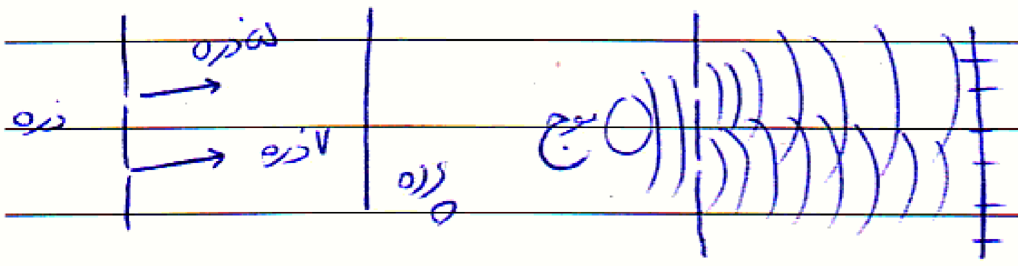
بسم الله الرحمن الرحیم

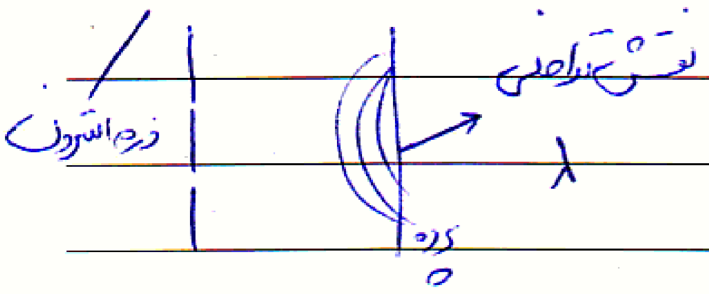
فیزیک مدرن

(بخش دوم)

فصل ۴) خواص موجی گونه‌ی ذرات

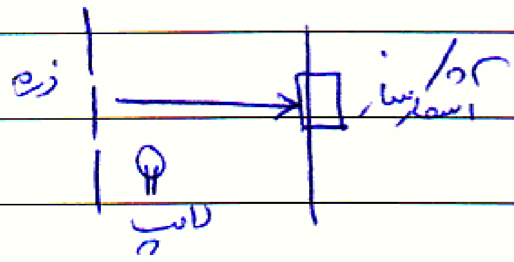


در کلاسیک :



در مکانیک کوانتم :

نقش تداخلی که به وسیله‌ی نور (لامپ) از بین می‌رود.



رابطه‌ی عدم قطعیت برای امواج کلاسیک :

$y = y_1 \sin k_1 x \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k_1}$

$y = y_1 \sin k_1 x + y_2 \sin k_2 x \rightarrow$ دو موج را با هم جمع کنیم

در فیزیک کلاسیک : $\boxed{\Delta x . \Delta k \sim 1}$ از مرتبه‌ی یک است.

Δk خطا در اندازه‌گیری k

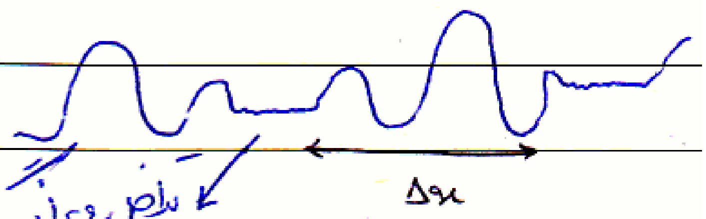
Δ خطا

اگر بتوانیم مکان را دقیقا اندازه بگیریم، نسبت دیگر را نمی‌توانیم اندازه بگیریم :

$\Delta x \rightarrow \infty$

$\Delta k \sim \frac{1}{\infty} \rightarrow \Delta k = 0$

$\boxed{\Delta \omega . \Delta t \sim 1}$ انرژی و زمان



تداخل دو اثر (بسته موج)

مثال ۱) در چه زمانی نسبت اندازه‌گیری که کمتر چه ، اندازه‌ی موج حساس ۲۰۰ cm ، سرعت چقدر می‌شود.

حداقل عدم قطعیت در طول موج را به شکل است از این قیاس به دست آمده را در کنید؟

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$ $k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$

یعنی [illegible] ۱ ست

$\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda$ $\Delta x \cdot \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda \sim 1 \Rightarrow \Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{2\pi \Delta x}$

$\lambda = 20\ cm$ $\Delta\lambda \sim \frac{(20)^2}{2\pi(200)} \longrightarrow \Delta\lambda \sim 0.3\ cm$

$\Delta x = 200\ cm$ $\pi \downarrow 3.14$

روابط عدم قطعیت هایزنبرگ:

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$ اندازه $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi}$ (ثابت پلانک: h)

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $p = \hbar k \Rightarrow k = \frac{p}{\hbar}$

$\frac{h}{2\pi} = \hbar$

$\Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar} \Rightarrow \Delta x \cdot \frac{\Delta p}{\hbar} \sim 1 \Rightarrow$

p اندازه حرکت خطی (تکانه خطی)

$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$

$\Delta \omega \cdot \Delta t \sim 1$

$E = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$

$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$ $\frac{\Delta E}{\hbar} \cdot \Delta t \sim 1 \Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$

مثال) الکترونی با سرعت $3.6\times10^{6}\ m/s$ در جهت x حرکت می‌کند. می‌توانیم سرعت آن را با دقت ۰/۰۱٪ اندازه بگیریم.

