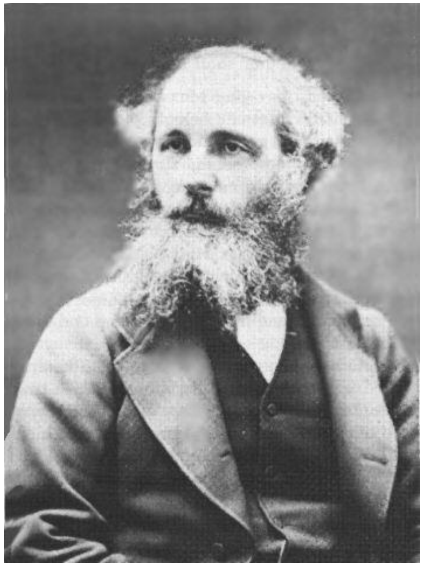
$$\nabla \cdot (\nabla \times \overline{A}) = 0 \tag{18}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \overline{A}) = \nabla(\nabla \cdot \overline{A}) - \nabla^2 \overline{A} \tag{19}$$

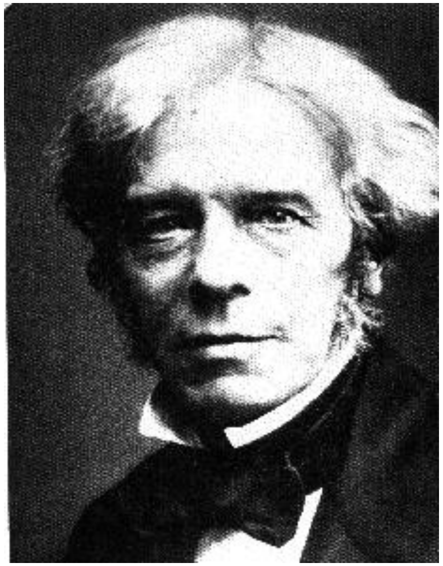
$$\nabla \times (f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g \tag{20}$$

$$\oint_s \overline{A} \cdot \overline{ds} = \int_v \nabla \cdot \overline{A}\, dv \text{ (divergence theorem)} \tag{21}$$

$$\oint_\ell \overline{A} \cdot \overline{d\ell} = \int_s \nabla \times \overline{A} \cdot \overline{ds} \text{ (Stokes' theorem)} \tag{22}$$



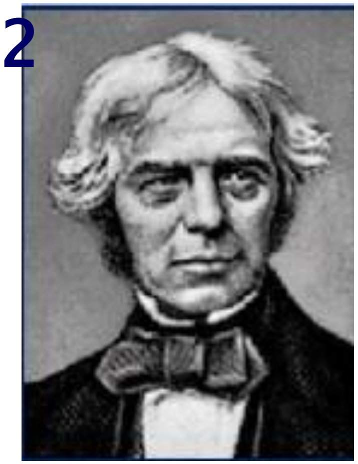
James Clerk Maxwell



Michael Faraday

Electromagnetism

Maxwell‘s Equations / Maxwellsche Gleichungen

1  . 2  . 3  . 4 

1. **André Marie Ampère (1775–1836)** 1827: Ampère presented the first mathematical theory of electrodynamics and discovered the magnetic effect of electric currents. / Ampère stellte die erste mathematisch fundierte elektrodynamische Theorie vor und entdeckte die magnetische Wirkung elektrischer Ströme.

2. **Michael Faraday (1791–1867)** 1831: Faraday discovers electromagnetic induction. / Faraday entdeckt die elektromagnetische Induktion.

3. **James Clerk Maxwell (1831–1879)** 1864: Maxwell presents his theory of electromagnetism. / Maxwell präsentiert seine Theorie des Elektromagnetismus.

4. **Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894)** 1885: Hertz demonstrates the electromagnetic wave propagation in a series of experiments in a period through 1887. / Hertz demonstriert in einer Periode bis 1887 die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen.

