الکترومغناطیس

٤

مهندس حمید آزادیان

بسم الله الرحمن الرحیم

هاديها و عايقها و خواص الكتريكي آنها

هادی: واحد ساختمانی ماده اتم است که متشکل از یک هسته با بار الکتریکی مثبت و تعدادی الکترون با بار منفی می‌باشد مقدار کل بار الکتریکی الکترونهای هر اتم با بار الکتریکی هسته مساوی است یعنی اتم از نظر الکتریکی خنثی است الکترونهای آخرین لایه که بعنوان الکترونهای ظرفیت شناخته می‌شوند نقش اصلی را در فعل و انفعالات شیمیایی و هدایت الکتریکی دارند و چون نیروی بین هسته و این الکترونها ضعیف می‌باشد براحتی به اتمهای دیگر می‌پیوندند چنین الکترونهایی را الکترونهای آزاد گویند. فلزات دارای تعداد زیادی الکترون آزاد هستند که در اثر انرژی حرارتی محیط دارای حرکات مداوم ولی بدون نظم و ترتیب هستند سرعت متوسط الکترونها در مقیاس ماکروسکپی صفر است لذا جریان الکتریکی از حرکات نامنظم آنها پدید نمی‌آید اعمال میدان الکتریکی خارجی الکترونها را با سرعت متوسطی به حرکت در می‌آورد و در نتیجه جریانی که ناشی از جابجایی الکترونها می‌باشد بوجود می‌آید چنین پدیده‌ای را هدایت الکتریکی و جسمی که قابل هدایت آنها بالا باشد را مانند اکثر فلزات هادی می‌گویند.

۴-۱- معادله حرکت الکترون در هادی:

حرکت الکترون وقتی تحت تاثیر میدان الکتریکی قرار می‌گیرد تحت تاثیر دو نیروی کولمب $\overline{F}_1 = e\overline{E}$ و نیروی بازدارنده $\overline{F}_2$ که متناسب با ممنتم الکترون و عکس متوسط زمان بین دو برخورد می‌باشد قرار میگیرد قانون نیوتن را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$e\overline{E} - m_e \frac{\overline{V}_d}{\tau} = m_e \frac{d\overline{V}_d}{dt} \qquad (۱-۴)$$

در معادله (۴-۱)، τ متوسط زمان بین دو برخورد، $\overline{V}_d$ سرعت متوسط جابجایی الکترون و m_e جرم الکترون می‌باشد در حالتی که میدان الکتریکی ساکن باشد $(E=E_0)$ خواهیم داشت.

$$m_e \frac{d\overline{V}_d}{dt} + m_e \frac{\overline{V}_d}{\tau} = eE_0 \quad \rightarrow \quad \overline{V}_d = \frac{e\tau E_0}{m_e}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (۲-۴)$$

τ برای هادی معمولی مانند مس از مرتبه 10^{-14} است پس جمله اکسپونانسیل بسرعت صفر می‌شود و میتوان از آن صرفنظر نمود یعنی معادله (۴-۲) را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\overline{V}_d = \frac{e\tau}{m_e} E_0 \qquad (۳-۴)$$

برای میدانهای متغیر با زمان و سینوسی تا وقتی که دوره تناوب از چندین برابر τ کوچکتر نباشد یعنی $f \ll \frac{1}{\tau}$ میتوان از همان رابطه استفاده کرد مثلاً برای $\tau = 10^{-14}$ رابطه (۴-۳) برای فرکانسهای تا صدگیگا هرتز صادق است با جایگزینی e، τ و m_e در رابطه (۴-۳) خواهیم داشت.

$$\overline{V}_d = -\mu_e \overline{E} \qquad (۴-۴)$$

در رابطه (۴-۴) ضریب μ_e را ضریب تحرک الکترون می‌نامند. اگر یک قطعه فلز را در داخل یک میدان الکتریکی قرار دهیم الکترونها در خلاف جهت میدان طوری حرکت می‌کنند که در داخل فلز میدان کل ناشی از میدان خارجی و میدان حاصله از تغییر مکان الکترونها برابر صفر شود اگر سطح مقطع قسمتی از فلز را Δs فرض کنیم و الکترونها در مدت زمان Δt

مسافت Δx را در فلز طی کنند در اینصورت تعریف جریان عبوری از مقطع Δs عبارتست از:

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho\,\Delta v}{\Delta t} = \frac{\rho\,\Delta s\,\Delta x}{\Delta t} = \rho\frac{\Delta x}{\Delta t}\,\Delta s \;\rightarrow\; \frac{\Delta I}{\Delta s} = \rho\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

بعبارت دیگر

$$\bar{J} = \rho\,\bar{V}_d \qquad (۵-۴)$$

که J چگالی جریان (جریان بر واحد سطح) و ρ چگالی حجمی الکترونها می‌باشد. حال اگر تعداد الکترونها در واحد حجم فلز N باشد در اینصورت با جایگزینی $\bar{V}_d$ از رابطه (۴-۴) در رابطه (۵-۴) خواهیم داشت.

$$\bar{J} = (-Ne)(-\mu_e\bar{E}) = Ne\mu_e\bar{E}$$

بعبارت دیگر

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} \qquad (۶-۴)$$

که σ همان ضریب هدایت الکتریکی فلز است رابطه (۶-۴) در حقیقت همان رابطه اهم است.

مثال ۱: یک میله فلزی بطول l و سطح مقطع s مفروض است با استفاده از رابطه (۴-۶) معادله‌ای برای مقاومت میله بدست آورید.

حل: ***اگر باطری به ولتاژ $V_\circ$ را به دو سر میله وصل کنیم خواهیم داشت***

$$J = \sigma E \rightarrow \frac{I}{s} = \sigma \frac{V_\circ}{l} \rightarrow \frac{V_\circ}{I} = \frac{l}{\sigma s}$$

$\frac{V_\circ}{I}$ همان مقاومت میله است بنابراین

$$R = \frac{l}{\sigma s} \qquad (۷-۴)$$

مثال ۲: اگر در فلزی فاصله بین اتمها $۰/۱^{nm}$ باشد و هر اتم یک الکترون در شبکه فلز قرار دهد در اینصورت چگالی حجمی بار چقدر است؟

حل: ***تعداد الکترون در واحد حجم عبارتست از:***

$$N = \left[\frac{۱}{۱۰^{-۱۰}}\right]^{۳} = ۱۰^{۳۰} \ \frac{\text{الکترون}}{\text{واحد حجم}}$$

$$\rho = -Ne = -۱۰^{۳۰} \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} = -۱/۶ \times ۱۰^{۱۱} \ \frac{c}{m^{۳}}$$

مثال ۳: از یک سطح استوانه‌ای به طول ۱^{cm} و شعاع ۲^{mm} جریانی به چگالی $\bar{J} = \frac{\sin\frac{\phi}{۲}}{R}\hat{a}_R$ می‌گذرد کل جریان عبوری از استوانه چقدر است؟

حل: ***جریان را از رابطه $I = \int_s \bar{J} \cdot \overline{ds}$ بدست می‌آوریم.***

$$I = \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{۰/۰۱} \frac{\sin\frac{\phi}{۲}}{R} R\, d\phi\, dz = -۲z\cos\frac{\phi}{۲}\Big]_{\circ}^{۲\pi}\Big]_{\circ}^{۰/۰۱} = ۲ \times ۰/۰۱ \times ۲ = ۴۰^{mA}$$

۴-۲- پیوستگی جریان (اصل بقای بار)

بار نه از بین می‌رود و نه بوجود می‌آید بلکه از جسمی به جسم دیگر منتقل می‌شود اگر یک منطقه بوسیله یک سطح بسته محدود شود کل جریان خارج شونده از سطح بسته عبارتست از:

$$I = \frac{-dQ}{dt} \qquad (۸-۴)$$

رابطه (۴-۸) در حقیقت نشان دهنده نرخ کاهش بار داخل سطح بسته که همان جریان خارج شونده از سطح بسته است می‌باشد حال اگر جریان را به چگالی جریان ارتباط دهیم رابطه (۴-۸) بصورت زیر درمی آید.

$$I = \oint \bar{J} \cdot \overline{ds} = \frac{-dQ}{dt} \qquad (۹-۴)$$

سمت چپ معادله (۴-۹) با استفاده از قانون دیورژانس به $\int_v (\bar{\nabla} \cdot \bar{J})\, dv$ و سمت راست معادله (۴-۹) به $-\frac{d}{dt}\int_v \rho\, dv$ تبدیل می‌شود لذا خواهیم داشت

$$\int_v (\bar{\nabla} \cdot \bar{J})\, dv = -\frac{d}{dt}\int_v \rho\, dv$$

که بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (۱۰-۴)$$

رابطه (۴-۱۰) در حقیقت همان قانون پیوستگی بار است حال با توجه به اینکه $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ و $\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho$ است خواهیم داشت.

$$\bar{\nabla} \cdot \left[\sigma \frac{\bar{D}}{\varepsilon_0}\right] = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\varepsilon_0}\rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

بعبارت دیگر

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0 \qquad (۱۱-۴)$$

اگر در لحظه $t=0$ چگالی حجمی بار ρ_0 باشد پاسخ معادله دیفرانسیل (۴-۱۱) بصورت زیر خواهد بود.

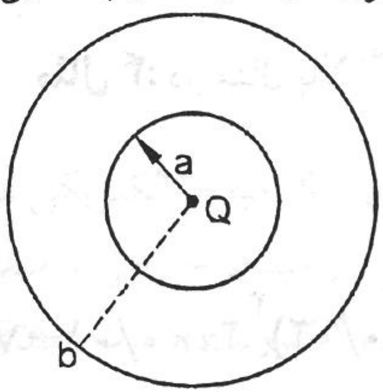
$$\rho=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t} \qquad (۴\text{-}۱۲)$$

رابطه (۴-۱۲) نشاندهندهٔ این مطلب است که چگالی حجمی بار در یک سطح بسته با ثابت زمانی $\tau=\frac{\varepsilon_0}{\sigma}$ و بصورت اکسپونانسیلی کاهش می‌یابد برای یک هادی کامل که $\sigma \to \infty$ میل می‌کند ثابت زمانی صفر است بعبارت دیگر چگالی حجمی در فلز بسرعت صفر می‌شود و بارهای داخل فلز به روی سطح فلز انتقال می‌یابند از طرف دیگر برای عایق کامل $\sigma \to 0$ و ثابت زمانی بی نهایت است یعنی همواره $\rho=\rho_0$ است و چگالی حجمی تغییر نمی‌کند.

برای آب دریا $\tau=۳/۵۴\ \mu s$ است یعنی پس از $۱۵/۷\mu s$ چگالی حجمی به صفر می‌رسد با وجود اینکه آب دریا هادی خیلی خوبی هم نیست ولی بسرعت چگالی حجمی بار به صفر می‌رسد.

از رابطه (۴-۶) مشخص می‌شود که برای یک هادی کامل چون $\sigma \to \infty$ در نتیجه $E=0$ است یعنی داخل یک هادی کامل میدان الکتریکی صفر است بعبارت دیگر فلز یک سطح هم پتانسیل است.

مثال ۵: بار نقطه‌ای Q در مرکز یک پوسته فلزی بشعاع داخلی a و شعاع خارجی b قرار دارد میدان و پتانسیل در کل فضا را بدست آورید.