الف) با چه دقتی می‌توانیم به طور همزمان مکان آن را هم تعیین کنیم؟ ($\hbar = 1.05\times10^{-34}$ ژ.ث)

ب) در مورد حرکت آن که در جهت y چه می‌توانیم بگوییم؟

$v = 3.6\times10^{6}\ m/s$

m الکترون $= 9.11\times10^{-31}\ kg$

$P_x = m v_x = 9{,}11\times10^{-31}\times 3{,}6\times10^{6} = 3{,}3\times10^{-24}$ kgm/s

$\Delta P_x = \%1\, P_x = 3{,}3\times10^{-26}$ kgm/s

$\Delta x \cdot \Delta P_x \sim \hbar \Rightarrow \Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta P_x}$ $\quad \Delta x \sim \frac{1{,}05\times10^{-34}}{3{,}3\times10^{-26}} = 3{,}2$ nm

ب) چون در جهت x حرکت می کند پس در جهت y مولفه ای ندارد دیگر $V_y = 0$ و $\Delta P_y = 0 \Rightarrow \Delta y = \infty$

$P_y = m V_y = 0$

$\Downarrow$

$\Delta y \cdot \Delta P_y \sim \hbar \Rightarrow \Delta y \sim \frac{\hbar}{0} \Rightarrow \Delta y = \infty$ $\quad$ پس در مورد حرکت آن هیچ اطلاعی نداریم

$\Delta x = \infty$ $\quad \Delta x = L$ $\quad P$ میانگین

$\Delta P_x = 0$ $\quad \Delta P_x \sim \frac{\hbar}{L}$ $\quad \langle P \rangle = 0$

$\Delta x \cdot \Delta P_x \sim \hbar \Rightarrow \Delta P_x \sim \frac{\hbar}{\infty} = 0$

$$\boxed{\sigma_A = \sqrt{(A^2)_{\text{میانگین}} - (A_{\text{میانگین}})^2}}$$

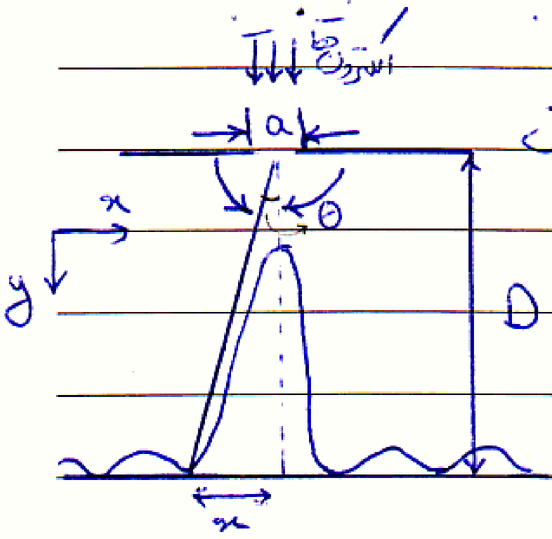
اول به توان ۲ بعد میانگین

اول میانگین بعد به توان ۲

$\Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2 \rangle - (\langle P \rangle)^2} \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2 \rangle}}$$

مثال) باریکه ای از الکترون های با انرژی یکسان که در جهت y حرکت می کنند از شکافی به پهنای a می گذرند. عدم قطعیت در مولفه x تکانه یکی از الکترون ها را پس از عبور از شکاف بیابید؟



شکاف

قبل از ورود به شکاف $\Delta P_x = 0 \Rightarrow \Delta x = \infty$ $\quad (P_x = 0)$

بعد از ورود به شکاف $\Delta x = a$ $\quad \Delta P_x \sim \frac{\hbar}{a}$

$\Delta P_y = \hbar k$ $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad P_y = \hbar k$

$\sin\theta \sim tg\,\theta = \frac{P_x}{P_y} = \frac{\hbar/a}{\hbar k} = \frac{1}{ak} = \frac{\lambda}{2\pi a}$

چون θ زاویه ی کوچکی است

$a \sin\theta = \frac{\lambda}{2\pi} \longrightarrow$ برای پیدا کردن کمان روی پرده

مثال) در واپاشی بتازا، الکترون‌ها از هسته‌ی اتم خارج می‌شوند. فرض می‌کنیم الکترون‌ها به گونه‌ای در هسته مدام ایستاده‌اند

و گاهی یکی از آن‌ها در مرز ورود از ناحیه‌ی هسته مشاهده می‌شود. قطر هسته را تقریباً $1\times10^{-14}\,m$ بگیرید. با استفاده از

اصل عدم قطعیت کمترین انرژی جنبشی این الکترون را برآورد کنید؟

$\hbar c = 197\ MeV.fm$ فمتومتر

$1\,fm = 10^{-15}\,m$

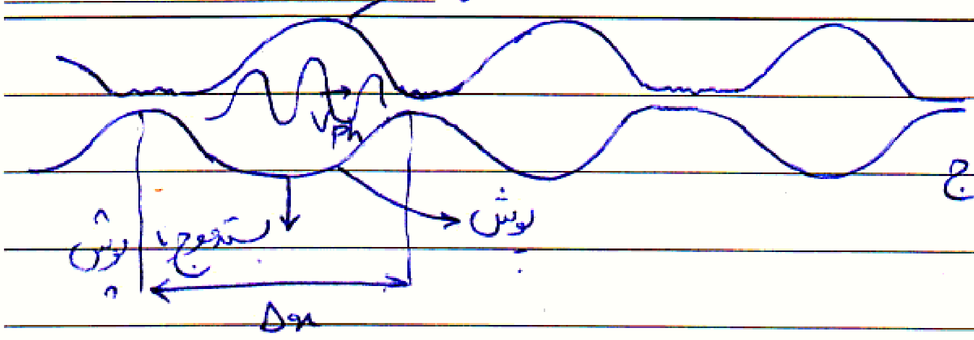
$E_0 = 0/511\ MeV \qquad \Delta x = 1\times10^{-14}\,m = 10\,fm$

