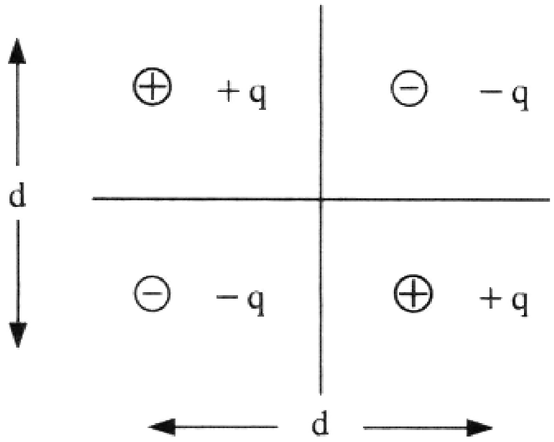
• مثال ۱



چهار بار نقطه‌ای مطابق شکل در صفحه xy قرار دارند. شدت میدان الکتریکی E و پتانسیل V را در نقاط زیر به‌دست آورید:

الف) (d,0,0)

ب) (0,d,0)

میدان الکتریکی و پتانسیل از یک بار نقطه‌ای Q (با بردار مکانی 'R) در نقطه P (با بردار مکانی R) از روابط زیر به‌دست می‌آید.

$$E(R)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{(\bar{R}-R')}{|\bar{R}-R'|^{3}}$$

$$V(R)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{|\bar{R}-\bar{R}'|}$$

$$R_1'=\frac{d}{2}(\hat{a}_x+\hat{a}_y)R_2'=\frac{d}{2}(-\hat{a}_x+\hat{a}_y)\quad R_3'=-\frac{d}{2}(\hat{a}_x+\hat{a}_y)$$

$$R_4'=\frac{d}{2}(\hat{a}_x-\hat{a}_y)\quad R=d\hat{a}_x$$

$$|\bar{R}-\bar{R}_1'|=\frac{\sqrt{2}}{2}d\quad,\quad |\bar{R}-R_2'|=\frac{\sqrt{10}}{2}d\quad,\quad |\bar{R}-\bar{R}_3'|=\frac{\sqrt{10}}{2}d$$

$$|\bar{R}-\bar{R}_4'|=\frac{\sqrt{2}}{2}d$$

(الف) $$V(R)=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{-\frac{2}{\sqrt{2d}}+\frac{2}{\sqrt{10d}}-\frac{2}{\sqrt{10d}}+\frac{2}{\sqrt{2d}}\right\}=0$$

$$E(R)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{-\frac{\frac{d}{2}(\hat{a}_x-\hat{a}_y)}{\left(\frac{\sqrt{2d}}{2}\right)^2}+\frac{\frac{d}{2}(3\hat{a}_x-a_y)}{\left(\frac{\sqrt{10d}}{2}\right)^2}-\frac{\frac{d}{2}(3\hat{a}_x+\hat{a}_y)}{\left(\frac{\sqrt{10d}}{2}\right)^2}-\frac{\frac{d}{2}(3\hat{a}_x+\hat{a}_y)}{\left(\frac{\sqrt{10d}}{2}\right)^2}\right\}$$

$$=\frac{q}{\pi\varepsilon d^2}\left\{-\frac{(\hat{a}_x-\hat{a}_y)}{2\sqrt{2}}+\frac{(3\hat{a}_x-\hat{a}_y)}{10\sqrt{10}}-\frac{(3\hat{a}_x+\hat{a}_y)}{10\sqrt{10}}+\frac{(\hat{a}_x+\hat{a}_y)}{2\sqrt{2}}\right\}$$

$$=\frac{q}{\pi\varepsilon d^2}\left\{\frac{\hat{a}_y}{\sqrt{2}}-\frac{\hat{a}_y}{5\sqrt{10}}\right\}=\frac{0.6439q}{\pi\varepsilon d^2}\hat{a}_y$$