حل: چون میدان داخل فلز صفر است پس داریم:

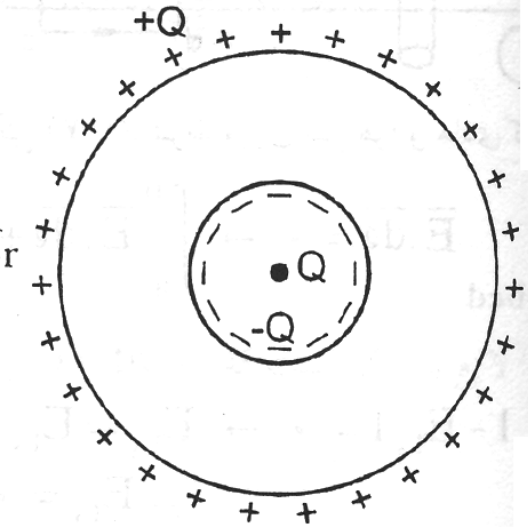
$$a<r<b \qquad \overline{E}=0 \to \oint \overline{E}.\overline{ds}=0$$

بعبارت دیگر اگر سطح گوسی داخل فلز انتخاب کنیم چون E روی این سطح گوی صفر است کل بار داخل سطح گوی باید صفر باشد یعنی باید بار Q- روی سطح داخلی پوسته (r=a) جمع شده باشد و چون فلز از نظر الکتریکی خنثی است بار Q+ باید روی سطح خارجی پوسته جمع شود.

$r < a \qquad \oint \overline{E}.\overline{ds} = \frac{1}{\varepsilon_\circ} Q \quad \rightarrow \overline{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r$

$a < r < b \qquad \overline{E} = 0$

$r > b \qquad \oint \overline{E}.\overline{ds} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}(+Q - Q + Q) = \frac{1}{\varepsilon_\circ} Q \rightarrow \overline{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r$



$$\overline{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r & 0<r<a \\ 0 & a<r<b \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r & r>b \end{cases}$$

بعبارت دیگر

$r \geq b \qquad V = -\int_\infty^r \overline{E}.\overline{d\ell} = -\int_\infty^r \frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_\circ r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ b}$

$a \leq r \leq b \qquad V = -\int_\infty^r \overline{E}.\overline{d\ell} = -\int_\infty^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}dr - \int_b^r \overline{E}.\overline{d\ell} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ b}$

$$r \le a \qquad V = -\int_{\infty}^{r} \overline{E}.\overline{d\ell} = -\left[\int_{\infty}^{b} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{b}^{a} 0\, dr + \int_{a}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr\right]$$

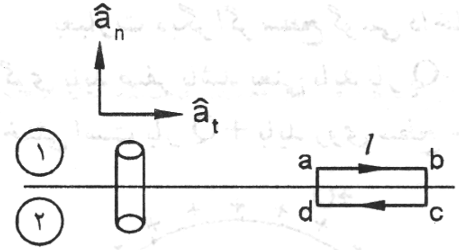
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

بنابراین

$$V = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right] & r \le a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} & a \le r \le b \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r \ge b \end{cases}$$

همانطوریکه دیده می‌شود پتانسیل داخل پوسته فقط بستگی به شعاع خارجی پوسته دارد و a شعاع داخلی پوسته هر چه می‌تواند باشد و این در حقیقت نشان دهندهٔ این مطلب است که همانطوریکه در بحث معادله (۴-۱۲) توضیح داده شد بار فقط روی سطح خارجی فلز جمع می‌شود. اگر $a=0$ باشد پوسته تبدیل به کره توپر فلزی به شعاع b و اگر $a=b$ باشد پوسته تبدیل به کره توخالی به شعاع b می‌شود. بعبارت دیگر اگر کره فلزی بشعاع b دارای Q باشد پتانسیل آن $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$ می‌باشد کره می‌تواند توخالی و یا توپر باشد.

۴-۳- شرط مرزی بین فلز و هوا



شکل (۴-۱): شرط مرزی بین هوا و هادی کامل

فرض کنید مطابق شکل ناحیه ۱ هوا و ناحیه ۲ هادی کامل باشد بردارهای یکه $\hat{a}_t$ و $\hat{a}_n$ به ترتیب بردارهای واحد مماس وعمودی بر مرز مشترک دو ناحیه ۱ و ۲ می‌باشد اگر چهار ضلعی abcd را در نظر بگیریم داریم.

$$\oint_{abcd} \overline{E}.\overline{d\ell} = 0 \rightarrow \int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell} + \int_b^c \overline{E}.\overline{d\ell} + \int_c^d \overline{E}.\overline{d\ell} + \int_b^a \overline{E}.\overline{d\ell} = 0$$

اگر اضلاع bc و ad به سمت صفر میل می‌کند خواهیم داشت

$$E_{t_1} l - E_{t_2} l = 0 \rightarrow E_{t_1} = E_{t_2}$$

اما چون در محیط ۲ میدان صفر است (زیرا این محیط هادی کامل است) $E_{t_2} = 0$ پس

$$E_{t_1} = 0 \qquad (۱۳-۴)$$

یعنی مولفه مماسی میدان روی فلز صفر است.

حال اگر برای استوانه به مساحت قاعده Δs قانون گوس را بنویسیم خواهیم داشت.

$$\oint \overline{D}.\overline{ds} = Q = \underbrace{\int \overline{D}.\overline{ds}}_{\text{قاعده بالا}} + \underbrace{\int \overline{D}.\overline{ds}}_{\text{سطح جانبی استوانه}} + \underbrace{\int \overline{D}.\overline{ds}}_{\text{قاعده پایین}} = Q$$

اگر ارتفاع استوانه به سمت صفر میل کند انتگرال دوم به سمت صفر میل می‌کند در نتیجه خواهیم داشت.

$$D_{n_1} \Delta s - D_{n_2} \Delta s = \rho_s \Delta s \rightarrow D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_s$$

اما چون داخل فلز E و در نتیجه D صفر است $D_{n_2} = 0$ بنابراین:

$$D_{n_1} = \rho_s \qquad (۱۴-۴)$$

یعنی مولفه عمودی D روی سطح فلز برابر با چگالی سطحی بار روی فلز می‌باشد.

روابط (۴-۱۳) و (۴-۱۴) دو رابطه مهم شرط مرزی برای فلز می‌باشند که کاربرد زیادی در الکترومغناطیس دارند.

مثال ۶: اگر $E = ۳۰۰ \left[۲\hat{a}_x - ۲\hat{a}_y + \hat{a}_z \right]$ در سطح فلز باشد مطلوبست چگالی سطحی بار روی فلز

حل: **چون مولفه موجود روی فلز مولفه عمودی است پس E داده شده همان مولفه عمودی E است بنابراین**

$$E_n = ۳۰۰ \sqrt{۲^۲ + ۲^۲ + ۱^۱} = ۹۰۰ \frac{v}{m}$$

$$\rho_s = D_n = \varepsilon_\circ E_n = \frac{۱}{۳۶\pi} \times ۱۰^{-۹} \times ۹۰۰ = \frac{۱}{۴\pi} \times ۱۰^{-۷} = ۸ \frac{nc}{m^۲}$$

مثال ۷: اگر چگالی انرژی مجاور سطح فلز $۱۰^{-۷} \frac{J}{m^۳}$ باشد چگالی سطحی بار روی فلز چقدر است؟

$$\frac{۱}{۲} \varepsilon_\circ E_n^۲ = ۱۰^{-۷} \rightarrow E_n = \left[\frac{۲ \times ۱۰^{-۷}}{\varepsilon_\circ} \right]^{\frac{۱}{۲}} \rightarrow \rho_s = \varepsilon_\circ E_n = \sqrt{۲ \times ۱۰^{-۷} \times \varepsilon_\circ} = ۱/۳۲ \frac{nc}{m^۲}$$

مثال ۸: میدان الکتریکی به شدت $\overline{E} = \frac{۳}{r} \hat{a}_r$ در دستگاه مختصات کروی در فضای آزاد موجود است اگر یک کره فلزی در $r = ۳^{cm}$ قرار گیرد چقدر بار روی سطح داخلی آن جمع می‌شود.

$$\rho_s = ۰ - D_n = -D_n = -\varepsilon_\circ E_n = -\varepsilon_\circ \times \frac{۳}{r} \Big|_{r = ۰/۰۳} = -۱۰۰ \varepsilon_\circ = -۱۰۰ \times \frac{۱}{۳۶\pi} \times ۱۰^{-۹}$$

$$\rho_s = -\frac{۱}{۳۶\pi} \times ۱۰^{-۷}$$

$$Q = \rho_s ۴\pi a^۲ = -\frac{۱}{۳۶\pi} \times ۱۰^{-۷} \times ۴\pi \times (۰/۰۳)^۲ = -۱۰ \, pc$$

لازم به ذکر است که بار $+۱۰pc$ روی سطح خارجی کره فلزی جمع می‌شود.

۴-۴- مواد دی الکتریک (عایق)

در عایق باند ممنوعه چندین الکترون است در شرایط عادی تعداد کمی از الکترونها می توانند از باند ظرفیت وارد بار هدایت شوند به همین علت رسانندگی این اجسام بسیار کم است وقتی یک عایق در میدان الکتریکی قرار می‌گیرد یک جابجایی بین مراکز ثقل بار مثبت و بار منفی ایجاد می‌شود این جابجایی در عایق‌های مختلف متفاوت است در بعضی از مولکولها این جابجایی بصورت دائمی وجود دارد به این مولکولها «مولکولهای قطبی» گفته می‌شود در حالت عادی جهت این دو قطبی‌ها در داخل ماده بی نظم و ترتیب است و وقتی در یک میدان الکتریکی قرار می‌گیرند در یک جهت منظم قرار می‌گیرند. دسته دیگر مولکولهای غیر قطبی دارند که در اثر اعمال میدان خارجی بارهای مثبت و منفی در دو جهت مخالف نیروی جاذبه متقابل خود جابجا شده تشکیل یک دو قطبی می‌دهند که هم جهت با میدان است. مشخصه همه دی الکتریکها ذخیره کردن انرژی الکتریکی است. از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که در یک مولکول قطبی یک جابجایی ذائمی بین مرکز ثقل بارهای مثبت و منفی که یک دو قطبی الکتریکی را تشکیل می‌دهند وجود دارد معمولاً این دو قطبی‌ها در جهت تصادفی قرارگرفته‌اند و با اعمال میدان خارجی این دوقطبی‌ها در یک جهت که همان جهت میدان اعمالی است قرار می‌گیرند بعبارت دیگر دو قطبی‌ها در غیاب میدان خارجی اعمالی وجود داشته ولی این دو قطبی‌ها در جهت‌های مختلف قرار دارند اما یک مولکول غیر قطبی دارای دو قطبی نیست و با اعمال میدان خارجی دو قطبی بوجود می‌آید همانطوریکه قبلاً دیدیم دو بار الکتریکی q- و q که تشکیل یک دو قطبی الکتریکی را می‌دهند دارای ممان الکتریکی $\overline{p} = qd\ \hat{a}_z$ می‌باشد (اگر دو بار روی محور z باشند) پتانسیل ناشی از این دو قطبی در فاصله r ($r \gg d$) که d فاصله دو بار از یکدیگر می‌باشد) برابر با $\frac{q\,d\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}$ که می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$V = \frac{\overline{p}\,.\,\hat{a}_r}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} \qquad (۱۵-۴)$$

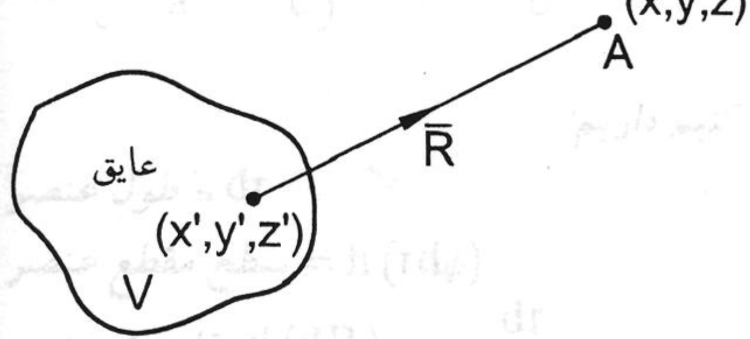
حال اگر n دو قطبی در واحد حجم داشته باشیم در اینصورت میتوان چگالی حجمی ممانهای دو قطبی را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\overline{P} = \lim_{\Delta v \to \circ} \frac{\sum_{i=۱}^{n\Delta v} \overline{p}_i}{\Delta v}$$

