جزوه انتقال حرارت هدایت پیشرفته

علیرضا باهری

فهرست

جلسه اول

معادلات دیفرانسیل(Differential Equations)

معادلات دیفرانسیل معادلاتی هستند که رفتارهای فیزیکی و شیمیایی و حرارتی یک سیستم را به صورت مشتق و تحت شرایطی که به آن شرایط مرزی و اولیه گفته می شود بیان می کند.

متغیرهای مستقل و وابسته

متغیرهای مستقل متغیرهایی هستند که مقادیری را از دامنه یک تابع بر می دارند و متغیرهای وابسته تابعی از متغیرهای مستقل می باشند.

معادلات دیفرانسیل به طور کلی به دو نوع تقسیم می شوند:

- معادلات دیفرانسیل معمولی(Ordinary Differential Equations) که بهODE معروفند.
- معادلات دیفرانسیل مشتقات جزیی(Partial Differential Equations) که بهPDE معروفند.

تفاوتهایODE وPDE

1. ODE می تواند چند متغیر وابسته داشته باشد که البته PDE هم می تواند.
2. ODE ها تنها یک متغیر مستقل باید داشته باشند در حالی که PDE ها بیش از یک متغیر مستقل دارند. PDE حداقل دو متغیر مستقل باید داشته باشد.
3. ODE ها ایدالند. به این معنا که مدلهای بسیار ایدآل و ساده شده فیزیکی را می توان به صورت یک ODE بیان کرد، در حالی که PDE ها واقعیترند به این مفهوم که سیستم هایی که در طبیعت وجود دارد رفتار آنها با یک PDE مدل می شود.
4. برای ODE از نماد d و PDE از نماد ∂ استفاده می شود.
5. حل یک معادله دیفرانسیلی معمول بسیار ساده است و برابر مجموع جواب حالت خصوصی و حالت همگن است. اما برای PDE ها حل به صورت $\sum$ است و راه حل طولانی دارند.

مرتبه یک معادله دیفرانسیل(Order)

بیشترین مرتبه مشتق موجود در معادله را مرتبه معادله می نامند.

معادله دیفرانسیل خطی و غیر خطی(Linear and Nonlinear Equation)

معادله دیفرانسیلی را خطی می نامند هرگاه متغیر وابسته در مشتقات و یا مشتقات در هم ضرب نشده باشند و متغیر وابسته یا مشتقات آن، توان غیر یک نداشته باشند. مثلا معادلات $u_x + u^2 = u_y$ و $uu_y + u_x = xy$ غیرخطی و معادلات $u_x + u = u_y$ و $u_y + u_x = xy$ خطی هستند.

شرایط مرزی و اولیه(Boundary Conditions and Initial Conditions)

شرایط مرزی و اولیه همان شرایط فیزیکی حاکم بر مسأله است که برای حل معادله به آن نیاز داریم. شرایط مرزی مقدار تابع را در نقطه ای معلوم و شرایط اولیه مقدار تابع و مشتق آن را در زمان اولیه (لحظه صفر) بیان می کند. ممکن است شرایط مرزی به صورت معادله دیفرانسیل بیان شود در این صورت بالاترین مرتبه مشتق موجود در آن را مرتبه شرط مرزی می نامند. همان تعاریف خطی و غیرخطی که در مورد معادله بیان شد در مورد شرایط مرزی هم صادق است.تعداد شرایط مرزی که برای حل یک معادله لازم است بستگی به مرتبه آن معادله نسبت به جمله (یا جمله های) مکان و تعداد شرایط اولیه لازم، بستگی به مرتبه معادله نسبت به جمله زمان دارد. با توجه به اینکه در انتقال حرارت بیشترین مرتبه مشتق معادله نسبت به ترم زمان، یک می باشد بنابراین در معادلات دیفرانسیلی انتقال حرارت، تنها به یک شرط اولیه نیاز داریم که البته اگر مساله دائمی(مستقل از زمان) باشد به هیچ شرط اولیه ای نیاز نیست. مثال زیر یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی را نشان می دهد که چون نسبت به ترم مکان(x) از مرتبه دوم است به دو شرط مرزی نیاز دارد.همچنین معادله نسبت به ترم زمان(t) هم از مرتبه دوم است بنابراین به دو شرط اولیه نیاز دارد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$Boundary\ Conditions\ \ (B.Cs)\begin{cases} u\,(0,t) = 0 \\ u\,(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$Initial\ Conditions\ \ (I.Cs)\qquad \begin{cases} u\,(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

معادلات همگن و غیر همگن (Homogeneous and Nonhomogeneous Equations)

هرگاه متغیر وابسته در عدد ثابتی مانند C ضرب شود معادله تغییر نکند معادله را همگن می نامند. معادله غیر همگن معادله ای است که همگن نباشد. معادله زیر غیرهمگن است:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T^2$$

$$\frac{\partial (CT)}{\partial t} = (CT)^2 \Longrightarrow \frac{C\partial T}{\partial t} = C^2T^2 \Longrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = CT^2$$

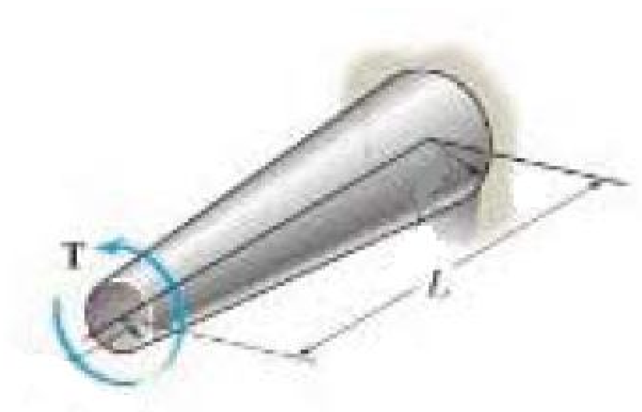
مسئله همگن خطی

مسأله ای را همگن و خطی نامند هرگاه هم خود معادله و هم شرایط مرزی حاکم بر آن همگن و خطی باشند.

