

# فصل دوم:

## میدانهای الکتریکی ساکن

## Static Electric Fields

# مقدمه

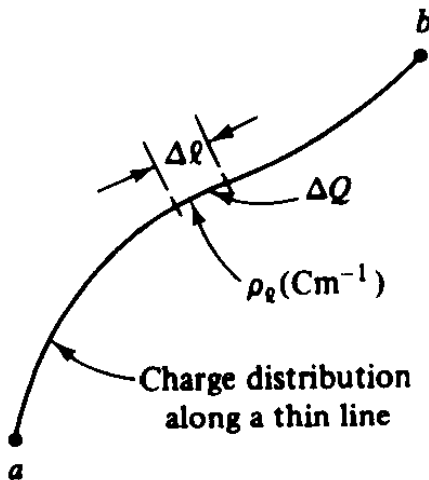
- وضعیت بار در جهان پر از ماده
- میدان الکترواستاتیک (بار ساکن)
- میدان مگنتواستاتیک (بار متحرک با سرعت ثابت)
- میدان الکترومغناطیس (بار متحرک شتاب دار)

# بار الکتریکی و چگالی بار الکتریکی

- بار پایه (الکترون و پروتون)  $q_e = -1.602 \times 10^{-19}$

- یکای بار، کولن یا کولمب؛ C؛ Coulomb است که برابر است با  $6 \times 10^{18}$  الکترون.

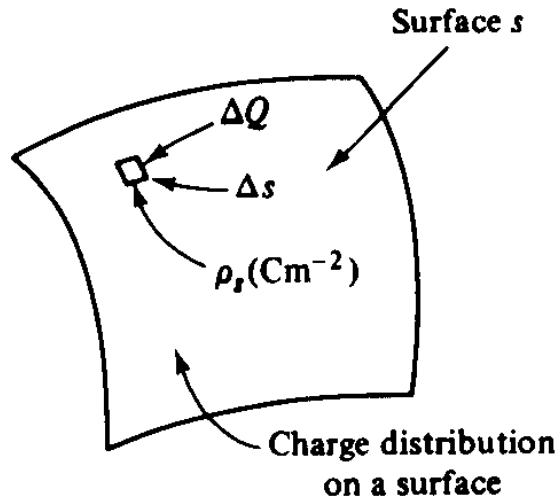
- در دنیای واقعی بارها به صورت های زیر



$$\rho_\ell \triangleq \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta Q}{\Delta \ell} \right] \quad (\text{C m}^{-1}) \quad (\text{aap})$$

۱. نقطه ای
۲. خطی

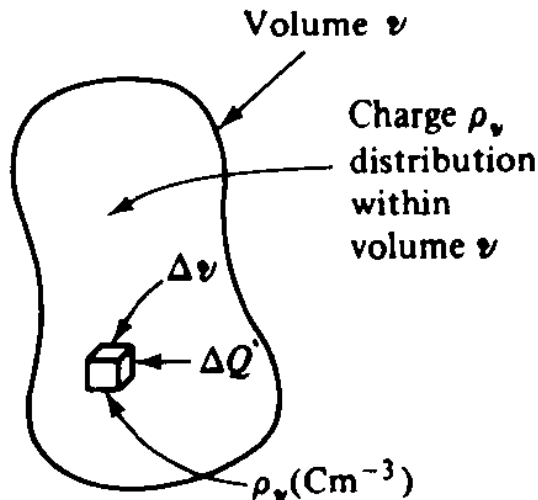
# بار الکتریکی و چگالی بار الکتریکی



۳. سطحی

$$\rho_s \triangleq \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta Q}{\Delta s} \right] \quad (\text{C m}^{-2}) \quad (\text{aap})$$

۴. حجمی و



$$\rho_v \triangleq \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta Q}{\Delta v} \right] \quad (\text{C m}^{-3}) \quad (\text{aap})$$

۵. ترکیبی از این چهار نوع

# بار الکتریکی و چگالی بار الکتریکی

- بار کل در هر یک از انواع:

$$Q_e = \int_l \rho_e dl, \quad Q_s = \int_s \rho_s ds, \quad Q_v = \int_v \rho_v dv$$

# بار الکتریکی و چگالی بار الکتریکی

- مثال: یک توزیع بار حجمی یکنواخت کروی به میزان  $10^{-8} \text{ C}$  وجود دارد. اگر شعاع این کره  $2 \times 10^{-2} \text{ m}$  باشد،  $\rho$  را پیدا کنید.

VOLUME  $dv$

$$(dr_s) (r_s d\theta) (r_s \sin \theta d\phi)$$

- پاسخ: با توجه به داریم:

$$Q_v = \rho_v \int_v dv = \rho_v \left( \frac{4}{3} \pi r_s^3 \right) \Big|_{r_s = 2 \times 10^{-2}}$$

$$\rho_v = \frac{Q_v}{\frac{4}{3} \pi (2 \times 10^{-2})^3} = \frac{10^{-8}}{\frac{4}{3} \pi (8 \times 10^{-6})} = 2.98 \times 10^{-4} \text{ (C m}^{-3}\text{)}$$

# نیروی بین بارهای نقطه ای

- قانون کولن: دو بار به فاصله  $R$  از یکدیگر به یکدیگر نیرو وارد می کنند. این نیروی در امتداد خط واصل بین دو بار است و بر حسب هم نام بودن یا غیر هم نام بودن دو بار به ترتیب دافعه یا جاذبه خواهد بود. اندازه این نیرو از رابطه زیر به دست می آید.

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (\text{N})$$

# میدان‌های الکتریکی ساکن Static Electric Fields

مبنای قوانین حاکم بر میدان‌های الکتریکی ساکن نیروی جاذبه یا دافعه بین بارهای الکتریکی می‌باشد که همان قانون کولمب است.

افرادی که در این زمینه مطالعات و بررسی‌های علمی انجام داده‌اند: تالس، گیلبرت و نهایتاً افسر فرانسوی بنام کولمب می‌باشد که توانست اندازه‌گیری‌های دقیقی روی این نیرو انجام دهد.

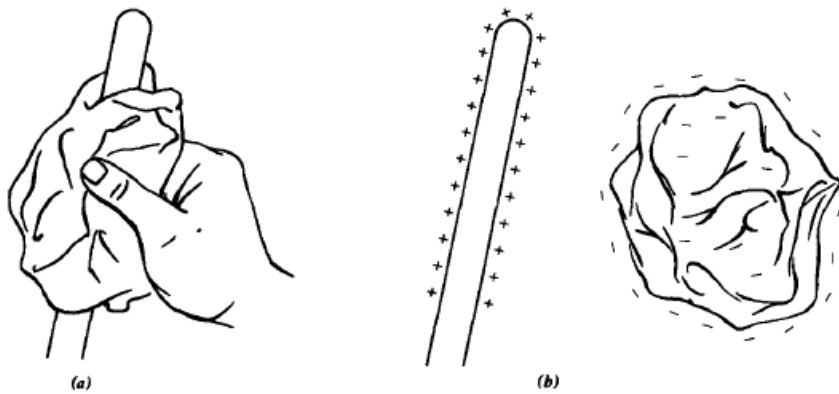


Figure 2-1 A glass rod rubbed with a dry cloth loses some of its electrons to the cloth. The glass rod then has a net positive charge while the glass cloth has acquired an equal amount of negative charge. The total charge in the system remains zero.

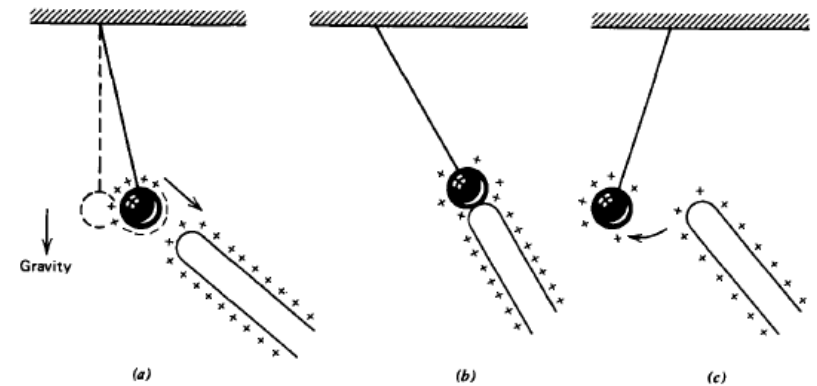


Figure 2-2 (a) A charged rod near a neutral ball will induce an opposite charge on the near surface. Since the ball is initially neutral, an equal amount of positive charge remains on the far surface. Because the negative charge is closer to the rod, it feels a stronger attractive force than the repelling force due to the like charges. (b) Upon contact with the rod the negative charge is neutralized leaving the ball positively charged. (c) The like charges then repel causing the ball to deflect away.



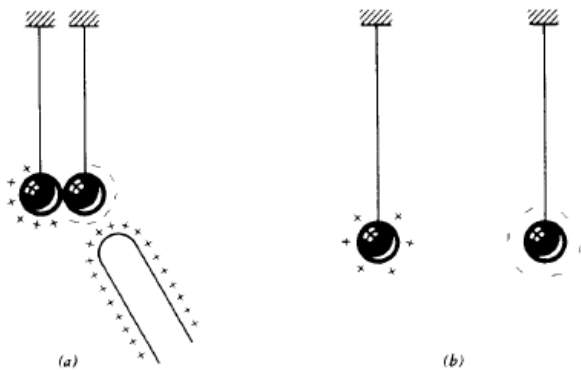


Figure 2-4 A net charge can be placed on a body without contact by electrostatic induction. (a) When a charged body is brought near a neutral body, the near side acquires the opposite charge. Being neutral, the far side takes on an equal but opposite charge. (b) If the initially neutral body is separated, each half retains its charge.

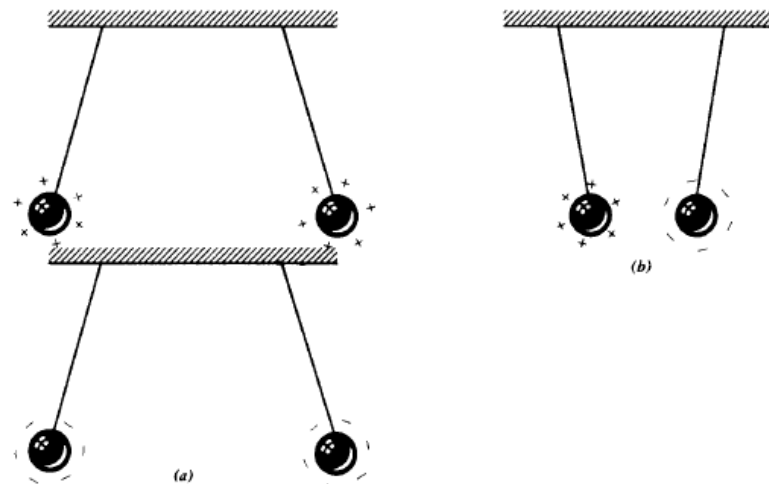


Figure 2-3 (a) Like charged bodies repel while (b) oppositely charged bodies attract.