حال اگر n دو قطبی در واحد حجم داشته باشیم در اینصورت میتوان چگالی حجمی ممانهای دو قطبی را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\overline{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n\Delta v} \overline{p}_i}{\Delta v}$$

که $\overline{p}_i$ ممان i امین دو قطبی می‌باشد حال میتوان پتانسیل الکتریکی ناشی از ججم v از عایق راکه دارای چگالی حجمی ممان دو قطبی $\overline{P}$ می‌باشد را با استفاده از رابطه (۴-۱۵) بصورت زیر تعریف کرد.



$$V = \int_v \frac{\overline{P}\, dv \,.\, \hat{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \int \frac{\overline{P}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{\hat{a}_R}{R^2}\right] dv \qquad (۱۶-۴)$$

شکل (۴-۲) : پتانسیل ناشی از عایقی به حجم v در نقطه A

با توجه به اینکه بردار $\overline{R}$ را می توان بصورت زیر تعریف کرد

$$\overline{R} = (x - x')\,\hat{a}_x + (y - y')\,\hat{a}_y + (z - z')\,\hat{a}_z \qquad (۱۷-۴)$$

در اینصورت

$$\frac{1}{R} = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۸-۴)$$

$$\overline{\nabla}\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{R}\right]\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{R}\right]\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{R}\right]\hat{a}_z$$

که با جایگزینی $\frac{1}{R}$ از معادله (۴-۱۸) خواهیم داشت:

$$\overline{\nabla}\left[\frac{1}{R}\right]=\frac{(x-x')\,\hat{a}_x+(y-y')\,\hat{a}_y+(z-z')\,\hat{a}_z}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\hat{a}_R}{R^2} \qquad (۱۹-۴)$$

با جایگزینی رابطه (۴-۱۹) در رابطه (۴-۱۶) خواهیم داشت:

$$V=\int \frac{\overline{P}}{4\pi\varepsilon_0}.\left[\overline{\nabla}\left[\frac{1}{R}\right]\right]dv \qquad (۲۰-۴)$$

با توجه به معادله برداری $\overline{\nabla}.(\alpha\overline{A})=\alpha\overline{\nabla}.\overline{A}+\overline{A}.\overline{\nabla}\alpha$ رابطه (۴-۲۰) به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$V=\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\overline{\nabla}.\left[\frac{\overline{P}}{R}\right]dv-\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\,\overline{\nabla}.\overline{P}\,dv \quad (۲۱-۴)$$

با استفاده از قضیه دورژانس رابطه (۴-۲۱) به صورت زیر در خواهد آمد

$$V=\oint_s \frac{\overline{P}.\overline{ds}}{4\pi\varepsilon_0 R}+\int_v \frac{-\overline{\nabla}.\overline{P}\ dv}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (۲۲-۴)$$

با توجه به اینکه $\overline{P}.\overline{ds}=\overline{P}.\hat{n}\,ds$ که $\hat{n}$ بردار یکه عمود بر سطح بطرف خارج است ملاحظه می‌شود که پتانسیل ناشی از یک عایق را میتوان با پتانسیل ناشی از دو توزیع بار یکی بار سطحی $\rho_{sb}=\overline{P}.\hat{n}$ و دیگری بار حجمی $\rho_b=-\overline{\nabla}.\overline{P}$ جایگزین کرد که ρ_{sb} و ρ_b به ترتیب چگالی سطحی و حجمی بارهای مقید یا پلاریزاسیون هستند (رابطه (۴-۲۲) را با رابطه (۳-۸) مقایسه کنید) بعبارت دیگر می‌توان عایق را با دو توزیع سطحی و حجمی بار جایگزین کرد حال رابطه نقطه‌ای قانون گوس را در داخل عایق می‌نویسیم.

$$\overline{\nabla}.\varepsilon_0\overline{E}=\rho+\rho_b=\rho-\overline{\nabla}.\overline{P}$$

و یا

$$\overline{\nabla}.(\varepsilon_0\overline{E}+\overline{P})=\rho \qquad (۲۳-۴)$$

$$\overline{\nabla}.(\varepsilon_{\circ}\overline{E}+\overline{P})=\rho \qquad (۲۳-۴)$$

با مقایسه رابطه (۴-۲۳) با رابطه $\overline{\nabla}.\overline{D}=\rho$ خواهیم داشت:

$$\overline{D}=\varepsilon_{\circ}\overline{E}+\overline{P} \qquad (۲۴-۴)$$

که $\overline{P}$ چگالی حجمی ممانهای دو قطبی یا بردار پلاریزاسیون داخل عایق می‌باشد. در عایق‌های خطی $\overline{P}$ با میدان رابطه زیر دارد.

$$\overline{P}=\varepsilon_{\circ}\chi e\overline{E} \qquad (۲۵-۴)$$

که χe ضریب حساسیت الکتریکی است. با جایگزینی (۴-۲۵) در (۴-۲۴) خواهیم داشت.

$$D=\varepsilon_{\circ}(\chi e+1)\overline{E}=\varepsilon_{\circ}\varepsilon_r\overline{E}=\varepsilon\overline{E} \qquad (۲۶-۴)$$

که ε_r ضریب دی الکتریک نسبی عایق می‌باشد ($\chi e=\varepsilon_r-1$ یا $\varepsilon_r=1+\chi e$) در حقیقت تاثیر ماده عایقی در رابطه $D=\varepsilon_{\circ}\overline{E}+\overline{P}$ بوسیله اضافه کردن $\overline{P}$ به $\varepsilon_{\circ}\overline{E}$ و در رابطه $\overline{\nabla}.\varepsilon.\overline{E}=\rho+\rho_b$ با اضافه کردن چگالی حجمی بارهای مقید (پلاریزه شده) به چگالی بارهای آزاد، ρ در نظر گرفته می‌شود پس کافی است در تمام معادلات بیان شده در فضای آزاد بجای $\varepsilon_{\circ}$ از ε استفاده کنیم تا معادلات برای داخل عایق بدست آید.

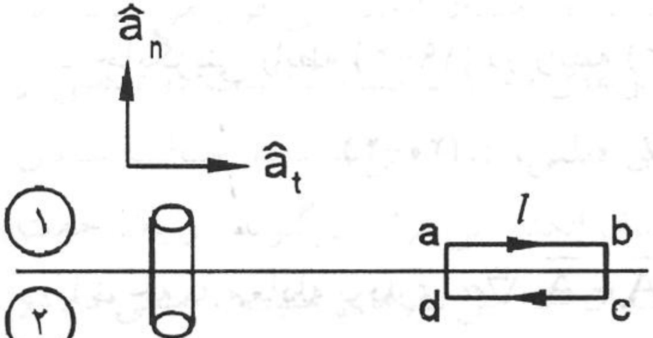
برای محیط‌های همگن ε تابع مکان نیست ولی برای محیط‌های غیر همگن ε تابع مکان است اگر رفتار محیط بدون توجه به جهت بردارهای میدان یکسان باشد محیط یکسان گرد یا ایزوتروپیک نامیده می‌شود در یک محیط غیر همسانگرد بردار چگالی شار الکتریکی $(\overline{D})$ به مولفه‌های بردار میدان الکتریکی بستگی دارد بعبارت دیگر ε یک ماتریس است و رابطه بین $\overline{D}$ و $\overline{E}$ بصورت زیر است.

$$\overline{D}=\varepsilon\overline{E}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} \qquad (۲۷-۴)$$

برای یک محیط غیر خطی ε تابع میدان الکتریکی خواهد بود یعنی $\varepsilon=f(E)$

۴-۵- شرط مرزی بین دو عایق

اگر محیط ۱ و ۲ عایق هایی با ضریب دی الکتریک $\varepsilon_۱$ و $\varepsilon_۲$ باشند در اینصورت مطابق شکل میتوان شرط مرزی را با استفاده از روابط زیر بدست آورد.



شکل (۴-۳): شرط مرزی بین دو محیط عایق

$$\oint_{abcd} \overline{E}.\overline{d\ell} = ۰ \quad \rightarrow \quad E_{t_۱} = E_{t_۲}$$

$bc \rightarrow ۰$ و $ad \rightarrow ۰$

$$\oint \overline{D}.\overline{ds} = ۰ \quad \rightarrow \quad D_{n_۱} = D_{n_۲} = \rho_s$$

اگر دو محیط عایق کامل باشند $\rho_s = ۰$ در نتیجه $D_{n_۱} = D_{n_۲}$ بنابراین در مرز مشترک دو عایق کامل شرایط مرزی زیر برقرار است

$$E_{t_۱} = E_{t_۲}$$
$$D_{n_۱} = D_{n_۲} \qquad (۲۸-۴)$$

بعبارت دیگری مولفه‌های مماسی میدان و مولفه‌های عمودی چگالی شار الکتریکی روی مرز مشترک دو عایق پیوسته هستند.

مثال ۹: بردار چگالی شار الکتریکی را برای حالات زیر بدست آورید؟

الف) چگالی حجمی ممان دو قطبی $۱\frac{\mu c}{m}$ در میدان الکتریکی $E = ۳۰\ \frac{kv}{m}$

ب) $P = ۰/۱\frac{\mu c}{m^۲}$ و $\chi e = ۱/۶$

ج) چگالی مولکولها $۱۰^{۲۰}\ \frac{mol}{m^۳}$ و هر مولکول با ممان دو قطبی $۲\times۱۰^{-۲۷}c.m$ در میدان $E = ۱۰۰\ \frac{kv}{m}$

د) $\varepsilon r = ۴/۱$ و $E = ۲۰\frac{kv}{m}$

حل:

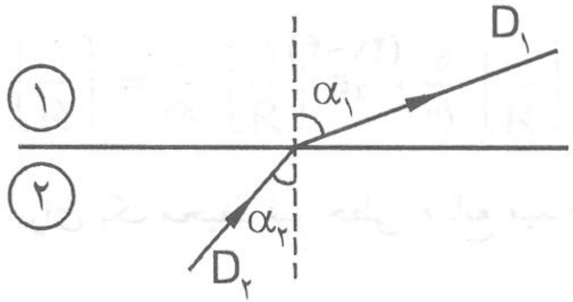
الف) $P = ۱\ \frac{\mu c}{m^۲} \quad E = ۳۰\frac{kv}{m} \ \rightarrow D = \varepsilon.E + \overline{P} = \frac{۱}{۳۶\pi}\times ۱۰^{-۹}\times ۳\times ۱۰^{۴} + ۱۰^{-۶} = ۱/۲۶۶\frac{\mu c}{m^۲}$

ب) $D = \varepsilon.\varepsilon_r E = \varepsilon.\varepsilon_r\frac{P}{\varepsilon.\chi e} = \frac{\varepsilon r}{\chi e}P = \frac{۱/۶+۱}{۱/۶}\times ۰/۱ = ۰/۱۶۲۵\frac{\mu c}{m^۲}$

ج) $P = ۱۰^{۲۰}\times ۲\times ۱۰^{-۲۷} = ۲\times ۱۰^{-۷} \quad \overline{D} = \varepsilon.\overline{E} + \overline{P} = \frac{۱}{۳۶\pi}\times ۱۰^{-۹}\times ۱۰^{۵} + ۲\times ۱۰^{-۷} = ۱/۰۸۴\frac{\mu c}{m^۲}$

د) $D = \varepsilon\,.\,E = \varepsilon\,.\,\varepsilon_r E = \frac{۱}{۳۶\pi}\times ۱۰^{-۹}\times ۴/۱\times ۲\times ۱۰^{۴} = ۰/۷۲۵\frac{\mu c}{m^۲}$

مثال ۱۰: در شکل زیر $D_۲$ و $E_۲$ در محیط ۲ را بر حسب $D_۱$ و $E_۱$ در محیط ۱ بدست آورید.



