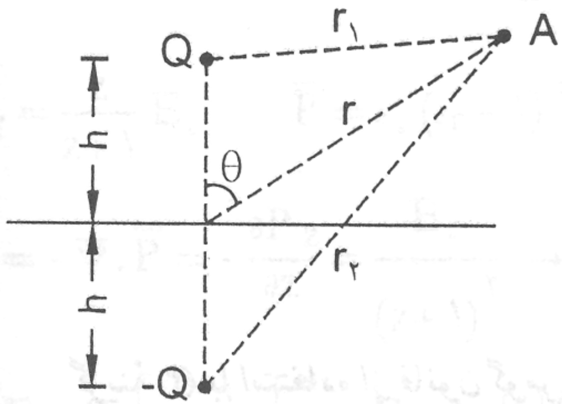
فصل پنجم

تصویر

وقتی پیداکردن میدان ناشی از بارهای نقطه‌ای یا بارهای خطی در مجاورت هادی هایی با اشکال ساده مورد نظر باشد از روش تصاویر استفاده می‌شود با این روش بجای هادی از بار الکتریکی معادلی استفاده می‌شود که پتانسیل روی سطح هادی را با همان مقدار قبلی ثابت نگه می‌دارد مثلاً اگر هادی زمین شده باشد بار تصویر چنان انتخاب می‌شود که مجموع پتانسیل ناشی از بار اصلی و بار تصویر در محلی که قبلاً هادی بوده صفر باشد.

۵-۱- تصویر یک بار نقطه‌ای در یک صفحه سطح هادی زمین شده

بار نقطه Q که بفاصله h از صفحه هادی زمین شده قرار دارد را مطابق شکل در نظر بگیرید اگر بخواهیم پتانسیل هادی صفر باشد لازم است بار الکتریکی Q- قرینه بار Q نسبت به هادی در طرف دیگر هادی در نظر بگیریم در اینحالت میتوان پتانسیل سیستم (بار نقطه‌ای بعلاوه هادی زمین شده) در جلوی هادی را معادل پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای و تصویرش جلوی هادی دانست پتانسیل نقطه A برابر است با:



$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \qquad (۱-۵)$$

شکل (۵-۱): تصویر بار نقطه‌ای در یک صفحه مسطح هادی

با توجه به اینکه r_1 و r_2 عبارتند از:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\theta}$$

$$(۲-۵)$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + h^2 + 2rh\cos\theta}$$

پتانسیل نقطه A عبارتست از:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2-2rh\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2+2rh\cos\theta}}\right) \qquad (۳-۵)$$

حال با استفاده از رابطه $\overline{E} = -\overline{\nabla} V$ میتوان میدان در نقطه A را با رابطه زیر بدست آورد.

$$\overline{E}_A = -\overline{\nabla} V_A = -\frac{\partial V_A}{\partial r}\hat{a}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V_A}{\partial \theta}\hat{a}_\theta$$

$$\overline{E}_A = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\left[\left(-\frac{1}{2}\right)(2r - 2h\cos\theta)(r^2+h^2-2rh\cos\theta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(2r+2h\cos\theta)(r^2+h^2+2rh\cos\theta)^{-\frac{3}{2}} \right]\hat{a}_r \\ &\left[+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}\right)(+2rh\sin\theta)(r^2+h^2-2rh\cos\theta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}\right)(-2rh\sin\theta)(r^2+h^2+2rh\cos\theta)^{-\frac{3}{2}} \right]\hat{a}_\theta \end{aligned} \right\}$$

که پس از ساده شدن میدان $\overline{E}_A$ عبارت خواهد بود از

$$\overline{E}_A = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{r-h\cos\theta}{(r^2+h^2-2rh\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{r+h\cos\theta}{(r^2+h^2+2rh\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \right]\hat{a}_r + \qquad (۴-۵)$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{h\sin\theta}{(r^2+h^2-2r\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{h\sin\theta}{(r^2+h^2+2rh\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \right]\hat{a}_\theta$$

حال برای بدست آوردن مولفه‌های میدان روی صفحه فلزی کافیست که در رابطه (۵-۴) مقدار θ را 90° انتخاب کنیم بنابراین میدان روی صفحه هادی عبارتست از $(\theta = \frac{\pi}{2})$

$$\overline{E}_A = \frac{Qh}{2\pi\varepsilon_0 (r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_\theta \qquad (5-5)$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود مولفه مماسی میدان (مولفه $\hat{a}_r$) روی صفحه هادی برابر صفر است. حال میتوان چگالی سطحی بار روی صفحه هادی را با استفاده از شرط مرزی پیدا کرد. چون مولفه $\hat{a}_\theta$ بر سطح فلز عمودی است (در $\theta = 90^\circ$ در حقیقت $a_\theta = -\hat{a}_z$ می‌باشد) خواهیم داشت:

$$\overline{E}_A = \frac{-Qh}{2\pi\varepsilon_0 (r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z = E_n\,\hat{a}_z$$

$$\rho_s = \varepsilon_0 E_n = \frac{-Qh}{2\pi (r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