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar \Rightarrow \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar c}{c\Delta x} \qquad \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \Rightarrow c\Delta p_x \sim \frac{\hbar c}{\Delta x}$$

$$c\Delta p_x \sim \frac{197}{10} = 19/7\ MeV \qquad K = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} - E_0$$

$$K = \sqrt{(19/7)^2 + (0/511)^2} - (0/511) = 19\ MeV \qquad c\Delta p_x = cp_x$$

Subject: سرعت گروه یا پوش یا بسته موج
Year. Month. Date.



سرعت فاز: سرعت تک تک امواج

داخل بسته موج V_{ph}

V_{gr} : سرعت بسته موج

برای اینکه یک موج پیش رونده باشد باید برحسب زمان باشد ؛ $y = A\cos(kx - \omega t)$

$y = A\cos kx$ ← پیش رونده نیست

دامنه موج ↑

بسته های موج :

$$\begin{cases} y_1 = A\cos k_1 x \\ y_2 = A\cos k_2 x \end{cases}$$

$\Delta K = k_2 - k_1$

$k_2 = \Delta k + k_1$

تداخل

$$y = y_1 + y_2 = A\cos k_1 x + A\cos k_2 x$$

$$y = A\left(\cos k_1 x + \cos k_2 x\right)$$

$$y = 2A\left(\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x \cdot \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x\right)$$

$$y = 2A\left(\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x \cdot \cos\left(\frac{\Delta K}{2}\right)x\right)$$

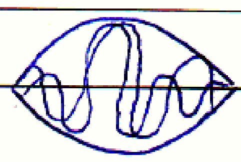
$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad y = A\cos(kx - \omega t)$$

موج پیش رونده : $y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta K}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$

$$V_{\text{گروه}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta K} \qquad \frac{\Delta K}{2}\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta K}t\right)$$

$$V_1 = \frac{\omega_1}{k_1} \qquad V_g = \frac{d\omega}{dK} \qquad V_{ph} = \frac{\omega}{K}$$

$$V_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$$



تمرینات ۲، ۵، ۶، ۷، ۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۲، ۳۱، ۳۲، ۳۴

Subject:
Year. Month. Date.

دوبروی $p = \frac{h}{\lambda}$

انرژی $\boxed{E = \hbar\omega}$ $\boxed{\text{تکانه } p = \hbar k}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dE} \times \frac{dE}{dp} \times \frac{dp}{dk} = \frac{1}{\hbar} \times \frac{dE}{dp} \times \hbar = \frac{dE}{dp} \qquad \boxed{v_g = \frac{dE}{dp}}$$

$$E = \hbar\omega \longrightarrow \frac{dE}{d\omega} = \hbar \qquad p = \hbar k \Rightarrow \frac{dp}{dk} = \hbar$$

$$E = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow \frac{dE}{dp} = \frac{2p}{2m} = \frac{p}{m} \qquad E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow dE = \frac{2p\,dp}{2m} = \frac{p}{m}\,dp$$

سرعت گروه $v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v$ سرعت ذره

فصل ۵
معادله شرودینگر

در مرز تابع موج پیوستگی دارد.

* ویژگی‌ها:

۱- در معادله‌ی شرودینگر، اصل پایستگی انرژی باید صادق باشد. (منظور از انرژی، انرژی مکانیکی است.)

نسبیتی نیست

$E = K + U$

انرژی مکانیکی

انرژی جنبشی

انرژی پتانسیل

۲- این معادله باید با فرض دوبروی سازگار باشد.

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

$$p = \hbar k \xrightarrow[\text{موج دوبروی ذره آزاد}]{\text{انرژی جنبشی مربوط}} E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

انرژی جنبشی $K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ عدد موج

$U = 0$ $\boxed{E = K}$

۳- باید خوش رفتار باشد یعنی تابع موج در مرزها پیوسته باشد.

تابع موج سای

$$\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

۱۵

Subject:
Year. Month. Date.

K انرژی جنبشی K عدد موج

$t=0 \rightarrow \psi(x,0)=\psi(x)=A\sin Kx$

$$\frac{d\psi(x)}{dx}=AK\cos Kx \qquad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=-AK^2\sin Kx=-K^2(A\sin Kx)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-K^2\psi(x)=-\frac{2mK}{\hbar^2}\psi(x)$$

انرژی جنبشی $K=\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Longrightarrow k^2=\frac{2mK}{\hbar^2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=K\psi(x)=(E-U)\psi(x)$$

$E=K+U \Longrightarrow K=E-U$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+U\psi(x)=E\psi(x)}$$ فرم روتین معادله شرودینگر

معادله‌ای که به صورت معادلات یک بعدی مستقل از زمان شرودینگر

که چون فقط به x است.

