فصل دوم:

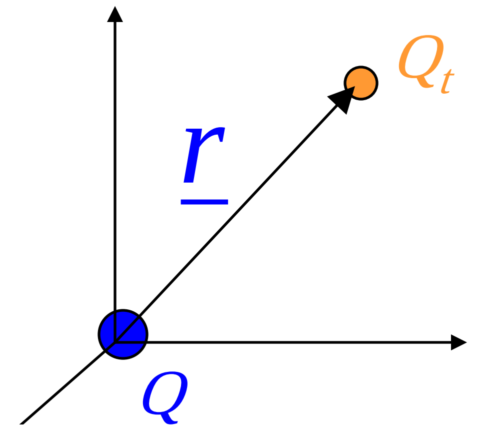
(بخش دوم)

میدانهای الکتریکی ساکن

Static Electric Fields

Electric Field ميدان الكتريكي

$$\underline{F}_{Q_t} = \hat{a}_r \frac{QQ_t}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$\boxed{\overline{E} = \lim_{Q_t \to 0} \frac{\overline{F}_{Q_t}}{Q_t}}$$

$$\overline{E}(r) = \hat{a}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

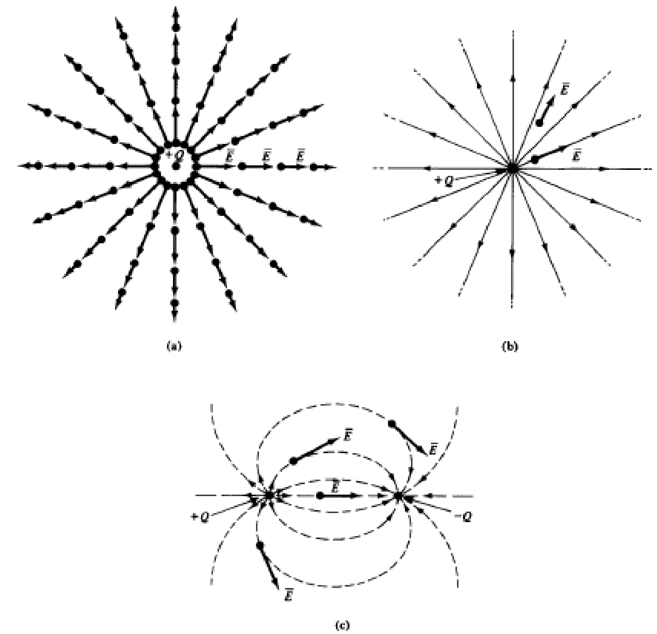


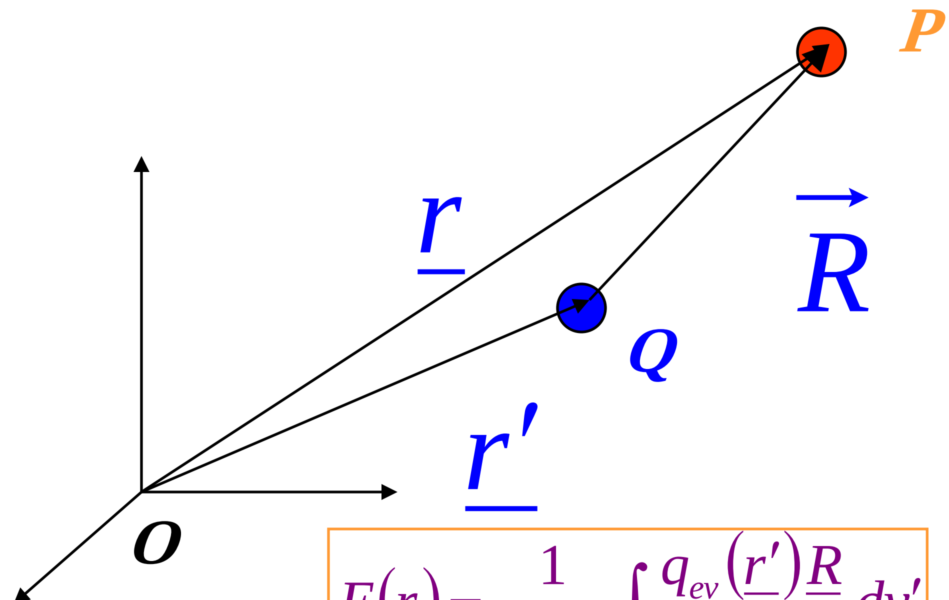
Figure 3-1 Development of the flux line concept: (a) plot of the vector force field $\overline{E}$ at discrete points in two-dimensional space about a $+Q$ (C) point charge; (b) plot of electric flux lines about a $+Q$ point charge; (c) plot of electric flux lines about two point charges. The actual plots must be drawn in three-dimensional space.

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{Q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

where

$$\vec{R} = \underline{r} - \underline{r}'$$

$$R = \left|\underline{r} - \underline{r}'\right|$$



$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{q_{ev}(\underline{r}')\underline{R}}{R^3}\,dv'$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'} \frac{q_{es}(\underline{r}')\underline{R}}{R^3}\,ds'$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'} \frac{q_{el}(\underline{r}')\underline{R}}{R^3}\,dl'$$

$$\vec{E}(\underline{r}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k \vec{R}_k}{4\pi\varepsilon_0 R_k^{\ 3}}$$

میدان خط بار بینهایت

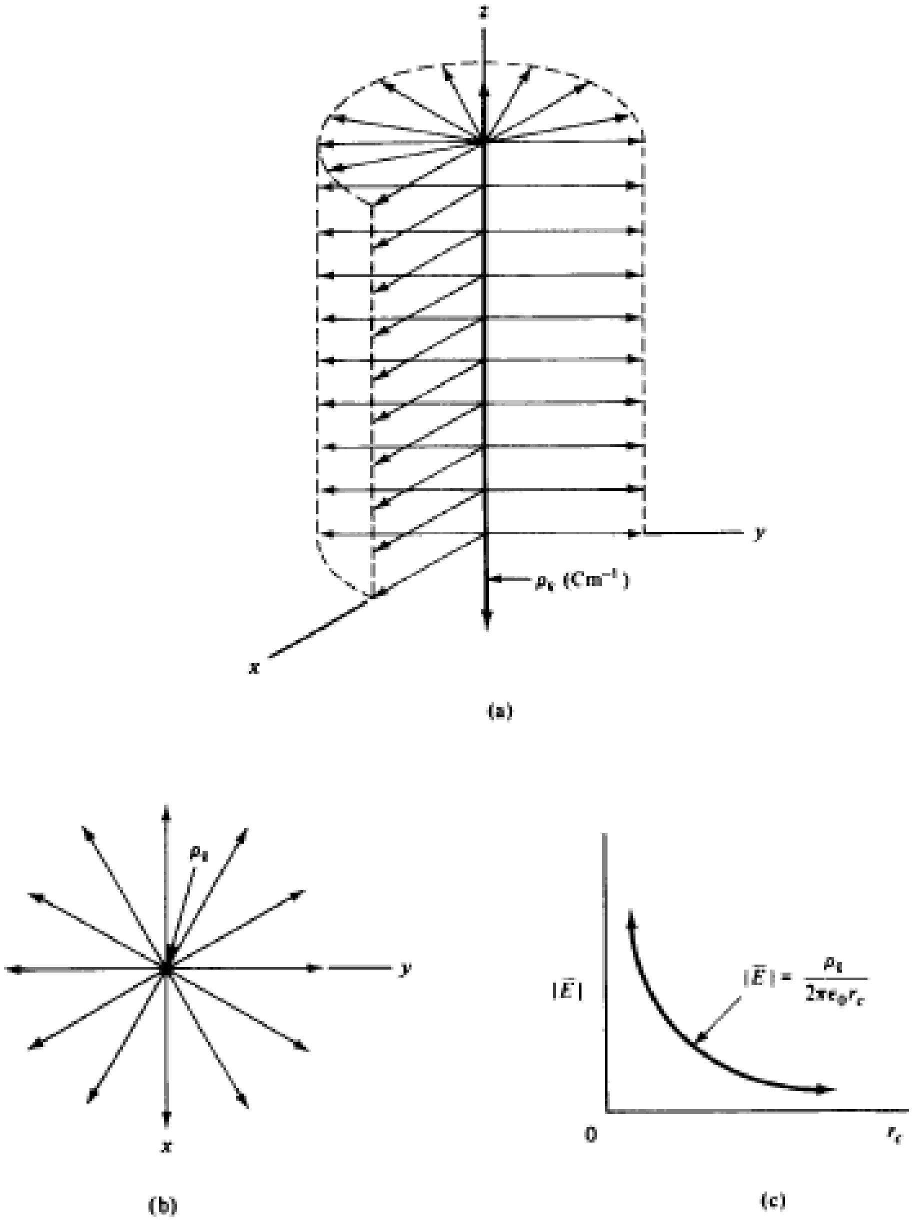


Figure 3-3 (a) Electric flux plot about an infinite line charge of uniform ρ_ℓ (C m^{-1}) in three-quarter space only. (b) Electric flux plot in a z = constant plane. (c) Plot of $|\bar{E}|$ versus r_c.

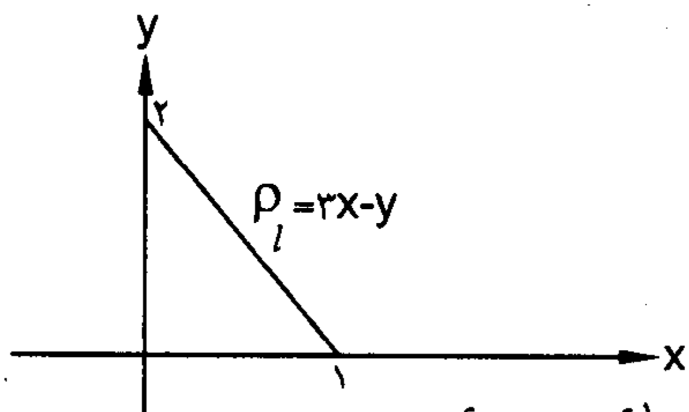
مثال ۱: دوبار $q_۱ = ۱۶^{nc}$ و $q_۲ = ۲۵^{nc}$ بفاصله ۳۶^{cm} از هم قرار دارند بار مثبت q در چه فاصله‌ای از $q_۱$ قرار گیرد تا بیحرکت بماند.

حل: *بدیهی است که بار q نمی‌تواند در خارج خط واصل $q_۱$ به $q_۲$ قرار گیرد زیرا هر دو نیرو در یک راستا بوده و بار q نمی‌تواند بیحرکت بماند بنابراین بار q حتماً باید بین دو بار $q_۱$ و $q_۲$ قرار گیرد. حال اگر فاصله دوبار $q_۱$ و $q_۲$ را d و فاصله بار q از $q_۱$ را x بگیریم خواهیم داشت*

$$\rightarrow \frac{q_۱ q}{۴\pi\varepsilon_\circ x^۲} = \frac{q_۲ q}{۴\pi\varepsilon_\circ (d-x)^۲} \Rightarrow ۱۶(d-x)^۲ = ۲۵x^۲ \Rightarrow$$

$$۴(d-x) = ۵x \rightarrow x = \frac{۴}{۹}d = \frac{۴}{۹} \times ۳۶ = ۱۶^{cm}$$

مثال : میله‌ای مطابق شکل در صفحه xy قرار دارد و دارای بار الکتریکی به چگالی $\rho_\ell = ۳x - y$ می‌باشد کل بار توزیع شده روی میله را بدست آورید.



معادله میله: $\quad y = ۲ - ۲x \Rightarrow dy = -۲dx$

$$\rho_\ell = ۳x - y = ۳x - (۲ - ۲x) = ۵x - ۲$$

$$d\ell = \sqrt{(dx)^۲ + (dy)^۲} = \sqrt{(dx)^۲ + (-۲dx)^۲} = \sqrt{۵}\,dx$$

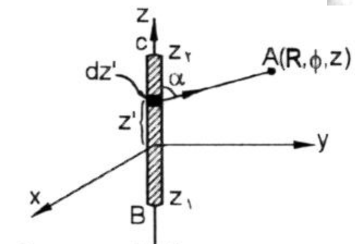
$$q = \int \rho_\ell d\ell = \int_\circ^۱ (۵x - ۲)\sqrt{۵}\,dx = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}x^۲ - ۲\sqrt{۵}x\Big]_\circ^۱ = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲} - ۲\sqrt{۵} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

محاسبه میدان‌الکتریکی ناشی از یک میله با چگالی بار طولی ρ_ℓ در یک نقطه از فضا

فرض کنیم میله‌ای بطول محدود و با چگالی بار طولی ρ_ℓ روی محور zها قرار دارد مطابق شکل زیر میدان در نقطه A که در دستگاه استوانه‌ای دارای مختصات (R, ϕ, z) است از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E_A = \int \frac{\rho_\ell d\ell}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R \quad \text{و} \quad \overline{R} = R\,\hat{a}_R + (z - z')\,\hat{a}_z \qquad (۱۴-۲)$$

که z' مختصات نقطه‌ای روی میله با بار dq میباشد که $dq = \rho_\ell d\ell$ و $d\ell = dz'$ با جایگزینی $\overline{R}$ در رابطه میدان (رابطه ۲-۱۴) خواهیم داشت.



شکل (۲-۵): محاسبه میدان الکتریکی ناشی از یک میله

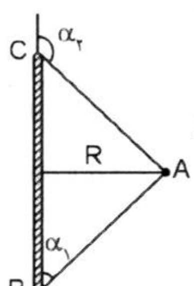
$$\overline{E}_A = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_\ell dz' \left[R\,\hat{a}_R + (z-z')\,a_z\right]}{4\pi\varepsilon_0 \left[R^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overline{E}_A = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_\ell dz' R\,\hat{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 \left[R^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_\ell (z-z')\,dz'\,\hat{a}_z}{4\pi\varepsilon_0 \left[R^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

انتگرال اول با تغییر متغیر $\cot g\,\alpha = \dfrac{z - z'}{R}$ و انتگرال دوم با تغییر متغیر $z - z' = u$

براحتی قابل محاسبه هستند که نتیجه بصورت زیر خواهد شد.

$$\overline{E}_A = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right]\hat{a}_R + \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-z_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-z_1)^2}}\right]\hat{a}_z$$



که با توجه به شکل زیر میدان در نقطه A به صورت زیر خواهد بود.