در نتیجه کل بار القاء شده روی صفحه هادی عبارتست از:

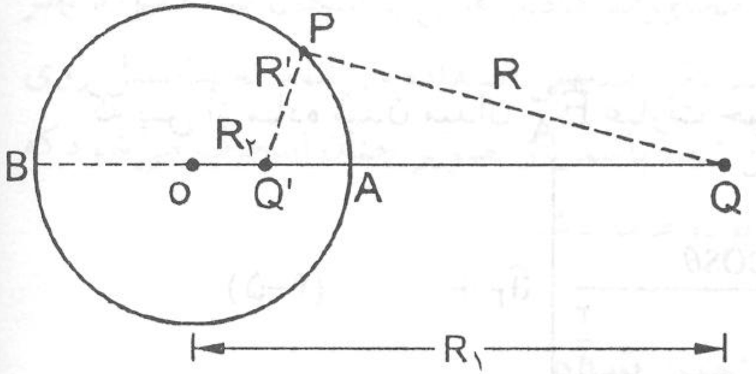
$$Q_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-Qh\,r\,dr\,d\phi}{2\pi (r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = -Q$$

بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که اگر بار Q مقابل یک هادی بسیار بزرگ زمین شده قرار گیرد بار $-Q$ روی سطح هادی القاء می‌شود نکته مهم این است که رابطه (۵-۳) فقط برای جلوی هادی $(z>0)$ صادق است زیرا در داخل هادی $(z<0)$ پتانسیل همواره صفر است بنابراین در داخل فلز پتانسیل و میدان صفر است ولی در بالای فلز پتانسیل و میدان از روابط (۵-۳) و (۵-۴) بدست می آید در این شرایط دقت شود که در طرف دیگر هادی (در $z=0$ ...

هادی زمین شده است اگر هادی زمین نشده بود بار $-Q$ روی سطح بالایی و بار $+Q$ روی سطح زیر هادی القاء می‌شود (اگر هادی ایزوله باشد)

۵-۲- تصویر بار نقطه‌ای در یک کره هادی زمین شده

بار نقطه‌ای Q را بفاصله R_1 از مرکز یک کره هادی زمین شده بشعاع a در نظر بگیرید برای اینکه پتانسیل کره صفر باشد لازم است بار Q' را داخل کره به فاصله R_2 از مرکز کره طوری در نظر بگیریم تا مجموع پتانسیل بارهای Q و Q' در تمام نقاط روی کره صفر باشد در اینصورت بار نقطه‌ای Q' را تصویر بار نقطه‌ای Q می‌نامیم. نقطه P را بفاصله R از بار Q و R' از بار Q' در نظر می‌گیریم پتانسیل نقطه P عبارتست از:



شکل (۵-۲): تصویر بار نقطه‌ای داخل کره هادی

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R'} \qquad (۶-۵)$$

حال باید Q' طوری انتخاب شود که $V_P=0$ شود بنابراین با صفر قرار دادن V_P، رابطه (۵-۶) به صورت زیر درخواهد آمد.

$$\frac{Q}{Q'} = -\frac{R}{R'} \qquad (۷-۵)$$

حال رابطه (۵-۷) را که برای تمام نقاط روی کره صادق است (چون پتانسیل تمام نقاط روی کره صفر است) برای نقطه A و B اعمال می‌کنیم.

$$\text{A نقطه} \rightarrow \frac{Q}{Q'} = -\frac{R_1 - a}{a - R_2}$$

$$\text{B نقطه} \rightarrow \frac{Q}{Q'} = -\frac{R_1 + a}{a + R_2} \qquad (۸-۵)$$

$$\frac{Q}{Q'}=-\frac{R}{R'} \qquad (۷-۵)$$

حال رابطه (۵-۷) را که برای تمام نقاط روی کره صادق است (چون پتانسیل تمام نقاط روی کره صفر است) برای نقطه A و B اعمال می‌کنیم.

$$\text{نقطه } A \rightarrow \frac{Q}{Q'}=-\frac{R_1-a}{a-R_2}$$

$$(۸-۵)$$

$$\text{نقطه } B \rightarrow \frac{Q}{Q'}=-\frac{R_1+a}{a+R_2}$$

از دو معادله دو مجهولی بالا Q' و R_2 بصورت زیر بدست می‌آید.