احتمال و بهنجارش:

چگالی احتمال $p(x)=|\psi(x)|^2$

احتمال $=\int p(x)\,dx=\int|\psi(x)|^2\,dx$ $\psi(x)=A\sin Kx$

شرط بهنجارش $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,dx=1}$$

همیشه $-\infty$ تا $+\infty$ نیست اگر در مورد ذره آزاد باشد همین $-\infty$ تا $+\infty$ است چون ذره هرجایی می‌تواند حرکت کند.

مقدار میانگین $$\langle x\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,x\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx}$$

اگر عبارت مورد نظر تابعی باشد ⟸ خروجی را چه می‌شود؟

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, x\, dx$$

باهم برابرند

$$\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx$$

ذره آزاد در یک بعد :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U\psi(x) = E\psi(x)$$

ذره‌ای آزاد است که تحت تأثیر هیچ پتانسیلی نیست.

ذره‌ای مقید است که تحت تأثیر پتانسیل است

پس پتانسیل یعنی تمام نیروهای خارجی اعمالی

برای ذره آزاد $U=0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - E\psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \overbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}^{k^2}\psi(x) = 0$$

آزاد $E>0$

$E=0$

$E<0$

هسته

$$K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$E = \cancel{U} + K \Longrightarrow E = K$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0$$

زوج

$$\psi_1(x) = A\sin(kx)$$

$$\psi_2(x) = B\cos(kx)$$

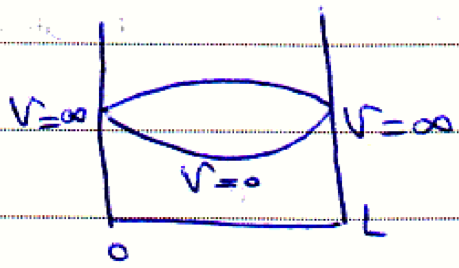
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U\psi(x) = E\psi(x) \Longrightarrow \psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) =$$

$U=0 \quad E>0$

$$A\sin kx + B\cos kx$$

ذره در جعبه ۱ بعدی :

$$U(x)=\begin{cases}0 & 0<x<L\\ \infty & x>L\,,\ x<0\end{cases}$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi(x)=E\psi(x)\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=E\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0\Rightarrow K^2=\frac{2mE}{\hbar^2}\Rightarrow E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\begin{cases}\psi_1(x)=A\sin Kx \longrightarrow x=0\Rightarrow \psi(0)=0\\ \psi_2(x)=B\cos Kx\longrightarrow x=0\Rightarrow\psi(0)=B\end{cases}$$ غ ق ق

$$\psi(x)=A\sin Kx\xrightarrow[\psi(L)=0]{x=L}\sin KL=0=\sin n\pi\quad(n=1,2,\dots)$$

$$KL=n\pi\Rightarrow K=\frac{n\pi}{L}$$

$$\int_0^L|\psi(x)|^2dx=1\Rightarrow A^2\int_0^L\sin^2Kx\,dx=1$$

$$\frac{A^2}{2}\int_0^L(1-\cos 2Kx)\,dx=1\longrightarrow A^2\Big(L-\cancel{\frac{1}{2K}\sin 2KL}-0\Big)=1$$

$$\frac{A^2}{2}L=1\longrightarrow A^2=\frac{2}{L}\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\Rightarrow E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\qquad\qquad \psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$n=1,2,3,\dots$

$$n=1 \longrightarrow E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = E_0$$ انرژی حالت پایه

$$n=2 \longrightarrow E_2 = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = 4E_0$$

$$n=3 \longrightarrow E_3 = 9E_0$$ حالت‌های برانگیخته

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi}{L} x$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi}{L} x$$

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{3\pi}{L} x$$

احتمال حضور ذره در اولین حالت برانگیخته در بازه‌ی $(0 < x < L/2)$

$$\int_0^{L/2} |\psi_2(x)|^2 dx = \int_0^{L/2} \frac{2}{L} \sin^2 \frac{2\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{2}{L} \times \frac{1}{2} \int_0^{L/2} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{L}\right) dx =$$

مثال: الکترونی در یک ناحیه‌ی یک بعدی به طول $1\times10^{-10}\,m$ به دام افتاده است.

الف) برای برانگیختن الکترون از حالت پایه به نخستین حالت برانگیخته چقدر انرژی باید به آن بدهیم؟

ب) در حالت پایه، احتمال یافتن الکترون در ناحیه‌ی $x = 0/09\times10^{-10}\,m$ تا $x = 0/11\times10^{-10}\,m$ چیست؟

ج) در نخستین حالت برانگیخته، احتمال یافتن الکترون بین $x=0$ و $x = 0/25\times10^{-10}\,m$ چقدر است؟

$L = 1\times10^{-10}\ m$

$n=1$

$n=2$

الف) $\begin{cases} E_1 = E_0 \\ E_2 = 4E_0 \end{cases} \Rightarrow E_2 - E_1 = 4E_0 - E_0$

$E_0 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 37\ eV$

$\Delta E = 3E_0$

$\Delta E_{1,2} = 3\times37$

$m = 9{,}11\times10^{-31}\ kg$

$\Delta E_{12} = 111\ eV$

$\hbar = 1{,}05\times10^{-34}\ J.s$

ب) $P = \int_{x=0/9\times10^{-10}}^{x=0/11\times10^{-10}} |\psi_1(x)|^2\,dx = \dfrac{2}{L}\int_{0/9\times10^{-10}}^{0/11\times10^{-10}} \sin^2\dfrac{\pi}{L}x\,dx = 0/38\ \%$