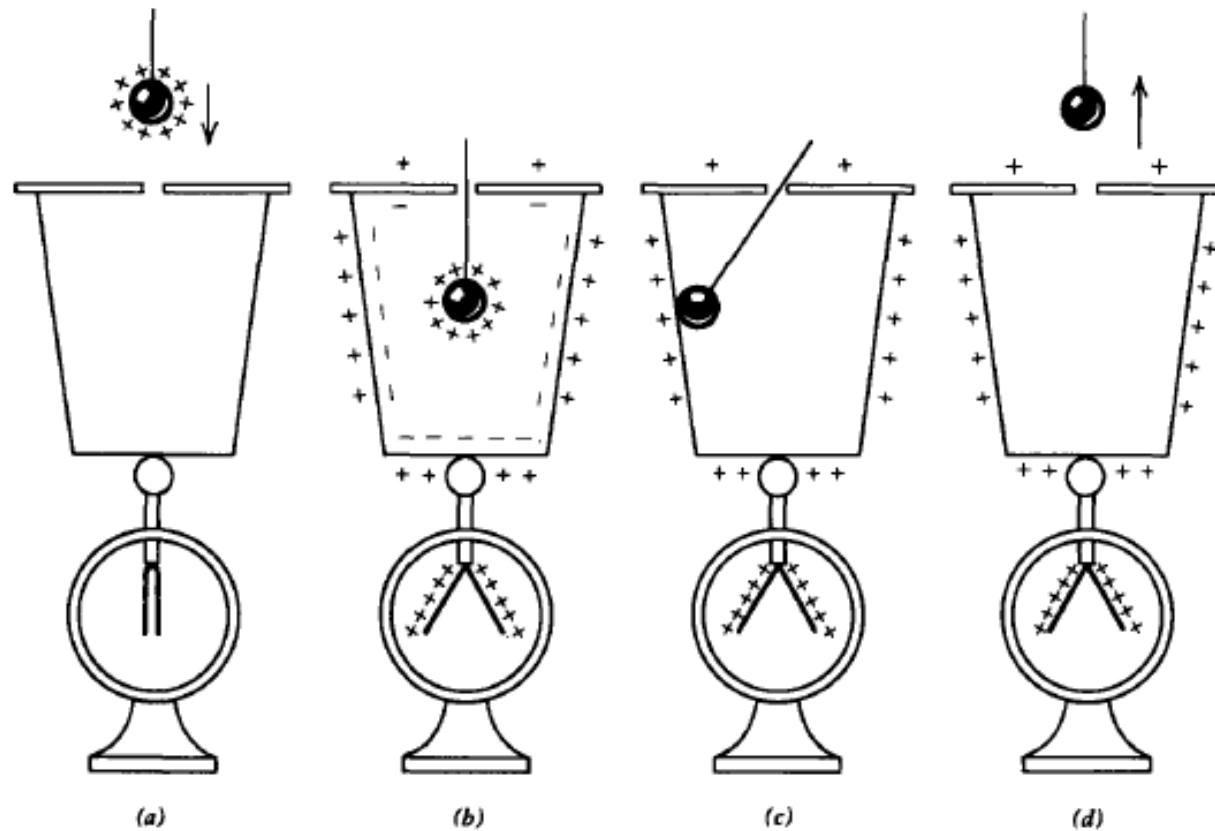
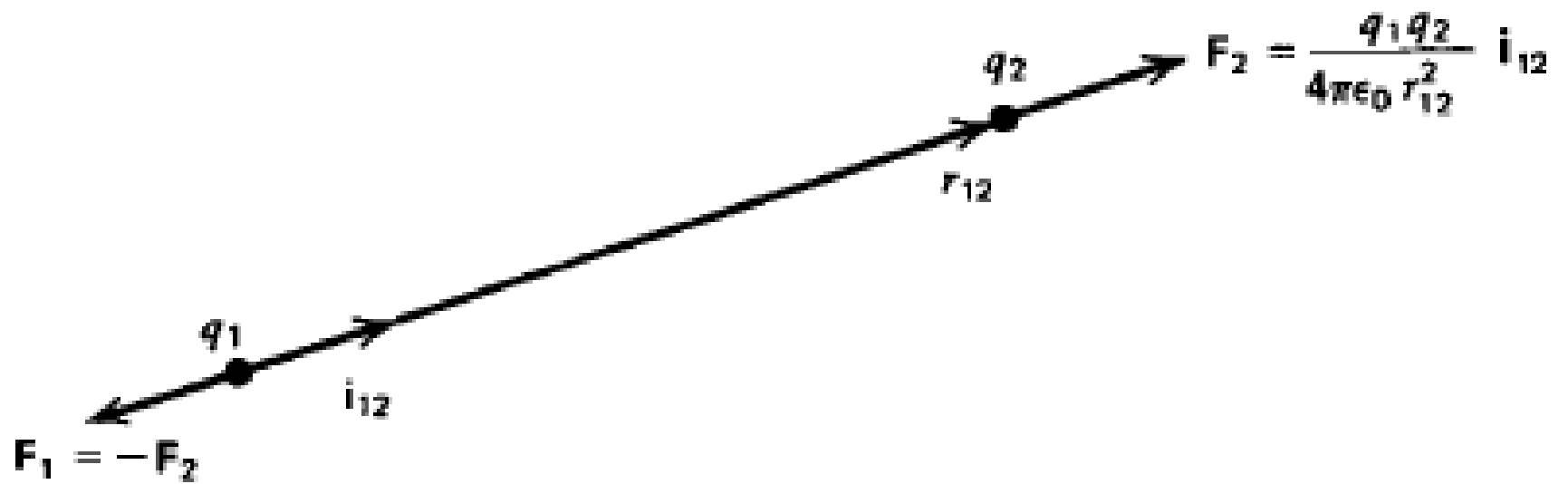


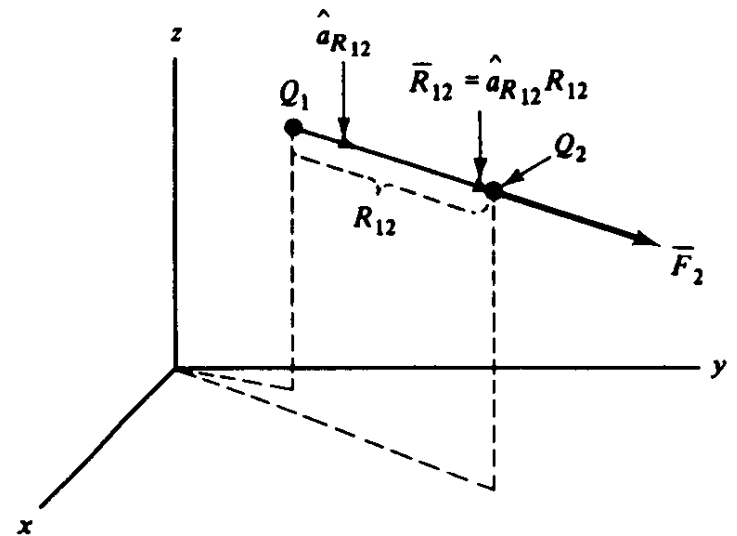
Figure 2-5 Faraday first demonstrated the principles of charge conservation by attaching an electroscope to an initially uncharged metal ice pail. (a) When all charges are far away from the pail, there is no charge on the pail nor on the flexible gold leaves of the electroscope attached to the outside of the can, which thus hang limply. (b) As a charged ball comes within the pail, opposite charges are induced on the inner surface. Since the pail and electroscope were originally neutral, unbalanced charge appears on the outside of which some is on the electroscope leaves. The leaves being like charged repel each other and thus diverge. (c) Once the charged ball is within a closed conducting body, the charge on the outside of the pail is independent of the position of the charged ball. If the charged ball contacts the inner surface of the pail, the inner charges neutralize each other. The outside charges remain unchanged. (d) As the now uncharged ball leaves the pail, the distributed charge on the outside of the pail and electroscope remains unchanged.



# نیروی بین بارهای نقطه‌ای

- اگر ثابت تناسب را در دستگاه یکای SI بنویسیم. شکل برداری این رابطه به این صورت خواهد بود:

$$\vec{F}_2 = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^2} \hat{a}_{R_{12}} \quad (\text{N})$$



where  $\vec{F}_2$  = force on point charge  $Q_2$  due to point charge  $Q_1$  (N)

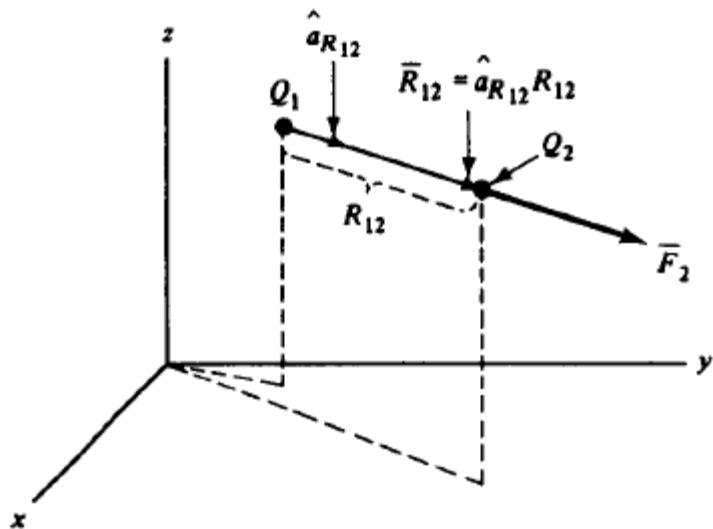
$Q_1$  = charge at location (1) (C)

$Q_2$  = charge at location (2) (C)

$R_{12}$  = distance between the location of  $Q_1$  and  $Q_2$  (m)

$\hat{a}_{R_{12}}$  = unit vector along a straight line from  $Q_1$  to  $Q_2$  locations (from  $Q_1$ , the source of the force, to the location of the force  $\vec{F}_2$ , at  $Q_2$ )

$\epsilon_0$  = permittivity of free space ( $\text{F m}^{-1}$ ; farads per meter)



$$e \approx 1.60 \times 10^{-19} \text{ Coul}, m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = -\frac{e^2 / (4\pi\epsilon_0 r^2)}{Gm_e^2 / r^2} = -\frac{e^2}{m_e^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \approx -4.16 \times 10^{42}$$