ب) $R = d\hat{a}_y$

$$\left|\bar{R}-\bar{R}_1'\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}d \quad \left|\bar{R}-\bar{R}_2\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}d \quad \left|\bar{R}-R_3'\right| = \frac{\sqrt{10}}{2}d$$

$$\left|R-R_4'\right| = \frac{\sqrt{10}}{2}d$$

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{-\frac{2}{\sqrt{2d}}+\frac{2}{\sqrt{2d}}-\frac{2}{\sqrt{10d}}+\frac{2}{\sqrt{10d}}\right\} = 0$$

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}d\right)^3}\left\{-d\left(-\frac{1}{2}\hat{a}_x-\frac{1}{2}\hat{a}_y+\hat{a}_z\right)+d\left(\frac{1}{2}\hat{a}_x-\frac{1}{2}\hat{a}_y+\hat{a}_z\right)-d\left(\frac{1}{2}\hat{a}_y+\hat{a}_z\right)\right\}$$

$$+d\left(-\frac{1}{2}\hat{a}_x+\frac{1}{2}\hat{a}_y+\hat{a}_z\right)$$

• مثال ۲

در فضای آزاد، بار کل را در حجم‌های معین شده زیر به‌دست آورید:

الف) $\rho = 10xy/z^2$ ، $1 \le x \le 3$; $0 \le y \le 2$ ، $1 \le z \le 2$

ب) $\rho = 300 r z \cos\varphi$ ، $0 \le r \le 2$; $0 \le \varphi \le 30°$ ، $1 \le z \le 4$

ج) $P = \dfrac{4}{R^2} e^{-5R} \sin^2\theta \cos^2\varphi$ در کل فضا

$$Q = \int \rho_v dx$$

الف) $$Q = \iiint \frac{10xy}{z^2} d_x d_y d_z = 10 \int_1^3 x\,dx \int_{10}^2 y\,dy \int_1^2 \frac{dz}{z}$$

$$= 10\left(+ \frac{z^2}{2}\Big|_1^3 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 \left(-\frac{1}{2}\Big|_1^2 = 10\left(\frac{4}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{2} - 0\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 80\right.\right.\right.$$

ب) $$Q = \iiint 300 r z \cos\phi (r dr d\phi dz) = 300 \int_0^2 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\phi d\phi \int_1^4 z\,dz$$

$$= 300\left[\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^2\right] * \left[\sin\phi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right] * \left[\frac{z^2}{2}\Big|_1^4\right] = 300\left(\frac{8}{3} - 0\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right)\left(\frac{16}{2} - 1\right) = 3200$$

ج) $$Q = \iiint \frac{4}{R^2} e^{-5R} \sin^2\theta \cos^2\phi (R^2 \sin\theta d\theta d\phi)$$

$$= 4\int_0^\infty e^{-5R} dR \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi = 4\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right)(\pi) = \frac{16\pi}{15}$$

• مثال ۳

دو کره کوچک هادی مشابه هم را که به‌ترتیب دارای بارهای $+q$ و $-\frac{q}{4}$ و به فاصله d می‌باشند با یکدیگر تماس داده و از هم به فاصله d دور می‌کنیم، نیروی که بر هم وارد می‌کنند چند برابر می‌شود.

$$F_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon(d)^2}\hat{a}_{12} = \frac{(q)\left(-\frac{q}{4}\right)}{4\pi\varepsilon(d)^2}\hat{a}_{12} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon(d)^2}\hat{a}_{12}$$

بعد از وصل دو کره هادی و جدا کردن آنها به فاصله d

$$q_1 = q_2 = \frac{+(q) - \frac{q}{4}}{2} = \frac{3q}{8}$$

$$F_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon(d)^2}\hat{a}_{12} = \frac{\left(\frac{3q}{\varepsilon}\right)\left(\frac{3q}{\varepsilon}\right)}{4\pi\varepsilon(d)^2}\hat{a}_{12} = \frac{qq^2}{256\varepsilon(d)^2}\hat{a}_{12}$$

$$\frac{|F_2|}{|F_1|} = \frac{\frac{9}{256}}{\frac{1}{16}} = \frac{9*16}{256} = 0.5625$$

- مثال ۴

برای میدان $E = 2xz^2\hat{a}_x + 2z(x^2+1)\hat{a}_z$ معادله خطوط میدانی که از نقطه $(1,3,-1)$ می‌گذرد را به‌دست آورید.