ج) $P = \int_{x=0}^{x=0/25\times10^{-10}} |\psi_2(x)|^2\,dx = \dfrac{2}{L}\int_0^{0/25\times10^{-10}} \sin^2\dfrac{2\pi}{L}x\,dx = 0/25\ \%$

مثال) نشان دهید که مقدار میانگین x در مسائل ذره جعبه بدون توجه به حالتهای کوانتومی عبارت است از: $L/2$

$\langle x\rangle = \int_0^L |\psi_n(x)|^2\,x\,dx \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\dfrac{n\pi}{L}x$

$\langle x\rangle = \dfrac{2}{L}\int_0^L \left(\sin^2\dfrac{n\pi}{L}x\right)x\,dx = \dfrac{1}{L}\int_0^L \left(1-\cos2\dfrac{n\pi}{L}x\right)x\,dx$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos2x}{2} \qquad \langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\int_0^L \left[x\,dx - x\cos\dfrac{2n\pi}{L}x\,dx\right]$

$\langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\ \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^L - \int_0^L x\cos\dfrac{2n\pi}{L}x\,dx$

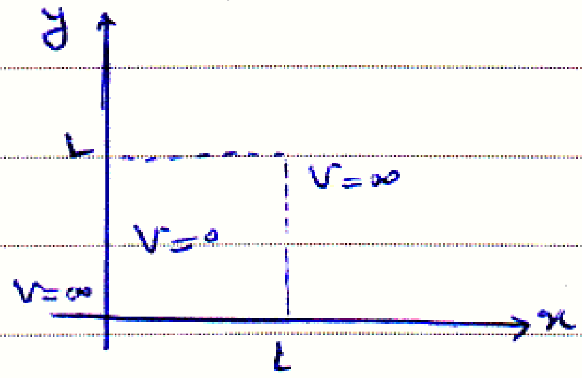
$\langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\dfrac{L^2}{2} - \int_0^L x\cos\dfrac{2n\pi}{L}x\,dx = \dfrac{L}{2}$

با توجه به مراحل صفر می‌شود

$$\int_0^L x \cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx \quad \begin{cases} x=u \longrightarrow dx=du \\ \cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx = dv \Longrightarrow \frac{1}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{L}x = v \end{cases}$$

$$= \cancel{\frac{xL}{2n\pi}\sin\frac{n\pi L}{x}\Big|_0^L} - \frac{L}{2n\pi}\underline{\int \sin\frac{2n\pi}{L}x\,dx} - \cos\frac{2n\pi}{L}x\Big|_0^L = 0$$

ذره در جعبه ی دو بعدی:



$$U(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \ , \ 0 \leq y \leq L \\ \infty & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(x=0) = \psi(x=L) = 0 \\ \psi(y=0) = \psi(y=L) = 0 \end{cases}$$ شرایط مرزی

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r) - \overset{u}{\cancel{V}}\psi(r) = E\psi \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\overset{f(x)g(y)}{\psi(x,y)} - \underbrace{\overset{u}{\cancel{V}}(x,y)\psi(x,y)}_{0} = E\,\psi(x,y)$$

$$\psi(x,y) = f(x)g(y) \quad , \quad E = E_x + E_y$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\cdot g(y) + \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\cdot f(x)\right] = E\,f(x)g(y)$$

فرض تقسیم پذیر $f(x)g(y)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\right] = E_x + E_y$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = E_x f(x) \quad , \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 g(y)}{dy^2} = g(y)E(y)$$

$$f(x) = A_1\sin k_1 x + B_1\cos k_1 x \longrightarrow f(x) = A_1\sin k_1 x$$

$$g(y) = A_2 \sin k_2 y + B_2 \cos k_2 y \longrightarrow g(y) = A_2 \sin k_2 y$$

$$f(x=L) = 0 \longrightarrow A_1 \sin k_1 L = 0 \longrightarrow \sin n_x \pi \qquad k_1 L = n_x \pi$$

$$k_1 L = n_x \pi \longrightarrow k_1 = n_x \frac{\pi}{L}$$

$$f(x) = A_1 \sin \frac{n_x \pi x}{L} \xrightarrow{A_1 = \sqrt{\frac{2}{L}}} f(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_x \pi x}{L}$$

$$g(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_y \pi y}{L} \qquad \psi(x,y) = f(x) g(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_y \pi y}{L}$$

$$\psi(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L}$$

$$E_x = \frac{n_x^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \, , \, E_y = \frac{n_y^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \Longrightarrow E = E_x + E_y$$

$$\boxed{E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2) \qquad n_x , n_y = 1, 2, 3, \ldots}$$

$$\boxed{\psi(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L}}$$

$$n_x = 1 , n_y = 1 \longrightarrow \begin{cases} \psi(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \\ E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (1+1) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} n_x = 1 , n_y = 2 & \left\{ \begin{array}{l} \psi_{1,2}(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L} , \; E = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \\ \psi_{2,1}(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} , \; E = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \end{array} \right. \\ n_x = 2 , n_y = 1 & \end{array}$$

حالت واگن

* حالت واگن (تبهگن) : به حالتی گفته می‌شود که به ازای یک مقدار انرژی چند تابع موج وجود داشته باشد.