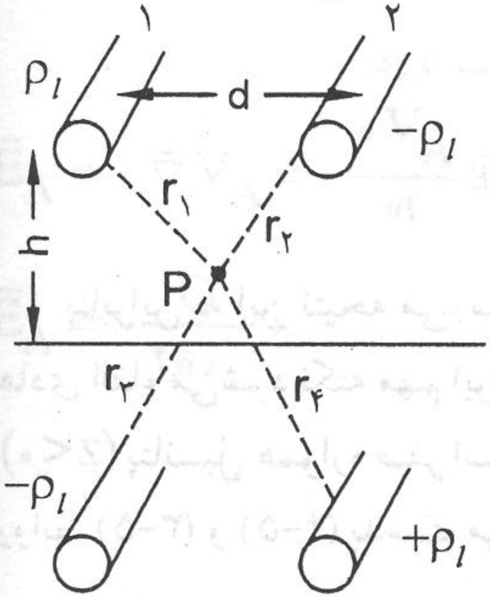
$$Q'=-Q\frac{a}{R_1}$$

$$(۹-۵)$$

$$R_2=\frac{a^2}{R_1}$$

با استفاده از رابطه (۵-۹) اندازه بار تصویر (Q') و فاصله آن تا مرکز کره هادی (R_2) بدست می‌آید.

مثال ۱: دو بار خطی به چگالی ρ_ℓ و $-\rho_\ell$ به فاصله h از زمین قرار دارند فاصله بارها d و شعاع هر کدام a می‌باشد ظرفیت خازن بین دو بار خطی را بدست آورید؟ $(h \gg a \ , \ d \gg a)$



حل: تصاویر دو بار خطی در صفحه زمین دو بار خطی با چگالی مخالف می‌باشد حال پتانسیل نقطه P را که پتانسیل ناشی از ۴ بار خطی است بصورت زیر می‌نویسیم.

$$V_P = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} \qquad (10-5)$$

برای بدست آوردن پتانسیل میله ۱ کافیست که در رابطه (۵-۱۰) بجای r_1، r_2، r_3، r_4 مقادیر زیر قرار دهیم.

$$r_1 = a$$
$$r_2 = d$$
$$r_3 = 2h$$
$$r_4 = \sqrt{d^2 + 4h^2}$$

بنابراین پتانسیل میله ۱ عبارتست از:

$$V_1 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2dh}{a\sqrt{d^2 + 4h^2}} \qquad (11-5)$$

برای بدست آوردن پتانسیل میله ۲ در رابطه (۵-۱۰) بجای r_1، r_2، r_3، r_4 مقادیر زیر قرار دهیم.

$$r_1 = d$$

$$r_2 = a$$

$$r_3 = \sqrt{d^2 + 4h^2}$$

$$r_4 = 2h$$

بنابراین پتانسیل میله ۲ عبارتست از:

$$V_2 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a\sqrt{a^2+4h^2}}{2dh} \qquad (۱۲-۵)$$

بنابراین

$$V_1 - V_2 = \frac{\rho_\ell}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2dh}{a\sqrt{a^2+4h^2}} \qquad (۱۳-۵)$$

ظرفیت خازن بر واحد طول سیستم با استفاده از رابطه $\overline{C} = \dfrac{\rho_\ell}{V_1 - V_2}$ عبارتست از:

$$\overline{C} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \dfrac{2dh}{a\sqrt{a^2+4h^2}}} \qquad (۱۴-۵)$$

$$\overline{C}=\frac{\pi\varepsilon_{\circ}}{\ln\dfrac{2dh}{a\sqrt{a^{2}+4h^{2}}}} \qquad (۱۴-۵)$$

رابطه (۵-۱۴) در حقیقت یک رابطه عملی برای بدست آوردن خازن خطوط انتقال دو سیمه می‌باشد پارامتر h در حقیقت اثر زمین بر روی خازن بین دو خط انتقال انرژی می‌باشد برای حذف اثر زمین و بدست آوردن ظرفیت بین دو خط انتقال ایزوله کافی است در رابطه (۵-۱۴) پارامتر $h \to \infty$ میل کند ظرفیت خازن بین دو خط انتقال به شعاع a که بفاصله d از هم قرار دارند بصورت زیر خواهد شد:

$$\overline{C}=\frac{\pi\varepsilon_{\circ}}{\ln\dfrac{d}{a}} \qquad (۱۵-۵)$$

این همان رابطه (۴-۴۷) فصل قبل است که برای خازن دو سیمه اثبات شد نکته مهم اینکه اگر در تصویر بار نقطه‌ای داخل کره، کره زمین نشده بلکه به یک باطری به پتانسیل $V_{\circ}$ وصل شده باشد علاوه بر بار تصویر Q' باید بار اضافی Q'' را در مرکز کره قرار دهیم بطوریکه پتانسیل روی کره ناشی از Q'' برابر $V_{\circ}$ باشد بعبارت دیگر $V_{\circ}=\dfrac{Q''}{4\pi\varepsilon_{\circ}a}$ باشد که با معلوم بودن $V_{\circ}$ مقدار بار اضافی ایکه باید در مرکز کره قرار دهیم بدست می‌آید از طرف دیگر اگر بار کره $Q_{\circ}$ باشد علاوه بر بار Q' که بار تصویر است باید بار $Q_{\circ}-Q'$ در مرکز کره قرار گیرد تا مجموع بار داخل کره طبق قانون گوس برابر $Q_{\circ}$ گردد.