عملگر (operator)

- در الکترومغناطیس یک عملگر بسیار مفید عملگر دل یا نابلا است که یک عملگر مشتق گیري است و در دستگاه کارتزین به این صورت تعریف مي شود:

$$\nabla \triangleq \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

- این عملگر یک عملگر برداري است که به خودي خود هیچ جهت و اندازه اي ندارد و در تعامل با کمیات اسکالر و برداري به صورت هاي مقابل عمل مي کند:

$$(\text{Gradient of } f) \triangleq \nabla f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$(\text{Divergence of } \overline{A}) \triangleq \nabla \cdot \overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$(\text{Curl of } \overline{A}) \triangleq \nabla \times \overline{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$(\text{Laplacian of } f) \triangleq \nabla \cdot \nabla f \triangleq \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$(\text{Laplacian of } \overline{A}) = \nabla^2 \overline{A} = \hat{x}\nabla^2 A_x + \hat{y}\nabla^2 A_y + \hat{z}\nabla^2 A_z$$

انتگرال گيري

انتگرال‌هائي که در ارتباط با بردارها مي‌باشند عبارتند از:

$$\int_c \vec{F}.d\bar{l}$$

$$\int_s \vec{F}.d\bar{s}$$

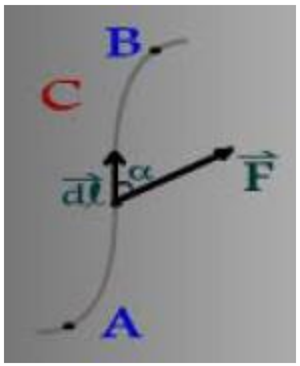
$$\int_v \vec{F}dv$$

$$\int_c fd\bar{l}$$

$$\int_c fd\bar{l} = \int_c f\left(\hat{a}_x + d_x + \hat{a}_y d_y + \hat{a}_z d_z\right) = \hat{a}_x \int_c f(x,y,z)dx + \hat{a}_y \int_c f(x,y,z)dy + \hat{a}_z \int_c f(x,y,z)d_z$$

اما مهمترين انتگرال‌گيري، دو انتگرال اول $\int \vec{F}.d\bar{l}$ و $\int \vec{F}.d\bar{s}$ است که بترتيب بنام انتگرال خطي و انتگرال سطحي از آن نام مي‌بريم.

Linear integral انتگرال خطي



بعنوان مثال $\int_{cA}^{B} \vec{F}.d\vec{l}$ روي مسيري مانند C بصورت زير انجام مي‌گيرد.

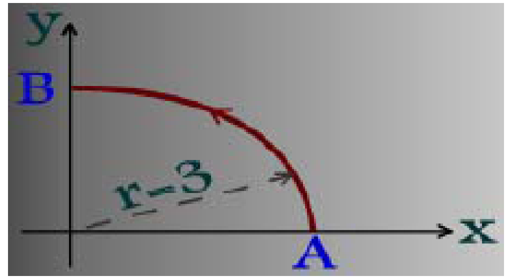
براي محاسبه آن در هر نقطه، مؤلفه $\vec{F}$ را که مماس بر منحني د رآن نقطه است $(F\cos\alpha)$ را بدست آورده در طول dl ضرب مي‌کنيم.

$$\int_{A}^{B} F\cos\alpha dl$$

مفهوم انتگرال خطي: چنانچه بردار $\vec{F}$ نيروي وارد بر جسمي باشد، اين انتگرال ميزان کار لازم براي حرکت جسم روي مسير C از نقطه A به B مي‌باشد که مي‌تواند متناسب با انرژي لازم براي عمليات فوق باشد.

$$\oint_{c} \vec{F}.\vec{dl}$$

مثال: براي بردار داده شده $\vec{F}$ مطلوبست محاسبه انتگرال خطي $\int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$ در امتداد يك چهارم دايره به شعاع ۳ كه در شكل نشان داده شده است.



$$\vec{F} = \hat{a}_x xy - \hat{a}_y 2x \quad , \quad A:\begin{vmatrix}3\\0\\0\end{vmatrix} \quad B:\begin{vmatrix}0\\3\\0\end{vmatrix}$$

روش اول: در مختصات مستطيلي

$$\vec{dl} = \hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy + \hat{a}_z dz$$

$$\vec{F}.\vec{dl} = xydx - 2xdy$$

معادله مسير: دايره‌اي به شعاع ۳

$$x^2 + y^2 = 9 \quad , \quad 0 \le x, y \le 3$$

و چون مسير در ربع اول است x و y هر دو مثبت:

$$\Rightarrow x = \sqrt{9-y^2} \quad , \quad y = \sqrt{9-x^2}$$

بنابراين:

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B (xydx - 2ydy) = \int_A^B xydx - \int_A^B 2xdy$$

$$= \int_3^0 x\sqrt{9-x^2}dy - \int_0^3 2\sqrt{9-y^2}dy$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\left(9-x^2\right)^{3/2}\right]_3^0 - \left[y\sqrt{9-y^2} + 9\sin^{-1}\frac{y}{x}\right]_0^3 = -9\left(1+\pi/2\right)$$

روش دوم: در مختصات استوانه‌اي

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\varphi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy \\ -2x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \hat{a}_r(xy\cos\varphi - 2x\sin\varphi) - \hat{a}_\varphi(xy\sin\varphi + 2x\cos\varphi)$$

$$d\vec{l} = \hat{a}_r dr + \hat{a}_\varphi r d\varphi + \hat{a}_z dz$$

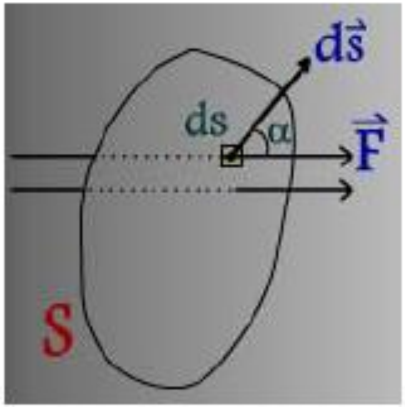
مسير در موقعيت z=۰ و r=۳ قرار دارد به نحوي که dr=۰ و dz=۰
بنابراين $d\vec{l}\Big|_{r=3} \equiv \hat{a}_\varphi 3d\varphi$ در نتيجه در محاسبه $\vec{F}.\vec{dl}$ تنها مؤلفه F_φ کارساز خواهد بود.
همچنين $x = 3\cos\varphi$ و $y = 3\sin\varphi$ در F_φ جايگزين کرده:

$$\int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -3\left(9\sin^2\varphi\cos\varphi + 6\cos^2\varphi\right)d\varphi = -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Surface integral انتگرال سطحي

طريقه نمايش بصورت روبرو مي‌باشد: $\int_s \vec{F}.\overrightarrow{ds}$

و با توجه به تعريف $d\vec{s}$ كه بردار عمود بر سطح در جهت خارج از سطح است مؤ لفه $\bar{F}$ در جهت عمود بر سطح را بدست آورده $(F\cos\alpha)$ در ds ضرب مي‌كنيم و نهايتاً روي سطح s انتگرال مي‌گيريم:

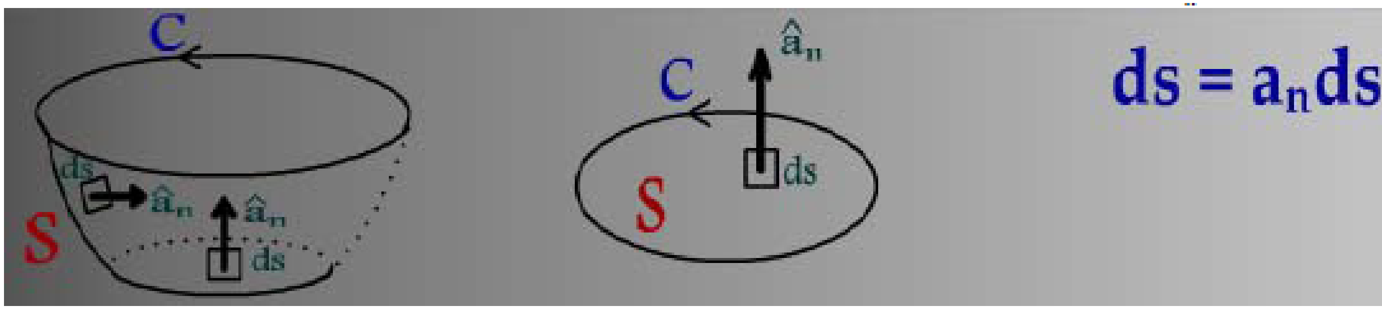


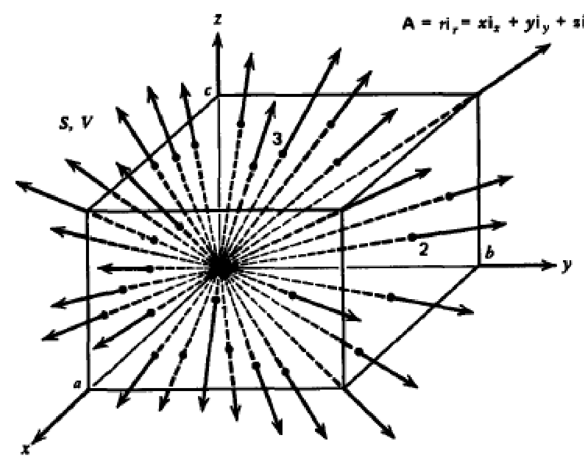
مفهوم انتگرال سطحي: چنانچه $\vec{F}$ بردار نمايش دهنده يك ميدان باشد انتگرال $\int_s \vec{F}.\vec{ds}$ كل فلو (شار) بردار $\vec{F}$ كه از سطح S خارج مي شود را محاسبه مي‌نمايد.

چنانچه سطحs باز باشد از نمايش روبرو استفاده مي كنيم: $\oint \bar{F}.d\bar{s}$

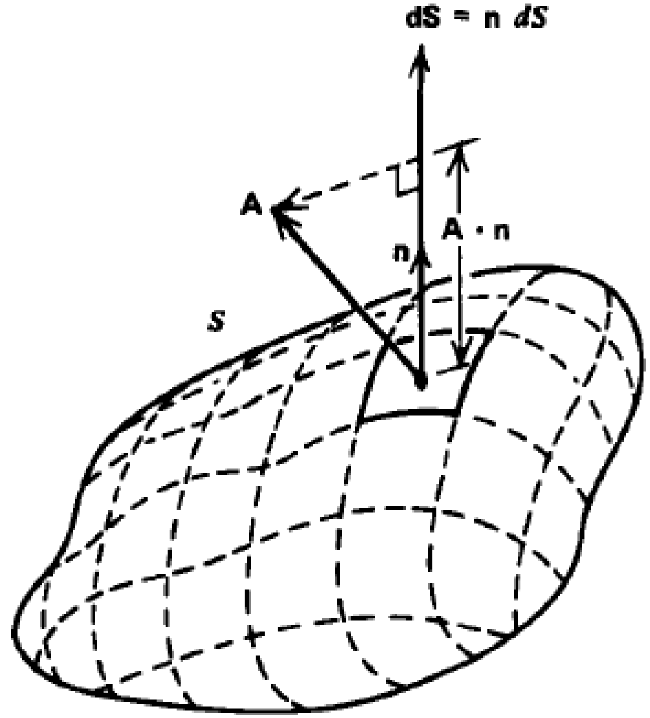
اگر سطح باز باشد جهت $d\bar{s}$ با استفاده از قانون دست راست بدست مي‌آيد.

انگشتان دست راست در جهت منحني C كه سطح باز S را محصور مي‌كند و انگشت شست جهت $d\bar{s}$ را نشان مي‌دهد.