حالت واگنی معمولاً برای سیستم‌های متقارن است. ←

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L'^2}\right)$$

مثال) انرژی حالت پایه یک ذره در یک چاه یک بعدی نامتناهی ۳٫۴ eV است. اگر پهنای چاه ۲ برابر شود انرژی حالت پایه چه تغییری می‌شود؟

$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$n = 1 \longrightarrow E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$L' \longrightarrow 2L \qquad E' = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m(2L)^2} = \frac{1}{4} E_1$$

مثال) ذره‌ای در یک جعبه دو بعدی به طول L و پهنای 2L محدود است. مقادیر انرژی عبارت‌اند از:

$$E = \overbrace{\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}^{K}\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right)$$

۲ تا از پایین‌ترین ترازهای واگن را بیابید؟ حالت نامتقارن است باید nها را طوری انتخاب کنیم که سیستم متقارن شود.

$$\psi(x,y) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{2}{L'}}\sin\frac{n_x \pi x}{L}\sin\frac{n_y \pi y}{L'}$$

$$\psi(x,y) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_x \pi x}{L}\sqrt{\frac{2}{2L}}\sin\frac{n_y \pi y}{2L}$$

$$\begin{cases} n_x = 1,\ n_y = 4 \longrightarrow 1 + 4 = 5K & E = 5E_0 \\ n_x = 2,\ n_y = 2 \longrightarrow 4 + 1 = 5K & E = 5E_0 \end{cases}$$

فصل ۵ - نوسانگر هماهنگ ساده (یک بعدی)

$$F = -Kx \longrightarrow U = -\int F\,dx = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2\psi = E\psi$$

$$\psi(x) = Ae^{-ax^2} \qquad \frac{d\psi(x)}{dx} = -2Aaxe^{-ax^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -2Aae^{-ax^2} + (-2Aax)(-2ax)e^{-ax^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -2Aae^{-ax^2} + 4Aa^2x^2e^{-ax^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2a + 4a^2x^2)\cancel{Ae^{-ax^2}} + \frac{1}{2}kx^2\cancel{Ae^{-ax^2}} = E\cancel{Ae^{-ax^2}} \Rightarrow \frac{\hbar^2 a}{m} - \frac{2\hbar^2a^2x^2}{m} + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

$$\frac{\hbar^2 a}{m} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}k - \frac{2\hbar^2a^2}{m}\right)}_{0}x^2 = E + 0\times x^2$$

$$\frac{1}{2}k - \frac{2\hbar^2a^2}{m} = 0$$

$$\frac{1}{2}k = \frac{2\hbar^2a^2}{m} \longrightarrow a^2 = \frac{mk}{4\hbar^2}$$

$$a = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}$$

$$E = \frac{\hbar^2 a}{m}$$

$$E = \frac{\cancel{\hbar^2}}{m}\frac{\sqrt{mk}}{2\cancel{\hbar}}$$

$$E = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$$ انرژی پایه نوسانگر

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n = 0, 1, \ldots, \ldots)$$

دقت: برای نوسانگر ساده می توان $n=0$ گذاشت.

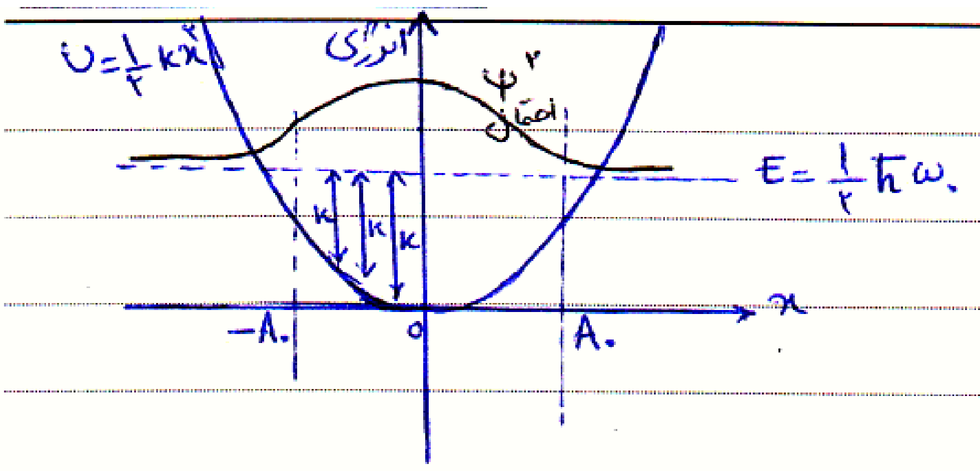
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\psi(x) = Ae^{-ax^2} \qquad \boxed{a = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$\int|\psi(x)|^2dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx=1 \Longrightarrow A^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2ax^2}dx=1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \; *$$

$$A^2\sqrt{\frac{\pi}{2a}}=1 \Longrightarrow A^2=\sqrt{\frac{2a}{\pi}} \Longrightarrow A=\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}$$

$$a=\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} \Longrightarrow A=\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{mk}}{\cancel{2}\hbar\pi}\right)^{1/4}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow \omega_0^2=\frac{k}{m} \qquad A=\left(\frac{\sqrt{mk}}{\pi\hbar}\right)^{1/4}=\left(\frac{\sqrt{m^2\omega_0^2}}{\pi\hbar}\right)^{1/4}=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

$$k=m\omega_0^2$$

$$A=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

$$\psi(x)=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi(x,t)=\psi(x)e^{-i\omega t}$$