مثال ۲: بار q بفاصله $2a$ از مرکز یک کره فلزی بشعاع a قرار داده شده است نیروی وارد بر کره از طرف بار q را در حالات زیر بدست آورید؟

۱- کره دارای پتانسیل V_0 باشد. ۲- کره دارای بار q_0 باشد.

۳- در حالت اول بار القائی روی کره و در حالت دوم پتانسیل کره چقدر است؟

حل: مقدار بار تصویر و فاصله آن تا مرکز کره طبق رابطه (۵-۹) عبارتند از:

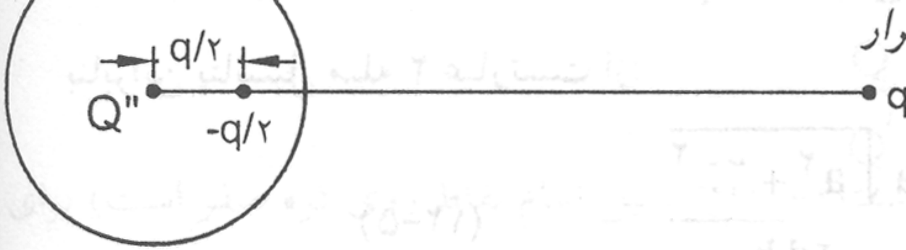
$$Q' = -q\frac{a}{2a} = -\frac{q}{2}$$

$$R_2 = \frac{a^2}{R_1} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

بنابراین برای اینکه کره فلزی یک سطح هم پتانسیل باشد باید بار $\frac{-q}{2}$ بفاصله $\frac{a}{2}$ از مرکز آن قرار گیرد اما بار q و $\frac{-q}{2}$ با هم پتانسیل کره را صفر می‌کنند پس باید بار Q'' در مرکز کره قرار گیرد تا پتانسیل کره V_0 شود که Q'' عبارتست از:

$$Q'' = 4\pi\varepsilon_0 a V_0 \qquad (۱۶-۵)$$

بنابراین داخل کره ۲ بار $\frac{-q}{2}$ و Q'' و خارج کره بار q قرار دارد (مطابق شکل)



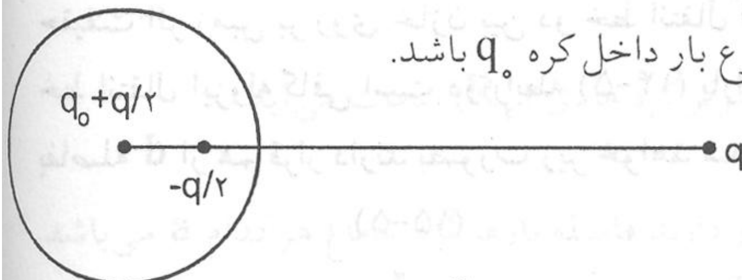
حال نیروی وارد بر بار q عبارتست از مجموع نیروهای ناشی از بارهای $\frac{-q}{2}$ و Q'' بر q که عبارتست از:

$$F_q = \frac{Q''q}{4\pi\varepsilon_\circ (2a)^2} + \frac{\frac{-q}{2}q}{4\pi\varepsilon_\circ \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{4\pi\varepsilon_\circ a V_\circ q}{4\pi\varepsilon_\circ (4a^2)} - \frac{q^2}{18\pi\varepsilon_\circ a^2}$$

$$F_q = \frac{V_\circ q}{4a} - \frac{q^2}{18\pi\varepsilon_\circ a^2}$$

که در حقیقت F_q نیروی وارد از طرف کره بر بار q است طبق قانون عمل و عکس العمل نیروی وارد بر کره از طرف بار q برابر است با $-F_q$ یعنی:

$$F = \frac{q^2}{18\pi\varepsilon_\circ a^2} - \frac{V_\circ q}{4a}$$



در حالت دوم باید بار $(q_\circ+\frac{q}{2})$ در مرکز کره قرار گیرد تا مجموع بار داخل کره $q_\circ$ باشد.

حال نیروی وارد بر بار q عبارتست از مجموع نیروی‌های ناشی از بارهای $\frac{-q}{2}$ و $(q_\circ+\frac{q}{2})$ که عبارتست از:

$$F_q = \frac{\left[q_\circ + \frac{q}{2}\right]q}{4\pi\varepsilon_\circ (2a)^2} - \frac{q\frac{q}{2}}{4\pi\varepsilon_\circ \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{q_\circ q}{16\pi\varepsilon_\circ a^2} + \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_\circ a^2} - \frac{q^2}{18\pi\,\varepsilon_\circ a}$$

$$F_q = \frac{q_\circ q}{16\pi\varepsilon_\circ a^2} - \frac{7q^2}{288\pi\varepsilon_\circ a^2}$$

نیروی وارد از طرف بار q بر کره هادی برابر است با $F=-F_q$ (طبق قانون عمل و عکس العمل)