معادله‌ی خطوط میدان در نقطه‌ی (1 , 3 , -1)

$$E = 2x2^2\hat{a}_x + 2z(x^2+1)\hat{a}_z$$

$$\frac{d_x}{E_x} = \frac{d_y}{E_y} = \frac{d_z}{E_z}$$

$$\frac{d_x}{2xz^2} = \frac{d_z}{2z(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{2}zdz = \frac{1}{2}\frac{x^2+1}{x}dx \quad zdz = \left(x + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}x^2 + \ln x + \lambda \quad \text{یا} \quad z^2 = x^2 + 2\ln x + \lambda$$

$$(-1)^2 = (1)^2 + 2\ln(1) + \lambda \quad \lambda = 0$$

بنابراین معادله خط میدان که از نقطه (1− و 3 و 1) می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$z^2 = x^2 + 2\ln x$$

• مثال ۵

در فضای آزاد پتانسیل $V = V_0 \sin\alpha x \sin\beta y e^{-\gamma z}$ داده شده است $(\gamma = \alpha + j\beta)$

الف) $\vec{E}$ و چگالی بار الکتریکی وجود در این فضا را حساب کنید.

(ب) اگر در صفحه yz یک هادی با ابعاد $0 \le y \le \frac{\pi}{\beta}$، $0 < z < \infty$ قرار دهیم. چقدر بار الکتریکی روی سطح این هادی جمع می‌شود.

الف) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$

$$= -\alpha V_0 \cos\alpha x \sin\beta y e^{-\gamma z}\hat{a}_x - \beta V_0 \sin\alpha x \cos\beta y e^{-\gamma z}\hat{a}_y + \gamma V_0 \sin\alpha x \sin\alpha y e^{-\gamma z}\hat{a}_z$$

$$= -V_0 e^{-\gamma z}\left[\hat{a}_x \alpha \cos\alpha x \sin\beta y - \hat{a}_y \beta \sin\alpha x \cos\beta y + \hat{a}_z \gamma \sin\alpha x \sin\alpha y\right]$$

$$\rho = \varepsilon \vec{\nabla} \circ \vec{E}$$

و از اینجا می‌توان چگالی بار را محاسبه کرد: $\rho = 0$

ب) $\rho_s = -(D_1 - D_2).\hat{n}_{12}$

$$= D\hat{a}_x = \varepsilon E_x\Big|_{x=+\varepsilon} = -\alpha V_0 \cos\alpha x \sin\beta y e^{-\gamma z}$$

$$Q = \iint \rho_s dydz = -\alpha V_0 \int_0^{-\infty}\int_0^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\beta y e^{-\gamma z} dydz = -\alpha V_0 \left(-\frac{\cos\beta y}{\beta}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\beta}} \cdot \frac{e^{-\gamma z}}{-\gamma}\Bigg|_0^{\infty}\right)$$

$$= -\frac{2\alpha V_0}{\beta\gamma}$$

- مثال ۶

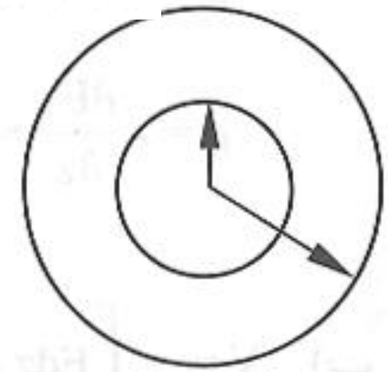
فاصله بین دو کره هادی هم مرکز به شعاع‌های a، 2a با بار الکتریکی ساکن به چگالی $P=\frac{\rho_0}{r}$ پوشیده است اگر هر یک از کره‌ها دارای بار الکتریکی خالص 8+ باشند حساب کنید:

(الف) شدت میدان الکتریکی بین دو کره

(ب) مقدار q چقدر باشد تا اختلاف پتانسیل دو کره صفر گردد.