حل: $E_{t_۱}=E_{t_۲} \Rightarrow E_۱ \sin\alpha_۱ = E_۲ \sin\alpha_۲$

$D_{n_۱}=D_{n_۲} \Rightarrow \varepsilon_۱ E_۱ \cos\alpha_۱ = \varepsilon_۲ E_۲ \cos\alpha_۲$

$$\rightarrow \begin{array}{l} E_۲ \sin\alpha_۲ = E_۱ \sin\alpha_۱ \\ E_۲ \cos\alpha_۲ = \dfrac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲} E_۱ \cos\alpha_۱ \end{array} \qquad E_۲ = E_۱ \sqrt{\sin^۲\alpha_۱ + \left[\dfrac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲}\right]^۲ \cos^۲\alpha_۱}$$

$$D_۲ = \varepsilon_۲ E_۲ = \varepsilon_۲ \frac{D_۱}{\varepsilon_۱} \sqrt{\sin^۲\alpha_۱ + \left[\frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲}\right]^۲ \cos^۲\alpha_۱} \rightarrow D_۲ = D_۱ \sqrt{\cos^۲\alpha_۱ + \left[\frac{\varepsilon_۲}{\varepsilon_۱}\right]^۲ \sin^۲\alpha_۱}$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود اگر $\varepsilon_۱ < \varepsilon_۲$ باشد $D_۲ > D_۱$ و $E_۲ < E_۱$ و اگر $\varepsilon_۱ > \varepsilon_۲$ باشد $D_۲ < D_۱$ و $E_۲ > E_۱$
بعبارت دیگر در محیطی که ε بیشتری دارد D بزرگتر و E کوچکتر از محیط دیگر است.

مثال ۱۱: یک کره عایق به شعاع a تحت تاثیر یک میدان خارجی بصورت $P = P_{\circ}\,\hat{a}_z$ پلاریزه شده است ($P_{\circ}$ ثابت است) شدت میدان الکتریکی ناشی از بارهای پلاریزه در مرکز کره چقدر است؟

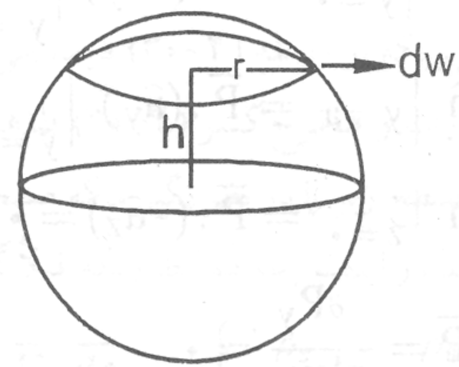
حل: ابتدا چگالی بارهای سطحی و حجمی پلاریزه را بدست می‌آوریم

$$\rho_b = -\overline{\nabla}.\overline{P} = 0 \qquad \rho_{sb} = \overline{P}.\hat{n} = P_{\circ}\,\hat{a}_z.\hat{a}_r = P_{\circ}\cos\theta$$

بنابراین کره‌ای بشعاع a و چگالی بار سطحی $P_{\circ}\cos\theta$ داریم که با استفاده از رابطه میدان ناشی از یک حلقه همانطوریکه در فصل دوم دیدیم مسئله را حل می‌کنیم اگر حلقه‌ای بشعاع r روی کره و به پهنای dw انتخاب کنیم داریم.

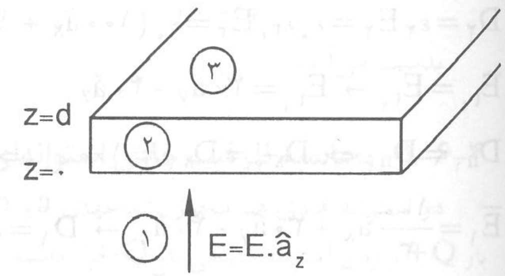
$$\rho_\ell = \rho_{sb}\,dw = P_{\circ}\cos\theta\,(a\,d\theta)$$

$$d\overline{E} = -\frac{\rho_\ell\, r h}{2\varepsilon_{\circ}(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{a}_z = -\frac{P_{\circ}\cos\theta\, a\, d\theta\, a^2 \sin\theta\cos\theta}{2\varepsilon_{\circ}(a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{a}_z$$



$$d\overline{E} = \frac{-P_{\circ}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta}{2\varepsilon_{\circ}}\,\hat{a}_z \rightarrow \overline{E} = \int_{0}^{\pi} d\overline{E} = \frac{-P_{\circ}}{3\varepsilon_{\circ}}\,\hat{a}_z$$

مثال ۱۲: عایقی بضخامت d که بین صفحات $z=0$ و $z=d$ قرار گرفته دارای ضریب دی الکتریک $\varepsilon=\varepsilon_0\left(1+\frac{z}{d}\right)$ می‌باشد مطلوبست چگالی بارهای پلاریزه سطحی و حجمی در عایق اگر عایق تحت تاثیر میدان خارجی $\overline{E}=E_0\,\hat{a}_z$ قرار گیرد. در صورتیکه ابعاد عایق $a\times b$ باشد کل بار مقید (پلاریزه) چقدر است.



$$D_1=D_2 \;\rightarrow\; \varepsilon_0 E_1=\varepsilon E_2 \;\Rightarrow\; E_2=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}E_0 \;\Rightarrow$$

$$E_2=\frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_0\left(1+\frac{z}{d}\right)}=\frac{d}{z+d}E_0 \;\Rightarrow$$

$$\overline{E}_2=\frac{d}{z+d}E_0\,\hat{a}_z \qquad \overline{P}=\varepsilon_0\chi_e E_2=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\overline{E}_2$$

$$\overline{P}=\varepsilon_0\left[1+\frac{z}{d}-1\right]\frac{d}{z+d}E_0\,\hat{a}_z=\frac{z}{z+d}E_0\,\hat{a}_z$$

$$\rho_{sb}=\overline{P}\cdot\hat{n}=\begin{cases}\overline{P}\cdot(-\hat{a}_z)\Big|_{z=0}=0 & z=0\\ \overline{P}\cdot(+\hat{a}_z)\Big|_{z=d}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0 & z=d\end{cases}$$

$$\rho_b=-\overline{\nabla}\cdot\overline{P}=-\frac{\partial P_z}{\partial z}=\frac{-d\varepsilon_0}{(z+d)^2}E_0$$

$q_{s_1}=ab\times\rho_{s_b}(z=0)=0$ بار سطحی پلاریزه روی سطح $z=0$

$q_{s_2}=ab\times\rho_{s_b}(z=d)=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0\,ab$ بار سطحی پلاریزه روی سطح $z=d$

$$q_b=\int_0^d\int_0^a\int_0^b\rho_b\,dx\,dy\,dz=\int_0^d\int_0^a\int_0^b-\frac{d\,\varepsilon_0 E_0}{(z+d)^2}dx\,dy\,dz=-\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0\,ab$$

$$q_{\text{کل}}=q_{s_1}+q_{s_2}+q_b=0$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود کل بار پلاریزه صفر است و این طبیعی است زیرا همواره دوقطبی‌ها متشکل از زوج بار $+q$ و $-q$ هستند.

مثال ۱۳: مثال قبل را برای میدان خارجی $E = E_{\circ}\,\hat{a}_y$ تکرار کنید.

حل: در اینحالت میدان بر مرز مشترک عایق و هوا مماس است پس پیوستگی مولفه مماسی میدان را می‌نویسیم.

$$E_1 = E_2 \rightarrow \overline{E}_2 = E_{\circ}\,\hat{a}_y$$ میدان داخل عایق

$$\overline{P} = \varepsilon_{\circ}\chi_e E_2 = \varepsilon_{\circ}\left[1+\frac{z}{d}-1\right] E_{\circ}\,\hat{a}_y \rightarrow \overline{P} = \varepsilon_{\circ}\frac{z}{d}E_{\circ}\,\hat{a}_y$$

$$\rho_{sb_1} = \overline{P}\cdot\hat{n}\,\Big|_{y=\circ} = \overline{P}\cdot(-\hat{a}_y)\,\Big|_{y=\circ} = \frac{-z}{d}E_{\circ}$$ روی سطح $y=\circ$

$$\rho_{sb_2} = \overline{P}\cdot\hat{n}\,\Big|_{y=a} = \overline{P}\cdot(\hat{a}_y)\,\Big|_{y=a} = \frac{z}{d}E_{\circ}$$

$$\rho_{sb_3} = \overline{P}\cdot\hat{n}\,\big|_{z=\circ} = \overline{P}\cdot(-\hat{a}_z) = \circ \qquad \rho_{sb_4} = \overline{P}\cdot\hat{n}\,\big|_{z=d} = \overline{P}\cdot\hat{a}_z = \circ$$

$$\rho_b = -\overline{\nabla}\cdot\overline{P} = -\frac{\partial P_y}{\partial y} = \circ$$

مثال ۱۴: منطقه $x>0$ شامل دی الکتریکی با ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_{r_1} = 3$ و منطقه $x<0$ شامل دی الکتریکی با ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_{r_2} = 5$ می‌باشد اگر $E_2 = 20\,\hat{a}_x + 30\,\hat{a}_y - 40\,\hat{a}_z$ باشد مطلوبست:

الف) D_2 ب) D_1 ج) P در دو محیط

حل:

$$D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} E_2 = \varepsilon_0 (100\,\hat{a}_x + 150\,\hat{a}_y - 200\,\hat{a}_z)$$

$$E_{t_1} = E_{t_2} \rightarrow E_{t_1} = 30\,\hat{a}_y - 40\,\hat{a}_z$$

$$D_{n_1} = D_{n_2} \Rightarrow D_{x_1} = D_{x_2} = 100\,\varepsilon_0 \Rightarrow E_{x_1} = \frac{D_{x_1}}{\varepsilon_1} = \frac{100}{3}$$

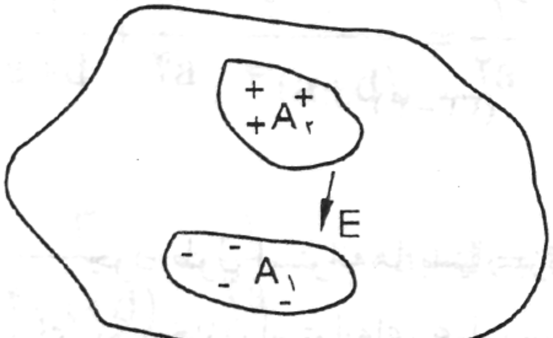
$$\overline{E}_1 = \frac{100}{3}\hat{a}_x + 30\,\hat{a}_y - 40\,\hat{a}_z \rightarrow D_1 = \varepsilon_1 E_1 = (100\,\hat{a}_x + 90\,\hat{a}_y - 120\,\hat{a}_z)\varepsilon_0$$

$$\overline{P_1} = \varepsilon_0(\varepsilon_{r_1} - 1)\,\overline{E}_1 = \varepsilon_0\left(\frac{200}{3}\hat{a}_x + 60\,\hat{a}_y - 80\,\hat{a}_z\right)$$

$$\overline{P_2} = \varepsilon_0(\varepsilon_{r_2} - 1)\,\overline{E}_2 = \varepsilon_0(80\,\hat{a}_x + 120\,\hat{a}_y - 160\,\hat{a}_z)$$

۴-۶- خازن

فرض کنید دو هادی داخل یک محیط دی الکتریک قرار دارند یکی A_2 دارای بار مثبت Q و دیگری A_1 دارای بار $-Q$ می‌باشد یعنی کل بار سیستم صفر است می‌دانیم که بار همیشه روی سطح هادی جمع می‌شود و میدان $\overline{E}$ همواره بر سطح هادی عمود است چون A_2 دارای بار مثبت است جهت $\overline{E}$ از A_2 به A_1 است به عبارت دیگر جهت انتقال بار مثبت از A_1 به A_2 باید کار انجام دهیم پس یک اختلاف پتانسیل بین A_2 و A_1 برقرار است.