در حالت اول بار القائی روی کره برابر است با مجموع بار داخل کره یعنی $(Q'' - \frac{q}{2})$ و یا عبارت دیگر $(\frac{q}{2} - 4\pi\varepsilon_0 a V_0)$ و در حالت دوم پتانسیل کره عبارتست از پتانسیل ناشی از بارهای q، $\frac{-q}{2}$ و $q_0+\frac{q}{2}$ اما مجموع پتانسیل ناشی از بارهای q و $\frac{-q}{2}$ روی کره صفر است زیرا q و $\frac{-q}{2}$ بار اصلی و تصویر آن می‌باشند پس پتانسیل کره فقط پتانسیل ناشی از بار $q_0+\frac{q}{2}$ است که در مرکز کره قرار گرفته است یعنی پتانسیل کره برابر است با:

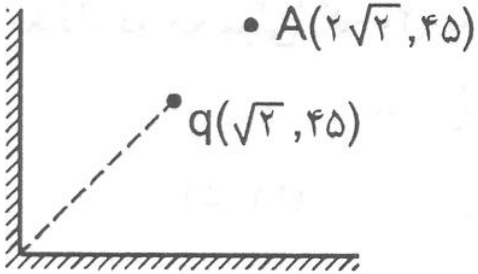
$$\frac{q_0 + \frac{q}{2}}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

مثال ۳: بار q بفاصله R_1 از مرکز یک کره ایزوله که دارای پتانسیل V_0 بوده قرار داده می‌شود پتانسیل کره چقدر تغییر می‌کند.

حل: چون کره ایزوله است مجموع بار آن ثابت است چون کره دارای پتانسیل V_0 است پس کل بار آن عبارتست از $q_0 = 4\pi\varepsilon_0 a V_0$. اما چون تصویر بار q برابر با $-q\frac{a}{R_1}$ است پس باید بار $(q_0 + q\frac{a}{R_1})$ در مرکز کره قرار گیرد تا مجموع بار داخل کره ثابت و برابر q_0 باشد پس پتانسیل کره همان پتانسیل ناشی از باری است که در مرکز کره قرار گرفته زیرا بار q و تصویر آن مجموعاً پتانسیل صفر روی کره ایجاد می‌کند.

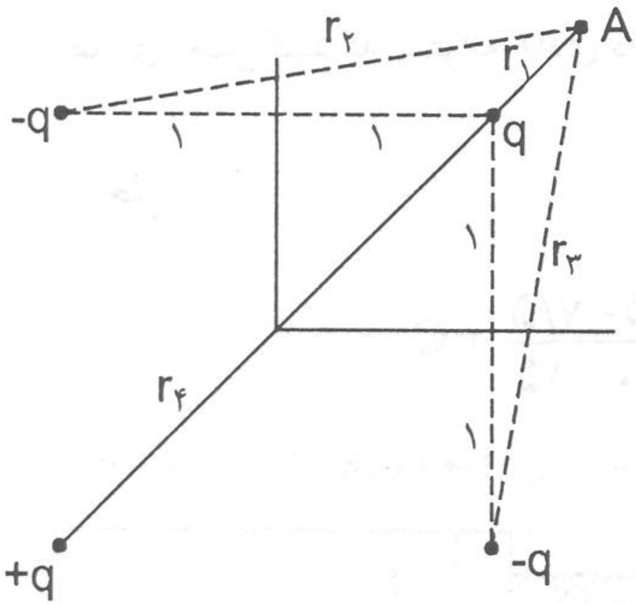
$$V_0' = \frac{q_0 + q\frac{a}{R_1}}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a V_0 + q\frac{a}{R_1}}{4\pi\varepsilon_0 a} = V_0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

یعنی پتانسیل کره به اندازه $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$ زیاد می‌شود و این در حقیقت پتانسیل ناشی از بار q در مرکز کره است.



مثال ۴: بار نقطه‌ای q روی صفحه نیمساز در صفحه هادی عمود بر هم زمین شده قرار دارد پتانسیل در نقطه A مطابق شکل چقدر است؟

حل: ۳ تصویر مطابق شکل زیر پتانسیل صفحات را در صفر ثابت نگه می‌دارد.



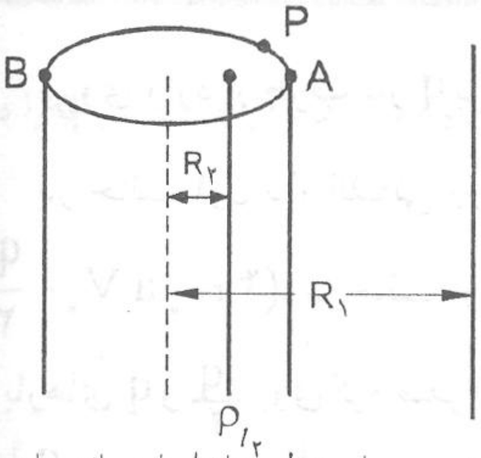
$$V_A = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{q}{r_۱} - \frac{q}{r_۲} - \frac{q}{r_۳} - \frac{q}{r_۴}\right)$$

$$r_۱ = \sqrt{۲} \qquad r_۲ = \left[۴+۲+۲\times\sqrt{۲}\times ۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۰} = r_۳$$

$$V_A = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}} - \frac{۲}{\sqrt{۱۰}} + \frac{۱}{۳\sqrt{۲}}\right) = \frac{۰/۳۱q}{۴\pi\varepsilon_\circ}$$