$$\psi(x,t)=\left(A'e^{ikx}+B'e^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}$$

$$\psi(x,t)=A'e^{i(kx-\omega t)}+B'e^{-i(kx+\omega t)}$$

ورودی $\swarrow$

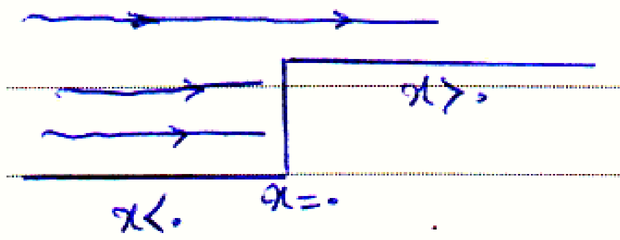
$\xrightarrow{A'}$ $\qquad$ $\xrightarrow{A'}$ $\xleftarrow{B'}$ $\xrightarrow{C'}$

بازتاب B' $\longleftarrow$ $\qquad$ توان عبور $=\left|\frac{C'}{A'}\right|^2$ $\longleftarrow$

توان بازتاب $=\left|\frac{B'}{A'}\right|^2$

پله‌ها و سدها :

پله $E > U_0$



$$\begin{cases} x<0 & \psi_1(x) = \underset{\text{ورودی}}{Ae^{ik_1x}} + \underset{\text{بازتابی}}{Be^{-ik_1x}} \\ x>0 & \psi_2(x) = \underset{\text{عبوری}}{Ce^{ik_2x}} + De^{-ik_2x} \end{cases}$$

$D = 0 \Leftarrow$ چون مانعی وجود ندارد که موج‌ها بازتاب شوند.

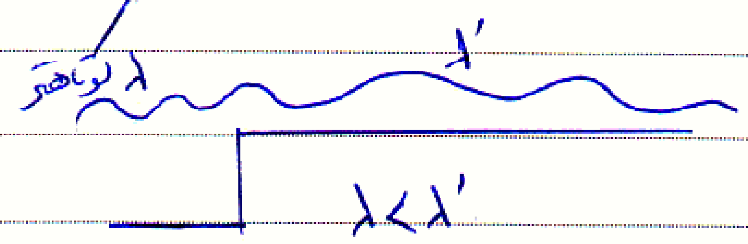
$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$$

$$\text{توان بازتاب} = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \qquad \text{توان عبور} = \left|\frac{C}{A}\right|^2$$

$$K = \frac{P^2}{2m} \longrightarrow P = \sqrt{2mK}$$

طول موج‌های کوتاه‌تر انرژی بیشتری دارند.

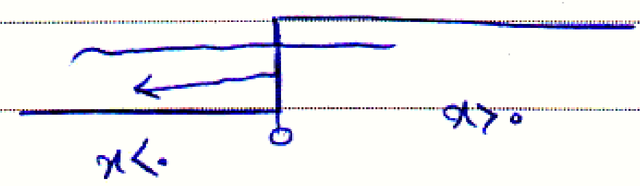
$$P = \frac{h}{\lambda}$$



پله $E < U_0$

از نظر کلاسیک عبور نمی‌کند اما از نظر کوانتوم عبور می‌کند.

کلاسیک می‌گوید هیچ عبوری نمی‌کند ولی کوانتوم می‌گوید یک ذره عبور می‌کند.



$$\begin{cases} x<0 & \psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\ x>0 & \psi_2(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} \end{cases} \qquad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$C = 0$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$$

چون توانش مثبت است. (e^{k_2x}) در حالیکه وقتی موج به پله می‌رسد نزول

پیدا می‌کند در حالیکه Ce^{k_2x} یک تابع صعودی است.

فرض کنیم در ناحیه‌ای Δx احتمال به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه‌اش می‌رسد.

$$e^{-2k_2 \Delta x} = e^{-1}$$

$$2k_2 \Delta x = 1 \Longrightarrow \Delta x = \frac{1}{2k_2}$$

میزان نفوذ در این سد $\Delta x = \dfrac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0-E)}}$

اگر قرار باشد ذره در ناحیه $x>0$ وارد شود باید انرژی حداقل U_0-E باشد.

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \Longrightarrow \Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$$

$$\Delta E = U_0 - E + K \qquad \Delta t \sim \frac{\hbar}{U_0 - E + K}$$

سرعت حرکت ذره $V = \sqrt{\dfrac{2K}{m}}$ $\longleftarrow$ میانگین $\Delta x = \dfrac{1}{2} v \Delta t = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2K}{m}} \times \dfrac{\hbar}{U_0 - E + K}$

$$K \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \quad , \quad K \to \infty \Rightarrow \Delta x \to 0$$

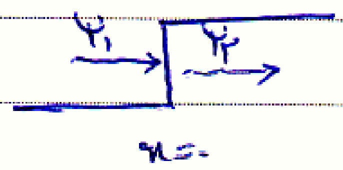
$$\Delta x_{max} = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0-E)}} \qquad \Delta x = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0-E)}}$$

شرایط مرزی: خود تابع موج و مشتقش در مرز باید پیوسته باشد.