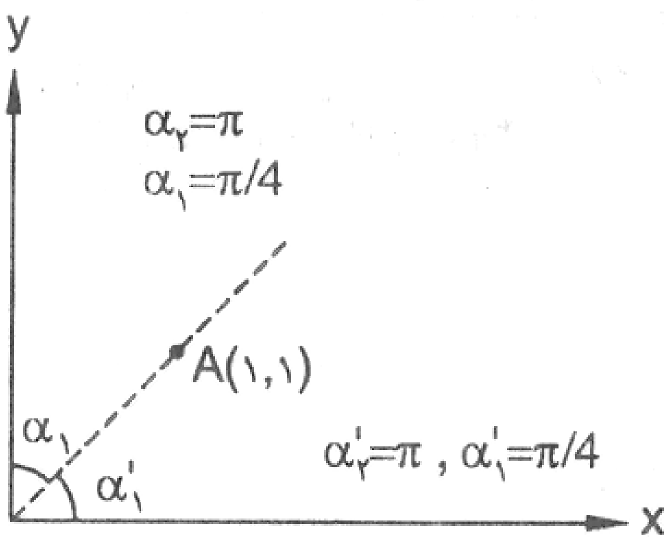
$$E_A = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right]\hat{a}_R + \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB}\right]\hat{a}_z \qquad (۱۵-۲)$$

که همانطوریکه در شکل (۲-۶) نشان داده شده است α_1 و α_2 زاویهٔ AB و AC با میله و R فاصله عمودی A از میله می‌باشند.

شکل (۲-۶): پارامترهای محاسبه میدان

مثال : دو میله عمود بر هم به ترتیب روی قسمت مثبت محور x و y قرار داشته و دارای چگالی بار طولی ρ_ℓ می‌باشند میدان الکتریکی در روی نیمساز ربع اول (۱و۱) A را بدست آورید.

حل: مطابق شکل زیر میدان را برای تک تک میله‌ها حساب کرده و با استفاده از اصل جمع آثار جمع این دو میدان را روی نیمساز بدست می‌آوریم.



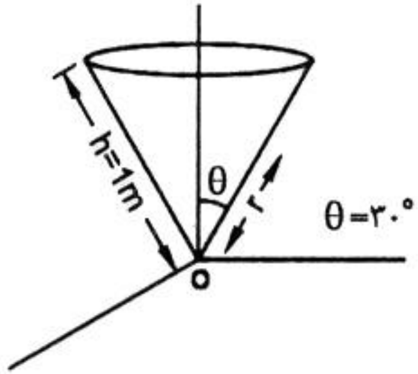
$$\overline{E}_۱ = \frac{\rho_\ell}{۴\pi\varepsilon_\circ}(\cos\alpha'_۱ - \cos\pi)\,\hat{a}_y + \frac{\rho_\ell}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{\infty} - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right]\hat{a}_x$$ میدان میله افقی

$$\overline{E}_۲ = \frac{\rho_\ell}{۴\pi\varepsilon_\circ}(\cos\alpha_۱ - \cos\pi)\,\hat{a}_x + \frac{\rho_\ell}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{\infty} - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right]\hat{a}_y$$ میدان میله عمودی

$$\overline{E} = \overline{E}_۱ + \overline{E}_۲ = \frac{\rho_\ell}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱\right)\hat{a}_y - \frac{\rho_\ell}{۴\pi\varepsilon_\circ\sqrt{۲}}\hat{a}_x + \frac{\rho_\ell}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱\right)\hat{a}_x - \frac{\rho_\ell}{۴\pi\varepsilon_\circ\sqrt{۲}}\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow \overline{E} = \frac{\rho_\ell}{۴\pi\varepsilon_\circ}(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

مثال : بار سطحی با چگالی غیر یکنواخت $\rho_s = kr$ روی پوسته مخروطی شکل زیر توزیع شده است میدان E را در رأس مخروط بدست آورید کل بار روی مخروط، Q چقدر است؟



***حل:** اگر از معادله (۲-۹) که میدان ناشی از توزیع سطحی را می‌دهد مسئله را حل کنیم خواهیم داشت.*

$$\overline{E}_o = \iint \frac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_R \qquad \bar{r} = -r\,\hat{a}_r$$

$$\overline{E}_o = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \frac{\rho_s (r\, d\phi \sin\theta)\, dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(-\hat{a}_r)$$

$$\overline{E}_o = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \frac{kr\,(r\sin\theta\, d\phi\, dr)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(-\hat{a}_x \sin\theta\cos\phi - \hat{a}_y \sin\theta\sin\phi - \hat{a}_z\cos\theta)$$

واضح است که انتگرال‌های مولفه‌های $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ صفر است زیرا $\int_0^{2\pi}\sin\phi\, d\phi = 0$ و $\int_0^{2\pi}\cos\phi\, d\phi = 0$

بنابراین خواهیم داشت.

$$E_o = -\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\frac{k\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\phi}{4\pi\varepsilon_0}\hat{a}_z = \frac{-k}{4\varepsilon_0}\sin 2\theta\,\hat{a}_z = -\frac{k\sqrt{3}}{8\varepsilon_0}\hat{a}_z$$

$$Q = \iint \rho_s\, ds = \int_0^{1}\int_0^{2\pi} kr\,(r\sin\theta\, d\phi\, dr)\Big|_{\theta=30^\circ} = k\pi\int_0^{1} r^2\, dr = \frac{k\pi}{3} \quad (C)$$

مثال: بار پيوسته‌اي كه در فضاي آزاد ميدان الكتريكي با شدت $\vec{E}$ ايجاد مي‌كند را بدست آوريد:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\hat{a}_R \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R & 0 \le R \le b \\ -\hat{a}_R \dfrac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2} & R > b \end{cases}$$

$$\nabla.\vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \nabla.\vec{E}$$

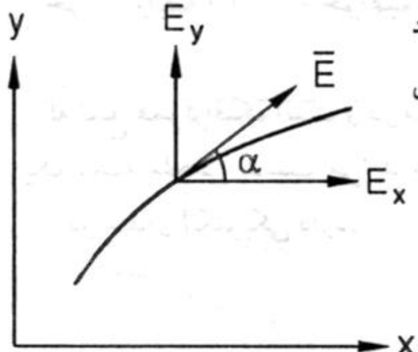
$$0 \le R \le b \quad \Rightarrow \quad \rho = \varepsilon_0 \nabla.\left[-\hat{a}_R \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R\right] = \varepsilon_0 \times \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left[R^2\left(-\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R\right)\right] = -\rho_0$$

$$R > b \quad \Rightarrow \quad \rho = \varepsilon_0 \nabla.\left[-\hat{a}_R \frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2}\right] = \varepsilon_0 \times \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left[R^2\left(\frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^3}\right)\right] = 0$$

خطوط میدان الکتریکی

خطوط میدان الکتریکی جهت حرکت یک ذره باردار الکتریکی را که در آن میدان الکتریکی قرار می‌گیرد را مشخص می‌کنند بعبارت دیگر اگر یک ذره باردار در یک میدان الکتریکی قرار گیرد روی یک مسیری حرکت می‌کند که معادله این مسیر همان معادله خطوط میدان الکتریکی می‌باشد بردار میدان الکتریکی در هر لحظه بر این مسیر مماس است

مطابق شکل (۲-۸) اگر منحنی $y=f(x)$ منحنی مسیر حرکت ذره باردار در میدان E باشند (منحنی خطوط میدان) در اینصورت همانطوریکه ملاحظه می‌شود بردار $\overline{E}$ بر این منحنی مماس است اگر از تعریف ضریب زاویه خط مماس بر منحنی که همان مشتق منحنی به ازای مختصات نقطه تماس است استفاده کنیم خواهیم داشت.



شکل (۲-۸): منحنی خطوط میدان

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{E_y}{E_x} \qquad (۲۳-۲)$$

رابطه (۲-۲۳) را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\frac{dy}{E_y}=\frac{dx}{E_x} \qquad (۲۴-۲)$$

از حل معادله دیفرانسیل (۲-۲۴) معادله خطوط میدان بصورت $y=f(x)$ بدست می‌آید در حالت کلی که میدان دارای هر سه مولفه است در اینصورت رابطه (۲-۲۴) را میتوان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{dy}{E_y}=\frac{dx}{E_x}=\frac{dz}{E_z} \qquad (۲۵-۲)$$

در حقیقت معادله (۲-۲۵) معرف معادله یک سطح می‌باشد معادله خطوط میدان در دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی بصورت زیر می‌باشد.

مختصات استوانه‌ای $$\frac{dR}{E_R}=\frac{R\,d\phi}{E_\phi}=\frac{dz}{E_z} \qquad (۲۶-۲)$$

مختصات کروی $$\frac{dr}{E_r}=\frac{r\,d\theta}{E_\theta}=\frac{r\sin\theta\,d\phi}{E_\phi} \qquad (۲۷-۲)$$

مثال : یک میله طویل دارای بار الکتریکی به چگالی طولی $\rho_\ell = ۲\pi\varepsilon_\circ$ می‌باشد مطلوبست معادله خطوط میدان.

حل: می‌دانیم میدان ناشی از یک میله بی نهایت بزرگ عبارتست از $\overline{E} = \dfrac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_\circ R}\hat{a}_R$ *که* R *فاصله میله تا نقطه‌ای است که میدان در آن نقطه حساب می‌شود همانطوریکه ملاحظه می‌شود میدان تنها یک مولفه* E_R *دارد بنابراین نمی‌توان از رابطه (۲-۲۶) استفاده کرد لذا باید میدان را از دستگاه مختصات استوانه‌ای به قائم تبدیل کرد.*

$$\overline{E} = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_\circ R}\hat{a}_R = \frac{۱}{R}\hat{a}_R = \frac{۱}{R}(\hat{a}_x\cos\phi + \hat{a}_y\sin\phi)$$

$$\overline{E} = \frac{۱}{R}(\hat{a}_x\frac{x}{R} + \hat{a}_y\frac{y}{R}) = \hat{a}_x\frac{x}{x^۲+y^۲} + \hat{a}_y\frac{y}{x^۲+y^۲}$$

با تبدیل میدان به دستگاه قائم می‌توان از رابطه (۲-۲۴) استفاده کرد

$$\frac{dy}{E_y} = \frac{dx}{E_x} \rightarrow \frac{dy}{\frac{y}{x^۲+y^۲}} = \frac{dx}{\frac{x}{x^۲+y^۲}} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \ln y = \ln cx \rightarrow y = cx$$

چگالی شار الکتریکی

چگالی شار الکتریکی کمیتی است برداری که برخلاف بردار شدت میدان الکتریکی به خصوصیات محیط بستگی ندارد و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

طبق قانون گوس اگر یک سطح بسته را در نظر بگیریم، انتگرال چگالی شار الکتریکی روی آن سطح برابر است با مقدار بار داخل آن سطح یعنی داریم:

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = Q$$

بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

با استفاده از قانون گوس به سادگی می‌توان برای مسائلی که دارای تقارن می‌باشند چگالی شار الکتریکی را محاسبه کرد. در این مسائل راحت‌تر است که از این راه شدت میدان الکتریکی را بدست آورد. مثلاً برای یک بار نقطه‌ای q، در فاصلهٔ r از آن چگالی شار الکتریکی بصورت $\mathbf{D} = \dfrac{q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$ خواهد بود.

پتانسیل الکتریکی

برای جابجا کردن واحد بار در داخل یک میدان از یک نقطه به نقطهٔ دیگر کاری باید انجام گیرد که مقدار آن برابر اختلاف پتانسیل بین آن دو نقطه تعریف شده است.

$$V(B) - V(A) = -\int_{A}^{B} \mathbf{E} . dl$$

پس برای انتقال بار Q از نقطهٔ A به نقطهٔ B، در داخل میدان الکتریکی E باید کار انجام دهیم و مقدار آن برابر است با:

$$W = QV_{BA} = Q[V(B) - V(A)]$$

غالباً یک نقطه در بینهایت دور را بعنوان پتانسیل مرجع انتخاب می‌کنند و به آن پتانسیل صفر نسبت می‌دهند. و پتانسیل هر نقطهٔ دیگر نسبت به این نقطه سنجیده می‌شود:

$$V(A) = -\int_{\infty}^{A} \mathbf{E} . \mathbf{dl}$$

با توجه به مقدار شدت میدان در اطراف یک بار نقطه‌ای با محاسبهٔ انتگرال بالا نتیجه می‌گیریم که پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای در فاصلهٔ r از آن بصورت

$$V(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

خواهد بود. این نتیجه را طبق اصل برهم نهی می‌توان برای مجموعهٔ چند بار گسسته تعمیم داد:

$$V(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon r_i}$$

در مواردی که توزیع پیوسته‌ای از بار داشته باشیم مجموع فوق به انتگرال تبدیل می‌شود و خواهیم داشت:

$$V = \int \frac{dq}{۴\pi\varepsilon\, r}$$

عنصر بار dq بسته به اینکه توزیع بار، حجمی، سطحی یا خطی باشد بصورت ρdv، $\rho_s\, as$ یا $\rho_l\, al$ تغییر می‌یابد و انتگرال روی حجم، سطح یا خط مورد نظر اعمال می‌شود.

رابطهٔ بین پتانسیل و شدت میدان الکتریکی بصورت

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

خواهد بود. در خیلی از موارد برای بدست آوردن شدت میدان می‌توان ابتدا پتانسیل را بدست آورد و با اعمال عملگر گرادیان، شدت میدان الکتریکی را محاسبه نمود. از رابطهٔ بالا بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که

$$\nabla \times \mathbf{E} = ۰$$

و بنابر قضیهٔ استوکس نتیجه می‌گیریم:

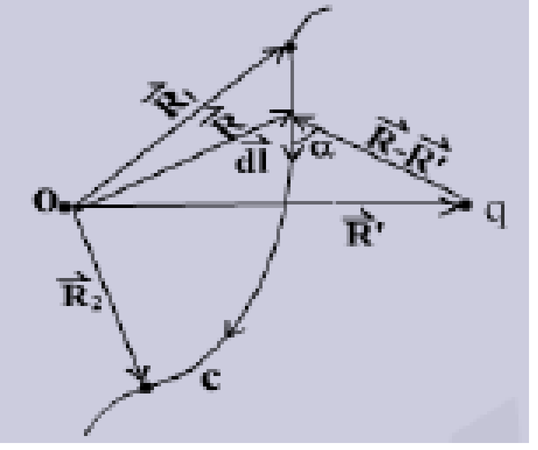
$$\oint_s \mathbf{E}\,.\,\mathbf{dl} = ۰$$

به نوعی بیان کنندهٔ قانون ولتاژ کیرشهف (KVL) می‌باشد.

تابع پتانسيل الكتريكي Electric potential

مي‌دانيم كه شدت ميدان الكتريكي با نيروي وارد بر يك بار الكتريكي كه در آن ميدان قرار مي‌گيرد رابطه دارد پتانسيل الكتريكي با ميزان انرژي لازم براي آنكه يك بار الكتريكي از نقطه‌اي به نقطه ديگر حركت كند رابطه دارد.