۵-۳- تصویر بار خطی در داخل استوانه هادی

فرض کنید بار خطی ρ_{ℓ_1} به فاصله R_1 از محور استوانه هادی به شعاع a و به موازات محور آن قرار دارد.



شکل (۵-۳): تصویر بار خطی داخل استوانه هادی

اگر تصویر بار خطی ρ_{ℓ_1} بار خطی ρ_{ℓ_2} به فاصله R_2 از محور استوانه باشد نقطه‌ای مثل P که بفاصله R از ρ_{ℓ_1} و R' از ρ_{ℓ_2} قرار دارد در نظر بگیرید در اینصورت پتانسیل نقطه P عبارتست از:

$$V_P = \frac{\rho_{\ell_1}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_{10}}{R} + \frac{\rho_{\ell_2}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_{20}}{R'} \qquad (۱۷-۵)$$

R_{10} و R_{20} به ترتیب فاصله نقطه‌ای با پتانسیل صفر از بارهای خطی ρ_{ℓ_1} و ρ_{ℓ_2} می‌باشد حال می توان $\rho_{\ell_2} = -\rho_{\ell_1}$ فرض کرد و رابطه (۵-۱۷) را به صورت زیر نوشت:

$$V_P = \frac{\rho_{\ell_1}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R'}{R} + C \qquad (۱۸-۵)$$

$$V_P = \frac{\rho_{\ell_1}}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R'}{R} + C \qquad (۱۸-۵)$$

که ثابت C ناشی از مقادیر ثابت R_{10} و R_{20} در رابطه (۵-۱۷) می‌باشد در حقیقت با ثابت C میتوان هر مقدار پتانسیلی برای استوانه هادی در نظر گرفت برای اینکه پتانسیل استوانه ثابت باشد باید نسبت $\frac{R'}{R}$ ثابت باشد یعنی

$$\frac{R'}{R} = k \qquad (۱۹-۵)$$

حال معادله (۵-۱۹) را به دو نقطه A و B اعمال می‌کنیم.

$$\text{نقطه A} \quad \frac{R'}{R} = \frac{a - R_2}{R_1 - a} = k$$

$$(۲۰-۵)$$

$$\text{نقطه B} \quad \frac{R'}{R} = \frac{a + R_2}{R_1 + a} = k$$

از حل معادله دو مجهولی (۵-۲۰) به جوابهای زیر می‌رسیم.

$$R_2 = \frac{a^2}{R_1}$$

$$(۲۱-۵)$$

$$k = \frac{a}{R_1}$$

مثال ۵: اگر $\rho_\ell = ۲\pi\varepsilon_\circ$، $R_۱ = ۳۰^{cm}$ و $a = ۱۵^{cm}$ باشد مطلوبست فاصله خط بار تصویر از محور استوانه. ثابت C را طوری تعیین کنید که استوانه هادی دارای پتانسیل $V = -\ln ۲$ باشد.

حل:

فاصله بار تصویر از محور استوانه $R_۲ = \frac{a^۲}{R_۱} = \frac{۱۵^۲}{۳۰} = ۷/۵^{cm}$

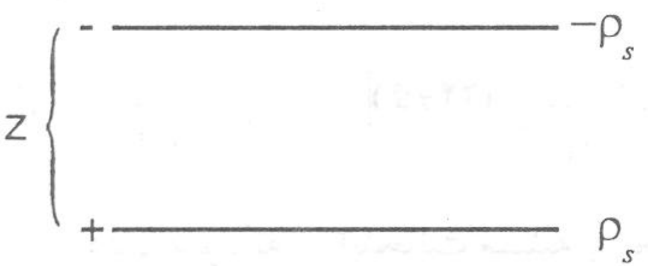
برای نقطه A $V_A = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{R'}{R} + C = \frac{۲\pi\varepsilon_\circ}{۲\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{a - R_۲}{R_۱ - a} + C = \ln\frac{۱۵ - ۷/۵}{۳۰ - ۱۵} + C$

$$V_A = \ln\frac{۱}{۲} + C = -\ln ۲ \Rightarrow C = ۰$$

$$V_B = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{R'}{R} + C = \frac{۲\pi\varepsilon_\circ}{۲\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{a + R_۲}{a + R_۱} + C = \ln\frac{۱۵ + ۷/۵}{۱۵ + ۳۰} + C$$

$V_B = \ln\frac{۱}{۲} + C = -\ln ۲ \Rightarrow C = ۰$ همانطوریکه ملاحظه می‌شود پتانسیل A و B یکسان است.