(ج) اگر $q=6\rho_0\pi a^2$ باشد و دو کره را به‌وسیله سیم نازک به هم وصل کنیم و بار ساکن ρ تغییر نکند میدان جدید بین دو کره را حساب کنید.

$$\rho=\begin{cases}-\dfrac{\rho_0}{r} & a<r<2a\\[2mm] \dfrac{Q}{4\pi a^2} & r=a\\[2mm] \dfrac{Q}{16\pi a^2} & r=2a\end{cases}$$



$$\text{(الف)}\int \vec{D}.d\vec{s}=Q+\int \rho_v dv$$

$$D.4\pi r^2=a+\iiint -\frac{\upsilon_0}{r}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$=a-\frac{\rho_0}{2}\left(r^2-a^2\right)(4\pi)\rightarrow\vec{D}=\frac{Q-2\pi\rho_0\left(r^2-a^2\right)}{4\pi r^2}\hat{a}_r\ \&\ \vec{E}=\frac{Q-2\pi\rho_0\left(r^2-a^2\right)}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r$$

ب) $V=-\int \vec{E}.d\vec{l}=-\int_{2a}^{a}\frac{Q-2\pi\rho_0\left(r^2-a^2\right)}{4\pi\varepsilon r^2}dr$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}\right)-\frac{\rho_0}{2\varepsilon}(2a-a)+\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}\right)$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon a}-\frac{\rho_0}{2\varepsilon}+\frac{\rho_0 a}{4\varepsilon}=0 \;\rightarrow\; Q=2\pi\varepsilon\rho_0 a^2$$

ج) $\rho_s=\frac{Q}{4\pi a^2+4\pi(2a)^2}=\frac{6\rho_0\pi a^2}{4\pi a^2(1+4)}=\frac{3\rho_0}{10}$

$$\int \vec{D}.d\vec{s}=\int \rho_s ds+\int \rho_v dv$$

$$D(4\pi r^2)=\frac{3\rho_0}{10}\left(4\pi a^2\right)-\frac{\rho_0}{2}\left(r^2-a^2\right)(4\pi)$$

$$=\frac{8\rho_0}{10}\left(4\pi a^2\right)-\frac{\rho_0}{2}4\pi r^2=4\pi\left(\frac{\rho_0}{10}\right)\left(8a^2-5r^2\right)$$

$$D=\frac{\rho_0}{10}\cdot\frac{8a^2-5r^2}{r^2}\hat{a}_r \qquad \& \qquad =\frac{\rho_0}{10\varepsilon}\cdot\frac{8a^2-5r^2}{r^2}\hat{a}_r$$

• مثال۷

کار انجام‌یافته برای حرکت دادن بار 5 کولن از (0,0,0) به (1,0,0) در میدان

$$\vec{E} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}\hat{a}_x - \frac{1}{(1+x^2)}\hat{a}_y$$

را برای مسیرهای زیر محاسبه کنید:

الف) $z = 0$ ، $y = x^2$

ب) $z = 0$ ، $y = x$

ج) از جواب‌های (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $\vec{E} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}\hat{a}_x - \frac{1}{(1+x^2)}\hat{a}_y$

$$w = -q\int_c \vec{E}.d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = \hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy$$

$$w = -5\int \left(-\frac{2xy}{(1+x^2)^2}dx - \frac{dy}{(1+x^2)}\right) = 10\int_0^1 \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^2} + 5\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)}$$

$$w = 10[\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,|_0^1 + 5\mathrm{Ln}(1+y)\,|_0^1$$

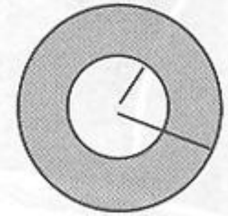
$$w = 10\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right] + 5\mathrm{Ln}2 \approx 11.93$$

ب) $w = 10\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx + 5\int \frac{dy}{(1+y^2)}$

$$w = 10\left[\frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x\right|_0^1 + 5\tan^{-1}\Big|_0^1 = 10\left[\frac{-1}{4} + 5\frac{\pi}{4} = 5.354\right.$$

ج) از مقایسه جواب‌های (الف) و (ب) نتیجه می‌شود که انتگرال $\int \vec{E}\cdot\vec{dl}$ همبستگی به مسیر دارد یعنی میدان کنسرواتیو یا غیر دورانی است.