بنابراين اگر بار نقطه‌اي q را كه در نقطه R' واقع است و توليد يك ميدان در همه فضاي خالي مي‌كند در نظر بگيريم، مقدار انرژي لازم براي حركت دادن يك بار q_t از نقطه $\bar{R}_1$ به نقطه $\bar{R}_2$ روي مسير c را مي‌خواهيم محاسبه كنيم.



$$\bar{F}_{q_t} = \frac{qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\bar{R}-\bar{R}'\right)}{\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|^3}$$

نيروي لازم براي حركت q_t $\bar{F} = -\bar{F}_{q_t}$

$$W = \int_{\bar{R}_1}^{\bar{R}_2}\bar{F}.\overrightarrow{dl} = \int_{\bar{R}_1}^{\bar{R}_2}\frac{-qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\bar{R}-\bar{R}'\right)}{\left|R-R'\right|^3}.d\bar{l}$$

$$(\bar{R}-\bar{R}')d\bar{l} = |\bar{R}-\bar{R}'|\, dl\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{d|\bar{R}-\bar{R}'|}{dl}$$

بنابراين:

$$W = -\frac{qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\bar{R}_1}^{\bar{R}_2} \frac{|\bar{R}-\bar{R}'|\, d(|\bar{R}-\bar{R}'|)}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3} = \frac{-qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\bar{R}_1}^{\bar{R}_2}\frac{d(|\bar{R}-\bar{R}'|)}{|R-R'|^2}$$

$$W = q_t\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\bar{R}_2-\bar{R}'|} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\bar{R}_1-\bar{R}'|}\right]$$

پس W بستگي به مسير c ندارد و تنها تابع نقاط ابتدائي و انتهائي است.

$$W = q_t\left[v(\bar{R}_2) - v(\bar{R}_1)\right] = q_t \Delta V$$

بنابراين انرژي لازم براي تغيير مكان q_t از نقطه اي به نقطه ديگر با حاصلضرب اختلاف پتانسيل دو نقطه فوق در بار q_t مساويست.

$$V(\bar{R}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\bar{R}-\bar{R}'|}$$

پتانسيل نقطه $\bar{R}$ به دليل وجود بار الكتريكي q در نقطه $\bar{R}'$ واحد J/C يا Volt

براي N بار الكتريكي نقطه اي

$$V(\bar{R}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\bar{R}-\bar{R}'|}$$

براي يك بار پيوسته

$$V(\bar{R}) = \int_v \frac{\rho(\bar{R}')dv'}{4\pi\varepsilon_0|\bar{R}-\bar{R}'|}$$

مثال: اگر بار نقطه اي 10^{-7} كولمبي در (۳و۲و۱) واقع باشد ، تابع پتانسيل را در هر نقطه در فضاي خالي به دست آوريد.

$$\bar{R}=\hat{a}_x x+\hat{a}_y y+\bar{a}_z z$$
$$\bar{R}=\hat{a}_x+\hat{a}_y 2+\bar{a}_z 3$$
$$\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$
$$V(\bar{R})=V(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ\left|R-\bar{R}'\right|}=\frac{900}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}}$$

مثال: با پيوسته با چگالي $10^{-7}R\ {}^{c}\!/_{m^3}$ از مبداء مختصات تا شعاع ۱ متر قرار دارد پتانسيل را در مركز مختصات به دست آوريد.

$$\bar{R}=0$$
$$\bar{R}'=\hat{a}_R R' \qquad\qquad V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int\frac{\rho(\bar{R}')dv'}{\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|}$$
$$\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|=R'$$
$$V(0,0,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_0^1\frac{10^{-7}R'}{R'}4\pi R'^2dR'=1200\pi$$

- ديدگاهي ديگر

$$\bar{E}(\bar{R})=\frac{q\left(\bar{R}-\bar{R}'\right)}{4\pi\varepsilon_0\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|^3}$$
$$V(\bar{R})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|}$$
$$\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|}\right)=-\frac{1}{\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|^2}\equiv\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

بنابراين:
$$\bar{E}(\bar{R})=-\nabla V(\bar{R})$$

*بنابراين تا كنون سه روش براي محاسبه $\bar{E}$ قابل دسترس است.

۱ – استفاده از فرمول كلي (بر پايه قانون كولمب)

$$\bar{E}(\bar{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho(\bar{R}')dv'}{\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|^3}(\bar{R}-\bar{R}')$$

۲ – استفاده از قانون گاوس

$$\oint_s \bar{E}.d\bar{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv'$$

۳ – استفاده از رابطه $\bar{E}=-\nabla V$ با محاسبه V از رابطه

$$V(\bar{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dv'}{\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|}$$

- شكل انتگرالي رابطه $\bar{E}=-\nabla V$ عبارتست از:

$$V(P_2)-V(P_1)=-\int_{P_1}^{P_2}\bar{E}.d\bar{l}$$

انرژی الکتریکی

هنگامی که مجموعه‌ای از N بار نقطه‌ای در فضا داشته باشیم در این مجموعه انرژی ذخیره می‌شود، به عبارتی دیگر می‌توان گفت برای تشکیل چنین سیستمی باید انرژی صرف نمود که مقدار این انرژی از رابطهٔ

$$W = \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{N} q_i V_i$$

بدست می‌آید که در این رابطه برای هر بار q_i مقدار پتانسیل ناشی از سایر بارها در آن نقطه، یعنی V_i را بدست می‌آوریم (خاطر نشان می‌شود که این انرژی می‌تواند مثبت یا منفی باشد).

در مواردی که توزیع پیوستهٔ باری با چگالی ρ داریم مقدار انرژی پتانسیل ذخیره شده در این مجموعه را می‌توان از رابطهٔ

$$W = \frac{۱}{۲} \int_{v'} \rho V dv$$

بدست آورد. V در رابطهٔ فوق نشانگر پتانسیل می‌باشد و dv عنصر حجم میباشد و انتگرال روی حجم V' که در آن ناحیه بار وجود داد گرفته می‌شود.

کمیت دیگری که می‌توان تعریف نمود چگالی انرژی الکتریکی w می‌باشد و می‌توان مقدار آن را از روابط زیر بدست آورد:

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon \,|\, \mathbf{E} \,|^2$$

$$w = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{D}|^2}{\varepsilon}$$

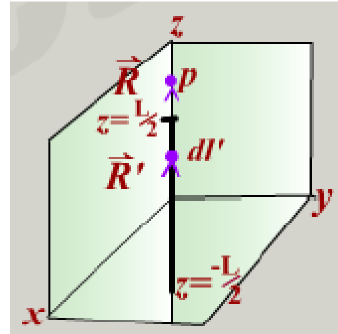
با انتگرالگیری از w روی حجم مورد نظر می‌توان مقدار کل انرژی را محاسبه نمود یعنی:

$$W = \int_{V'} w dv$$

از کمیت چگالی انرژی الکتریکی می‌توان برای محاسبهٔ نیروی وارد بر سطح در فصل مشترک دو محیط متفاوت استفاده نمود. بدین ترتیب نیروی وارد بر واحد سطح فصل مشترک دو محیط برابر اختلاف چگالی انرژی در دو محیط می‌باشد. و برای حاسبهٔ کل نیرو باید از این مقدار روی سطح مورد نظر انتگرال گرفت. پس

$$\text{نیروی وارد بر واحد سطح} = W_1 - W_2$$

مثال: منبع بار خطي به طول L بر روي محور zها با چگالي يکنواخت ρ_l در دست است. مطلوبست محاسبه شدت ميدان الکتريکي و تابع پتانسيل الکتريکي نقاط مستقر در امتداد اين بار خطي:



$$P\left|\begin{aligned} &r=0\\ &\varphi=0\\ &z=z\end{aligned}\right.$$

$$\bar{R}=z\hat{a}_z$$

$$\bar{R}'=z'\hat{a}_z$$

$$\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|=(z-z') \qquad z>L/2$$

$$dl'=dz'$$

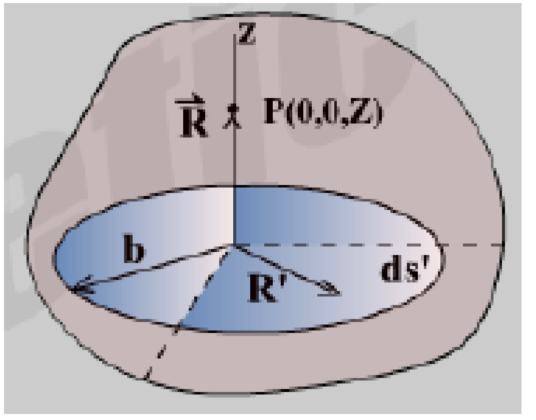
$$V(\bar{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\rho_l\,dz'}{(z-z')} \quad \Rightarrow$$

$$V(\bar{R})=-\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln(z-z')\Big]_{-L/2}^{L/2}$$

$$V=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{z+(L/2)}{z-(L/2)}\right] \qquad |z|>L/2$$

$$\bar{E}=-\nabla V=-\hat{a}_z\frac{dv}{dz}=\hat{a}_z\frac{\rho_l L}{4\pi\varepsilon_0\left[z^2-(L/2)^2\right]} \qquad z>L/2$$

مثال: مطلوبست محاسبه شدت ميدان الكتريكي بر روي محور يك ديسك دايره‌اي با شعاع b كه بار يكنواخت سطحي به چگالي ρ_s روي آن توزيع شده است.



$$\bar{R} = z\hat{a}_z$$

$$\bar{R}' = r'\hat{a}_r$$

$$\left|\bar{R} - R'\right| = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

$$ds' = r'dr'd\varphi'$$

$$V(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \frac{\rho_s ds'}{\left|\bar{R} - \bar{R}'\right|} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{r'dr'd\varphi'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

$$V(\bar{R}') = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi\sqrt{z^2 + r'^2}\Big]_0^b = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\left(z^2 + b^2\right)^{1/2} - |z|\right]$$

$$\bar{E} = -\nabla V = -\hat{a}_z\frac{dv}{dz} = \begin{cases} \hat{a}_z\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 - z\left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}\right] & z > 0 \\ -\hat{a}_z\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 + z\left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}\right] & z < 0 \end{cases}$$

ـ اگر در سطح بسته S هیچگونه بارالکتریکی موجود نباشد و تمامی نقاط این سطح بسته دارای پتانسیل معلوم V_0 باشند، در مورد نقاط داخل این سطح بسته می توان گفت: (مهندسی برق ۸۲)

۱) پتانسیل برابر صفر است.

۲) شدت میدان الکتریکی برابر صفر است.

۳) در حالت کلی پتانسیل نقاط داخل سطح بسته متفاوتند.

۴) شدت میدان الکتریکی برابر مقدار ثابتی مخالف صفر است.

ـ گزینه (۲) صحیح است.

این سطح بسته می تواند یک پوسته کروی هادی که در پتانسیل V_0 قرار دارد باشد. از آنجا که در صورت سؤال ذکر شده است که در سطح بسته هیچگونه بار الکتریکی وجود ندارد لذا طبق قانون گاوس می‌توان گفت که در تمامی نقاط داخل این سطح شدت میدان الکتریکی برابر صفر می‌باشد و لذا گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.

با همان استدلال نادرستی گزینه ۴ مشخص می‌شود.

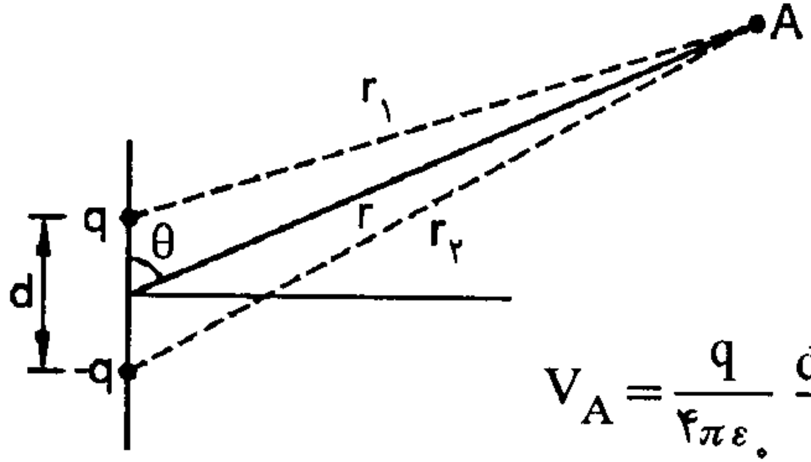
از آنجا که در داخل سطح بسته هیچگونه میدان الکتریکی وجود ندارد و نیز داریم.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0 \rightarrow V_B = V_0 = V_A$$

اگر نقطهٔ A را روی سطح بگیریم $V_A = V_0$ است و هر نقطهٔ دیگری داخل سطح نیز دارای پتانسیل V_0 می‌باشد لذا گزینه‌های ۱ و ۳ نادرست می‌باشند.

مثال : با استفاده از رابطه بین پتانسیل و میدان، میدان ناشی از یک دو قطبی الکتریکی را در فاصله دور بدست آورید.

حل: اگر نقطه A بفاصله r_1 از بار q و r_2 از بار q- فرض شود خواهیم داشت.



$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = r - \frac{d}{2}\cos\theta$$

$$r_2 = r + \frac{d}{2}\cos\theta$$

$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{d\cos\theta}{r^2} \;\rightarrow\; V_A = \frac{q\,d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

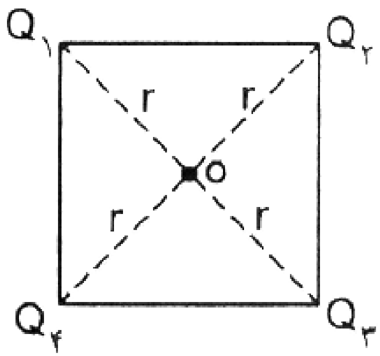
چون پتانسیل در مختصات کروی بدست آمده است از رابطه (۳-۱۵) جهت بدست آوردن میدان استفاده می‌کنیم.

$$\overline{E}_A = -\overline{\nabla} V_A = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{a}_\theta$$

که پس از مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$\overline{E} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right] \qquad (۳-۱۹)$$

مثال : چهار بار 1^{nc} , -4^{nc} , 3^{nc} , 5^{nc} در روی رئوس یک مربع به ضلع 5^{m} قرار دارند پتانسیل در مرکز مربع چقدر است؟



حل:

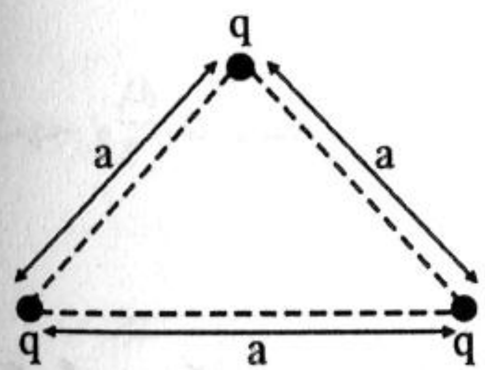
$$V_O = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_4}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V_O = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4\right) = \frac{9\times 10^{9}}{5\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(5\times 10^{-9}\right)$$

$$V_O = \frac{18}{\sqrt{2}} = 12/6^{V}$$

ـ سه بار الکتریکی یکسان q روی راسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a قرار دارند. انرژی الکتریکی این مجموعه بار کدام است؟

ـ گزینه (۲) صحیح است.