شکل (۴-۴): شکل کلی یک خازن

بنا به تعریف ظرفیت سیستم متشکل از دو هادی که مجمع بار الکتریکی آنها صفر است و خازن نامیده می‌شود عبارتست از:

$$C=\frac{Q}{V} \qquad (۲۹-۴)$$

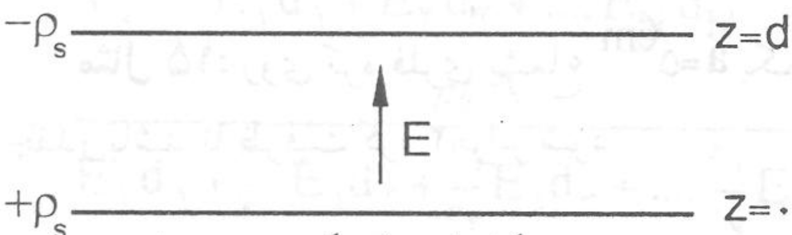
که Q اندازه بار الکتریکی هر صفحه و V اختلاف پتانسیل بین دو صفحه است.

Q بستگی به مولفه عمودی میدان روی صفحات دارد زیرا طبق شرط مرزی گفته شده بار سطحی روی هادی برابر است با مولفه عمودی D حال رابطه (۴-۲۹) را میتوان بصورت زیر نوشت.

$$C=\frac{\int_s \varepsilon \overline{E}.\overline{ds}}{-\int_{A_1}^{A_2} \overline{E}.\overline{d\ell}} \qquad (۳۰-۴)$$

$$C = \frac{\int_s \varepsilon \overline{E} . \overline{ds}}{-\int_{A_1}^{A_2} \overline{E} . \overline{d\ell}} \qquad (۳۰-۴)$$

همانطوریکه از رابطه (۴-۳۰) دیده می‌شود C مستقل از Q و V می‌باشد زیرا میدان الکتریکی که بستگی به Q یا V دارد در صورت و مخرج کسر (۴-۳۰) ظاهر می‌شود پس با افزایش Q یا V صورت و مخرج به یک نسبت زیاد می‌شوند. حال خازن مسطح زیر را در نظر بگیرید که صفحه پائینی دارای بار سطحی با چگالی $+\rho_s$ و صفحه بالایی دارای بار سطحی با چگالی $-\rho_s$ می‌باشد در اینصورت همانطوریکه قبلاً گفته شد میدان الکتریکی بین دو صفحه $\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{a}_z$ و خارج دو صفحه صفر است.



شکل (۴-۵): یک خازن سطح

$$V = -\int_d^0 \overline{E} . \overline{d\ell} = -\int_d^0 \frac{\rho_s}{\varepsilon} dz = \frac{\rho_s d}{\varepsilon}$$

$$V = \frac{Q}{A} \times \frac{d}{\varepsilon} = \frac{Qd}{\varepsilon A} \rightarrow C = \frac{Q}{V} = \varepsilon \frac{A}{d}$$

که A و d به ترتیب مساحت صفحات و فاصله آنها از یکدیگر است بعبارت دیگر ظرفیت یک خازن مسطح از رابطه

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} \qquad (۳۱-۴)$$

بدست می‌آید.

۴-۶-۱- محاسبه ظرفیت خازن استوانه‌ای

دو استوانه هادی هم محور بشعاعهای a و b $(a<b)$ تشکیل یک خازن استوانه‌ای می‌دهند اگر روی استوانه داخلی بار $+Q$ و روی استوانه خارجی بار $-Q$ قرار داشته باشد در اینصورت میدان بین صفحات خازن عبارتست از:

$$\overline{E}=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon Rl}\,\hat{a}_R \qquad (۳۲-۴)$$

که با استفاده از قانون گوس بدست می‌آید اختلاف پتانسیل بین دو استوانه برابر است با:

$$V=\int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell}=\int_a^b \frac{Q}{۲\pi\varepsilon Rl}\,dR=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}$$

در نتیجه ظرفیت خازن استوانه با استفاده زا رابطه $C=\frac{Q}{V}$ برابر است با:

$$C=\frac{۲\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}} \qquad (۳۳-۴)$$

چون طول استوانه‌ها بسیار بزرگ فرض شده (فرض میدان شعاعی) در اینصورت خازن بر واحد طول $(\overline{C}=\frac{C}{l})$ برای یک خازن استوانه‌ای عبارتست از:

$$\overline{C}=\frac{۲\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}} \qquad (۳۴-۴)$$

۴-۶-۲- محاسبه ظرفیت خازن کروی

دو کره هادی متحدالمرکز به شعاعهای a و b $(a<b)$ که کره کوچکتر دارای بار $+Q$ و کره بزرگتر دارای بار $-Q$ است تشکیل یک خازن کروی می‌دهند با استفاده از قانون گوس میدان بین دو کره (بین صفحات خازن) عبارتست از:

$$\overline{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r \qquad (۳۵-۴)$$

اختلاف پتانسیل بین دو کره عبارتست از:

$$V = \int_a^b \overline{E}\cdot\overline{d\ell} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$$

در اینصورت ظرفیت خازن با استفاده از رابطه $C=\frac{Q}{V}$ عبارتست از:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \qquad (۳۶-۴)$$

با استفاده از رابطه (۴-۳۶) ظرفیت یک کره بشعاع a با قرار دادن $b \to \infty$ از رابطه فوق بدست می‌آید که عبارتست از:

$$C = 4\pi\varepsilon a \qquad \text{(۴-۳۷) ظرفیت کره‌ای بشعاع } a$$

مثال ۱۵: روی کره فلزی بشعاع $a=5^{cm}$ یک لایه دی الکتریک با $\varepsilon_r = 4$ و ضخامت d قرار می‌دهیم ضخامت d چقدر باشد تا ظرفیت کره ۲ برابر شود.

حل: در حالت اول ظرفیت کره فلزی $C_0 = 4\pi\varepsilon_0 a$ می‌باشد اگر بار کره Q باشد در اینصورت با استفاده از قانون گوس خواهیم داشت.

$$\overline{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r>a+d \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r & a+d>r>a \end{cases}$$

$$V_a = -\int_{\infty}^{a} \overline{E}.\overline{d\ell} = -\left[\int_{\infty}^{a+d} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr + \int_{a+d}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr\right]$$

که پس از انتگرال‌گیری پتانسیل کره فلزی عبارت خواهد بود از:

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a+d} + \frac{1}{\varepsilon_r a} - \frac{1}{\varepsilon_r (a+d)}\right]$$

$$\frac{1}{C} = \frac{V_a}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a+d} + \frac{1}{4a} - \frac{1}{4(a+d)}\right] = \frac{1}{2C_0}$$

که با توجه به اینکه $C_0 = 4\pi\varepsilon_0 a$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{a+d} + \frac{1}{4a} - \frac{1}{4(a+d)} = \frac{1}{2a}$$

که خواهیم داشت:

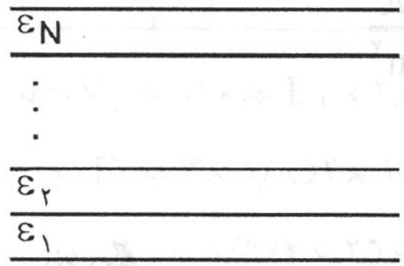
$$\frac{3}{4(a+d)} = \frac{1}{4a} \quad \rightarrow \quad a+d = 3a$$

$$d = 2a = 10^{cm}$$

یعنی ضخامت عایق باید 10^{cm} باشد

۴-۶-۳- ظرفیت خازن چند لایه

ابتدا یک خازن مسطح به مساحت صفحات A و فاصله صفحات d را در نظر بگیرید. فرض کنید N دی‌الکتریک بضخامت‌های d_1، d_2،... d_N و ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ بین صفحات خازن قرار دارد در اینصورت با توجه به اینکه میدان ثابت و عمود بر صفحات خازن است خواهیم داشت.



$$V_0 = \int_0^d \overline{E}\cdot\overline{d\ell} = E_1 d_1 + E_2 d_2 + \ldots + E_N d_N \qquad (۳۷-۴)$$

شکل (۴-۶): یک خازن چندلایه با لایه‌های افقی

که E_i میدان در لایه iام است که با توجه به شرط مرزی بین عایق‌ها خواهیم داشت.

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_3 E_3 = \ldots = \varepsilon_N E_N = \rho_s \qquad (۳۸-۴)$$

حال با استفاده از تعریف ظرفیت خواهیم داشت:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_s A}{E_1 d_1 + E_2 d_2 + \ldots E_N d_N}$$

$$C = \frac{\rho_s A}{E_1 d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 d_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} E_1 d_3 + \ldots \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_N} E_1 d_N}$$

با توجه به شرط مرزی $\rho_s = \varepsilon_1 E_1$ خواهیم داشت:

$$C = \frac{\rho_s A}{\frac{\rho_s}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\rho_s}{\varepsilon_2} d_2 + \ldots \frac{\rho_s}{\varepsilon_N} d_N} = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 A} + \ldots \frac{d_N}{\varepsilon_N A}} \qquad (۳۸-۴)$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود عبارت مخرج مجموع عکس ظرفیت هر قسمت از خازن تشکیل شده با فاصله صفحات d_i (N ...و۲و۱=i) و مساحت صفحات A و ضریب دی الکتریک ε_i ($i = 1, 2, \ldots N$) می‌باشد.

بنابراین رابطه بالا بصورت زیر خواهد شد.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots \frac{1}{C_N} \qquad (۳۹-۴)$$

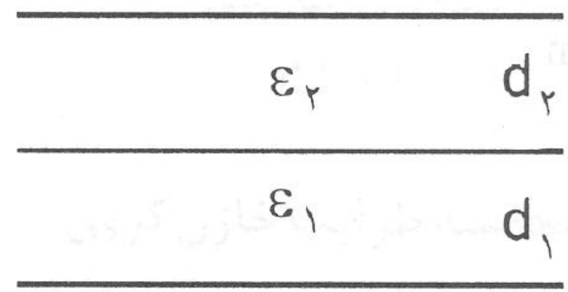
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+....\frac{1}{C_N} \qquad (۳۹-۴)$$

یعنی خازن‌های تشکیل شده با هم سری هستند این نکته یک اصل است که اگر مرز مشترک دی الکتریک‌ها با سطوح هادی خازن موازی باشند در اینصورت خازنهای تشکیل شده با هم سری هستند در حد وقتی تعداد لایه‌ها بسمت بی‌نهایت میل می‌کند می‌توان برای ضریب دی الکتریک موجود بین صفحات خازن تابعی از z (اگر صفحات در $z=0$ و $z=d$ قرار داشته باشند) تعریف کرد که رابطه (۴-۳۹) در اینحالت به انتگرال زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{1}{C}=\int_0^d \frac{1}{dC}=\int_0^d \frac{dz}{\varepsilon(z)A} \qquad (۴۰-۴)$$

مثال ۱۶: دو صفحه هادی موازی مطابق شکل به یک باطری ۱۰۰ ولتی متصل شده‌اند اگر $d_1=d_2=0/5^{mm}$ و $\varepsilon_{r_1}=2$, $\varepsilon_{r_2}=5$ و مساحت صفحات $10cm^2$ باشد چگالی بار سطحی ρ_s و ولتاژ دو سر دی الکتریک ۱ را بدست آورید.