۵-۴- نیروی وارد بر یک جسم با استفاده تغییر مکان مجازی



برای محاسبه نیروی وارد بر یک جسم در یک جهت مشخص کافی است آن جسم را به اندازه $d\ell$ در جهت مشخص جابجا کنیم و تغییر انرژی ذخیره شده الکتریکی را بدست آوریم اگر dW تغییر انرژی ناشی از تغییر مکان آن‌جسم باشد در اینصورت $F_\ell = \frac{dW}{d\ell}$ که F_ℓ نیرو در آن جهت مشخص است (مثلاً اگر $d\ell = dx$ باشد در اینصورت نیروی بدست آمده F_x خواهد بود).

شکل (۵-۴): نیروی بین صفحات یک خازن مسطح

مثلاً دو صفحه خازن مسطح را در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم نیروی وارد بر صفحه بالایی از طرف صفحه پائینی را بدست آوریم کافی است صفحه بالایی را به اندازه dz تغییر مکان دهیم اگر صفحات به پتانسیل ثابت V_0 متصل شده باشد در اینصورت تغییر انرژی عبارتست از:

$$dW = \frac{1}{2} C_2 V_0^2 - \frac{1}{2} C_1 V_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{AV_0^2}{z+dz} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{AV_0^2}{z} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 AV_0^2 \frac{-dz}{z^2}$$

$$\rightarrow F_z = \frac{dW}{dz} = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{z^2} V_0^2$$

$$\rightarrow F_z=\frac{dW}{dz}=-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_\circ A}{z^2}V_\circ^2$$

علامت منفی بدان معنی است که نیرو جاذبه است یعنی صفحه پالایی در جهت $\hat{a}_z$ - حرکت می‌کند (انرژی ذخیره شده افزایش می‌یابد) حال اگر بار ثابت باشد (یعنی صفحات از باطری قطع شده باشد) در اینصورت تغییر انرژی در اثر تغییر مکان صفحه بالایی به اندازه dz برابر است با:

$$dW=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2}-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1}=\frac{1}{2}\frac{Q^2(z+dz)}{\varepsilon A}-\frac{1}{2}\frac{Q^2 z}{\varepsilon_\circ A}$$

$$dW=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_\circ A}dz=\frac{1}{2}\frac{dz}{\varepsilon_\circ A}\left[\varepsilon_\circ\frac{A}{z}V_\circ\right]^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_\circ A}{z^2}V_\circ^2 dz$$

که در اینحالت $F_z=-\frac{dW}{dz}=-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_\circ A}{z^2}V_\circ^2$ که همان جواب حالت قبل است.

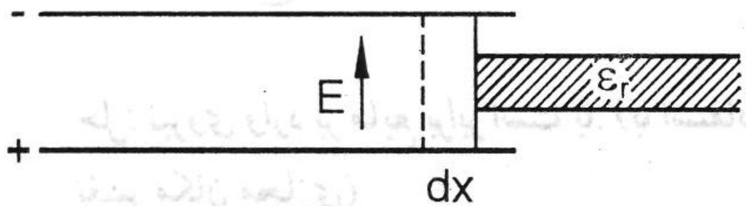
همانطوریکه ملاحظه می‌شود نیرو در جهت z از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$F_z=\begin{cases}\dfrac{dW}{dz} & \text{تحت پتانسیل ثابت}\\[2mm] \dfrac{-dW}{dz} & \text{تحت بار ثابت}\end{cases}\qquad (۲۲-۵)$$

در حالت کلی نیرو از گرادیان انرژی بدست می‌آید.

$$\overline{F}=\begin{cases}\nabla W & \text{تحت پتانسیل ثابت}\\ -\nabla W & \text{تحت بار ثابت}\end{cases}\qquad (۲۳-۵)$$

مثال ۶: یک تیغهٔ دی الکتریک مطابق شکل بین صفحات یک خازن مسطح قرار می‌دهیم نیروی وارد بر این تیغه از طرف صفحات خازن را بدست آورید.



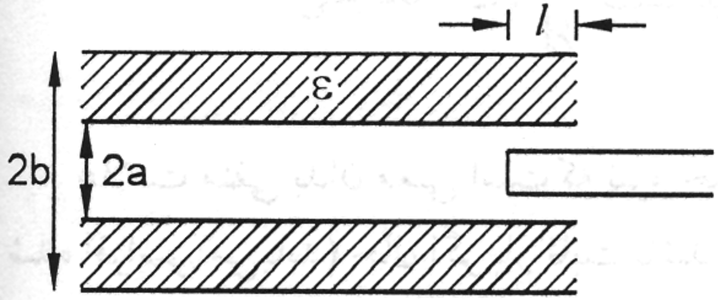
حل: اگر سطح مقطع دی الکتریک را A بگیریم در اینصورت تغییر انرژی ذخیره شده در طول dx ناشی از فرو بردن تیغه داخل صفحات بصورت زیر است:

$$dW = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 A dx - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A dx = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2 A dx$$

$$F_x = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2 A \qquad (۲۴-۵)$$

دقت شود که در اینحالت مسئله را تحت V_0 ثابت حل کردیم پس میدان E ثابت است و در اثر حرکت تیغه بداخل صفحات تغییر نمی‌کند چون با تغییر مکان تیغه دی‌الکتریک در سایر جهات انرژی تغییر نمی‌کند در نتیجه نیروهای F_y و F_z صفر است.