می‌دانیم که انرژی الکتریکی ذخیره شده در یک سیستم از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$W = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{N} q_i V_i$$

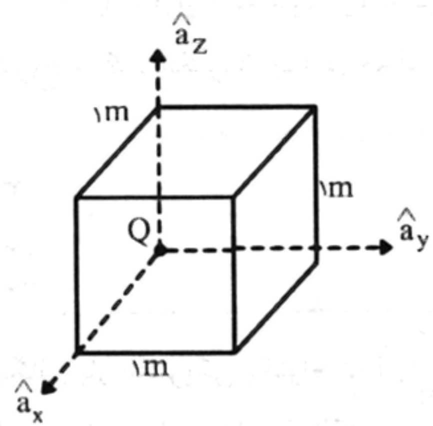
که V_i پتانسیل ناشی از بقیهٔ بارها در محل بار i ام می‌باشد.

در این مسأله داریم:

$$V_i = \frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_{\circ} a} = \frac{q}{۲\pi\varepsilon_{\circ} a}$$

$$W = \frac{۳}{۲}\left(\frac{q\cdot q}{۲\pi\varepsilon_{\circ} a}\right) = \frac{۳}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{q^{۲}}{a}$$

ـ بار نقطه‌ای Q در مبداء مختصات قرار دارد. یک مکعب به ضلع $1m$ که مرکز آن بر بار Q منطبق است، در نظر بگیرید. مقدار شار میدان D از سطوح جانبی مکعب خارج می‌شود، برابر است با:



۱) $\frac{Q}{6}$

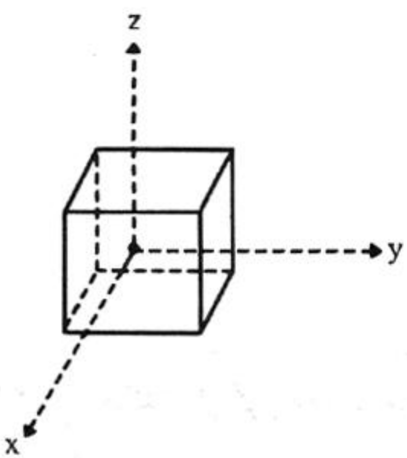
۲) $\frac{Q}{\sqrt{2}}$

۳) $\frac{2Q}{3}$

۴) $\frac{\sqrt{2}Q}{4}$

ـ گزینه (۳) صحیح است.

طبق قانون گاوس شار خارج شونده از هر سطح بسته برابر مقدار بار خالص داخل آن سطح می‌باشد، لذا کل شار خروجی از مکعب برابر Q خواهد بود. می‌خواهیم شار عبوری از هر وجه این مکعب را محاسبه کنیم. با توجه به تقارن شکل پیداست که از هر وجه این مکعب شاری برابر $\frac{Q}{6}$ عبور خواهد کرد.

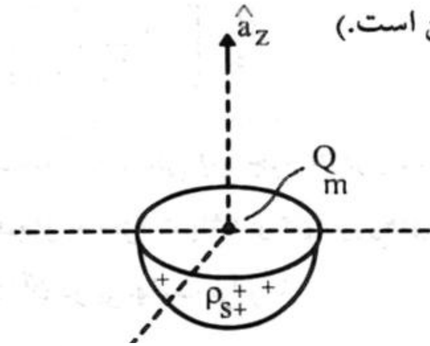


سطوح جانبی مکعب ۴ سطح می‌باشد لذا خواهیم داشت:

انتگرالگیری روی سطوح جانبی مکعب می‌باشد،

$$\int_{(\text{سطح جانبی مکعب})} \mathbf{D}\,.\,\mathbf{ds} = 4\frac{Q}{6} = \frac{2Q}{3}$$

- پوسته نیم‌کروی شکل مقابل دارای بار سطحی یکنواخت با چگالی $\rho_s \frac{c}{m^2}$ می‌باشد. یک ذرهٔ باردار با جرم m و بار Q همنام با ρ_s را در مرکز این نیم‌کره قرار می‌دهیم. جرم m باید چقدر باشد تا ذره سقوط نکند؟ (ε_0 ضریب دی‌الکتریک فضای آزاد و g شتاب ثقل زمین است.)



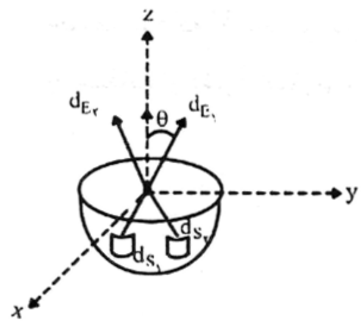
۱) $\frac{Q\rho_s}{4g\varepsilon_0}$

۲) $\frac{Q\varepsilon_0}{2g\rho_s}$

۳) $\frac{2Qg}{\varepsilon_0\rho_s}$

۴) $\frac{4Qg}{\varepsilon_0\rho_s}$

- گزینه (۱) صحیح است.



با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم که شدت میدان ناشی از عنصر سطح ds_1 به دلیل تقارن با عنصر سطح ds_2 در روی محور y مؤلفه‌ای نخواهد داشت و فقط مؤلفهٔ‌ای روی محور Zها خواهد داشت پس داریم:

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_s a^2 \sin\theta d\theta d\phi}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cos\theta(-\mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta\, d\phi\ (-\mathbf{a}_z) = \frac{\rho_s}{4\varepsilon_0}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} = \frac{\rho_s Q}{4\varepsilon_0}\mathbf{a}_z$$

این مقدار نیرو باید بر وزن بار غلبه کند لذا خواهیم داشت:

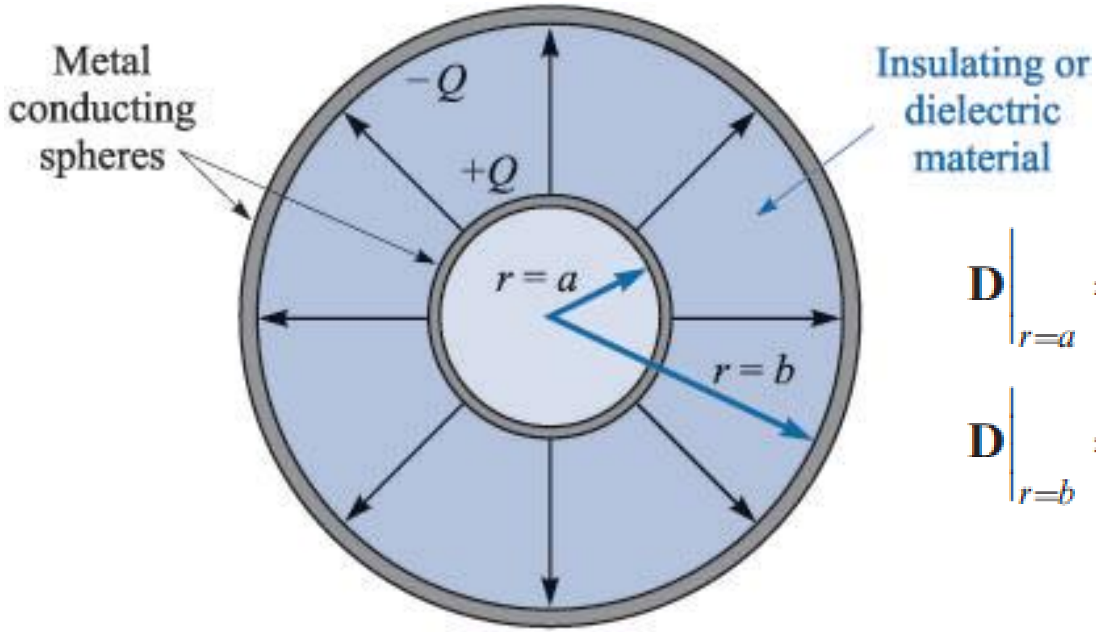
$$\mathbf{F} = mg \Rightarrow \frac{\rho_s Q}{4\varepsilon_0} = mg \rightarrow m = \frac{Q\rho_s}{4g\varepsilon_0}$$

حضور هاديها در ميدان الكتريكي ساكن

چنانچه يك جسم هادي را در نظر بگيريم، روشن است كه هيچ اختلاف پتانسيلي بين كليه نقاط آن وجود ندارد و هادي در يك سطح پتانسيل ثابت قرار دارد بنابراين با توجه به $\bar{E} = -\nabla V$ شدت ميدان در جسم هادي صفر خواهد بود.

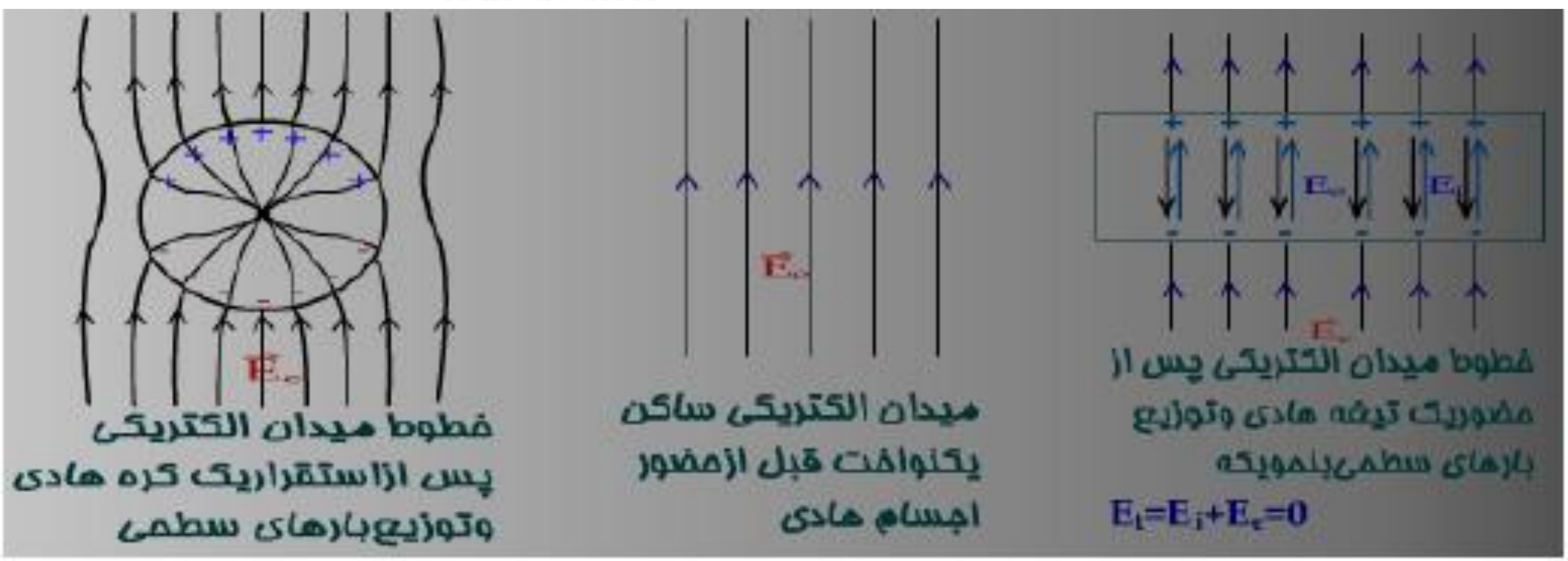
از طرفي چنانچه در جسم هادي شدت ميدان الكتريكي غير صفري وجود داشته باشد، اين ميدان سبب اعمال نيرو به بارهاي الكتريكي (الكترونها) موجود در هادي كرده و در نتيجه تجمع بارهاي همنام منفي در يك طرف و بارهاي مثبت در طرف ديگر شده يعني ايجاد اختلاف پتانسيل بين اين دو مكان از هادي ميگردد كه خلاف واقع است بنابراين $\bar{E}$ در داخل اجسام هادي صفر خواهد بود.

چنانچه يك هادي در يك ميدان الكتريكي خارجي قرار گيرد سبب تغيير توزيع بارهاي موجود در داخل هادي ميشود و اگر اين هادي خنثي باشد، توزيع جديد بارها به نحوي خواهد بود كه ميدان بوجود آمده از اين توزيع جديد ميداني بوجود ميآورند كه دقيقاً برابر با ميدان خارجي اما در خلاف جهت با آن باشند به نحوي كه $\bar{E}$ كل در داخل هادي صفر شود توزيع بارها بر روي سطوح هادي بطريقي خواهد شد تا خطوط ميدان در جهت عمود بر اين سطوح قرار گيرند چه در غير اينصورت ايجاد مؤلفه مماسي كرده و همين امر نشان دهنده وجود ميدان غير صفر در هادي (سطح هادي) ميشود كه غير ممكن است.



$$\mathbf{D}\Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r \qquad \text{(inner sphere)}$$

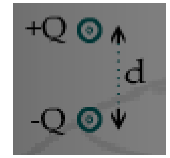
$$\mathbf{D}\Big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2}\mathbf{a}_r \qquad \text{(outer sphere)}$$



دو قطبي الکتريکي Electric Dipole

ترکيبي از دو بار الکتريکي مساوي و غير همنام که بفاصله مشخصي از هم قرار گرفته‌اند.