• **مثال۸** در فضای آزاد در ناحیه $a < r < b$ بار الکتریکی حجمی ساکن با چگالی $\rho = \rho_0 a^2/r^2$ وجود دارد و در سایر نقاط $\rho = 0$ می‌باشد. پتانسیل الکتریکی در کلیه نقاط را حساب کنید.



$$\rho = \rho_0 \frac{a^2}{R^2} a < R < b$$

$$R < 0 \qquad : \oint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{4}\int \rho dv \rightarrow E_1 = 0$$

$$a < R < b \quad : \oint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{4}\rho_0 a^2 \int \frac{1}{R^2} :(a^2 \mathrm{Sin}\theta d\theta d\varphi dR)$$

$$: E(4\pi R^2) = \frac{1}{4}\rho_0 a^2 (4\pi)(R-a) \rightarrow E_2 = \frac{\rho_0 a^2 (R-a)}{4R^2}\hat{a}_R$$

$$R > \infty \qquad : \oint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{4}\rho_0 a^2 \int \frac{1}{R^2}(R^2 \mathrm{Sin}\theta d\theta d\varphi dR)$$

$$: E(4\pi R^2) = \frac{1}{4}\rho_0 a^2 (4\pi)(b-a) \rightarrow E_3 = \frac{\rho_0 a^4 (b-a)}{4R^2}\hat{a}_R$$

$$V_3 = \int_\infty^R E_3 dR = \left.\frac{\rho_0 a^2 (b-a)}{\varepsilon R}\right|_\infty^R = \frac{\rho_0 a^2 (b-a)}{\varepsilon R}$$

$$V_2 = -\int_\infty^b E_3 dR - \int_b^R E_2 dR = \frac{\rho_1 a^2 (b-a)}{b} - \frac{\rho_0 a^2}{4}\int_b^R \frac{(R-a)}{R^2} dR$$

$$= \frac{\rho_0 a^2 (b-a)}{4b} - \frac{\rho_0 a^2}{4}\ln\left(\frac{2}{b}\right) + \frac{\rho_0 a^2}{4}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{R}\right)$$

$$V_3 = \frac{\upsilon_0 a^2 (b-a)}{\varepsilon b} - \frac{\rho_0 a^2}{4}\ln\left(\frac{2}{b}\right) + \frac{\rho_0 a^2}{4}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

• مثال ۹

در فضای آزاد، در دستگاه استوانه‌ای پتانسیل الکتریکی به‌صورت $V=\frac{a^2}{r_0^2}\cos\varphi+\frac{b}{r}$ داده شده است.

الف)ماکزیمم تغییرات V در چه جهتی است؟

ب) شدت میدان الکتریکی E را محاسبه کنید.

ج) مقدار بار خالصی که در استوانه خالی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b حول محور z به طول L و مرکز مبدأ مختصات را حساب کنید.

د) انرژی ذخیره شده در استوانه قسمت (ج) چقدر است؟

$$V=\frac{a^2}{r_0^2}\cos\varphi+\frac{b}{2}$$

الف) $$\vec{\nabla}V=\vec{a}_2\frac{\partial V}{\partial r}+\vec{a}_2\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=-\vec{a}_2\frac{b}{r^2}-\vec{a}_2\frac{a_2}{r_0^2}\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\hat{a}_2\frac{b}{r^2}-\hat{a}_2\frac{a^2}{r_0^2}\sin\varphi\right)$$

ب) $$\vec{E}=\vec{\nabla}V=\frac{1}{r}\left[\hat{a}_2\frac{b}{r}+\hat{a}_2\frac{a^2}{r_0^2}\sin\varphi\right]$$

$$\vec{D}=\frac{40}{2}\left[\hat{a}_2\frac{b}{r}+\hat{a}_2\frac{a^2}{r_0^2}\sin\varphi\right]$$