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (\text{N})$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\vec{F}_2 = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^2} \hat{a}_{R_{12}} \quad (\text{N})$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \cong \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \quad (\text{F m}^{-1})$$

$$\vec{F}_2 = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q_1 Q_2 \vec{R}_{12}}{R_{12}^3} \quad (\text{N})$$

$$\vec{F}_1 = \frac{Q_2 Q_1 \hat{a}_{R_{21}}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2} = -\vec{F}_2 \quad (\text{N})$$

# نیروی بین بارهای نقطه ای

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \cong \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \quad (\text{F m}^{-1})$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

- با نوشتن بردار یکه به صورت  $\hat{a}_{R_{12}} = \bar{R}_{12}/R_{12}$  خواهیم داشت:

$$\bar{F}_2 = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q_1 Q_2 \bar{R}_{12}}{R_{12}^3} \quad (\text{N})$$

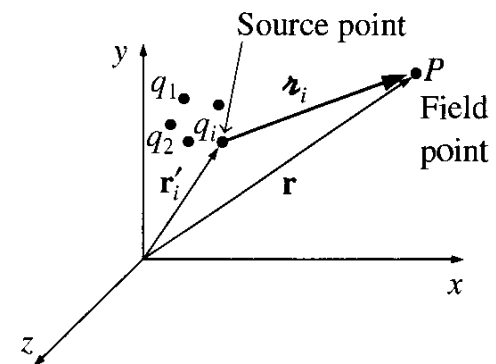
- همچنین از شکل و رابطه معلوم می شود که:

$$\bar{F}_1 = \frac{Q_2 Q_1 \hat{a}_{R_{21}}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2} = -\bar{F}_2 \quad (\text{N})$$

# نیروی بین بارهای نقطه ای

- نکته بسیار مهم: در صورتی که چند بار الکتریکی داشته باشیم، نیروی وارد بر یکی از آنها حاصل جمع برداری نیروهای وارد از تک تک بارهای دیگر بر بار مورد نظر است. به این اصل، اصل برهم نهش (superposition) می گویند.

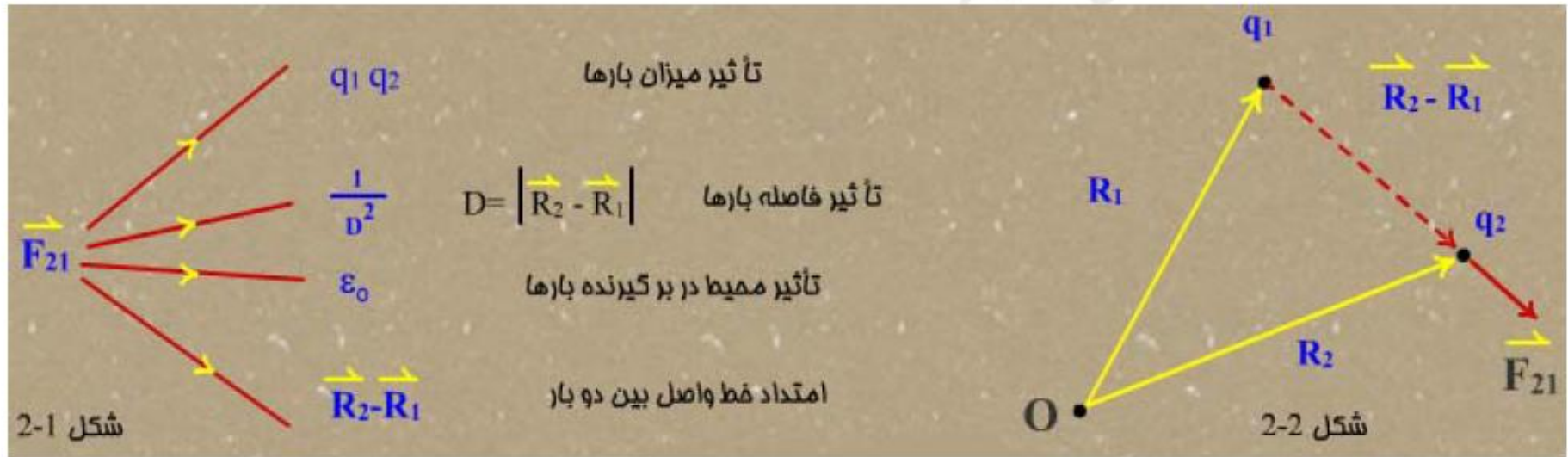
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{q_2 Q}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 + \dots \right)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 \hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2} + \frac{q_2 \hat{\mathbf{r}}_2}{r_2^2} + \frac{q_3 \hat{\mathbf{r}}_3}{r_3^2} + \dots \right),$$



## قانون کولمب در فضای آزاد (خلأ) Free space

در آزمایش‌های بعمل آمده توسط کولمب به نتایج زیر در خصوص نیروی وارد بر يك بار الكتریکی ناشی از بار الكتریکی دیگر دست یافت:

با توجه به وجود دو بار الكتریکی  $q_1$  و  $q_2$  که به ترتیب در موقعیت  $\vec{R}_1$  و  $\vec{R}_2$  قرار گرفته‌اند



$$\vec{F}_{21} \propto \frac{q_1 q_2}{\epsilon_0 |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^2} \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|}$$

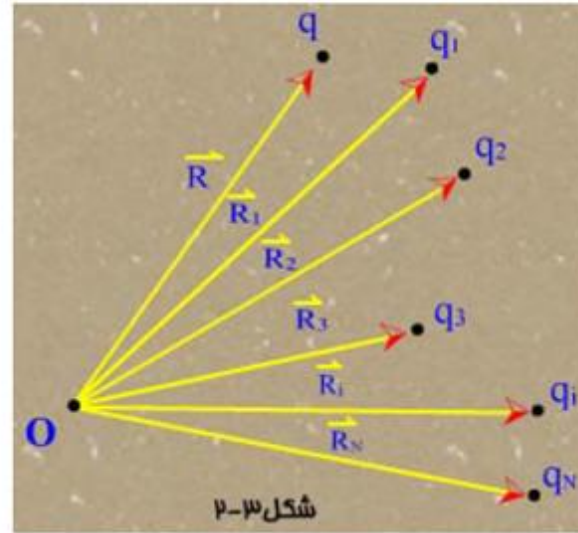
بنابراین:

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{i}_{12} \text{ nt } [\text{kg} - \text{m} - \text{s}^{-2}]$$

بردار واحد  $\vec{R}_2 - \vec{R}_1$  برابر است با:  $\frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|}$

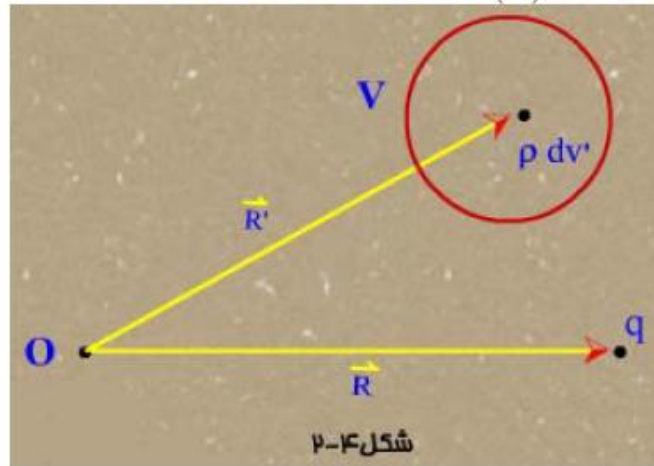


برای N بار گسسته:



$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{qq_i(\vec{R} - \vec{R}_i)}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3}$$

برای يك بار پیوسته به چگالي بار  $\rho(\vec{R})$  مستقر در حجم  $V$



$$d\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\rho(\vec{R}')dv'(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q\rho(\vec{R}')dv'(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

**مثال:** سه بار نقطه ای  $q_1$ ،  $q_2$  و  $q$  که بترتیب در نقاط  $p_1$  و  $p_2$  و  $p$  در فضای خالی قرار گرفته‌اند را در نظر بگیرید نیرو وارد بر بار  $q$  چقدر است؟

$$\begin{cases} q_1 = 3.2 \times 10^{-9} \text{ C} \\ p_1(2,1,0) \end{cases} \quad \begin{cases} q_2 = -4.8 \times 10^{-9} \text{ C} \\ p_2(3,2,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -1.6 \times 10^{-9} \text{ C} \\ p(1,2,0) \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{OP} = \hat{a}_x(1-0) + \hat{a}_y(2-0) + \hat{a}_z(0-0) = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y$$

$$\vec{R}_1 = \vec{OP}_1 = 2\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

$$\vec{R}_2 = \vec{OP}_2 = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y$$

$$\vec{R} - \vec{R}_1 = \hat{a}_x(1-2) + \hat{a}_y(2-1) = -\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

$$|\vec{R} - \vec{R}_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{R} - \vec{R}_2 = -2\hat{a}_x$$

$$|\vec{R} - \vec{R}_2| = 2$$

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^2 \frac{qq_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3} (\vec{R} - \vec{R}_i)$$

$$\vec{F}_q = \frac{-1.6 \times 10^{-9}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} \left[ \frac{3.2 \times 10^{-9}}{(\sqrt{2})^3} (-\hat{a}_x + \hat{a}_y) + \frac{-4.8 \times 10^{-9}}{2^3} (-2\hat{a}_x) \right]$$

$$\vec{F}_q = (-\hat{a}_x - \hat{a}_y 16.3) \times 10^{-9} \text{ N}$$

# نیروی بین بارهای نقطه ای

- مثال: نیروی F2 را، در خلاء، بر روی یک بار  $q_2 = 10^{-6} \text{ C}$  و یک بار Q1 به اندازه  $2 \times 10^{-5} \text{ C}$  محاسبه کنید، در صورتی که بار Q2 در نقطه P2(2,4,5) و بار Q1 در نقطه P1(0,1,2) قرار داشته باشد.