بعنوان مثال: دو بار Q+ و Q- بفاصله d



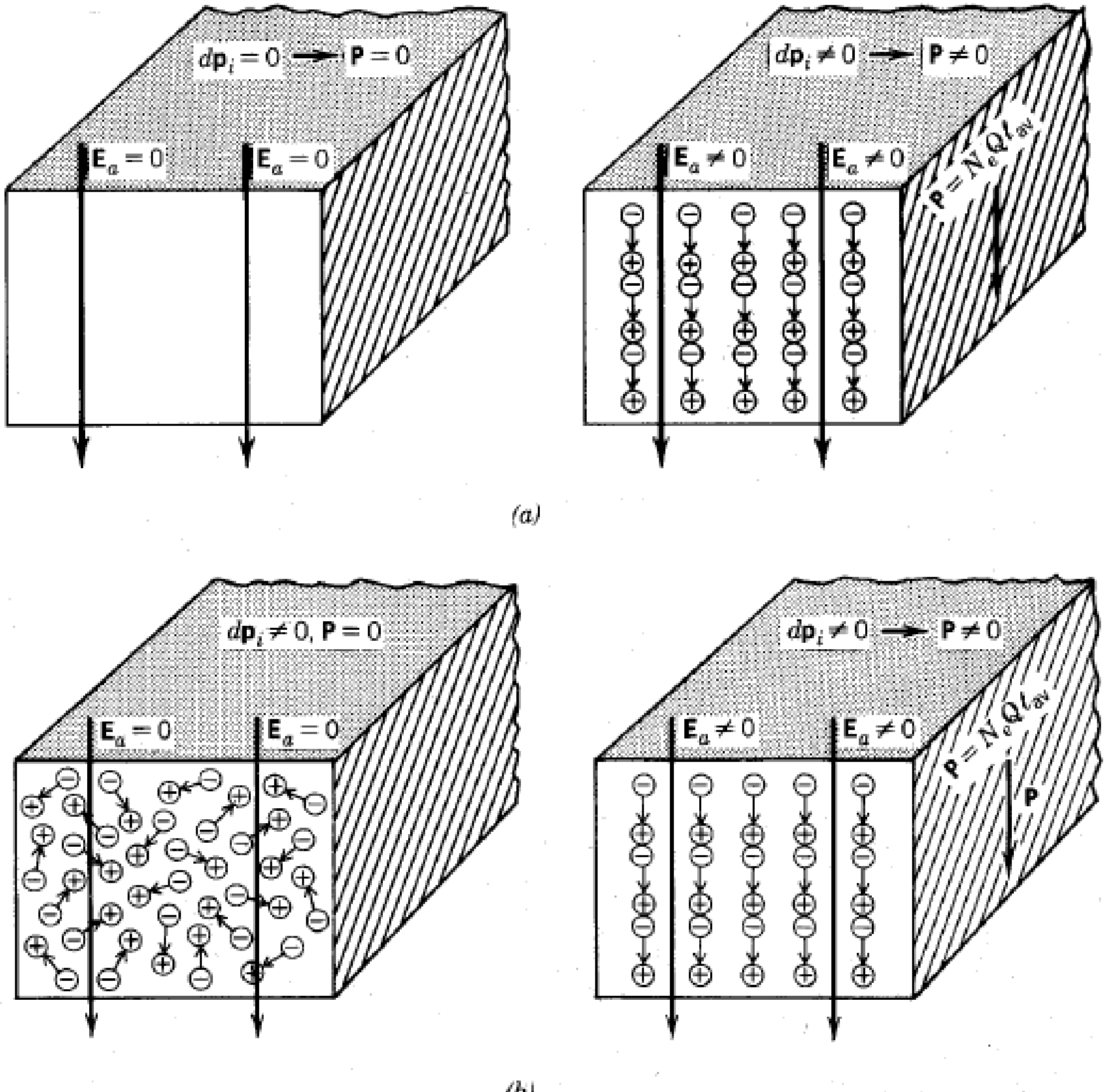
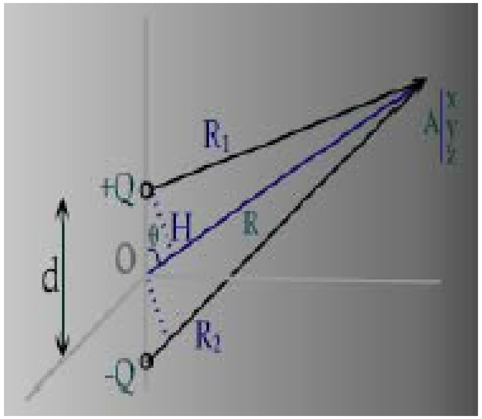


FIGURE 2-5 Macroscopic scale models of (*a*) nonpolar and (*b*) polar material.

الکتر

محاسبه تابع پتانسيل الكتريكي يك دو قطبي

در اين قسمت پتانسيل ناشي از يك دو قطبي الكتريكي در ناحيه دور (Far zone) را بدست مي‌آوريم و با استفاده از رابطه $\bar{E}=-\nabla V$ شدت ميدان الكتريكي آن (Far Field) را محاسبه خواهيم كرد.



يك دو قطبي واقع در مبدأ مختصات را در نظر بگيريد.

محاسبه پتانسيل نقطه‌اي كلي مانند $A\left|\begin{matrix}R\\ \theta\\ \varphi\end{matrix}\right.$

$$V(\bar{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{q_i}{|R-R_i|}$$

$$V(\bar{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{+Q}{R_1}+\frac{-Q}{R_2}\right]$$

ناحيه دور $$R_1,R_2,R>>d \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2}{R^2}\to 0$$

$$R_1\approx R-OH$$

$$OH=\frac{d}{2}\cos\theta$$

$$R_1 \approx R - \frac{d}{2}\cos\theta$$

$$R_2 \approx R + \frac{d}{2}\cos\theta$$

همچنين:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{-1}{R_2}\right] \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R - \frac{d}{2}\cos\theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2}\cos\theta}\right]$$

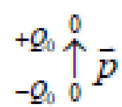
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R + \frac{d}{2}\cos\theta - R + \frac{d}{2}\cos\theta}{R^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta}\right] = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2\left[1 - \frac{d^2}{4R^2}\cos^2\theta\right]}$$

$$V(\vec{R}) \approx \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}$$

$\vec{P}$ گشتاور دو خطي الكتريكي Electric Dipole moment جهت بردار $\vec{P}$ از بار منفي بطرف بار مثبت است (يعني برعكس جهت $\vec{E}$)

$$P = Qd \quad , \quad \hat{a}_p = \hat{a}_z$$

$$V(\vec{R}) = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$



از طرفي مي‌دانيم :

$$\hat{a}_z . \hat{a}_R = \cos\theta$$

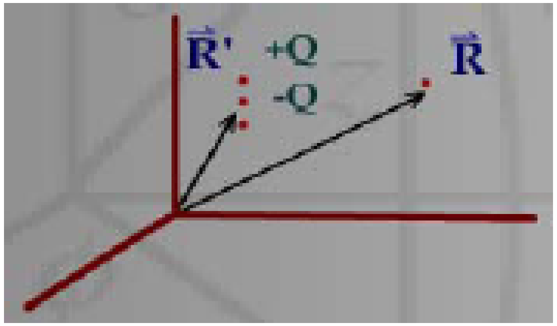
بنابراين:

$$P\cos\theta = P\hat{a}_z . \hat{a}_R = \bar{P} . \hat{a}_R = \bar{P} . \frac{\bar{R}}{R}$$

در نتيجه:

$$V(\bar{R}) = \frac{\bar{P} . \bar{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

چنانچه دو قطبي در موقعيت $\vec{R}'$ واقع شده باشد و نه در مبدأ مختصات



$$V(\bar{R})=\frac{\bar{P}.(\bar{R}-\bar{R}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|^3}$$

- ميدان الكتريكي يك دو قطبي

$$\bar{E}=-\nabla V=-\left(\hat{a}_R\frac{dV}{dR}+\hat{a}_\theta\frac{1}{R}\frac{dV}{d\theta}\right)$$

$$\bar{E}(\bar{R})=\frac{P\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_R+\frac{P\sin\theta}{4\lambda\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_\theta$$

و يا

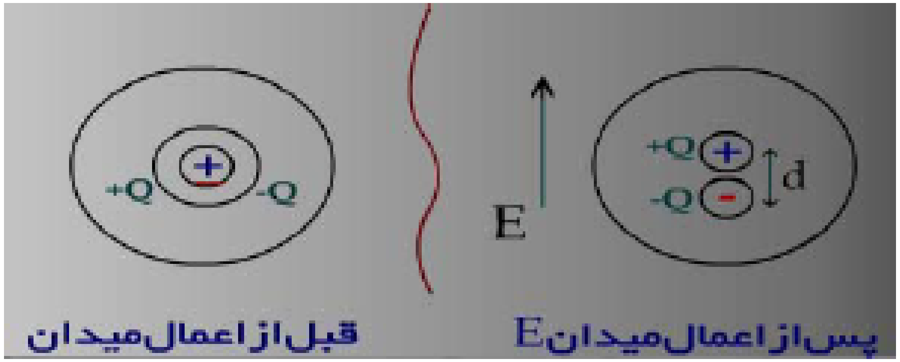
$$\bar{E}(\bar{R})=\frac{\bar{P}.\hat{a}_R}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_R-\frac{\bar{P}.\hat{a}_\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_\theta$$

حضور عايق‌ها در ميدان الكتريكي ساكن و پلاريزاسيون

در اثر اعمال يك ميدان الكتريكي به اتم يا مولكول يك جسم عايق، مركز بارهاي مثبت و مركز بارهاي منفي كه قبل از آن بر روي هم قرار داشته‌اند، جابه‌جا مي‌شوند.

اين جابجا شدن با فرض اينكه ساختار فوق خنثي است بصورت يك دو قطبي نمود خواهد كرد +Q (كل بار مثبت) و Q− (كل بار منفي) كه فاصله d از هم قرار مي‌گيرند.

شدت $\bar{E}$ به اندازه‌اي نيست كه بارهاي منفي كه در قيد ساختار هستند از آن رها شدند.



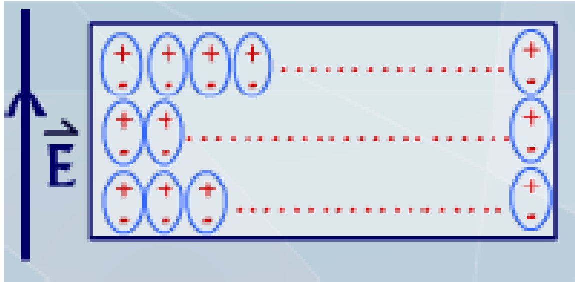
دو نيرو بر هسته (+Q) وارد مي‌شود F_{-Q} ناشي از بارهاي منفي (-Q) و F_E ناشي از ميدان $\bar{E}$ كه چون هسته در حال تعادل است بايستي نيروهاي فوق به تعادل برسند يعني:

$$\bar{F}_{-Q} + \bar{F}_E = 0$$

$$F_{-Q} = F_E \quad \Rightarrow \quad Qd = \varepsilon_0 XeE \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = \varepsilon_0 Xe\bar{E}$$

Xe ضريب تأثيرپذيري يا حساسيت الكتريكي عايق ناميده مي‌شود. (Susceptibility)

چنانچه يك قطعه عايق كه متشكل از تعداد زيادي اتم يا مولكول آن عايق خواهد بود را در نظر بگيريم كه در يك ميدان الكتريكي خارجي قرار بگيرد، قطب‌بندي و يا اصطلاحاً پلاريزاسيون اتفاق و يا بعبارتي نظم خاصي در ساختار اتمي يا مولكولي عايق بوجود مي‌آيد كه ايجاد ممان دو قطبي در آن خواهد كرد.



- چون $\bar{E}$ آنچنان زياد نيست كه الكترونها از قيد هسته جدا شوند، تغيير شكل (deform) در عايق رخ نخواهد داد و بارها مقيد به ساختار خواهند بود و بهمين دليل آنها را بارهاي مقيد Bound charge يا بارهاي پلاريزه گويند.
- با قطب‌بندي بارهاي مقيد، توليد ميدان الكتريكي مي‌شود در خلاف جهت $\bar{P}$ يا $\bar{E}$ كه سبب خواهد شد شدت ميدان كل از مقدار اوليه كاهش يابد.

$$\overset{\bar{P}}{\uparrow}{}^{+}_{-} \downarrow \bar{E}_P \uparrow \bar{E}$$

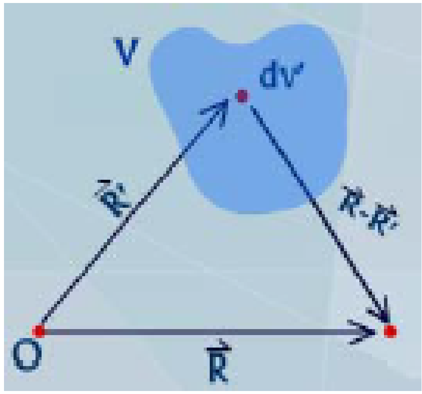
$$\bar{E}_{total} = \bar{E}_p + \bar{E}$$

$$E_{total} = E - E_P < E$$

و اين دليل عمده در بكارگيري عايق‌ها در مواجهه با ميدان‌هاي قوي (ولتاژ زياد) مي‌باشد.

- محاسبه پتانسیل و شدت میدان الکتریکی بعلت عایق‌های پلاریزه

$\bar{P} =$ ممان در واحد حجم عایق



$$dV(\bar{R}) = \frac{\bar{P}(\bar{R}')dV'.(\bar{R}-\bar{R}')}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{R}-\bar{R}'|^3}$$

$$V(\bar{R}) = \int_v \frac{P(\bar{R}').(\bar{R}-\overline{R'})}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{R}-\bar{R}'|^3} dV'$$

$$V(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \left\{\nabla'.\left[\frac{\bar{P}}{|\bar{R}-\bar{R}'|}\right] - \frac{\nabla'.\bar{P}}{|\bar{R}-\bar{R}'|}\right\} dV'$$

$$V(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\bar{P}.d\bar{s}'}{|\bar{R}-\bar{R}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{-\nabla'.\bar{P}}{|\bar{R}-\bar{R}'|} dV'$$

$$V(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\bar{P}.\hat{n}ds'}{|\bar{R}-\bar{R}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{-\nabla'.\bar{P}}{|\bar{R}-\bar{R}'|} dV'$$

پتانسيل ناشي توزيع بارهاي حجمي و سطحي آزاد: $V(\bar{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\bar{P}_s ds'}{|\bar{R}-\bar{R}'|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{P dv'}{|\bar{R}-\bar{R}'|}$

چگالي بار مفيد (پلاريزه) سطحي در سطح عايق پلاريزه: $\rho_{P_S}=\bar{P}.\hat{n}$

چگالي بار مفيد (پلاريزه) حجمي در حجم عايق پلاريزه: $\rho_P=-\nabla.\bar{P}$

بنابراين:

$$V(\bar{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\rho_s+\rho_{P_S}}{|\bar{R}-\bar{R}'|}ds'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho+\rho_P}{|\bar{R}-\bar{R}'|}dV'$$

$$\bar{E}(\bar{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{(\rho_s+\rho_{P_S})(\bar{R}-\bar{R})}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3}ds'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(\rho+\rho_P)(\bar{R}-\bar{R}')}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3}dV'$$

چگالي فلوي ميدان الكتريكي

$$\oint_S \bar{E}.d\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V (\rho + \rho_P)dv'$$

$$\nabla.\bar{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla.\left(\varepsilon_0 \bar{E}\right) = \rho - \nabla.\bar{P}$$

$$\nabla.\left(\varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}\right) = \rho$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \qquad \textit{Electric Flux Density}$$

$$\nabla.\bar{D} = \rho \qquad \text{يا} \qquad \oint_S \bar{D}.d\bar{s} = Q_{free} = \int_V \rho dv'$$