حل:



$$V_0 = 100 = \int \overline{E}\cdot\overline{d\ell} = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$\rho_s = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$$

$$V_0 = 100 = E_1 d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 d_2 \Rightarrow$$

$$100 = E_1\left[d_1 + \frac{2}{5} d_2\right] \Rightarrow E_1 = \frac{100}{\left(0/5 + \frac{2}{5}\times 0/5\right)10^{-3}}$$

$$E_1 = \frac{10^5}{0/7} = \frac{10^6}{7} \Rightarrow \rho_s = \varepsilon_1 E_1 = 8/852\times 10^{-12}\times 2\times\frac{10^6}{7} = 2/53\frac{\mu c}{m^2}$$

$$V_1 = E_1 d_1 = \frac{10^6}{7}\times 0/5\times 10^{-3} = \frac{500}{7} = 71/4^V$$

راه دیگر

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V_0 = \frac{1}{1+\frac{C_1}{C_2}} V_0 = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}}} V_0 = \frac{100}{1+\frac{2}{5}} = 71/4^V$$

مثال ۱۷: دو صفحه خازنی بین $z=0$ و $z=d$ قرار دارد ضریب دی الکتریک بین صفحات خازن از رابطه $\varepsilon=\varepsilon_0\left[1+\frac{z^2}{d^2}\right]$ بدست می‌آید ظرفیت خازن تشکیل شده بر واحد سطح را بدست آورید.

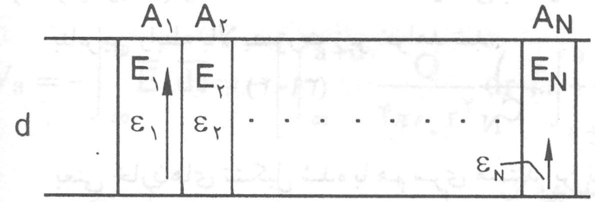
حل: از رابطه (۴-۴۰) استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{C}=\int_0^b\frac{dz}{\varepsilon(z)A}=\int_0^d\frac{dz}{\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})}=\frac{d}{\varepsilon_0}\,tg^{-1}\frac{z}{d}\Big]_0^d=\frac{\pi d}{4\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow C=\frac{4\varepsilon_0}{\pi d}$$

در حقیقت مثل این است که ε متوسط برابر با $\frac{4}{\pi}\varepsilon_0$ می‌باشد.

در حالتی که دی الکتریک‌ها طوری قرار گیرند که مرز مشترک آنها عمود بر صفحات خازن مطابق شکل زیر باشد ظرفیت را با روابط بدست می‌آوریم.



شکل (۴-۷): یک خازن چند لایه با لایه‌های عمودی

$$E_1=E_2=E_3=\ldots\ldots=E_N$$

$$V_0=E_1d=E_2d=\ldots\ldots=E_Nd$$

$$C=\frac{Q}{V_0}=\frac{\rho_{s_1}A_1+\rho_{s_2}A_2+\ldots\ldots\rho_{s_N}A_N}{E_1d}$$

$$C=\frac{\varepsilon_1E_1A_1+\varepsilon_2E_2A_2+\ldots\ldots\varepsilon_NE_NA_N}{E_1d}$$

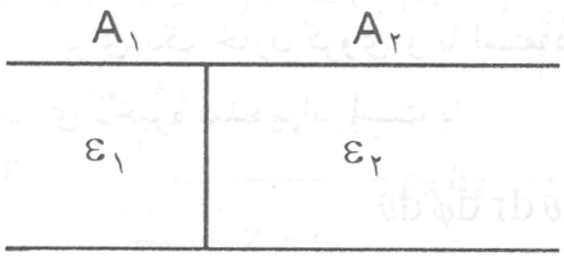
$$C=\varepsilon_1\frac{A_1}{d}+\varepsilon_2\frac{A_2}{d}+\ldots\ldots\quad\varepsilon_N\frac{A_N}{d}\qquad(۴۱\text{-}۴)$$

رابطه (۴-۴۱) نشان می‌دهد که خازنهای تشکیل یافته با هم موازی هستند و این نکته یک اصل است که اگر مرز مشترک دی الکتریکها بر سطوح هادی خازن عمود باشند خازنهای تشکیل شده با هم موازی هستند. در حد که تعداد دی‌الکتریک‌ها به سمت بی نهایت میل می‌کند رابطه (۴-۴۱) به انتگرال زیر تبدیل می‌شود که ε تابع x و یا y خواهد بود (اگر صفحات خازن در جهت x و یا y باشند.)

$$C=\int\frac{\varepsilon(x)\,a\,dx}{d}\qquad(۴۲\text{-}۴)$$

که a یکی از ابعاد صفحات می‌باشد (در جهت y و یا x)

مثال ۱۸: دو دی الکتریک با ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_{r_۱}=۳$ و $\varepsilon_{r_۲}=۵$ مطابق شکل بین صفحات خازن قرار گرفته‌اند اگر این خازن را به یک ولتاژ ۱۲۰ ولتی متصل کنیم بار جمع شده روی هر قسمت از سطح صفحات خازن ($A_۱$ و $A_۲$) چقدر است اگر $A_۱=\frac{۱}{۳}A_۲$ باشد. فاصله صفحات را ۲^{mm} و سطح صفحات را $۱۰۰cm^۲$ فرض کنید.



$$\varepsilon_۱ E_۱=\rho_{s_۱} \qquad \varepsilon_۲ E_۲=\rho_{s_۲}$$

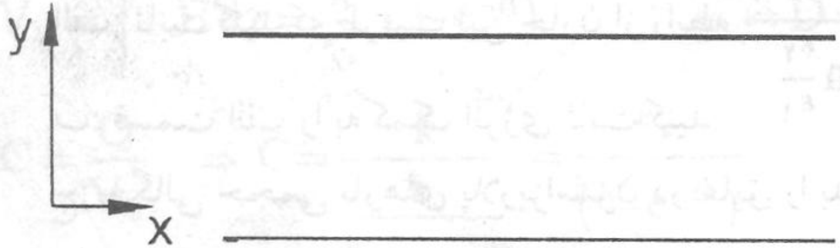
$$E_۱ d=V_۰=۱۲۰ \Rightarrow E_۱\times ۲\times ۱۰^{-۳}=۱۲۰ \Rightarrow E_۱=۶۰۰۰۰\,\frac{v}{m}=E_۲$$

$$\rho_{s_۱}=\varepsilon_۱ E_۱=۳\times ۸/۸۵۲\times ۱۰^{-۱۲}\times ۶۰۰۰۰=۱/۵۹۴\,\frac{Nc}{m^۲}$$

$$Q_۱=\rho_{s_۱}A_۱=۱/۵۹۴\times ۲۵\times ۱۰^{-۴}=۳/۹۸^{nc}$$

$$Q_۲=\rho_{s_۲}A_۲=\varepsilon_۲ E_۲ A_۲=۵\times ۸/۸۵۲\times ۱۰^{-۱۲}\times ۶۰۰۰۰\times ۷۵\times ۱۰^{-۴}=۱۹/۹^{nc}$$

مثال ۱۹: ضریب دی الکتریک بین صفحات خازنی که از مربع‌هایی به ضلع a تشکیل شده با تابع $\varepsilon=\varepsilon_0\left[1+\frac{x^2}{a^2}\right]$ مطابق شکل داده شده است ظرفیت خازن تشکیل شده چقدر است فاصله صفحات ۱ mm می‌باشد و مساحت صفحات $100\,cm^2$ می‌باشد.



حل: از رابطه (۴-۴۲) خواهیم داشت:

$$C=\int\frac{\varepsilon\,a\,dx}{d}=\int_0^a\frac{\varepsilon_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)a\,dx}{d}=\frac{\varepsilon_0\,a}{d}\left[a+\frac{1}{3}a\right]=\frac{4\varepsilon_0\,a^2}{3d}$$

$$C=\frac{4}{3}\varepsilon_0\frac{a^2}{d}=\frac{4}{3}\times 8.852\times 10^{-12}\times\frac{10^{-2}}{10^{-3}}=118\,pf$$

۴-۶-۴- انرژی ذخیره شده بین صفحات خازن

همانطوریکه در فصل قبل دیدیم چگالی حجمی انرژی ذخیره شده الکتریکی $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ می‌باشد برای یک خازن مسطح E ثابت و برابر است با $\frac{V_0}{d}$ که V_0 اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن است در اینصورت انرژی ذخیره شده بین صفحات خازن برابر است با:

$$W_e = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2\, dv = \frac{1}{2}\varepsilon \left[\frac{V_0}{d}\right]^2 Ad = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{d} V_0^2 = \frac{1}{2} C V_0^2$$

که همان رابطه معروف است که قبلاً دیده بودیم.

حالا همین رابطه را برای خازنهای استوانه‌ای و کروی بدست می‌آوریم.

برای یک خازن استوانه‌ای و با استفاده از قانون گوس میدان بین صفحات خازن $\overline{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon R l}\hat{a}_R$ می‌باشد بنابراین انرژی ذخیره شده برابر است با:

$$W_e=\frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^l \varepsilon E^2 dv=\frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^l \varepsilon\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon R l}\right)^2 R\,dR\,d\phi\,dz$$

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CV_0^2$$

برای یک خازن کروی و با استفاده از قانون گوس میدان بین صفحات خازن $\overline{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r$ می‌باشد بنابراین انرژی ذخیره شده برابر است با:

$$W_e=\frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon E^2 dv=\frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2 r^2\sin\theta\,dr\,d\phi\,d\theta$$

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CV_0^2$$

بنابراین انرژی ذخیره شده بین صفحات خازن صرفنظر از شکل آن از رابطه $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ و یا $\frac{1}{2}CV_0^2$ بدست می‌آید.

مثال ۲۰: ضریب دی الکتریک عایق بین صفحات خازنی بطور خطی از ε_1 از صفحه $z=0$ به ε_2 تا صفحه $z=d$ تغییر می‌کند اگر فاصله صفحات خازن d و مساحت صفحات A باشد.

الف: ثابت کنید که ظرفیت این خازن از رابطه $C=\dfrac{A(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ بدست می‌آید.

ب: قسمت الف را به کمک انرژی ثابت کنید.

ج: چگالی حجمی بارهای پلاریزاسیون در عایق را بدست آورید.