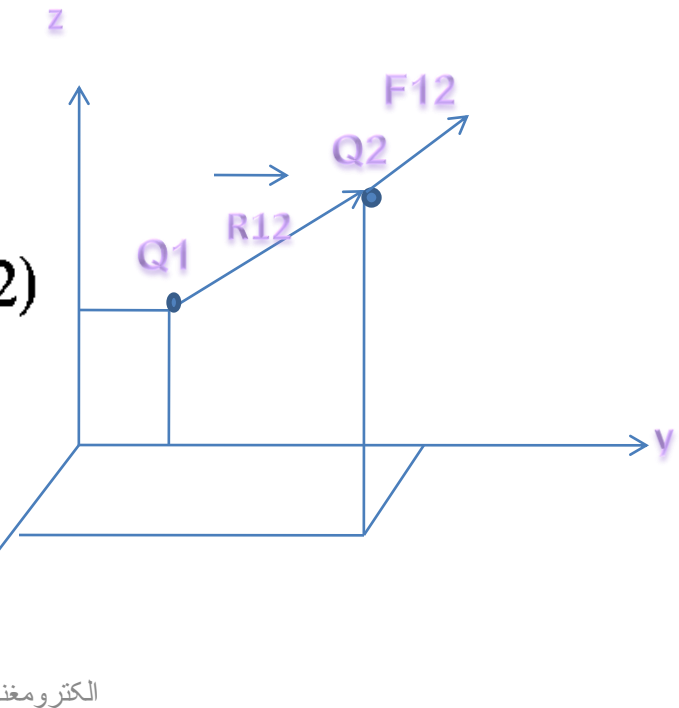
- پاسخ: با توجه به شکل

$$\vec{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \hat{a}_{R_{12}}$$

$$\begin{aligned} \vec{R}_{12} &= \hat{x}(x_2 - x_1) + \hat{y}(y_2 - y_1) + \hat{z}(z_2 - z_1) \\ &= \hat{x}(2 - 0) + \hat{y}(4 - 1) + \hat{z}(5 - 2) \end{aligned}$$

$$= \hat{x}2 + \hat{y}3 + \hat{z}3$$

$$R_{12} = (2^2 + 3^2 + 3^2)^{1/2} = 4.69$$

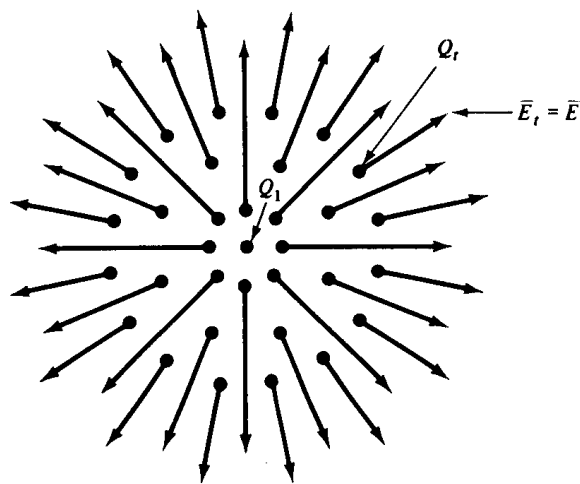


## نیروی بین بارهای نقطه‌ای

$$\hat{a}_{R_{12}} = \frac{\bar{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\hat{x}_2 + \hat{y}_3 + \hat{z}_3}{4.69}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_2 &= \frac{(2 \times 10^{-5})(10^{-6})}{4\pi \left( \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \right) (4.69)^2} \left( \frac{\hat{x}_2 + \hat{y}_3 + \hat{z}_3}{4.69} \right) \\ &= [\hat{x}(3.49) + \hat{y}(5.23) + \hat{z}(5.23)] \quad (\text{m N})\end{aligned}$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار نقطه ای



- تعریف بار آزمون
- میدان نیروی وارد بر یک بار آزمون  $Q_2$  از طرف  $Q_1$  تقسیم بر اندازه بار آزمون، شدت میدان الکتریکی مربوط به بار  $Q_1$  در محل بار آزمون است.

$$\bar{E}_t \triangleq \frac{\bar{F}_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2} \hat{a}_{R_{1t}} \quad (\text{N C}^{-1}) \quad (\text{aap})$$

- برای دقت بیشتر در اندازه گیری میدان باید بار آزمون بسیار کوچک باشد.

$$\bar{E}_t \triangleq \lim_{\Delta Q_t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta \bar{F}_t}{\Delta Q_t} \right] = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2} \hat{a}_{R_{1t}} \quad (\text{V m}^{-1}) \quad (\text{aap})$$

- جهت میدان

## میدان الکتریکی و شدت میدان الکتریکی در فضای خالی

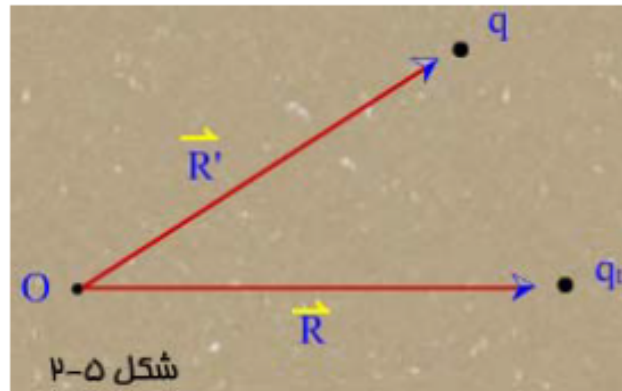
وجود يك بار الکتریکی در فضا، به تمام نقاط آن فضا خاصیتی الکتریکی می‌دهد (میدان الکتریکی) به نحویکه بارهای دیگر از وجود این بار آگاه می‌شوند.

بجای محاسبه نیرو در معرفی يك میدان، از شدت میدان الکتریکی استفاده می‌شود که بصورت زیر بیان و تعریف می‌گردد:

$$\bar{E}(\bar{R}) = \lim_{q_t \rightarrow 0} \frac{\bar{F}(\bar{R})}{q_t}$$

$$[N/C] \text{ یا } [V/m]$$

$\bar{F}$  نیروی وارد بر بار کوچک آزمایشی  $q_t$  که در نقطه  $\bar{R}$  قرار دارد.



$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\bar{R} - \bar{R}')}{|\bar{R} - \bar{R}'|^3}$$

بعبارتی  $\vec{E}$  شدت میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با نیروی وارد بر بار  $+1$  کولمبی  
 بنابراین برای مجموعه بارهای گسسته

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i (\vec{R} - \vec{R}_i)}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{R}') dV' (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

برای بار پیوسته حجمی

چگالی بار حجمی پیوسته  $\rho$  با واحد  $\frac{C}{m^3}$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\rho_s(\vec{R}') ds (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

بار پیوسته سطحی

چگالی بار پیوسته سطحی  $\rho_s$  با واحد  $\frac{C}{m^2}$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_c \frac{\rho_l(\vec{R}') dl' (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

چگالی بار پیوسته خطی  $\rho_l$  با واحد  $\frac{C}{m}$



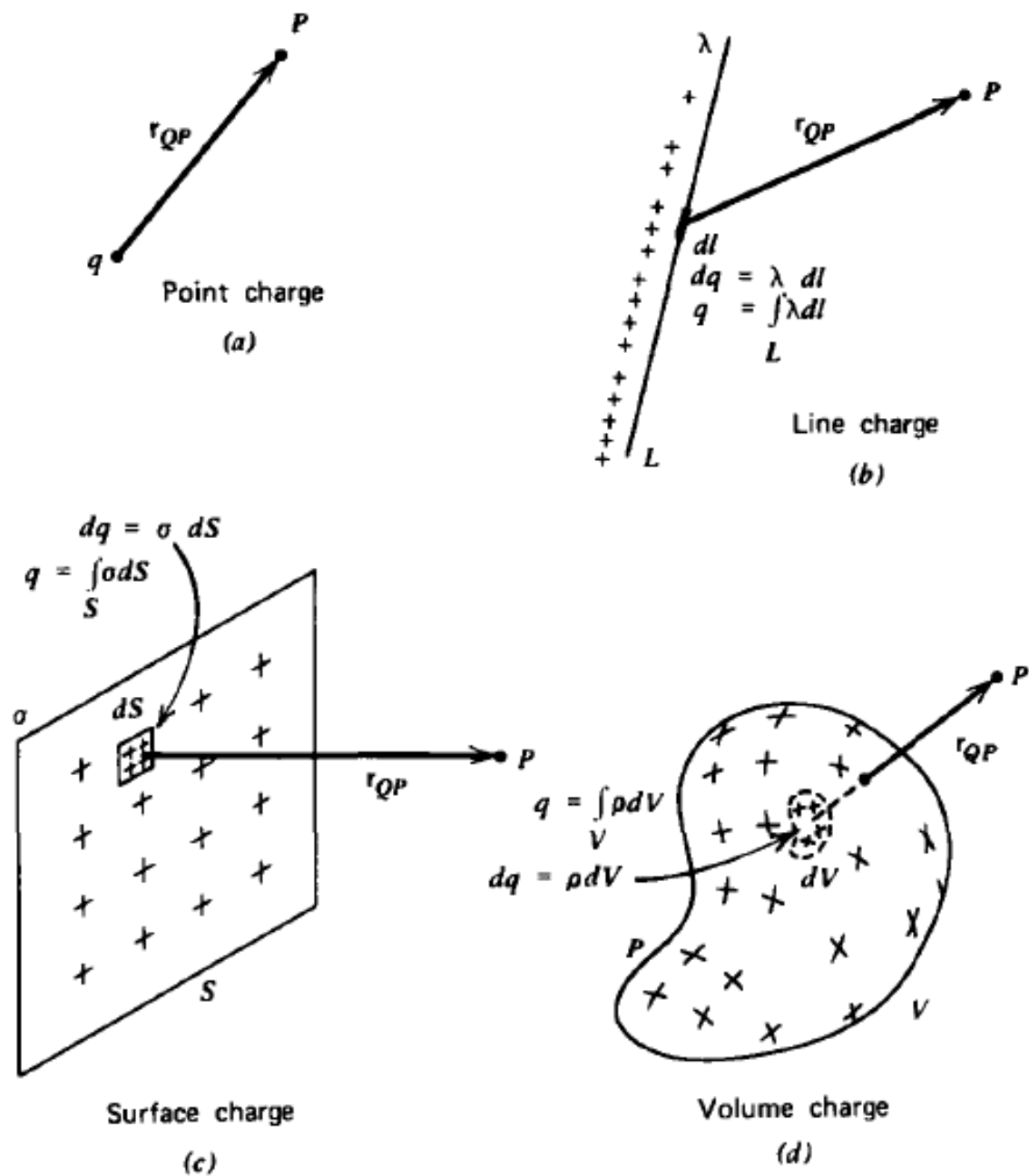
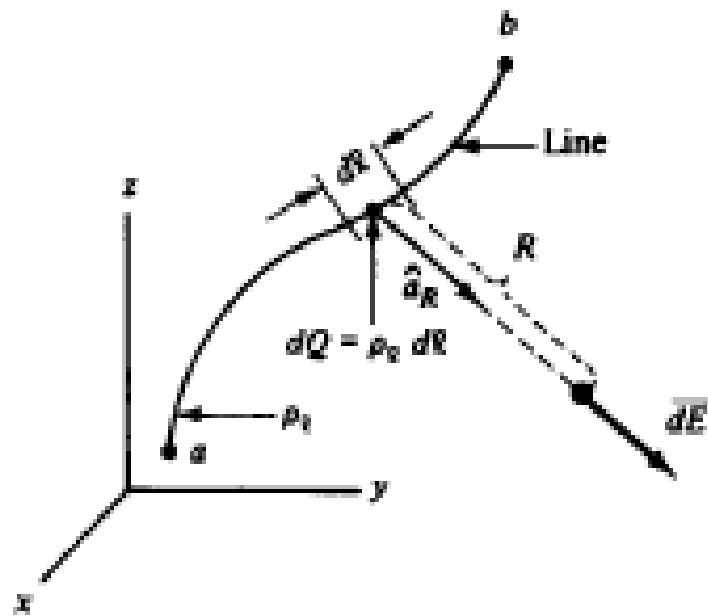
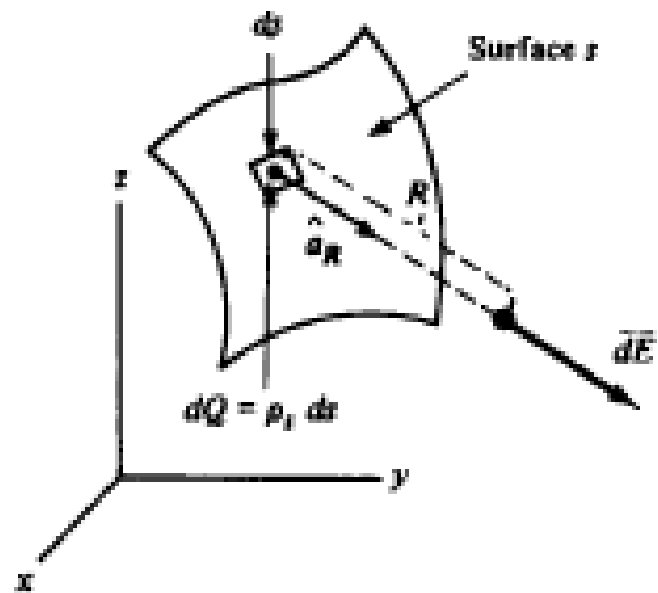