اما مي‌دانيم كه

$$\bar{P} = \varepsilon_0 Xe\bar{E}$$

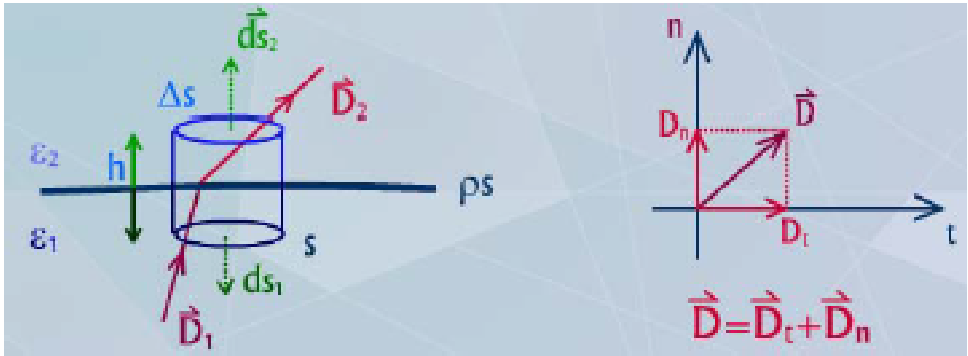
$$\Rightarrow \qquad \bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \varepsilon_0 Xe\bar{E}$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 (1 + Xe)\bar{E} \quad , \quad \bar{D} = \varepsilon\bar{E}$$

$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + Xe)$ *Absolute Electric Permitivity* ε= ضريب نفوذپذيري مطلق عايق

$\varepsilon_r = 1 + Xe$ *Relative Electric Permitivity* ε_r= ضريب نفوذپذيري نسبي عايق

شرايط مرزي در سطح مشترك دو محيط Boundary condition



$$\oint_s \bar{D}.d\bar{s} = Q$$

$$\oint_s \bar{D}.d\bar{s} = \int_{s_1} \vec{D}.d\bar{s}_1 + \int_{s_2} \overline{D}_2.d\bar{s}_2 + \int_{\text{جانبی}} \bar{D}.d\bar{s}$$

$$\int_{s_1} \bar{D}_1.d\bar{s}_1 = \int_{s_1} \left(\bar{D}_{1t} + \bar{D}_{1n}\right)d\bar{s}_1 = \int_{s_1} \bar{D}_{1t}.d\bar{s}_1 + \int_{s_1} \bar{D}_{1n}.d\bar{s}_1 = 0 + D_{1n}(-\Delta s) = -D_{1n}\Delta S$$

$$\int_{s_2} \bar{D}_2.d\bar{s}_2 = \int_{s_2} \left(\bar{D}_{2t} + \vec{D}_{2n}\right)d\bar{s}_2 = 0 + D_{2n}(\Delta S) = D_{2n}\Delta S$$

$$\int_{\text{جانبی}} \bar{D}.d\bar{s} \underset{h\to 0}{=} 0$$

$$\Rightarrow \qquad \oint_s \overline{D}.d\bar{s} = D_{2n}\Delta s - D_{1n}\Delta S$$

چون عايق‌ها كامل فرض شده‌اند:

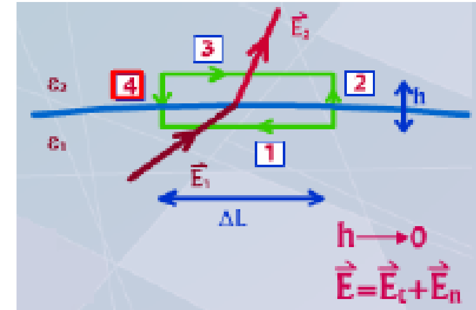
$$Q = \int_V \rho dv' = \int_S \rho_s ds' = \rho_s \Delta S$$

$$(D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \rho_s \Delta S \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

$$if \qquad \rho_s = 0 \Rightarrow D_{2n} = D_{1n}$$

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$$

$$\nabla.\bar{P} = -\rho_P \qquad \Rightarrow \qquad P_{1n} - P_{2n} = \rho_{ps}$$



$$\nabla \times \bar{E} = 0$$
$$\oint_C \bar{E}.d\bar{l} = 0$$
$$\oint_C \bar{E}.d\bar{l} = \int_{(1)} \bar{E}_1.d\bar{l}_1 + \int_{(2)} \bar{E}.d\bar{l}_2 + \int_{(3)} \bar{E}_2.d\bar{l}_3 + \int_{(4)} \bar{E}.d\bar{l}_4$$

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$
$$\oint_C \bar{E}.d\bar{l} = 0$$
$$\oint_C \bar{E}.d\bar{l} = \int_{(1)} \bar{E}_1.d\bar{l}_1 + \int_{(2)} \bar{E}.d\bar{l}_2 + \int_{(3)} \bar{E}_2.d\bar{l}_3 + \int_{(4)} \bar{E}.d\bar{l}_4$$
$$= E_{1t}\Delta L + 0 + E_{2t}(-\Delta L) + 0 = (E_{1t} - E_{2t})\Delta L = 0$$
$$E_{1t} = E_{2t}$$
$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

چنانچه يكي از محيطها هادي باشد با توجه به آنكه در هادي $\bar{P},\bar{D},\bar{E}$ صفر است.

(مثلاً محيط اول هادي است)

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \qquad E_1 = D_1 = P_1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad D_{2n} = \rho_s$$
$$E_{2n} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_2}$$
$$E_{2t} = E_{1t} = 0$$

يعني در مرز هادي‌ها تنها مؤلفه عمود وجود دارد.

مثال: بار نقطه‌اي Q+ در مركز يك پوسته هادي كروي با شعاع داخلي R_i و شعاع بيروني $R_\circ$ قرار دارد توابع $\bar{E}$ و V را بر حسب فاصله R بدست آوريد (محيط مسئله فضاي آزاد)

- براي ناحيه $R>R_\circ$

سطح گاوسي كروي با شعاع R:

$$\oint_S \bar{E}.d\bar{s} = \frac{Q_t}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint_S \bar{E}.d\bar{s} = E_1 4\pi R^2$$

با فرض آنكه پوسته هادي خنثي باشد:

$$Q_t = \int \rho dv = Q$$

$$E_1 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \bar{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$V = -\int \bar{E}.d\bar{l}$$

$$V_1(\bar{R}) - V(\infty) = -\int_\infty^R \bar{E}_1.d\bar{l} = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}\hat{a}_R.\hat{a}_R dR'$$

با فرض $V(\infty)=0$:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'}\Bigg]_\infty^R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- براي ناحيه $R_i<R<R_\circ$ چون در جسم هادي قرار داريم:

$$E_2 = 0$$

$$V_2 = V_1\Big|_{R=R_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$$

- براي ناحيه $R<R_i$ سطح گاوسي كروي با شعاع R:

$$\oint_S \bar{E}.d\bar{s} = E_3 4\pi R^2$$

$$Q_t = Q$$

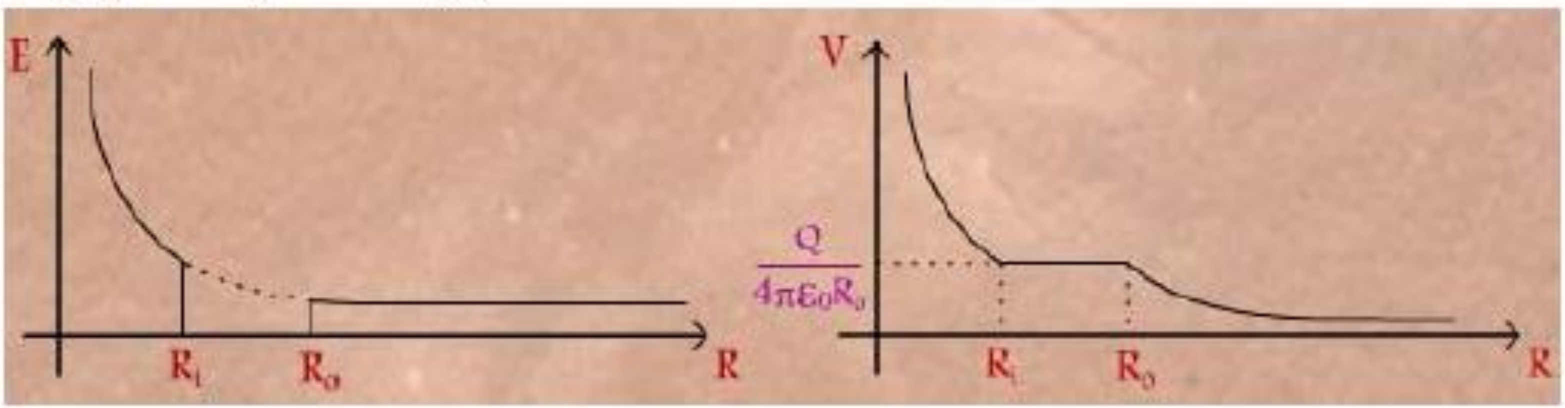
بنابراین

$$E_3 = 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \bar{E}_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$V_3 = -\int_\infty^R \bar{E}.d\bar{l} = -\int_\infty^{R_0} \bar{E}_1.d\bar{l} - \int_{R_i}^R \bar{E}_3.d\bar{l}$$

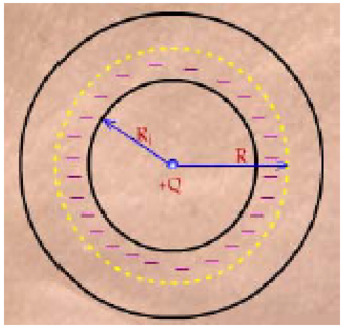
$$V_3 = V_2 - \int_{R_i}^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}dR' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'}\right)\Bigg]_{R_i}^R$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$



مثال: براي مثال قبل مطلوبست تعيين بارهاي توزيع شده در نقاط مختلف پوسته هادي.

با توجه به خنثي بودن هادي و با عنايت به آنكه $E_2 = 0$:



$$\oint \overline{E}_2 . d\overline{s} = \frac{Q_t}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q_t = 0 \Rightarrow Q + Q_s = 0$$

$$\Rightarrow Q_s = -Q \Rightarrow \rho_s \Big|_{R=R_i} = -\frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

ديدگاه ديگر:

در $R = R_i$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

$$0 - D_1 = P_s \Rightarrow -\varepsilon_0 E_1 \Big|_{R=R_i} = \rho_s$$

$$-\frac{Q}{4\pi R_i^2} = \rho_s$$

$$\Rightarrow \rho_s = -\frac{Q}{4\pi R_i^{\,2}}$$

بنابراين

$$Q_s \Big|_{R=R_0} = -Q_s \Big|_{R=R_i} = Q$$

$$\rho_s \Big|_{R=R_0} = \frac{Q}{4\pi R_0^2}$$

و يا :

$$D_3 \Big|_{R=R_0} - D_2 \Big|_{R=R_0} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi R_0^2} - 0 = \rho_s$$

مثال: چنانچه پوسته کروي مثال قبل از جنس عايق با ثابت عايقي ε_r باشد مطلوبست محاسبه $V, \bar{P}, \bar{D}, \bar{E}$ برحسب فاصله R و نيز تعيين چگالي بارهاي پلاريزه.

$R > R_0$:

$$\oint \bar{D}_1 . d\bar{s}_1 = Q_t \Rightarrow D_1 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \bar{D}_1 \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

$$\bar{E}_1 = \frac{\bar{D}_1}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$\bar{p}_1 = \bar{D}_1 - \varepsilon_0\bar{E} = \varepsilon_1\bar{E}_1 - \varepsilon_0\bar{E} = \varepsilon_0\bar{E} - \varepsilon_0\bar{E} = 0$$

$$V_1(R) - V(\infty) = -\int_\infty^R \bar{E}_1 . d\bar{l} = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2} dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'}\Big]_\infty^R$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$R_i < R < R_0$:

$$\oint \bar{D}_2 . d\bar{s}_2 = Q_t \Rightarrow D_2 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \bar{D}_2 = \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\bar{D}_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R$$

$$\bar{P}_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\bar{E}_2 = \frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r R^2}\hat{a}_R$$

$$V_2 = -\int_\infty^R \bar{E} . d\bar{l} = -\int_\infty^{R_0} \bar{E}_1 . d\bar{l} - \int_{R_0}^R \bar{E}_2 . d\bar{l}$$

$$V_2 = V_1(R = R_0) - \int_{R_0}^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon R'^2} dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_0}$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + \frac{Q}{4\pi R_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$R < R_i$:

$$\oint \bar{D}_3 . d\vec{s}_3 = Q_t \Rightarrow \bar{D}_3 = \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

$$\bar{E}_3 = \frac{\bar{D}_3}{\varepsilon_3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{P}_3 = 0$$

$$V_3 = -\int_{\infty}^{R}\bar{E}.d\bar{l} = -\int_{\infty}^{R_i}\bar{E}.d\bar{l} - \int_{R_i}^{R}\bar{E}_3.d\bar{l}$$

$$V_3 = V_2(R = R_i) - \int_{R_i}^{R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}dR'$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_i} + \frac{Q}{4\pi R_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$

براي محاسبه چگالي بار حجمي بلاريزه در فاصله $R_i<R<R_0$:

$$\rho_p = -\nabla.\bar{P}_2$$

$$\rho_p = -\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 P_2\right) = -\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(\frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r}\right) = 0$$

$$\rho_P\Big|_{R=R_0} = \left(\bar{P}.\hat{n}\right)\Big|_{R=R_0} = \vec{p}_2\Big|_{R=R_0}.\hat{a}_R = \frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r R_0^2}\hat{a}_R.\hat{a}_R$$

$$\rho_P\Big|_{R=R_0} = \frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r R_0^2}$$

$$\rho_p\Big|_{R=R_i} = \bar{P}_2\Big|_{R=R_i}.\hat{n}\Big|_{R=R_i} = \frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r R_i^2}\hat{a}_R.(-\hat{a}_R) = -\frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r R_i^{\,2}}$$

نکته: قدرت تحمل عايق (ماده) را حداکثر شدت ميدان الکتريکي اعمالي به عايق بدون آنکه شکست (Breakdown) در مورد عايق رخ ندهد و بعبارتي تغيير شکل (ساختار) مولکولي انجام نگيرد. معمولاً اين پارامتر را با واحد V/m بيان مي‌گردد و مفهوم آن بصورت حداکثر ولتاژ قابل اعمال به قطعه‌اي با ضخامت مشخص بکار مي‌رود.

مثلاً قدرت تحمل عايقي هوا (با فشار اتمسفر) $3\times10^6\ V/m$ است و يا براي ميکا Mica با $\varepsilon_r = 6$ برابر $200\times10^6\ V/m$ يا $200\ MV/m$ است، بدين مفهوم که براي يك قطعه از جنس ميکا با ضخامت ۱cm حداکثر

$$V_{\max} = E_{\max}\times d = 200\times10^6\times10^{-2} = 2MV$$

۲ مگاولت قابل اعمال به قطعه خواهد بود بدون صدمه رسيدن به آن.