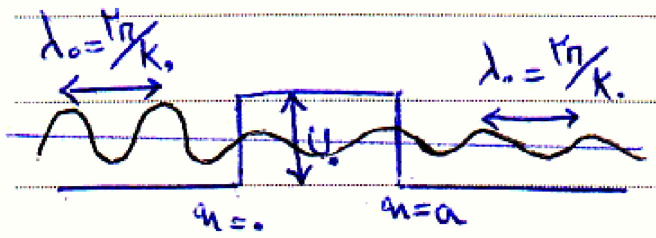
مفهوم پیوستگی:

اگر موجی از سد گذشت باید بعد از سد پدیدار شود (از بین نرود)

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$$
$$\psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0)$$



سد انرژی پتانسیل:



1

فصل ۵ : ۲ـ۴ـ۵ـ۷ـ۹ـ۱۶ـ۲۱ـ۲۵ـ۳۲

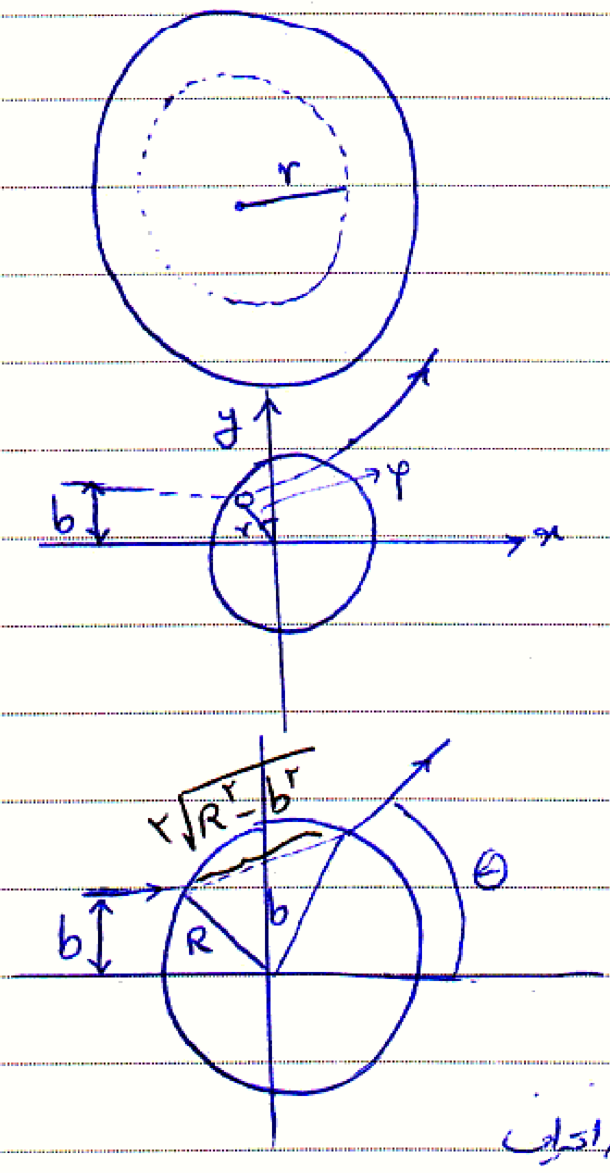
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$U(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ U_0 & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} \psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} & x<0 \\ \psi_2(x)=Ce^{k_2x}+De^{-k_2x} & 0\leqslant x\leqslant a \\ \psi_3(x)=Ee^{ik_1x}+\cancel{Fe^{-ik_1x}}_{\,0} & x>a \end{cases}$$

$E<U_0$

فصل ۶ : مدل های اتمی



$$F=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r=kr$$

فقط توضیح مدل های اتمی خوانده شود.

$$\Delta P_y=\int F_y\,dt$$

$$F_y=F\cos\phi$$

$$q=ZE$$

$$F=\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r=kr \qquad \cos\phi=\frac{b}{r}$$

$$\boxed{\Delta P_y\simeq\int zkr_0\frac{b}{r}\,dt=zkb\,t}$$

زاویه انحراف : $\theta=\frac{2zkb}{mv^2}\sqrt{R^2-b^2}$

مدل اتمی تامسون:

در مدل اتمی تامسون فرض شد Z الکترون در داخل کره‌ای یکنواخت با بار مثبت Ze و شعاع r قرار گرفته‌اند و بارهای الکتریکی نوسان کرده امواج الکترومغناطیسی تابش می‌شوند که بسامد آن با بسامد این نوسان یکسان است. براساس مدل تامسون انتظار داریم که تابش گسیل شده از اتم‌ها دارای این بسامد مشخص باشد اما تجربه نشان داد که چنین نیست. با مدهای محاسبه شده همان بسامد تابش گسیل شده از اتم‌ها نیستند. جدی‌ترین نارسایی مدل تامسون در پراکندگی ذرات α در اتم‌ها نمایان می‌شود. آزمایش نشان داد که (توسط رادرفورد) پراکندگی اتم تامسون در زوایای بزرگ حدود 10^8 برابر از واقعیت کمتر است.

مدل اتمی رادرفورد ـ بوهر:

در این مدل بارهای مثبت را در مرکز هسته در نظر گرفتند و الکترون‌ها را متحرک در مدارهای اطراف هسته. در مدارهای پایا، الکترون اطراف هسته می‌چرخد ولی تابش نمی‌کند فقط زمانیکه به آن مقداری انرژی داده شود و از یک مدار به مدار دیگر گسیل شود آنگاه تابش انجام می‌شود. این مدل فقط برای اتم‌های هیدروژن گونه موفق است (یعنی اتم‌هایی که در لایه آخرشان فقط یک الکترون دارد.)

+ کوثر توکل