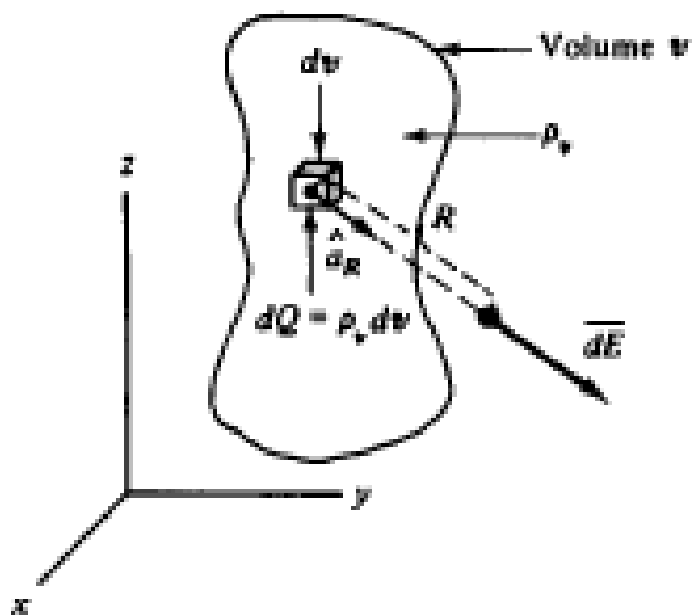
Figure 2-9 Charge distributions. (a) Point charge; (b) Line charge; (c) Surface charge; (d) Volume charge.



(a)

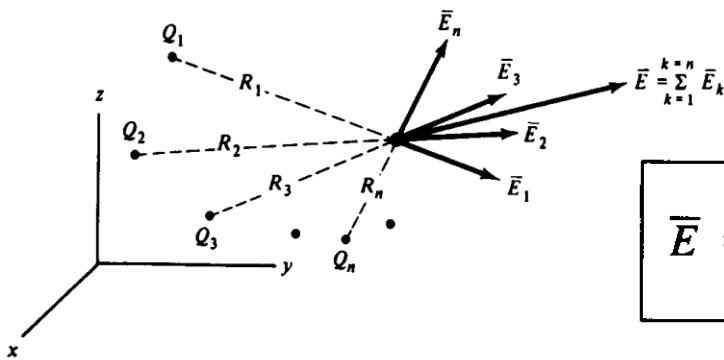


(b)



# شدت میدان الکتریکی یک بار نقطه ای

- میدان حاصل از چند بار نقطه ای



$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \dots + \bar{E}_k + \dots + \bar{E}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \bar{E}_k \quad (\text{N C}^{-1})$$

$$\bar{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \hat{a}_{R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \hat{a}_{R_2} + \dots + \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 R_k^2} \hat{a}_{R_k} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n^2} \hat{a}_{R_n}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 R_k^2} \hat{a}_{R_k} \quad (\text{V m}^{-1})$$

$$\bar{E}_k = \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 R_k^2} \hat{a}_{R_k} \quad (\text{V m}^{-1})$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار نقطه ای

- مثال: شدت میدان الکتریکی مربوط به بار  $Q = 2 \times 10^{-5} \text{ C}$ ، واقع در نقطه  $P_{\text{rec}}(0,1,2)$  را در نقطه  $P_{\text{rec}}(2,4,5)$ ، محاسبه کنید.

- پاسخ:

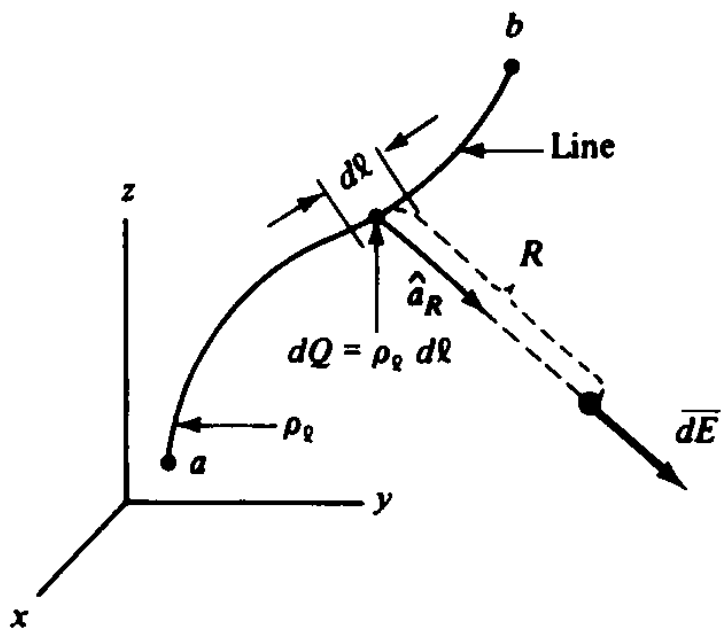
$$\bar{E} = \frac{Q\hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\bar{R} = \hat{x}(2 - 0) + \hat{y}(4 - 1) + \hat{z}(5 - 2) = \hat{x}2 + \hat{y}3 + \hat{z}3$$

$$R = (2^2 + 3^2 + 3^2)^{1/2} = 4.69$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار خطی

- اساس کار استفاده از رابطه مربوط به بار نقطه ای است، با گرفتن المان های جزئی و استفاده از اصل برهم نهش مسیر را دنبال می کنیم.



# شدت میدان الکتریکی یک بار خطی

- طبق شکل طول جزئی  $dl$  را در نظر می‌گیریم که بار  $dQ = \rho_l dl$  را داراست. از رابطه بنیادی میدان، جزء میدان برای این بار جزئی می‌شود:

$$\overline{dE} = \frac{dQ \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_l dl \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (\text{V m}^{-1})$$

- و با جایگزینی انتگرال به جایی جمع:

$$\overline{E} = \int_a^b \overline{dE} = \int_a^b \frac{\rho_l dl \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (\text{V m}^{-1})$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار خطی

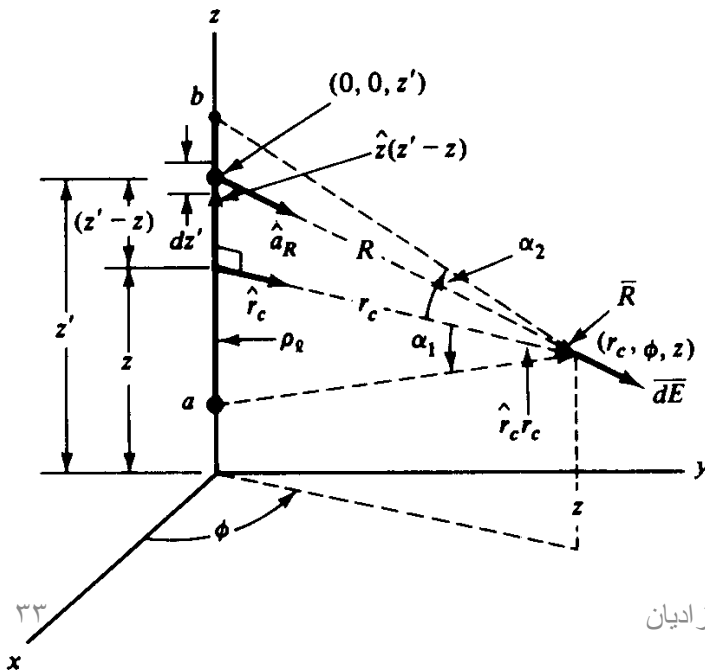
- اگر حروف پریم دار را به بار خطی و بدون پریم را به میدان نسبت دهیم خواهیم داشت:

$$\bar{E}(x, y, z) = \int_{a'}^{b'} \frac{\rho_\ell(x', y', z') d\ell'}{4\pi\epsilon_0 R^2(x', y', z', x, y, z)} \hat{a}_R(x', y', z', x, y, z) \quad (\text{V m}^{-1})$$

- مثال: میدان مربوط به یک

بار خطی یکنواخت  $\rho_\ell$  در

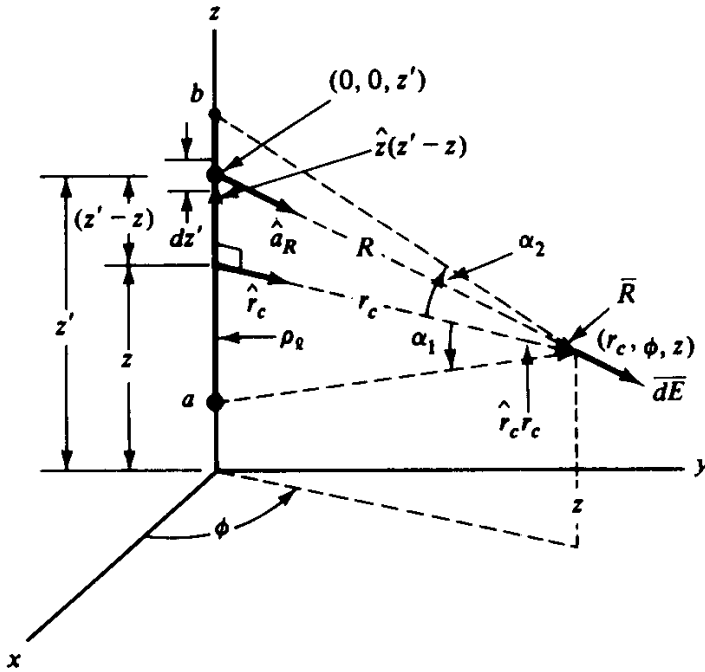
امتداد محور Z، چنانکه در شکل مشخص شده است، را پیدا کنید.