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0}$$

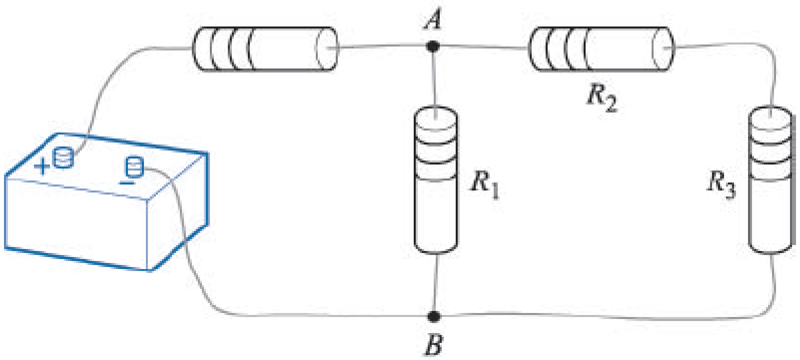
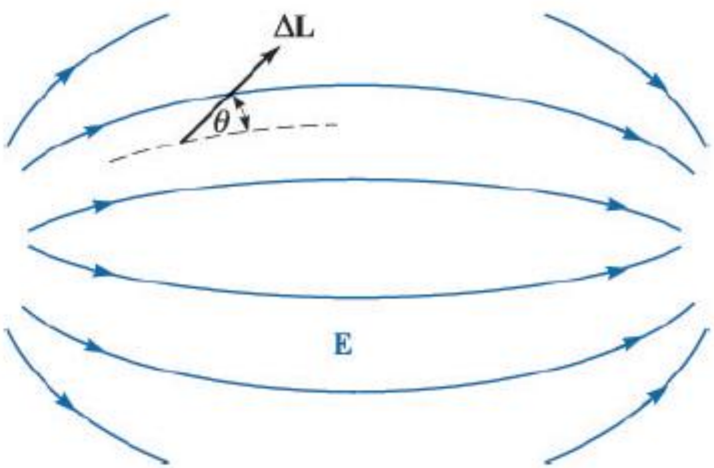


FIGURE 4.5
A simple dc-circuit problem which must be solved by applying $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ in the form of Kirchhoff's voltage law.

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$\Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{L}$$



$$\Delta V \doteq -E\Delta L \cos\theta$$

$$\frac{dV}{dL} = -E\cos\theta$$

FIGURE 4.6
A vector incremental element of length $\Delta\mathbf{L}$ is shown making an angle of θ with an $\mathbf{E}$ field, indicated by its streamlines. The sources of the field are not shown.

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V}$$

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \qquad \text{(cartesian)}}$$

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \qquad \text{(cylindrical)}}$$

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi \qquad \text{(spherical)}}$$

پلاریزاسیون عایق‌ها در میدان الکتریکی

در اثر اعمال میدان الکتریکی به یک دی‌الکتریک، بر ذرات باردار آن نیرویی اعمال می‌شود و دوقطبی‌های الکتریکی در داخل آن بوجود می‌آیند به این پدیده پلاریزاسیون یا قطبی شدگی گویند. حضور این دوقطبی‌ها باعث تغییر میدان در داخل و خارج عایق خواهند شد. بوسیلهٔ دو توزیع بار سطحی و حجمی می‌توان این تغییرات را مدل کرد. چگالی بار قطبی شدگی یا چگالی بار مقید سطحی را می‌توان از رابطهٔ

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$$

بدست آورد. که در این رابطه $\mathbf{P}$ بردار قطبی شدگی می‌باشد و $\mathbf{a}_n$ بردار عمود بر سطح دی‌الکتریک و به سمت خارج است. چگالی بار قطبی شدگی یا چگالی بار مقید حجمی را نیز می‌توان از رابطهٔ

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

محاسبه نمود. از آنجایی که با اعمال میدان به دی‌الکتریک، بار جسم تغییر نکرده است و فقط دوقطبی‌های موجود جهت‌دهی شده‌اند لذا مجموع بارهای مقید در دی‌الکتریک نیز برابر صفر خواهد بود. این امر از انتگرالگیری سطحی و حجمی از روابط فوق و جمع آنها قابل تحقیق می‌باشد. از آنجا که در داخل دی‌الکتریک چگالی بار حجمی برابر ρ_p تولید می‌شود در نتیجه باید این چگالی بار را نیز در محاسبهٔ میدان داخل دی‌الکتریک منظور کنیم یعنی:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_p)$$

می‌توان بردار چگالی شار الکتریکی $\mathbf{D}$ را در دی‌الکتریک‌ها بصورت

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

تعریف نمود. در اثر این تعریف رابطهٔ

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

همچنان برقرار خواهد بود. در این رابطه ρ چگالی بار حجمی آزاد خواهد بود (و نه بارهای مقید)
در محیط‌های خطی و همگن بردار قطبی شدگی را از رابطهٔ

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

می‌توان بدست آورد. در این رابطه χ_e کمیتی به نام پذیرندگی الکتریکی است. با جاگذاری این رابطه در رابطهٔ (۴-۳) خواهیم داشت:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

و کمیتی دیگر به نام گذردهی نسبی یا ضریب دی‌الکتریک محیط را بصورت

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

تعریف می‌کنیم. در نتیجه:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

خواهد بود که ε گذردهی مطلق (یاگذردهی) محیط خواهد بود.

هادی‌ها در میدان الکتریکی ساکن

در داخل یک هادی ایده‌آل هیچ باری وجود ندارد و میدان در داخل هادی نیز برابر صفر خواهد بود. و اگر به یک هادی باری اعمال شود تمام این بار در سطح هادی قرار خواهد گرفت و توزیع میدان هم در حالت پایدار به گونه‌ای خواهد بود که میدان الکتریکی در همه جا عمود بر سطح هادی می‌باشد.

در فصل مشترک یک هادی و یک فلز، مؤلفهٔ مماسی برابر صفر خواهد بود و می‌توان با استفاده از قانون گوس مؤلفهٔ عمودی را نیز بصورت زیر بدست آورد. پس شرایط مرزی در مرز بین یک هادی و فضای آزاد بصورت

$$E_t = ۰ \quad , \quad E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_۰}$$

خواهد بود.

شرایط مرزی در مورد میدان‌های الکتریکی ساکن

می‌توان نشان داد که در فصل مشترک دو محیط شرایط مرزی زیر برقرار خواهد بود:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$$

رابطه اول بیان می‌کند که در فصل مشترک دو محیط مؤلفهٔ مماسی میدان ثابت باقی می‌ماند. رابطهٔ دوم بیان می‌کند که مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{D}$ ناپیوسته است و مقدار این ناپیوستگی برابر چگالی بار سطحی می‌باشد.

خازن Capacitor

قطعاتي هستند كه به مجرد آنكه به ولتاژي (منبعي) متصل شوند (دو جسم هادي كه در بين آنها محيط عايقي قرار گرفته) بارهائي روي سطوح اين دو جسم جمع مي‌شود – بار مثبت روي يكي و بار منفي به همان مقدار روي ديگري. اين قطعه انرژي ميدان الكتريكي را در خود ذخيره مي‌كند. نسبت بار ذخيره شده به اختلاف پتانسيل بين دو جسم هادي آن مقداري است ثابت كه به آن ظرفيت گويند (capacitance). اين ظرفيت تنها تابع مشخصات فيزيكي قطعه است و نه كميت‌هاي الكتريكي مربوطه. مانند يك خازن مسطح با سطح هادي برابر با A كه بفاصله d از هم قرار گرفته‌اند و فضاي بين آنها از عايقي با ضريب گذردهي ε پر شده و $c=\dfrac{\varepsilon A}{d}$ مي‌باشد.

$$C=\frac{Q}{V}$$

$$C=\frac{\oint \bar{D}.d\bar{s}}{-\int \bar{E}.d\bar{l}}=\frac{\int \varepsilon\bar{E}.d\bar{s}}{-\int \bar{E}.d\bar{l}}$$

$$C=\frac{\oint_S \epsilon\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}{-\int_-^+ \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}}$$

خازن‌ها

اگر یک هادی دارای بار Q داشته باشیم و پتانسیل ناشی از آن V باشد. ظرفیت این هادی برابر مقدار بار الکتریکی که باید به این هادی افزوده شود تا پتانسیل آن یک واحد افزایش یابد تعریف می‌شود. از آنجا که نسبت Q/V بدون تغییر می‌باشد، این ظرفیت را برابر یک ثابت به نام C که واحد آن کولمب بر ولت یا فاراد (F) است، تعریف می‌کنند.

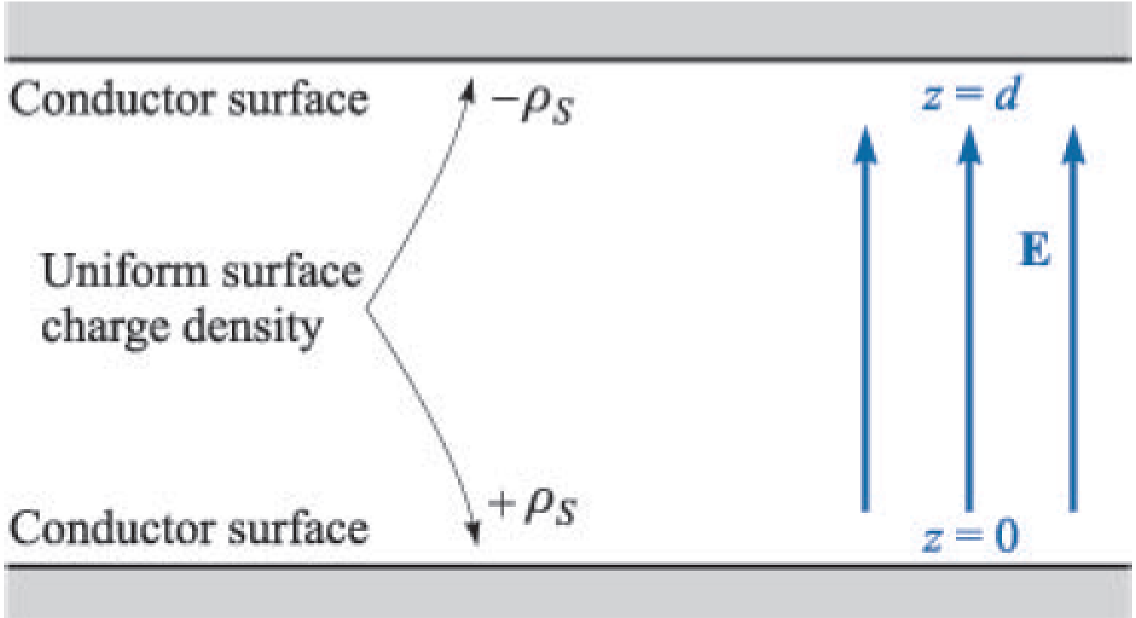
در عمل خازن‌ها دارای دو هادی هستند (البته در مورد فوق نیز فرض می‌شود که هادی دیگر با پتانسیل صفر در بینهایت واقع است) و ظرفیت بین این دو هادی بصورت

$$C = \frac{Q}{V_{۱۲}}$$

تعریف می‌شود که $V_{۱۲}$ برابر اختلاف پتانسیل بین دو هادی است. روی یک هادی بار $+Q$ و روی هادی دیگر $-Q$ قرار دارد. از آنجا که نسبت بار به اختلاف پتانسیل مقدار ثابتی می‌باشد، ظرفیت خازن به مقدار بار موجود روی هادی‌ها یا اختلاف پتانسیل آنها وابسته نیست بلکه تنها تابعی از خصوصیات فیزیکی خازن می‌باشد. مثلاً در مورد یک خازن که متشکل از دو هادی صفحه‌ای موازی بینهایت طویل که بین آنها یک دی‌الکتریک با ثابت گذردهی ε قرار دارد برابر

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

می‌باشد که S مساحت صفحات و d فاصلهٔ بین آنها می‌باشد.



$$Q = \rho_S S$$

$$V_0 = \frac{\rho_S}{\epsilon} d$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \epsilon E^2\, dv = \frac{1}{2}\int_0^S \int_0^d \frac{\epsilon \rho_S^2}{\epsilon^2} dz\, dS = \frac{1}{2}\frac{\rho_S^2}{\epsilon} Sd = \frac{1}{2}\frac{\epsilon S}{d}\frac{\rho_S^2 d^2}{\epsilon^2}$$

$$W_E = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

در مورد یک خازن استوانه‌ای با طول L که هادی داخلی آن دارای شعاع a و هادی خارجی آن دارای شعاع b باشد، ظرفیت آن برابر $C=\frac{۲\pi\varepsilon L}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ و در مورد یک خازن کروی با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o ظرفیت معادل برابر $C=\frac{۴\pi\varepsilon}{\frac{۱}{R_i}-\frac{۱}{R_o}}$ خواهد بود.

$$C=\frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}$$

در حالت کلّی فرض می‌کنیم که روی دو جوشن خازن بارهای $+Q$ و $-Q$ هستند، با توجه به این بارها و با استفاده از قانون گاوس یا روشهای دیگر مقدار E را بین دو جوشن محاسبه می‌کنیم. از روی E مقدار اختلاف پتانسیل بین دو جوشن را بدست می‌آوریم. در نهایت با استفاده از رابطهٔ $C=\dfrac{Q}{V_{12}}$ مقدار ظرفیت معادل سیستم داده شده را محاسبه می‌کنیم.

از آنجا که ظرفیت معادل چند خازن که با هم سری شده‌اند از رابطهٔ $\dfrac{1}{C_{eq}}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}+\dots+\dfrac{1}{C_n}$ بدست می‌آید، با استفاده از این حقیقت می‌توانیم با فرض اینکه کل سیستم از بینهایت خازن کوچک دیفرانسیلی که با هم سری شده‌اند و با استفاده از رابطهٔ

$$C=\frac{1}{\displaystyle\int\frac{dl}{\displaystyle\int \varepsilon d_s}}$$

مقدار خازن معادل را محاسبه کرد. مقدار انتگرال $\int \varepsilon ds$ روی هر یک از سطوح خازن‌ها گرفته می‌شود.