ج) $\rho = \nabla . D = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial^2}(rD_r) + \frac{\partial D\varphi}{r\partial\varphi}$

$$= \frac{\varepsilon_0}{r}\left(-\frac{b}{r^2}\right) - \frac{\varepsilon_0}{r^2}\left(\frac{a^2}{r_0^2}\cos\varphi\right) = -\frac{\varepsilon_0}{r^2}\left(\frac{b}{r} + \frac{a^2}{r_0^2}\cos\varphi\right) = -\frac{\varepsilon_0}{r^2}v$$

$$Q = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b -\frac{\varepsilon_0}{r^2}\left(\frac{b}{r} + \frac{a^2}{r_0^2}\cos\varphi\right) r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= \varepsilon_0 L \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\frac{b}{r^2} + \frac{a^2}{r_0^2}\frac{\cos\varphi}{r}\right) dr\,d\varphi = -\varepsilon_0 L\left[2\pi b\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right] = +2\pi\varepsilon_0 L\left(1 - \frac{b}{a}\right)$$

د) $w = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_v |E|^2\,dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \frac{1}{r^2}\left[\frac{b}{r^2} + \frac{a^4}{r_0^4}\sin^2\varphi\right] r\,dr\,d\varphi\,dz$

$$= \frac{\varepsilon_0 L}{2}(2\pi)\left(\frac{b^2}{2}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + \frac{\varepsilon_0 L}{4}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

• مثال ۱۰

دو هادی کامل استوانه هم محور طویل به شعاع‌های a، b $(a<b)$ تشکیل یک خازن می‌دهند. ظرفیت خازن را برای حالت‌های زیر را حساب کنید:

الف) ضریب عایقی خازن در همه جا ε باشد.

ب) ε_1 برای $0<\varphi<\pi$ و ε_2 برای $\pi<\varphi<2\pi$

ج) ε_1 برای $a<r<c$ و ε_2 برای $c<r<b$

$$V.D=0 \rightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_2}(rD_r)=0 \rightarrow D_r=\frac{D_0}{r}$$

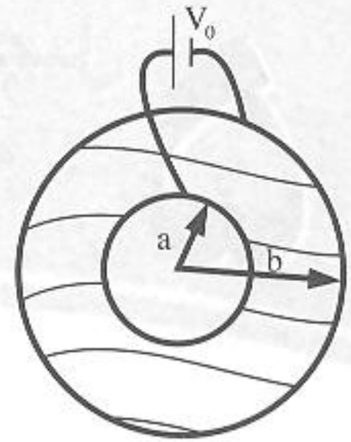
$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{D_0}{\varepsilon r}\hat{a}_r$$

الف) $$V_0=-\int_b^a \frac{D_0}{\varepsilon r}dr=\frac{D_0}{\varepsilon r}\ln\frac{b}{a} \rightarrow D_0=\frac{\varepsilon V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\vec{D}=\frac{\varepsilon V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{a}_r \ \& \ \vec{E}=\frac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{a}_r$$

$$Q=\oint \vec{D}.d\vec{s}=\frac{\varepsilon V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.\oint \frac{1}{r}r\,d\varphi\,dz=-\frac{\varepsilon V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}(2\pi L)$$

$$C=\frac{Q}{V_0}=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$



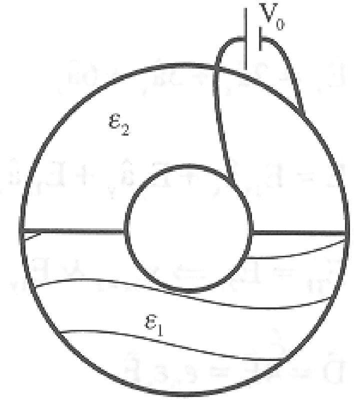
ب) $E_{1t} = E_{2t} = \frac{E_0}{r}\hat{a}_r$

$$\vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 E_0}{r}\hat{a}_r \qquad \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 E_0}{r}\hat{a}_r$$

$$V_0 = -\int_{-}^{+}\vec{E}_0 d\vec{l} = -\int_{b}^{a}\frac{E_0}{r}dr = E_1\ln\left(\frac{b}{a}\right) \to E_0 = V_0\Big/\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