# شدت میدان الکتریکی یک بار خطی

- پاسخ: با استفاده از رابطه اصلی و شکل داریم:

$$\overline{dE} = \frac{\rho_l d\ell}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$



- با استفاده از شکل بار  $dQ$  که در  $P_{cyl}(r'_c, \phi', z')$  واقع شده است.



# شدت میدان الکتریکی یک بار خطی

• مکان نقطه مورد نظر برای میدان با استفاده از شکل از این

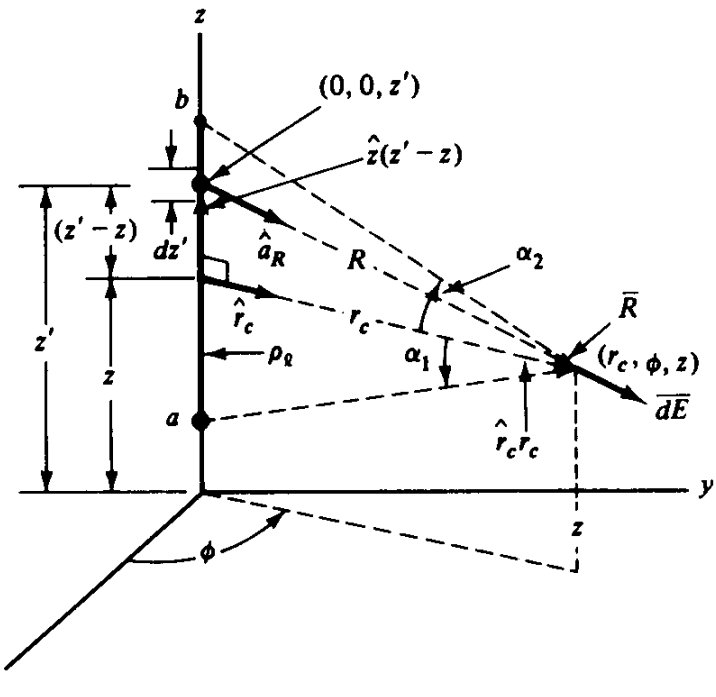
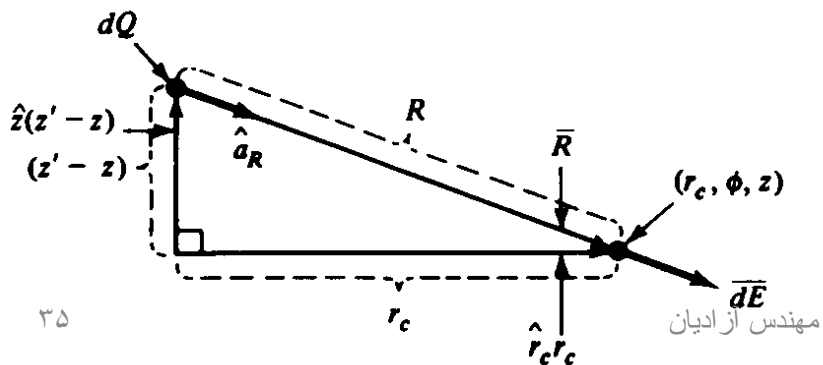
رابطه محاسبه می شود.

$$R = (r_c^2 + (z' - z)^2)^{1/2}$$

$$\vec{R} = \hat{r}_c r_c - \hat{z}(z' - z) = \hat{a}_R R$$

$$\hat{a}_R = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\hat{r}_c r_c - \hat{z}(z' - z)}{(r_c^2 + (z' - z)^2)^{1/2}}$$

$$d\ell = dz'$$



# شدت میدان الکتریکی یک بار خطی

• با جایگذاری در

رابطه  $dE$  خواهیم داشت:

$$\overline{dE} = \frac{\rho_\ell dz'}{4\pi\epsilon_0(r_c^2 + (z' - z)^2)} \left[ \frac{\hat{r}_c r_c - \hat{z}(z' - z)}{(r_c^2 + (z' - z)^2)^{1/2}} \right]$$

• در طول بار خطی انتگرالگیری می‌کنیم:

$$\overline{E} = \int_a^b \overline{dE} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\hat{r}_c r_c - \hat{z}(z' - z)}{(r_c^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} dz'$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار خطی

- با بیرون کشیدن ثابت ها داریم:

$$\bar{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \hat{r}_c r_c \int_a^b \frac{dz'}{(r_c^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} - \hat{z} \int_a^b \frac{(z' - z) dz'}{(r_c^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} \right\}$$

- این انتگرال ها از فرم انتگرال های زیرست:

$$\int \frac{dx}{(c^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c^2(c^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x dx}{(c^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(c^2 + x^2)^{1/2}}$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار خطی

- این انتگرال ها به راحتی با تغییر متغیر قابل محاسبه است یا از جداول استاندارد می توان جواب آن ها را یافت.
- با جایگذاری داریم:

$$\bar{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \hat{r}_c r_c \frac{z' - z}{r_c^2 (r_c^2 + (z' - z)^2)^{1/2}} \Big|_a^b + \hat{z} \frac{1}{(r_c^2 + (z' - z)^2)^{1/2}} \Big|_a^b \right\}$$

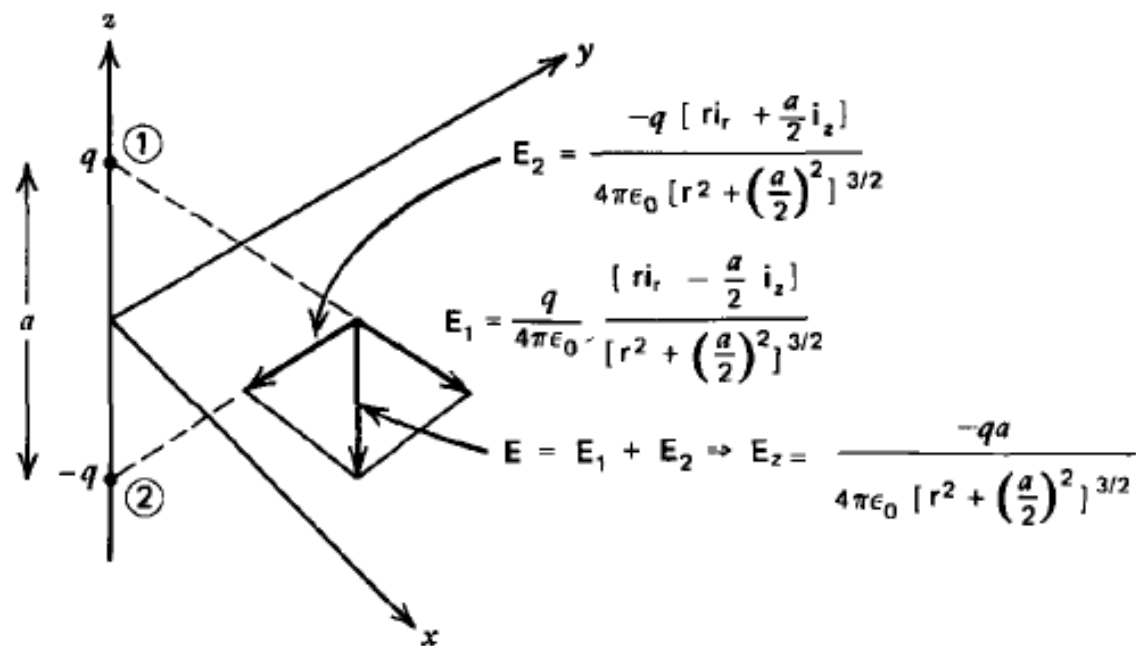
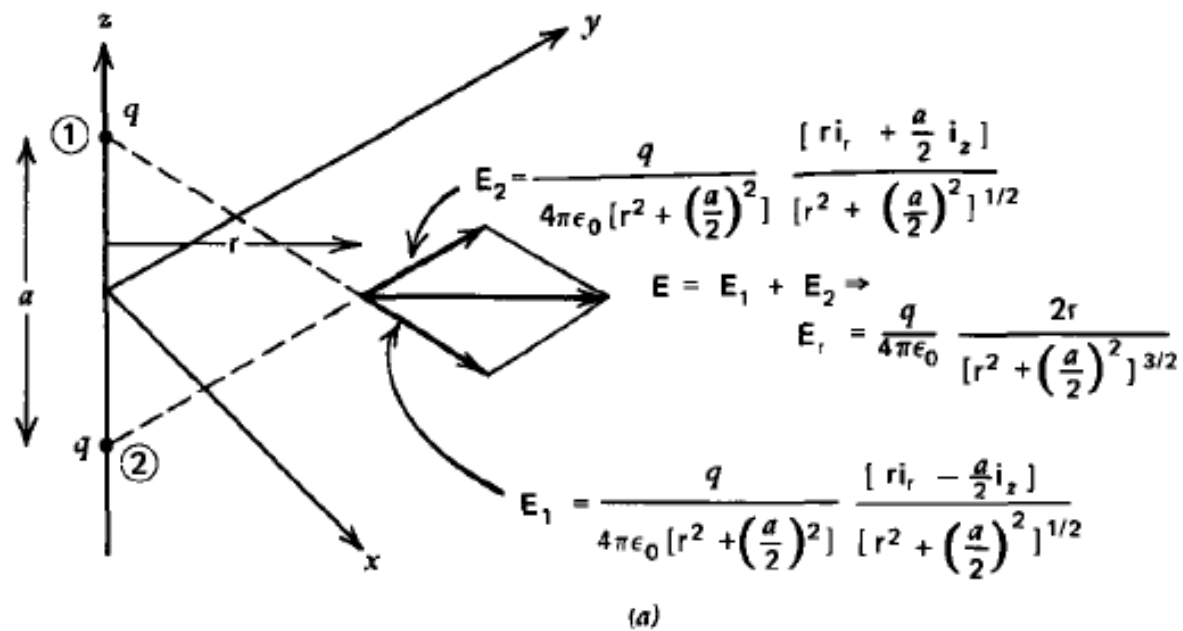
- تمرین: انتگرال اول را حل کنید.