حل: الف

$$\varepsilon(z)=Az+B$$

$$\varepsilon(0)=\varepsilon_1 \rightarrow B=\varepsilon_1$$

$$\varepsilon(d)=\varepsilon_2 \rightarrow A=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}$$

$$\rightarrow \varepsilon(z)=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1$$

حال از رابطه (۴-۴۰) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{C}=\int\frac{dz}{\varepsilon(z)A}=\int_0^d\frac{dz}{\left[\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1\right]A}=\frac{d}{A(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\rightarrow C=\frac{A(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

ب:

$$W=\frac{1}{2}\int_0^d \varepsilon E^2 dv=\frac{1}{2}\int_0^d \varepsilon \left(\frac{\rho_s}{\varepsilon}\right)^2 Adz=\frac{1}{2}\int_0^d \frac{\rho_s^2}{\varepsilon} Adz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^d \frac{\rho_s^2 Adz}{\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1\right)}=\frac{A\rho_s^2}{2}\times\left[\frac{d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z_1+\varepsilon_1\right)\right]_0^d$$

$$=A\left(\frac{Q}{A}\right)^2\frac{1}{2}\times\left[\frac{d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right]=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{A\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$\rightarrow C=\frac{A\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\right)}{d\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

ج:

$$\overline{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{\rho_s\hat{a}_z}{\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1\right)}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\rho_s\hat{a}_z}{\varepsilon}$$

$$\overline{P}=\frac{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1}\rho_s\hat{a}_z\rightarrow\rho_b=-\overline{\nabla}.\overline{P}=-\rho_s\frac{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}\varepsilon_0}{\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1\right)^2}$$

مثال ۲۱: ضریب دی الکتریک بین دو صفحه خازن که در صفحات $z=0$ و $z=d$ قرار گرفته بفرم $\varepsilon = \varepsilon_0 e^z$ تغییر می‌کند ظرفیت خازن بر واحد سطح را از سه طریق بدست آورید

حل: از طریق قانون گوس (فرم نقطه‌ای) $\nabla . D = 0 \rightarrow D = k =$ ثابت

چون فقط D یک مولفه در جهت z دارد پس از رابطه $\nabla . \overline{D} = 0$ میتوان نتیجه گرفت که D ثابت است.

$$\overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon} = \frac{k}{\varepsilon_0 e^z}\hat{a}_z = \frac{k}{\varepsilon_0 e^z}\,\hat{a}_z = \frac{k}{\varepsilon_0}\, e^{-z}\,\hat{a}_z$$

$$V_0 = \int_0^d E\,dz = \frac{k}{\varepsilon_0}\,(1-e^{-d}) \qquad \rho_s = D = k \;\rightarrow\; Q = kA = k$$

$$C = \frac{Q}{V_0} \;\Rightarrow C = \frac{k}{\dfrac{k}{\dfrac{k}{\varepsilon_0}(1-e^{-d})}} = \frac{\varepsilon_0}{(1-e^{-d})}$$

حال از طریق ترکیب سری خازنها (معادله (۴-۴۰)) ظرفیت خازن را بدست می‌آوریم.

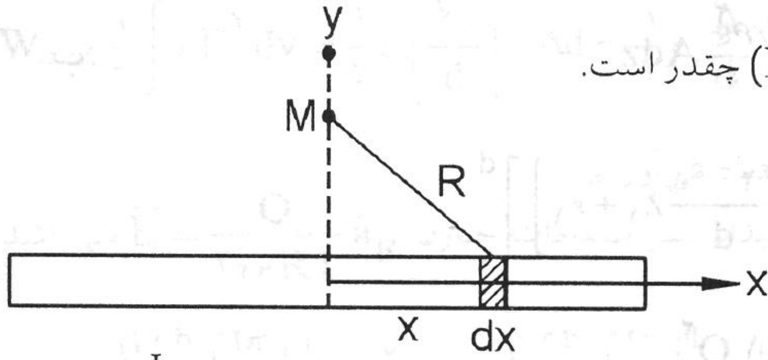
$$\frac{1}{C} = \int \frac{dz}{\varepsilon(z)\,A} = \int_0^d \frac{dz}{\varepsilon_0 e^z} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,(1-e^{-d}) \Rightarrow\; C = \frac{\varepsilon_0}{1-e^{-d}}$$

از طریق انرژی ظرفیت را بدست می‌آوریم.

$$W_e = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\int_0^d \varepsilon_0 e^z \times \frac{k^2}{(\varepsilon_0 e^z)^2} A\,dz = \frac{1}{2}\int_0^d \frac{k^2\,dz}{\varepsilon_0 e^z}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{k^2}{\varepsilon_0}(1-e^{-d}) = \frac{1}{2}\,\frac{k^2}{\dfrac{\varepsilon_0}{(1-e^{-d})}} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{C} \quad \Big|_{k=Q} \;\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0}{(1-e^{-d})}$$

مثال ۲۲: ظرفیت یک میله بطول L و شعاع R $(R \ll L)$ چقدر است.



حل: *ابتدا پتانسیل نقطه‌ای مثل M را بدست می‌آوریم.*

$$V_M = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_\ell \, dx}{4\pi\varepsilon_\circ R}$$

$$V_M = \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_\ell \, dx}{4\pi\varepsilon_\circ \sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ L} \ln \frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2}}{\frac{-L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2}}$$

پتانسیل میله $\rightarrow y = R \Rightarrow V_{\text{میله}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ L} \ln \frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+R^2}}{-\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+R^2}}$

$$\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+R^2} = \frac{L}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{2R}{L}\right)^2}\right] = \frac{L}{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2R}{L}\right)^2\right] = \frac{L}{2}+\frac{R^2}{L}$$

$$V_{\text{میله}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ L} \ln \frac{\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{R^2}{L}}{\frac{-L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{R^2}{L}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ L} \ln \frac{L}{\frac{R^2}{L}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_\circ L} \ln \frac{L}{R}$$

$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{\ln \frac{L}{R}} \rightarrow \overline{C} = \frac{2\pi\varepsilon_\circ}{\ln \frac{L}{R}} \left(\frac{f}{m}\right)$ خازن بر واحد طول

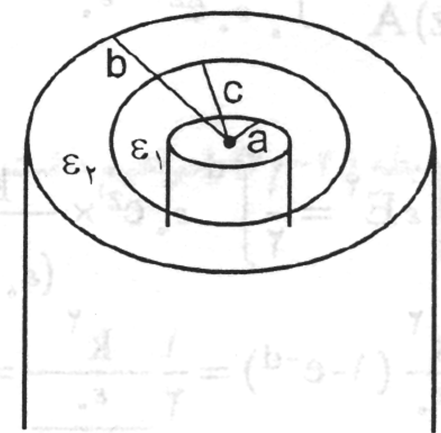
۴-۶-۵- خازن چند لایه استوانه‌ای و کروی و ملاحظاتی درباره محاسبه $\overline{D}$

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که مرز مشترک دی الکتریکها موازی با صفحات خازن باشد برای خازن استوانه‌ای اگر در فاصله $a<R<c$ ضریب دی الکتریک ε_1 و در فاصله $c<R<b$ ضریب دی الکتریک ε_2 باشد با استفاده از قانون گوس خواهیم داشت.

$$\oint \overline{D}.\overline{ds} = Q \quad \rightarrow \overline{D} = \frac{Q}{2\pi R l}\hat{a}_R$$

چون $\overline{D}$ شعاعی است بر مرز مشترک دی الکتریک‌ها عمود بوده و بعلت پیوستگی مولفه عمودی D میتوان نتیجه گرفت که D روی سطح گوس ثابت است.

$$\overline{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_1 R l}\hat{a}_R & a<R<c \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_2 R l}\hat{a}_R & c<R<b \end{cases}$$



شکل (۴-۸): خازن دو لایه استوانه‌ای

$$V_0 = \int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell} = \int_a^c \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 R l}dR + \int_c^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 R l}dR$$

$$V_0 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 l}\ln\frac{c}{a} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 l}\ln\frac{b}{c}$$

$$\frac{V_0}{Q} = \frac{1}{C} = \frac{\ln\frac{c}{a}}{2\pi\varepsilon_1\ell} + \frac{\ln\frac{b}{c}}{2\pi\varepsilon_2\ell} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{V_0}{Q}=\frac{1}{C}=\frac{\ln\frac{c}{a}}{2\pi\varepsilon_1\ell}+\frac{\ln\frac{b}{c}}{2\pi\varepsilon_2\ell}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

یعنی خازنهای تشکیل شده با هم سری هستند و این بدان علت است که مرز مشترک دی الکتریک‌ها با سطوح خازن موازی می‌باشد. در حالتی که مرز مشترک دی الکتریکها بر سطوح خازن عمود باشد چون میدان شعاعی می‌باشد پس بر مرز مشترک دی الکتریک‌ها مماس می‌باشد و بعلت پیوستگی مولفه مماس E میتوان گفت E در دو محیط دی الکتریک با هم مساوی می‌باشد بنابراین بعلت یکسان نبودن εها نتیجه می‌گیریم که D ها در دو محیط دی الکتریک مساوی نیستند (در اینحالت برای $0<\phi<\pi$, $\varepsilon=\varepsilon_1$ و برای $\pi<\phi<2\pi$، $\varepsilon=\varepsilon_2$ می‌باشد). با استفاده از قانون گوس خواهیم داشت:

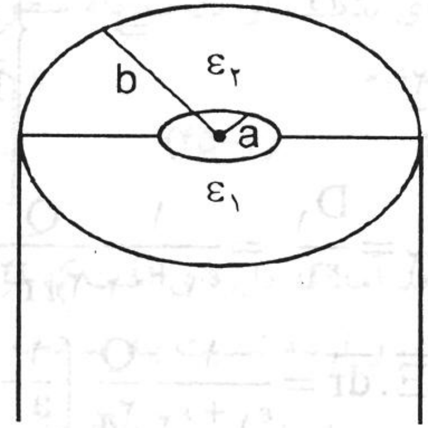
$$\oint \overline{D}.\overline{ds}=Q\rightarrow(D_1+D_2)\pi R l=Q\rightarrow\begin{cases}\overline{D}_1+\overline{D}_2=\dfrac{Q}{\pi R l}\hat{a}_r\\[2mm]\dfrac{\overline{D}_1}{\varepsilon_1}=\dfrac{\overline{D}_2}{\varepsilon_2}=\overline{E}_1=\overline{E}_2\end{cases}$$

$$\rightarrow\ \overline{D}_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{\pi R l}\hat{a}_R\qquad D_2=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{\pi R l}\hat{a}_R$$

$$\overline{E}_1=\overline{E}_2=\frac{Q}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)Rl}\hat{a}_R$$

$$V_0=\int_a^b\overline{E}.\overline{d\ell}=\frac{Q}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)l}\ln\frac{b}{a}$$

$$\frac{Q}{V_0}=C=\frac{\pi\varepsilon_1 l}{\ln\frac{b}{a}}+\frac{\pi\varepsilon_2 l}{\ln\frac{b}{a}}=C_1+C_2$$

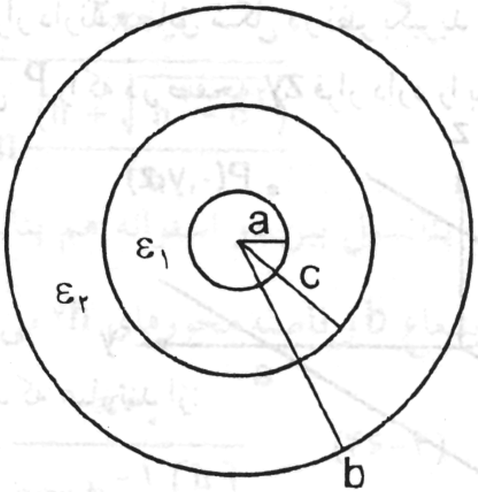


شکل (۴-۹): خازن دو لایه استوانه‌ای متشکل از خازنهای موازی که C_1 و C_2 ظرفیت خازن تشکیل شده از نیمی از استوانه‌ها می‌باشد.