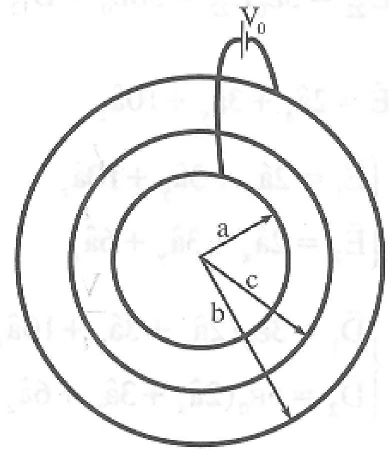
$$\vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{a}_r \quad \& \quad \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{a}_r$$

$$Q = \oint \vec{D}.d\vec{s} = \frac{nL\varepsilon_1 V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{\pi L\varepsilon_2 V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \to C = \frac{a}{V_0} = \frac{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$



ج) $D_{12} = D_{21} = \frac{D_0}{r}$

$$\vec{E}_1 = \frac{D_0}{\varepsilon_1 r}\hat{a}_r \quad \& \quad \vec{E}_2 = \frac{D_0}{\varepsilon_2 r}\hat{a}_r$$



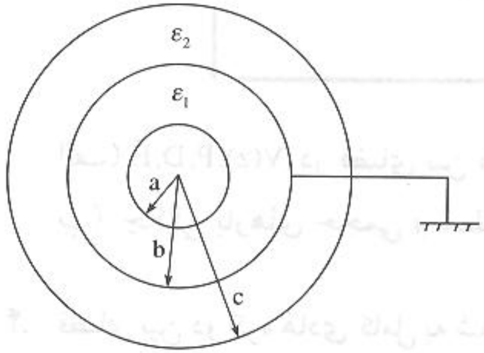
$$V_0 = -\int_{-}^{+}\vec{E}.d\vec{l} = -\int_{b}^{c}E_{2r}dr - \int_{c}^{a}E_{12}dr = D_0\left\{\frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{c}{a}\right)\right\}$$

$$D_0 = V_0\Big/\left[\frac{1}{\varepsilon_1}Ln\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{b}{c}\right)\right]$$

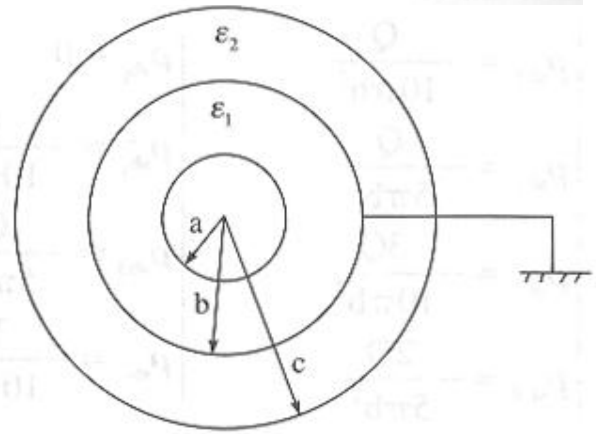
$$Q = \int \vec{D}.d\vec{s} = 2\pi LD_0 = 2\pi LV_0\Big/\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{b}{c}\right)\right]$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = 2\pi L\Big/\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{b}{c}\right)\right]$$

• مثال ۱۱



سه هادی استوانه‌ای هم محور با دو عایق ε_1، ε_2 مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. بار ρ_{L1}c/m روی استوانه داخلی و بار $-\rho_{L2}$c/m روی استوانه خارجی قرار گرفته و استوانه میانی به زمین وصل شده است؛ پتانسیل الکتریکی V(r) را در کلیه نواحی به‌دست آورید و آن را رسم نمایید.



$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_1 r}\hat{a}_r \\ \vec{E}_2 = 0 \\ \vec{E}_3 = -\dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_1 r}\hat{a}_r \end{cases}$$

$$V_3 = -\int_\infty^r -\frac{\rho_L}{2\pi 3_r}dr = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$$

$$V_2 = -\int_\infty^c E_2.dr - \int_c^r E_2 dr = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln c$$

$$V_1 = -\int_\infty^c E_3 dr + \int_c^b E_2 dr + \int_c^r E_1 dr$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln c + 0 + \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln c - \ln\left(\frac{b}{r}\right)\right\}$$