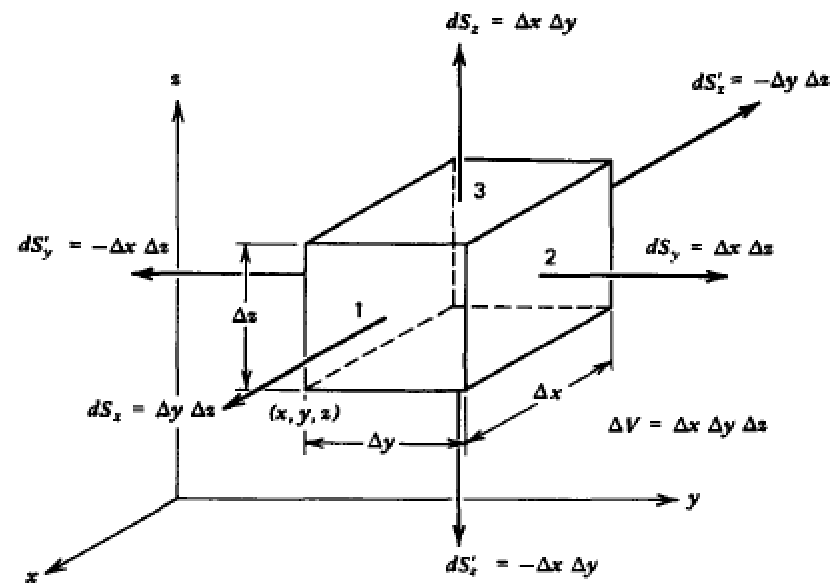




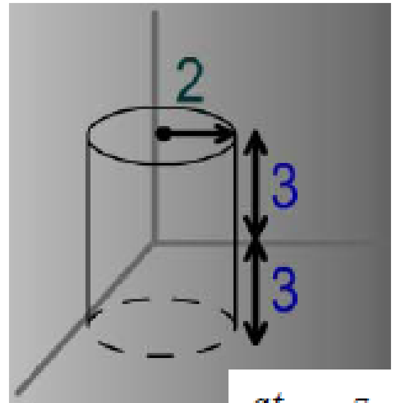
$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\Phi = \int_1 A_x(x)\, dy\, dz - \int_{1'} A_x(x - \Delta x)\, dy\, dz$$
$$+ \int_2 A_y(y + \Delta y)\, dx\, dz - \int_{2'} A_y(y)\, dx\, dz$$
$$+ \int_3 A_z(z + \Delta z)\, dx\, dy - \int_{3'} A_z(z)\, dx\, dy$$



مثال: محاسبه $\oint_s \vec{F}.d\vec{s}$ روي سطح استوانه داده شده در شكل براي تابع برداري $\vec{F}$:



$$\vec{F} = \hat{a}_r \frac{A}{r} + \hat{a}_z BZ$$

$$\oint_s \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \int \vec{F}.\overrightarrow{ds} + \int \vec{F}.\overrightarrow{ds} + \int \vec{F}.\overrightarrow{ds}$$

سطح جانبي   قاعده پائين   قاعده بالا

$$at \quad z = 3 \Rightarrow \hat{a}_n = \hat{a}_z \Rightarrow d\vec{s} = d\hat{s}_z = \hat{a}_z r dr d\varphi$$

$$\Rightarrow \left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\Big|_{z=3} = \left(Bzrdrd\varphi\right)\Big|_{z=3} = 3Brdrd\varphi$$

$$\Rightarrow \int_{z=3} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3Brdrd\varphi = 12\pi B$$

$$at \quad z = -3 \Rightarrow \hat{a}_n = -\hat{a}_z \Rightarrow d\vec{s} = -d\vec{s}_z = -\hat{a}_z r dr d\varphi$$

$$\Rightarrow \left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\Big|_{z=-3} = -\left(-3Brdrd\varphi\right) = 3Brdrd\varphi$$

$$\Rightarrow \int_{z=-3} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3Brdrd\varphi = 12\pi B$$

$$at \quad r = 2 \Rightarrow \hat{a}_n = \hat{a}_r \Rightarrow d\vec{s} = d\vec{s}_r = \hat{a}_r r d\varphi dz$$

$$\left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\Big|_{r=2} = \left(\frac{A}{r} r d\varphi r z\right)\Big|_{r=2} = A d\varphi dz$$

$$\Rightarrow \int_{r=2} \vec{F}.d\vec{s} = \int_{-3}^{3} \int_0^{2\pi} A d\varphi dz = 12\pi A$$

$$\Rightarrow \oint \vec{F}.d\vec{s} = 12\pi B + 12\pi B + 12\pi A = 24\pi B + 12\pi A$$

ديورژانس (بخش) يك تابع برداري Divergence

تعريف:

$$div.\left(\vec{F}\right)=\nabla.\vec{F}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oint_s \vec{F}.d\vec{s}}{\Delta v}$$

بنابراين ديورژانس يك تابع برداري با فلوي خروجي از هر متر مكعب برابر مي‌گردد.

$$\Phi=\int_1 A_x(x)\,dy\,dz-\int_{1'} A_x(x-\Delta x)\,dy\,dz$$
$$+\int_2 A_y(y+\Delta y)\,dx\,dz-\int_{2'} A_y(y)\,dx\,dz$$
$$+\int_3 A_z(z+\Delta z)\,dx\,dy-\int_{3'} A_z(z)\,dx\,dy$$

$$\Phi\approx\left(\frac{[A_x(x)-A_x(x-\Delta x)]}{\Delta x}+\frac{[A_y(y+\Delta y)-A_y(y)]}{\Delta y}+\frac{[A_z(z+\Delta z)-A_z(z)]}{\Delta z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\Phi=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

$$\text{div}\,\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

با صرفنظر کردن از طريقه عمليات، محاسبة ديورژانس در دستگاههاي مختصات متعامد معرفي شده بصورت زير خواهد بود.