در مورد هر خازن با هر نوع شکل فیزیکی مقدار انرژی الکتریکی در آن ذخیره می‌شود که مقدار آن را می‌توان از روابط زیر بدست آورد:

$$W=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{Q^2}{2C}$$

نحوه محاسبه ظرفيت خازني

۱ – فرض استقرار بار +Q و –Q مشخص روي دو هادي خازن

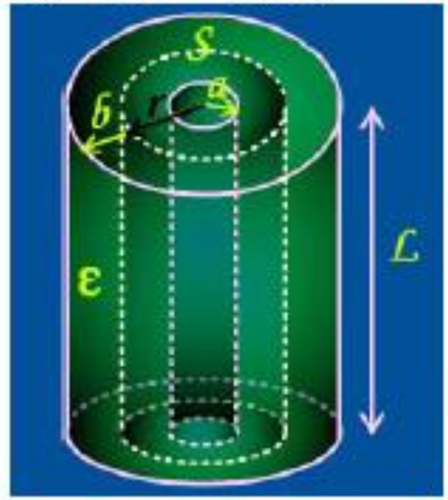
۲ – تعيين D در فضاي بين دو هادي از طريق $\oint \bar{D}.d\bar{s} = Q$

۳ – محاسبه E از طريق $E = \dfrac{D}{\varepsilon}$

٤ – محاسبه Vبين دو هادي از طريق $V = -\int \bar{E}.d\bar{l}$

٥ – جايگزيني V بدست آمده در فرمول $C = \dfrac{Q}{V}$

مثال: محاسبه ظرفيت خازني يك خازن استوانه‌اي متشكل از دو استوانه هم محور بطول L و به شعاع‌هاي قاعده a و b ‏(b>a) كه فضاي بين آندو از عايقي (ε) پر شده است.



۱ – فرض بار +Q روي استوانه داخلي و –Q روي استوانه بيروني

۲ – انتخاب سطح گاوسي استوانه‌اي به ارتفاع L و شعاع قاعده a<r<b

$$\oint_s \bar{D}.d\bar{s} = +Q \quad \Rightarrow \quad \bar{D} = \frac{Q}{2\pi r L}\hat{a}_r$$

۳ - $$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r L}$$

۴ - $$V_a - V_b = V = -\int_b^a \bar{E}.d\bar{l} = -\int_b^a \frac{Q\hat{a}_r}{2\pi\varepsilon r L}\hat{a}_r dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L} Ln\frac{b}{a}$$

۵ - $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon L} Ln\frac{b}{a}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2\pi\varepsilon L}{Ln\frac{b}{a}}$$

مثال: محاسبه ظرفيت خازني كروي متشكل از دو كره هم مركز به شعاع‌هاي a و b كه فضاي بين دو كره از عايقي با پرميتيوتيه ε پر شده است.

١) فرض بار مستقر روي كره داخلي +Q

٢) $\oint \bar{D}.d\bar{s} = Q \quad \Rightarrow \quad \bar{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$

٣) $\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R$

٤) $V_a - V_b = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R.\hat{a}_R dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

٥) $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q(b-a)}{4\pi\varepsilon ab}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

$$C = 4\pi\epsilon a$$

اگر شعاع كره بيروني بينهايت فرض شود ظرفيت بدست آمده ظرفيت يك كره تنها خواهد بود

$$C = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$$

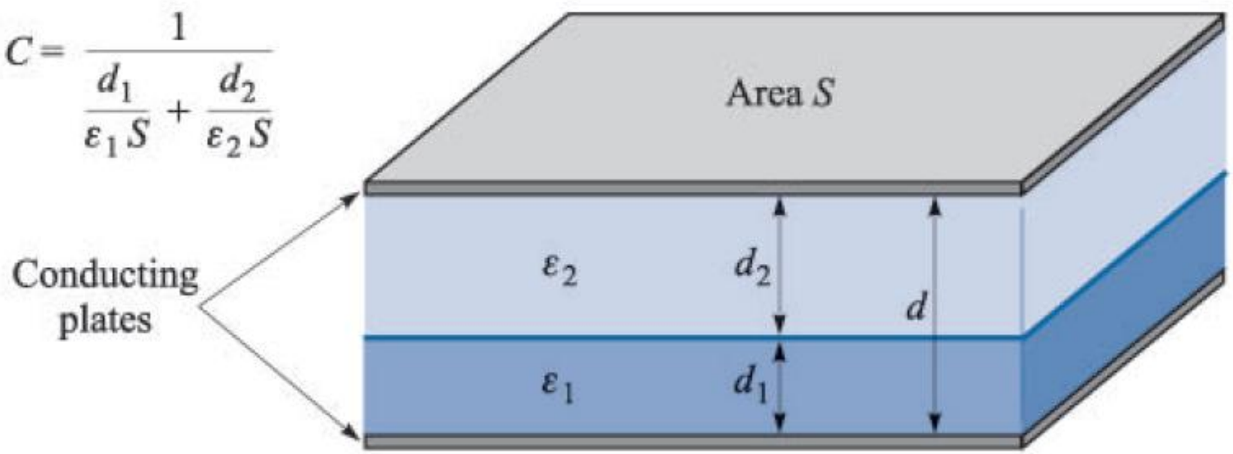
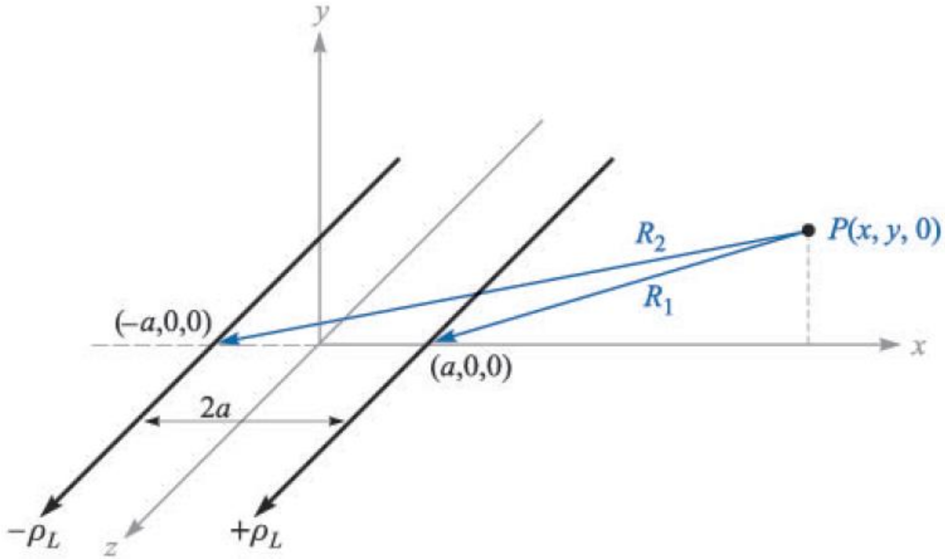


FIGURE 5.15
A parallel-plate capacitor containing two dielectrics with the dielectric interface parallel to the conducting plates.

اگر سطح تماس عایق ها عمود بر صفحات خازن باشد

$$C = \frac{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2$$



$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{R_0}{R}$$

پتانسيل خط تك با مبناي صفر در شعاع Ro

FIGURE 5.16
Two parallel infinite line charges carrying opposite charge. The positive line is at $x = a$, $y = 0$, and the negative line is at $x = -a$, $y = 0$. A general point $P(x, y, 0)$ in the xy plane is radially distant R_1 and R_2 from the positive and negative lines, respectively. The equipotential surfaces are circular cylinders.

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\left(\ln\frac{R_{10}}{R_1} - \ln\frac{R_{20}}{R_2}\right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

انرژي ذخيره شده الكترواستاتيكي

مي‌دانيم كه كار لازم براي حركت يك بار نقطه‌اي Q واقع در ميدان الكتريكي از رابطه W=QV كه V اختلاف پتانسيل بين نقطه (مكان) انتهائي و ابتدائي بار Q است بدست مي‌آيد اگر نقطه ابتدائي در بينهايت دور (يا مبدأ پتانسيل صفر در بينهايت) در نظر گرفته باشيم V پتانسيل نقطه نهائي بار Q خواهد بود اين ميزان كار مذكور بصورت انرژي در سيستم ذخيره مي‌شود.

حال N بار گسسته را كه در فضائي مستقر شده‌اند را در نظر مي‌گيريم، ميزان انرژي (كار) ذخيره شده براي استقرار اين بارها بقرار زير محاسبه مي‌شود.

ابتدا فرض مي‌شود كه هيچگونه باري وجود ندارد و بار q_1 را از بينهايت به مكان $\bar{R}_1$ آورده شود.

براي بار q_1 $\quad We_1 = 0$

براي بار q_2 $\quad We_2 = q_2 V_{21}$

براي بار q_3 $\quad We_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$

و نهايتاً براي آوردن بار q_N $\quad We_N = q_N V_{N1} + q_N V_{N2} + \dots + q_N V_{N,N-1}$

بنابراين $\quad We = \sum_{i=1}^{N} We_i = 0 + q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32} + \dots + q_N V_{N,N-1}$ كل

اما از طرفي

$$q_2V_{21}=q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon\left|\bar{R}_2-\bar{R}_1\right|}=q_1\frac{q_2}{4\pi\varepsilon\left|\bar{R}_1-\bar{R}_2\right|}=q_1V_{12}$$

و بطور كلي

$$q_iV_{ij}=q_jV_{ji}$$

بنابراين مي‌توان نوشت:

$$We_2=q_1V_{12}$$

$$We_3=q_1V_{13}+q_2V_{23}$$

...

$$We_N=q_1V_{1N}+q_2V_{2N}+\ldots+q_{N-1}V_{N-1,N}$$

و

كل $We=0+q_1V_{12}+q_1V_{13}+\ldots+q_{N-1}V_{N-1,N}$

چنانچه We كل دو رابطه مربوطه در بالا را با هم جمع كنيم:

$$\begin{aligned}2We=&\,q_1V_{12}+q_2V_{13}+q_1V_{14}+\ldots+q_1V_{1N}\\&+q_2V_{21}+q_2V_{23}+q_1V_{24}+\ldots+q_2V_{2N}\\&\ldots\\&q_NV_{N1}+q_NV_{N2}+\ldots+q_NV_{N,N-1}\end{aligned}$$

يا :

$$\begin{aligned}2We=&\,q_1\left(V_{12}+V_{13}+\ldots+V_{1N}\right)\\&+q_2\left(V_{21}+V_{23}+\ldots+V_{2N}\right)\\&\ldots\\&+q_N\left(V_{N1}+V_{N2}+\ldots+V_{N-1}\right)\end{aligned}$$

حال اگر V_1 را بصورت $V_1 = \sum_{i=2}^{N} V_{1i}$ تعریف کنیم که مجموع پتانسیل نقطه $\bar{R}_1$ ناشي تمام منابع $(q_2, q_3, ..., q_N)$ است و بطور كلي:

$$\text{پتانسیل نقطه } k\text{ام ناشي از تمام بارهاي موجود به‌جز } q_k = V_K = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} V_{ki}$$

$$2We = q_1 V_1 + q_2 V_2 + ... + q_N V_N$$

$$We = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

و براي يك توزيع بار پيوسته حجمي به چگالي P

$$We = \frac{1}{2} \int_V \rho(\bar{R}') V(\bar{R}') dV'$$

مي‌توان ثابت كرد كه:

$$We = \frac{1}{2} \int_v \bar{D}.\bar{E} dv'$$

$$We = \frac{1}{2} \int \varepsilon E^2 dv' = \frac{1}{2} \int \frac{D^2}{\varepsilon} dV' = \frac{1}{2} \int DE dv'$$

نيروي الكترواستاتيك

- براي يك سيستم بسته طبق اصل بقاء انرژي

$$\Delta W + \Delta We = 0$$

$$\Delta W = -\Delta We$$

ميزان انرژي تغيير يافته بدليل اعمال نيروي F كه سبب جابجائي Δl مي‌شود:

$$\Delta W = F\Delta l$$

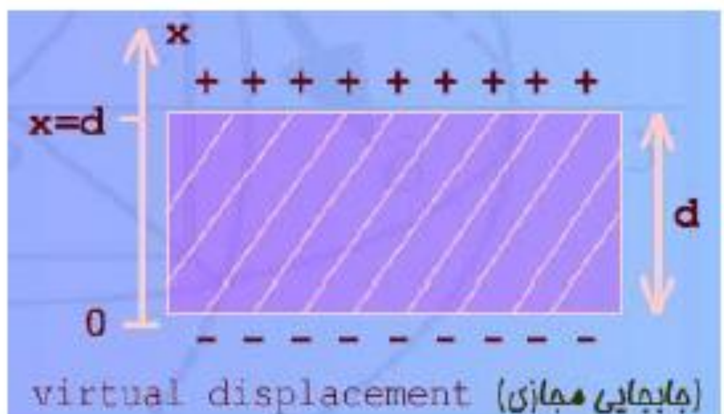
$$F = \frac{\Delta W}{\Delta l}$$

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{\Delta We}{\Delta l} \quad \Rightarrow \quad \bar{F}\Big|_{Q-cte} = -\nabla We$$

مانند: يك خازن كه بار Q+ و Q− روي صفحات آن ذخيره شده و اتصالي با بيرون (يك منبع بيروني) ندارد يعني Q ثابت است و در نتيجه يك سيستم بسته را بوجود آورده بنابراين:

$$\bar{F}\Big|_{Q-cte} = -\nabla W_e\Big|_{Q-cte} = -\nabla\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)$$

$$C = \varepsilon\frac{A}{x}$$



$dx = virtual\ displacement$ (جابجائي مجازي)

$$F_y = F_z = 0 \quad , \quad F_x = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}Q^2\big/c\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2 x}{2\varepsilon A}\right)$$

$$F_x = -\frac{1}{2}Q^2\big/\varepsilon A$$

- براي يك سيستم باز $\Delta W = \Delta We$

بنابراين

$$\Delta W = F\Delta l \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\Delta W}{\Delta l} = \frac{\Delta We}{\Delta l}$$

$$\bar{F}\big|_{V=cte} = \nabla W_e$$

مانند يك خازن كه به منبعي با ولتاژ ثابت V متصل گشته است و هز تغيير در انرژي موجود از منبع تأمين مي‌شود.

$$\bar{F}\big|_{V=cte} = \nabla W_e = \nabla(\frac{1}{2}cV^2) \qquad C = \varepsilon\frac{A}{x}$$

$$F_x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(cv^2\right) = \frac{V^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\varepsilon\frac{A}{x}\right) = \frac{V^2}{2}\left[-\frac{\varepsilon A}{x^2}\right]$$

$$F_x = -\frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon^2 A^2}{x^2\varepsilon A} = -\frac{1}{2}\frac{V^2C^2}{\varepsilon A} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon A}$$

كه همان جواب حالت قبل است.

نكته: در خصوص وضعيت خطوط ميدان در يك خازن چنانچه فاصله بين دو هادي نسبت به ساير ابعاد خازن كوچك نباشد، ميدان در فضاهاي بين دو هادي يكنواخت نخواهد بود و ميدان در رفتگي پيدا خواهد كرد يعني خطوط ميدان در نقاط كناري نسبت به نقاط مياني قطعه (خازن) انحراف خواهد داشت كه به اين مي
دان Fringing Field گويند (فوران ميدان)