# شدت میدان الکتریکی یک بار خطی

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \hat{r}_c \left[ \frac{b-z}{(r_c^2 + (b-z)^2)^{1/2}} - \frac{a-z}{(r_c^2 + (a-z)^2)^{1/2}} \right] + \hat{z} \left[ \frac{1}{(r_c^2 + (b-z)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r_c^2 + (a-z)^2)^{1/2}} \right] \right\} \quad (\text{V m}^{-1})$$

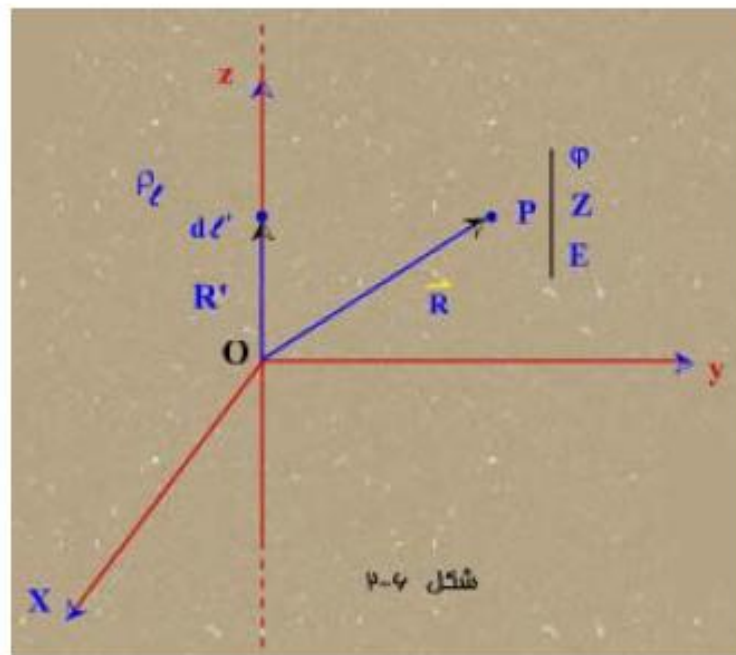
• و در نهایت شدت میدان الکتریکی به صورت زیر در می آید

$$\bar{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\hat{r}_c}{r_c} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1) + \frac{\hat{z}}{r_c} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \right\} \quad (\text{V m}^{-1})$$



**مثال:** محاسبه شدت میدان الکتریکی ناشی از یک بار خطی به طول نامحدود، مستقیم با چگالی بار یکنواخت  $\rho_l$  در فضای خلاء می‌توان پیش بینی کرد که  $\vec{E}$  مؤلفه  $z$  و  $\phi$  نخواهد داشت.

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_l(\vec{R}') d\ell'}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} (\vec{R} - \vec{R}')$$



$$\vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}' = z'\hat{a}_z$$

$$\vec{R} - \vec{R}' = r\hat{a}_r + (z - z')\hat{a}_z$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$$

$$d\ell' = dz'$$

$$\vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}' = z'\hat{a}_z$$

$$\vec{R} - \vec{R}' = r\hat{a}_z + (z - z')\hat{a}_z$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{r^2 + (z - z')^2} \quad dl' = dz'$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_l dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} [r\hat{a}_r + (z - z')\hat{a}_z]$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \hat{a}_r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{rdz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \hat{a}_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z - z')dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \hat{a}_r \left[ \frac{z' - z}{r\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \hat{a}_z \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \right\}$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \hat{a}_r \frac{2}{r} + 0 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r$$

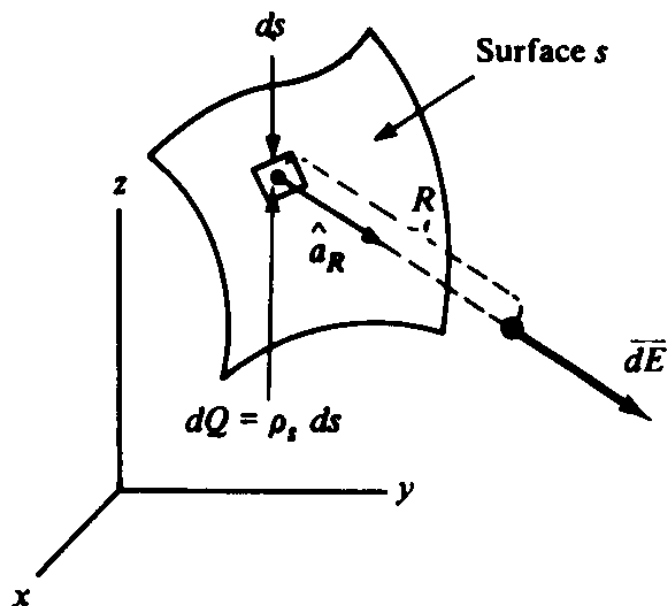
بنابراین  $\vec{E}$  از نظر اندازه مستقل از  $z, \varphi$  است و تنها در جهت  $\hat{a}_r$  مؤلفه دارد و صرفاً وابسته به

فاصله (عمومي) از منبع (بار خطي) است (r)

باید توجه کرد که چون  $\hat{a}_r$  وابسته به  $\varphi$  می‌باشد، جهت  $\vec{E}$  وابسته به  $\varphi$  خواهد بود.



# شدت میدان الکتریکی یک بار سطحی



- برای یک توزیع بار سطحی مطابق شکل یک بار نقطه ای به صورت عنصر سطحی  $ds$  فرموله می شود. بار جزئی

مرتبط با آن برابر است با  $dQ = \rho_s ds$  (C) بنابراین داریم:

$$\overline{dE} = \frac{dQ \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (\text{V m}^{-1}) \quad (\text{aap})$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار سطحی

- و با انتگرال گیری، میدان کل در یک نقطه دلخواه به دست می آید:

$$\bar{E} = \int_s \overline{dE} = \int_s \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (\text{V m}^{-1}) \quad (\text{aap})$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار سطحی

• مثال: با استفاده از دستگاه مختصات استوانه ای شدت میدان الکتریکی مربوط به یک بار سطحی  $\rho_s$  را چنانکه در شکل مشخص شده است، در بالای سطح پیدا کنید.

• پاسخ: سطح بار دار

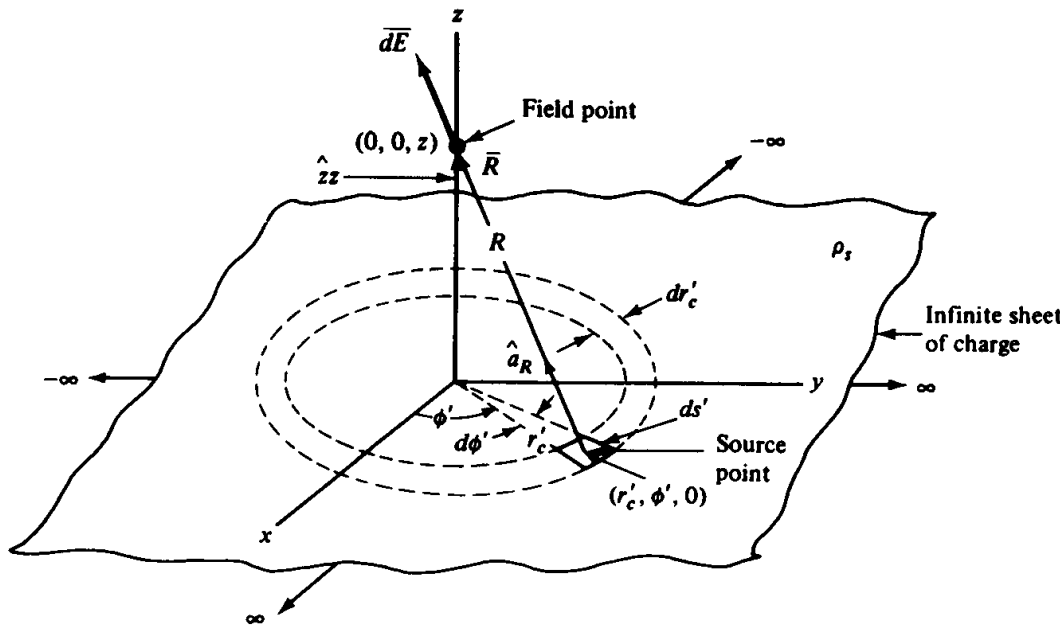
را در صفحه  $z=0$

قرار داده و شدت

میدان را روی محور

$Z$  یعنی  $P_{cyl}(0,0,z)$

پیدا می کنیم.

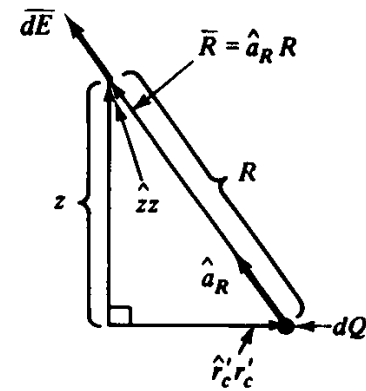
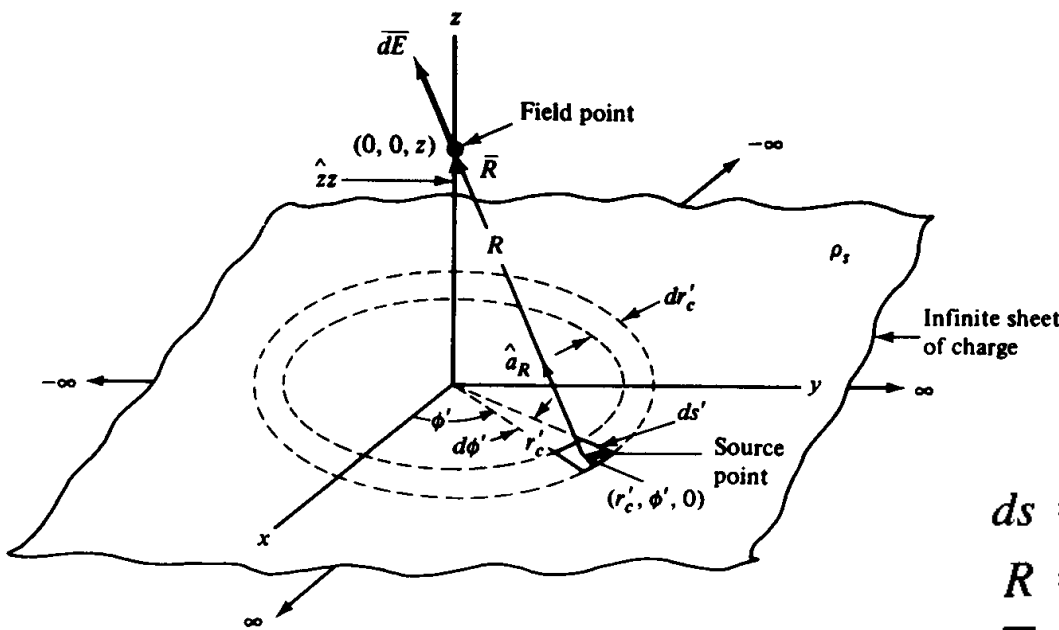