در دستگاه مستطيلي
$$\nabla.\vec{F} = \partial\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

در دستگاه استوانه‌اي
$$\nabla.\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

در دستگاه كروي
$$\nabla.\vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2F_R)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin F_\theta)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

كاربرد: اگر $\vec{V}$ سرعت حركت يك سيال در هر نقطه باشد و ρ چگالي حجمي آن سيال $\nabla.(p\vec{v})=0$ به مفهوم آن خواهد بود كه سيال غير قابل تراكم‌پذيري است يعني شار (فلوي) جرم وارد شده به يك سطح بسته همواره با فلوي خارج شده از آن سطح برابر است و $\nabla.(p\vec{v})\rangle 0$ نشان دهنده يك مادة قابل انفجار و بعنوان منبع source ، $\nabla.(p\vec{v})\langle 0$ براي يك فرآيند تراكم پذير نتيجه مي‌دهد و بعنوان حفره و گودال sink است.

کرل (پیچش) يك تابع برداري Curl

تعريف:

$$curl(\bar{F}) = \nabla \times \bar{F}$$

$$(\nabla \times \bar{F})\big|_s = (\nabla \times \bar{F}).\hat{a}_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_c \bar{F} d\bar{l}}{\Delta s}$$

با توجه به تعريف فوق مشخص است كه چنانچه $\vec{F}$ بر روي سطح Δs عمود باشد و يا تصويري نداشته باشد مؤلفه كرل $\vec{F}$ در جهت $\hat{a}_s$ وجود ندارد و يا بعبارتي چرخشي ندارد يعني پيچش اين بردار در جهت $\hat{a}_s$ برابر صفر است. بنابراين مؤلفه كرل هر بردار در هر جهت معياري از چرخش خطوط ميدان برداري فوق در صفحه عمود بر آن جهت است.

$\hat{a}_s$ مي‌تواند $\hat{a}_z, \hat{a}_y, \hat{a}_x$ يا هر جهت ديگر باشد.

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \det\begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{i}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$+ \mathbf{i}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

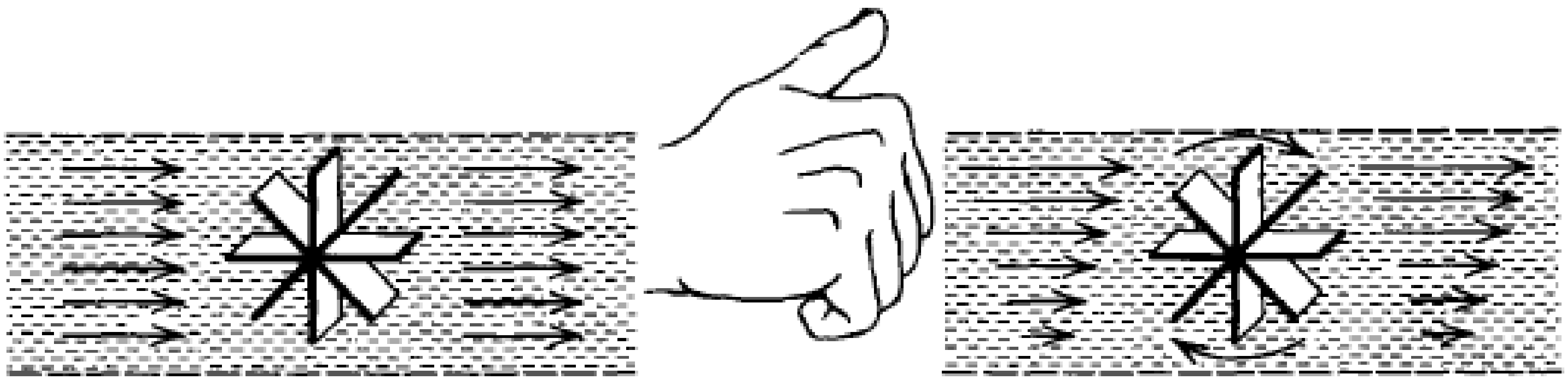


Figure 1-20 A fluid with a velocity field that has a curl tends to turn the paddle wheel. The curl component found is in the same direction as the thumb when the fingers of the right hand are curled in the direction of rotation.