مثال ۷: رسانای داخلی یک کابل هم محور می‌تواند بر روی استوانه از جنس دی الکتریک جامد کابل بلغزد ضریب دی الکتریک عایق دی الکتریک ε و شعاع لایه داخلی (متحرک) رسانا a و شعاع خارجی آن b می‌باشد اندازه و جهت نیروی وارد بر لایه داخلی را محاسبه کنید اگر اختلاف پتانسیل بین رسانای کابل V باشد.



حل: انرژی ذخیره شده در قستی از کابل به طول l برابر است با:

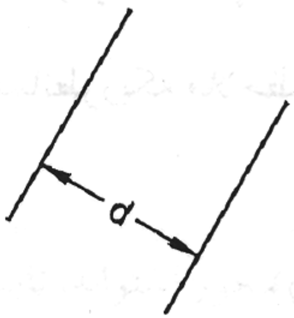
$$W_e = \frac{۱}{۲}\overline{C}\,l\,V^{۲} = \frac{۱}{۲}\frac{۲\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}V^{۲}$$

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial l} = \frac{\pi\varepsilon V^{۲}}{\ln\frac{b}{a}}$$

مثال ۸: اختلاف پتانسیل بین دو رسانای یک خط دو سیمه راست و بلند به شعاع a و فاصله d بین محورها ($d \gg a$) برابر V می‌باشد شدت و جهت نیروی روی رسانا‌ها را در واحد طول محاسبه نمایید.

حل: *طبق رابطه (۵-۱۵) خازن بر واحد طول دو سیم که بفاصله d از هم قرار دارند عبارتست از:*

$$C = \frac{\pi \varepsilon}{\ln \frac{d}{a}}$$



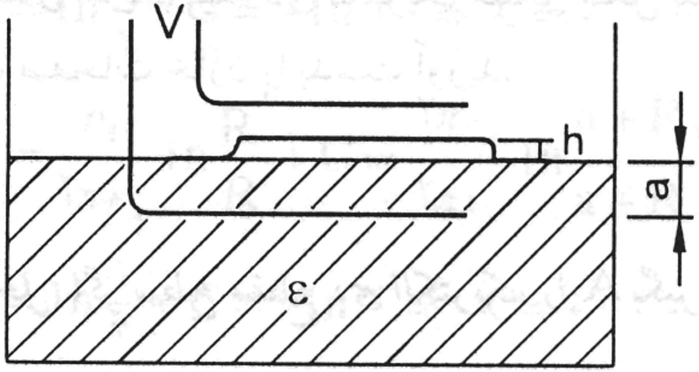
در نتیجه انرژی ذخیره شده الکتریکی در واحد طول عبارتست از:

$$W_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{\pi \varepsilon V^2}{2 \ln \frac{d}{a}}$$

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial d} = -\frac{\pi \varepsilon V^2}{2d \left[\ln \frac{d}{a}\right]^2}$$

این نیرو در جهت کاهش فاصله d بین دو سیم است (نیرو جاذبه است).

مثال ۹: یکی از الکترودهای یک خازن با صفحات موازی دریک دی‌الکتریک مایع با ضریب دی‌الکتریک ε قرار گرفته است فاصله بین صفحات d می‌باشد اگر مایع به اندازه h در بین صفحات مطابق شکل بالا رود مطلوبست مقدار h، چگالی جرمی مایع را ρ بگیرید.



حل: نیروی وارد بر مایع برابر است با: **(با استفاده از اصل تغییر مکان مجازی)**

$$F=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right]D^2S$$

این نیرو باید با وزن مایع جابجا شده برابر باشد، یعنی:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right]D^2S=g\rho Sh \quad\Rightarrow$$

$$h=\frac{1}{2g\rho}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right]D^2=\frac{1}{2g\rho}\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}E^2$$

که E شدت میدان الکتریکی در هوا است. $\left(D=\varepsilon_0 E\right)$

$$V=E\left(d-a-h\right)+E'\left(a+h\right)$$

که E' میدان داخل مایع است بطوریکه با شرط مرزی خواهیم داشت.

$$E=\varepsilon_r E' \;\rightarrow\; E'=\frac{1}{\varepsilon_r}E$$

$$E=\frac{V}{(d-a-h)+(a+h)\frac{1}{\varepsilon_r}}$$

که با جایگزینی E در رابطه بالا h بدست می‌آید.