# شدت میدان الکتریکی یک بار سطحی

$$\overline{dE} = \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

• داریم:

• با استفاده از شکل



• می نویسیم:

$$ds = ds' = (dr'_c)(r'_c d\phi')$$

$$R = (r'^2_c + z^2)^{1/2}$$

$$\overline{R} = \hat{z}z - \hat{r}'_c r'_c = \hat{a}_R R$$

$$\hat{a}_R = \frac{\hat{z}z - \hat{r}'_c r'_c}{(r'^2_c + z^2)^{1/2}}$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار سطحی

- با جایگذاری داریم: 
$$\overline{dE} = \frac{\rho_s(r'_c dr'_c d\phi')}{4\pi\epsilon_0(r'_c{}^2 + z^2)} \left[ \frac{\hat{z}z - \hat{r}'_c r'_c}{(r'_c{}^2 + z^2)^{1/2}} \right]$$
- حال با انتگرال گیری به دست می آوریم:

$$\overline{E} = \int_s \overline{dE} = \int_0^{r'_c=\infty} \int_0^{\phi'=2\pi} \frac{\rho_s(r'_c d\phi' dr'_c)}{4\pi\epsilon_0(r'_c{}^2 + z^2)^{3/2}} (\hat{z}z - \hat{r}'_c r'_c) \quad (\text{V m}^{-1})$$

- در بازه  $0 \leq \phi' < 2\pi$  and  $0 \leq r'_c \leq \infty$ ، تنها متغیرها  $r'_c$ ،  $\phi'$ ، and  $\hat{r}'_c$  هستند، از فصل قبل داریم:

$$\hat{r}'_c = \hat{x} \cos \phi' + \hat{y} \sin \phi'$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار سطحی

• و در نتیجه:

$$\begin{aligned} \bar{E} = & \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left[ \hat{z} z \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r'_c d\phi' dr'_c}{(r'_c{}^2 + z^2)^{3/2}} \right. \\ & - \left( \hat{x} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r'_c{}^2 \cos \phi' d\phi' dr'_c}{(r'_c{}^2 + z^2)^{3/2}} \right. \\ & \left. \left. + \hat{y} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r'_c{}^2 \sin \phi' d\phi' dr'_c}{(r'_c{}^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right] \end{aligned}$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار سطحی

- دو انتگرال آخر در بازه 0 تا  $2\pi$  صفر می شود، پس

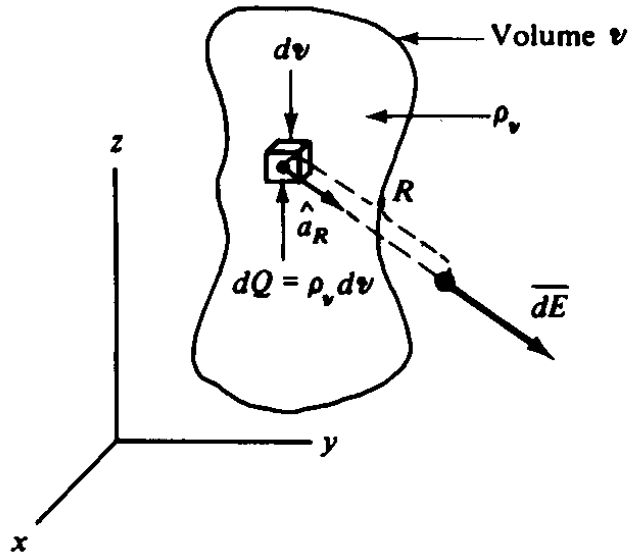
$$\bar{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \hat{z}z \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r'_c d\phi' dr'_c}{(r'^2_c + z^2)^{3/2}}$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \hat{z}z(2\pi) \left[ \frac{-1}{(r'^2_c + z^2)^{1/2}} \right] \Big|_0^\infty \quad \bullet \text{ و در نهایت:}$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} \quad (\text{V m}^{-1})$$

- دقت کنید که میدان فقط در امتداد z است و این مربوط به تقارن است.

# شدت میدان الکتریکی یک بار حجمی



• با توجه به شکل

• بار مربوط به عنصر حجمی  $dv$ ،

یعنی  $dQ$  برابر است با:  $\rho_v dv$  (c)

• پس:

• و

$$\overline{dE} = \frac{dQ \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (\text{V m}^{-1}) \quad (\text{aap})$$

$$\overline{E} = \int_v \overline{dE} = \int_v \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (\text{V m}^{-1}) \quad (\text{aap})$$



# شدت میدان الکتریکی یک بار حجمی

- مثال: میدان مربوط به یک توزیع بار کروی را که مرکز کره در مبدا مختصا واقع است، پیدا کنید.

• پاسخ: شکل

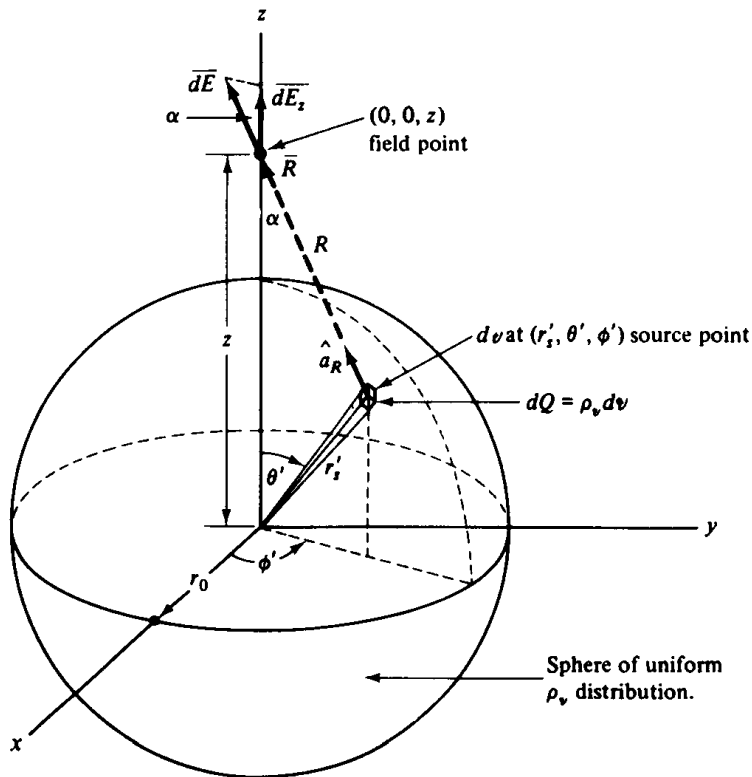
• نشان می دهد که میدان

$dE$  مربوط به بار نقطه ای

$dQ$  به بار در بر گرفته شده

توسط عنصر حجم  $dv$  مربوط

است.



# شدت میدان الکتریکی یک بار حجمی

• شکل مسئله ایجاب می کند که دستگاه مختصات کروی را

$$\overline{dE} = \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R = \frac{\rho_v (r_s'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr_s')}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

پس اختیار کنیم،

• با توجه به شکل

• اگر تمام متغیرها را ثابت

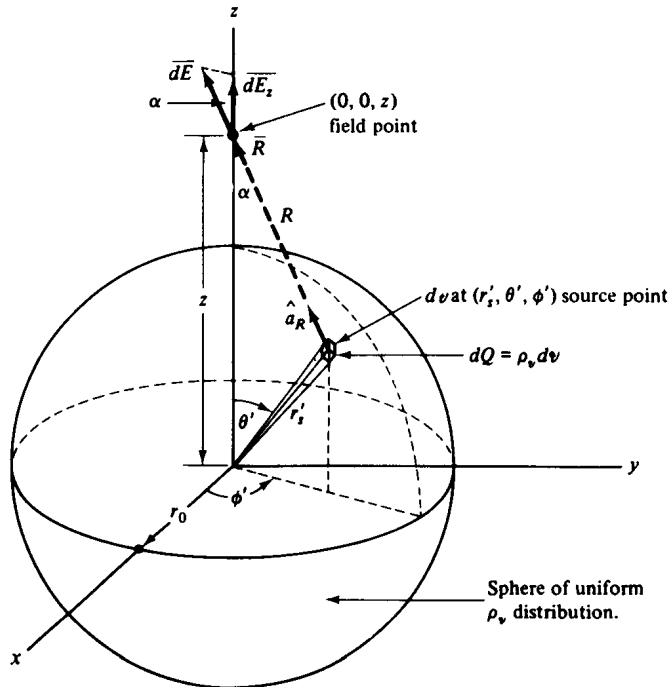
نگه داریم و  $\phi'$  را از 0 تا

$2\pi$  تغییر دهیم. یک دیسک

خواهیم داشت که میدان مربوط

به آن، به دلیل تقارن فقط در

امتداد Z است. پس:



$$\overline{E}_z = \overline{dE} \cos \alpha = \int \frac{\rho_v (r_s'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr_s')}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \alpha$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار حجمی

- برای حل معادله آخر نیاز به حل سه انتگرال است. انتگرال اول مربوط به  $\phi'$  است که در فاصله  $0$  تا  $2\pi$  گرفته می شود. برای حل دو انتگرال دیگر مناسب است که  $R$  و  $r_s'$  را به عنوان متغیرهای مستقل در نظر بگیریم. با استفاده از

شکل می توانیم بنویسیم:  $r_s'^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos \alpha$

و  $R^2 = z^2 + r_s'^2 - 2zr_s' \cos \theta'$

- با حل این دو معادله به دست می آوریم:

$$\cos \alpha = \frac{z^2 + R^2 - r_s'^2}{2zR} \quad \cos \theta' = \frac{z^2 + r_s'^2 - R^2}{2zr_s'}$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار حجمی

• با توجه به شکل و بررسی معادله، در می یابیم که با تغییر

$\theta'$  ،  $z$  و  $r'_s$  ثابت است. پس

$$\sin \theta' d\theta' = \frac{R dR}{zr'_s}$$

• که بازه های متغیرها:

$\theta'$  is  $0 \leq \theta' \leq \pi$  and on  $R$  is  $(z - r'_s) \leq R \leq (z + r'_s)$ .

• با جایگذاری داریم:

$$\bar{E}_z = \frac{\rho_v \hat{z}}{8\pi\epsilon_0 z^2} \int_0^{2\pi} \int_{r'_s=0}^{r'_s=r_0} \int_{R=z-r'_s}^{R=z+r'_s} r'_s \left( 1 + \frac{z^2 - r'^2_s}{R^2} \right) dR dr'_s d\phi'$$

# شدت میدان الکتریکی یک بار حجمی

- انتگرال گیری می دهد:

$$\bar{E}_z = \frac{\hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_v}{z^2} \right)$$

- و با جایگزینی  $Z$  و  $r_s$  تبدیل می شود به:

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_s^2} \hat{r}_s \quad (\text{V m}^{-1})$$

# تصویر: میدان بار کروی