در مختصات مستطيلي

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\hat{a}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)-\hat{a}_y\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\hat{a}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

در مختصات استوانه‌اي

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & \hat{a}_\varphi r & \hat{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_r & rF_\varphi & F_z\end{vmatrix}$$

در مختصات كروي

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\varphi R\sin\theta\\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ F_R & RF_\theta & R\sin F_\varphi\end{vmatrix}$$

گراديان (شيب) Gradient

گراديان بزرگترين مقدار مشتق يك تابع اسكالر نسبت به تغيير مكان مي‌باشد و جهتش در همان سمتي كه بزرگترين مقدار مشتق نسبت به تغيير مكان اتفاق مي‌افتد مي‌باشد بنابراين گراديان يك مشتق گيري جهتي است. directional derivative

براي درك مفهوم گراديان تابع اسكالر ϕ را در نظر بگيريد:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta l}$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

اگر Δl كمترين مقدار باشد، $\frac{\Delta\phi}{\Delta l}$ بزرگترين تغييرات (مشتق) را خواهد داشت براي محاسبه بيشترين تغييرات بايد $\Delta l = \Delta n$ شود:

$$\left.\frac{\Delta\phi}{\Delta l}\right|_{\max} = \frac{\Delta\phi}{\Delta n}$$

يعني

$$grad(\phi) = \nabla\phi = \frac{d\phi}{dn}\hat{a}_n$$

در مختصات مستطيلي

$$\nabla\phi = \hat{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

در مختصات استوانه اي

$$\nabla\phi = \hat{a}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{a}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \hat{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

در مختصات كروي

$$\nabla\phi = \hat{a}_R\frac{\partial\phi}{\partial R} + \hat{a}_\theta\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \hat{a}_\varphi\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

قضايائي بر روي توابع برداري

- فضاي صفر (Null)

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\nabla . \left(\nabla \times \vec{F} \right) = 0$$

- قضيه گاوس (ديورژانس)

براي هر سطح بسته s كه شامل حجم v است.

$$\int_v \nabla . \vec{F} dv = \oint_s \vec{F} . d\vec{s}$$

- قضيه استوكس Stokes

براي هر مسير بسته c كه شامل سطح باز s است.

$$\int_s \nabla \times \vec{F} . \overrightarrow{ds} = \oint_c \vec{F} . \overrightarrow{dl}$$

- قضيه هلمهولتس Helmholtz

با توجه به شكل رياضي اين قضيه در محيط نامحدود

$$\vec{F}\left(\vec{R}\right) = -\nabla \int_v \frac{\nabla' . \vec{F}\left(\vec{R}'\right)}{4\pi \left| \vec{R} - \vec{R}' \right|} dv' + \nabla \times \int_v \frac{\nabla' \times \vec{F}\left(\vec{R}'\right)}{4\pi \left| \vec{R} - \vec{R}' \right|} dv'$$

اين قضيه چنين بيان مي‌شود كه هر ميدان برداري توسط پخشش و پيچش (ديورژانس و كرل ميدان كاملاً مشخص مي‌شود يعني براي مشخص كردن كامل ميدان $\vec{F}$ فقط نياز به داشتن $\nabla \times \vec{F}$ و $\nabla . \vec{F}$ است.

بيان ديگر: يك ميدان برداري يا تابع برداري را مي‌توان بصورت مجموع گراديان يك تابع اسكالر و كرل يك تابع برداري نوشت $\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A}$

مشتقات مرتبه بالاتر

علاوه بر قضاياي صفر، لاپلاسين نيز يك مشتق از مرتبه بالاتر مي‌باشد:

$$\nabla^2\phi = \nabla.(\nabla\phi)$$

مثلاً در مختصات مستطيلي

$$\nabla.\nabla\phi = \nabla.\left(\hat{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\hat{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

در مختصات استوانه‌اي

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{d\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

در مختصات كروي

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{d\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

نوع ديگر مشتقات از درجه بالاتر

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla\left(\nabla.\vec{F}\right) - \nabla^2 \vec{F}$$

که در آن (مختصات مستطيلي)

$$\nabla^2 \vec{F} = \hat{a}_x\left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right) + \hat{a}_y\left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{dy^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}\right) + \hat{a}_z\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}\right)$$

- برخي روابط مشتق‌گيري

$$\nabla.\left(\phi\vec{F}\right) = \phi\nabla.\vec{F} + \nabla\phi.\vec{F}$$

$$\nabla \times \left(\phi\vec{F}\right) = \phi\nabla \times \vec{F} + \nabla\phi \times \vec{F}$$

$$\nabla.\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \nabla.\vec{A} + \nabla.\vec{B}$$

$$\nabla \times \left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$$