حال برای خازن چند لایه کروی ظرفیت را در دو حالت گفته شده برای خازن استوانه‌ای حساب می‌کنیم در حالت اول که مرز مشترک دی الکتریک‌ها با صفحات خازنها موازی است چون میدان شعاعی است پس $\overline{D}$ بر مرز مشترک دی الکتریک‌ها عمود است و بعلت پیوستگی مولفه عمودی D اگر از قانون گوس استفاده کنیم D روی سطح گوس ثابت است با استفاده از قانون گوس خواهیم داشت:

$$\oint \overline{D}.\overline{ds} = Q \rightarrow \overline{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{a}_r$$

$$\overline{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\hat{a}_r & a<r<c \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\hat{a}_r & c<r<b \end{cases}$$



شکل (۴-۱۰): خازن کروی دو لایه متشکل از خازنهای سری

در اینحالت هم ضریب دی الکتریک در فاصله $a<r<c$ برابر ε_1 و ضریب دی الکتریک در فاصله $c<r<b$ برابر ε_2 می‌باشد.

$$V_0 = \int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell} = \int_a^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}dr + \int_c^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right] + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left[\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right]$$

$$\rightarrow \frac{V_0}{Q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{\dfrac{4\pi\varepsilon_1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}} + \frac{1}{\dfrac{4\pi\varepsilon_2}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\rightarrow \frac{V_0}{Q}=\frac{1}{C}=\frac{1}{\frac{4\pi\varepsilon_1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}}+\frac{1}{\frac{4\pi\varepsilon_2}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

یعنی خازنهای تشکیل شده با هم سری هستند و این بدان علت است که مرز مشترک دی الکتریک‌ها با صفحات خازن موازی است. در حالتی که مرز مشترک دی الکتریک‌ها بر سطوح خازن عمود باشد چون میدان شعاعی است پس بر مرز مشترک دی الکتریک‌ها مماس می‌باشد و بعلت پیوستگی مولفه مماس E میتوان گفت E در دو محیط دی الکتریک با هم مساوی می‌باشد بنابراین بعلت یکسان نبودن εها نتیجه می‌گیریم که در دو محیط دی الکتریک Dها یکسان نیستند بنابراین قانون گوس به صورت زیر خواهد بود:

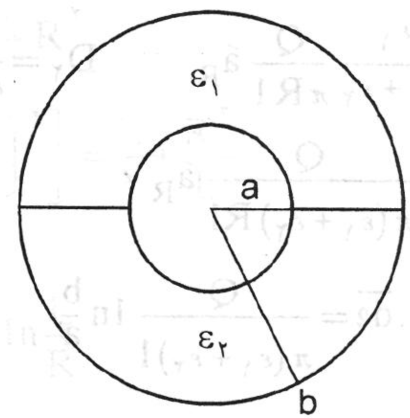
$$\oint \overline{D}\cdot\overline{ds}=Q \rightarrow D_1\,(2\pi r^2)+D_2(2\pi r^2)=Q$$

$$\begin{cases} D_1+D_2=\dfrac{Q}{2\pi r^2} \\[2ex] \dfrac{D_1}{\varepsilon_1}=\dfrac{D_2}{\varepsilon_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{D}_1=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\dfrac{Q}{2\pi r^2}\,\hat{a}_r \\[2ex] \overline{D}_2=\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\dfrac{Q}{2\pi r^2}\,\hat{a}_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{E}_1=\overline{E}_2=\frac{D_1}{\varepsilon_1}=\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{Q}{2\pi r^2}\,\hat{a}_r=\overline{E}$$

$$V_0=\int_a^b \overline{E}\cdot\overline{dr}=\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{V_0}=\frac{2\pi\varepsilon_1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}+\frac{2\pi\varepsilon_2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \Rightarrow C=C_1+C_2$$

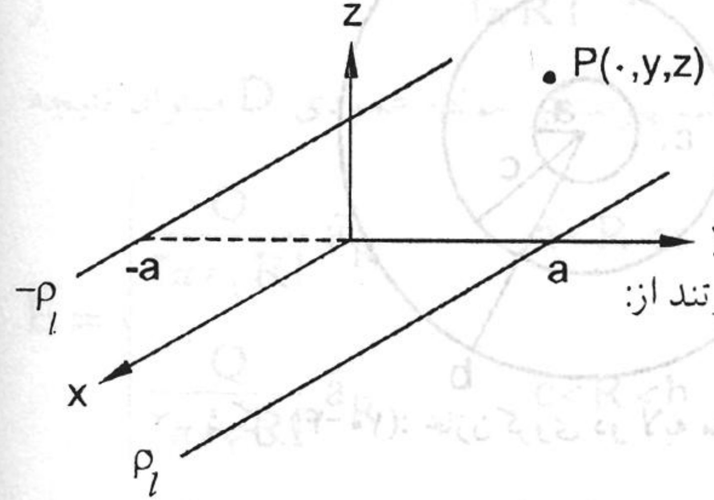


شکل (۴-۱۱): خازن کروی دو لایه متشکل از خازنهای موازی

که C_1 و C_2 ظرفیت بین دو نیمکره هستند. همانطوریکه ملاحظه می‌شود دو خازن تشکیل شده با هم موازی هستند و این بدان علت است که مرز مشترک دو دی الکتریک بر صفحات خازن عمود است.

۴-۶-۶- خازن دو سیمه

دو میله با چگالی ρ_ℓ و $-\rho_\ell$ که موازی با محور xها و در صفحه xy قرار دارند مطابق شکل در نظر بگیرید چون میله‌ها در جهت x بی نهایت هستند پس پتانسیل تابع x نیست و میتوان پتانسیل نقطه‌ای مثل P را که در صفحه zy قرار دارد را به صورت زیر نوشت



$$V_P = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad (۴۳-۴)$$

که R_2 و R_1 به ترتیب فاصله نقطه P از میله‌های $-\rho_\ell$ و ρ_ℓ هستند که عبارتند از:

$$R_1 = \sqrt{z^2 + (y-a)^2} \qquad (۴۴-۴)$$

شکل (۴-۱۲): خازن دو سیمه

$$R_2 = \sqrt{z^2 + (y-a)^2}$$

در نتیجه خواهیم نوشت:

$$V_P = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z^2+(y+a)^2}{z^2+(y-a)^2}$$

برای بدست آوردن معادله سطوح هم پتانسیل کافیست که $V_P = V_\circ$ قرار دهیم که $V_\circ$ مقداری ثابت است.

$$\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{z^2+(y+a)^2}{z^2+(y-a)^2} = V_\circ \rightarrow \frac{z^2+(y+a)^2}{z^2(y-a)^2} = e^{\frac{4\pi\varepsilon_\circ V_\circ}{\rho_\ell}} = k$$

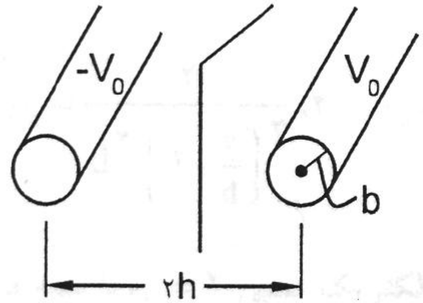
$$\Rightarrow y^2 - 2ay\,\frac{k+1}{k-1} + z^2 + a^2 = 0 \rightarrow \left(y - a\frac{k+1}{k-1}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\right)^2$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود معادله فوق معادلهٔ یک دایره بشعاع $\frac{2a\sqrt{k}}{k-1}$ و مرکز $O\left|\begin{array}{l} a\frac{k+1}{k-1} \\ 0 \end{array}\right.$ در صفحه zy است از

آنجائیکه نقطه P را میتوان در تمام صفحات موازی صفحه zy در نظر گرفت پس بطور کلی معادله سطوح هم پتانسیل استوانه خواهد شد که سطح مقطع آن با صفحه zy دایره‌ای است که معادله آن در بالا داده شده است حال اگر $V_P = -V_\circ$ قرار دهیم برای بدست آوردن معادله سطوح هم پتانسیل کافی است که در روابط بالا k را به $\frac{1}{k}$ تبدیل کنیم در اینصورت معادله بالا به فرم

$$\left(y + a\frac{k+1}{k-1}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\right)^2 \qquad (45\text{-}4)$$

در خواهد آمد که دایره‌ای است که قرینه دایره بالا نسبت به صفحه ZX خواهد بود بنابراین سطوح هم پتانسیل دو استوانه موازی و قرینه نسبت به صفحه ZX خواهند بود دقت کنید که فاصله محورهای دو استوانه از محور X برابر است با $h = a\dfrac{k+1}{k-1}$ (بنابراین فاصله محور دو استوانه $2h$ خواهد بود) و شعاع استوانه‌ها



شکل (۴-۱۳): استوانه‌های هم پتانسیل

$b = a\dfrac{k+1}{k-1}$ می‌باشد. از آنچه گفته شد چنین نتیجه می‌گیریم که دو میله به چگالی ρ_l و $-\rho_l$ که بفاصله $2a$ از هم قرار دارند دو استوانه که همان سطوح هم پتانسیل هستند ایجاد می‌کنند که شعاع استوانه‌ها b و فاصله محورهای آنها $2h$ می‌باشد که b و h در بالا تعریف شده‌اند حالا میتوان ظرفیت بر واحد طول را برای خازن دو سیمه بدست آورد.

$$k = e^{\frac{4\pi\varepsilon_\circ V_\circ}{\rho_\ell}} \Rightarrow V_\circ = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_\circ}\ln\sqrt{k} \rightarrow \frac{\rho_\ell}{V_\circ} = \overline{C} = \frac{2\pi\varepsilon_\circ}{\ln\dfrac{(h+\sqrt{h^2-b^2})}{b}}$$

اما چون اختلاف پتانسیل بین دو استوانه هم پتانسیل $2V_\circ$ می‌باشد ظرفیت بر واحد طول بین دو سیم که همان ظرفیت بین دو استوانه بشعاع b و فاصله محورهای $2h$ می‌باشد عبارتست از $\frac{1}{2}\overline{C}$ بعبارت دیگر ظرفیت سیستم عبارتست از:

$$\overline{C} = \frac{\pi\varepsilon_\circ}{\ln\dfrac{(h+\sqrt{h^2-b^2})}{b}} = \frac{\pi\varepsilon_\circ}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{h}{b}\right)} \qquad (۴-۴۶)$$

رابطه بالا در حقیقت ظرفیت بین دو میله استوانه‌ای بشعاع b که محورهای آنها بفاصله $2h$ از هم قراردارد می‌باشد حال در شرایط عملی که $b \ll h$ می‌باشد (فاصله استوانه‌ها خیلی بیشتر از شعاع آنها است مثل خطوط انتقال برق) رابطه بالا به رابطه زیر ساده می‌شود.

$$\overline{C}=\frac{\pi\varepsilon_{\circ}}{\ln\frac{۲h}{b}} \qquad (۴۷-۴)$$

بعبارت دیگر ظرفیت بر واحد طول دو میله بشعاع b که بفاصله d از هم قرار دارند برابر است با $\overline{C}=\frac{\pi\varepsilon_{\circ}}{\ln\frac{d}{b}}$

همانطوریکه در فصل بعد خواهیم داشت میله ρ_ℓ- در حقیقت تصویر میله ρ_ℓ در استوانه‌ای به پتانسیل $V_{\circ}$- و میله ρ_ℓ تصویر میله ρ_ℓ- در استوانه‌ای به پتانسیل $V_{\circ}$ خواهد بود.

مثال ۲۳: دو میله استوانه‌ای به شعاع ۱ cm بفاصله ۵۰ cm از هم قرار دارند ظرفیت بر واحد طول سیستم را بدست آورید؟

حل: ***با استفاده از معادله (۴-۴۷) خواهیم داشت***

$$\overline{C}=\frac{\pi\varepsilon_{\circ}}{\ln\frac{۵۰}{۱}}=۷/۱\,pf$$

نکته: برای $V_{\circ}=۰$ خواهیم داشت k=۱ که در اینحالت شعاع دایره یعنی b بی نهایت می‌شود و دایره تبدیل به صفحه می‌شود که در حقیقت همان صفحه ZX است که پتانسیل آن صفر است زیرا درست در وسط دو استوانه با پتانسیل $V_{\circ}$- و $V_{\circ}$ قرار گرفته است این صفحه درست بین دو میله ρ_ℓ+ و ρ_ℓ- نیز قرارگرفته است و باید پتانسیل آن صفر باشد.