مثال

شافتی تحت اعمال یک لنگر پیچشی مطابق شکل زیر قرار گرفته است در حالیکه انتهای دیگر آن ثابت می باشد. برحسب داده های مساله، آن را فرمولیته کنید. (معادله دیفرانسیلی حاکم بر آن را بدست آورید)

W وزن، wوزن واحد حجم، A(x) سطح مقطع عرضی، I(x) ممان اینرسی،Tگشتاور، m جرم، θزاویه پیچش، $\dot{\theta}$سرعت زاویه ای، $\ddot{\theta}$شتاب زاویه ای، t زمان، $J(x)$ ممان قطبی، G مدول برشی،K شعاع ژیراسیون و $f\left(x,\theta\ ,\dot{\theta},t\right)$ گشتاورهای دیگر بر واحد حجم می باشد.



حل

المانی به طولΔx از جسم جدا کرده و معادله تعادل را برای آن می نویسیم:

$$\sum M = I\alpha \qquad \alpha = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

$$I = mK^2$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{wA(x)\Delta x}{g}$$

$$J = Ak^2 \Longrightarrow k^2 = \frac{J(x)}{A(x)}$$

$$I = \frac{wA(x)\Delta x}{g}\frac{J(x)}{A(x)} = \frac{w\Delta x J(x)}{g}$$

$$T|_{x+\Delta x} - T|_x + f\left(x, \theta, \dot{\theta}, t\right)A(x)\Delta(x) = \frac{w\Delta x J(x)}{g}\ \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق بر Δx و گرفتن حد خواهیم داشت:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{T\,|x+\Delta x - T|_x}{\Delta x} + f\left(x, \theta, \dot{\theta}, t\right)A(x) = \frac{w}{g}J(x)\ \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + f\left(x, \theta, \dot{\theta}, t\right)A(x) = \frac{w}{g}J(x)\ \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

از مقاومت مصالح بیاد داریم:

$$\theta = \frac{TL}{GJ} \qquad T = GJ\ \frac{\theta}{L}$$

فرض می کنیم در منطقه الاستیک باشیم در این صورت $\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\theta}{L}$ در نتیجه:

$$T = GJ(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

با جایگذاری در معادله تعادل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ(x)\ \frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + f\left(x, \theta, \dot{\theta}, t\right)A(x) = \frac{w}{g}J(x)\ \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(J(x)\ \frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + f\left(x, \theta, \dot{\theta}, t\right)\frac{A(x)}{G} = \frac{w}{gG}J(x)\ \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

با صرفنظر از گشتاورهای دیگر و ثابت فرض کردن ممان قطبی داریم:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{w}{gG}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

فرض می کنیم:

$$\frac{w}{gG} = a^2$$

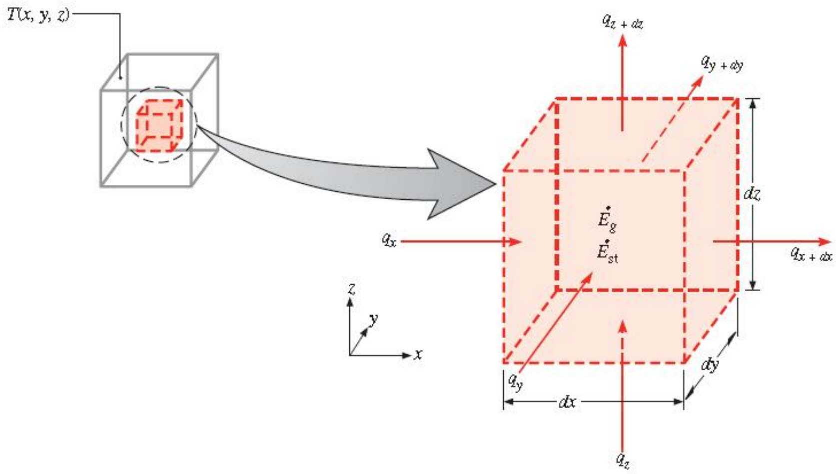
درنتیجه:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = a^2\ \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

معادله دیفرانسیل مشتقات جزیی بدست آمده، معادله حاکم بر پیچش شافت خواهد بود.

معادله پخش حرارت (The Heat Diffusion Equation)

المانی از جسم را در نظر گرفته و قانون بقای انرژی را برای آن می نویسیم:



نرخ ورود انرژی های گرمایی و مکانیکی به حجم کنترل به اضافه نرخ تولید انرژی گرمایی در داخل حجم کنترل منهای نرخ خروج انرژیهای گرمایی و مکانیکی از حجم کنترل باید با نرخ افزایش انرژی ذخیره شده در حجم کنترل برابر باشد.

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st}$$

$$\dot{E}_{in} = q_x|_x + q_y|_y + q_z|_z$$
$$\dot{E}_{out} = q_x|_{x+\Delta x} + q_y|_{y+\Delta y} + q_z|_{z+\Delta z}$$
$$\dot{E}_g = \dot{q}dV = \dot{q}\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$\dot{E}_{st} = mC\frac{\partial T}{\partial t} = \rho\, dVC\frac{\partial T}{\partial t} = \rho\,(\Delta x\Delta y\Delta z)C\frac{\partial T}{\partial t}$$

مقادیر فوق را در معادله بقای انرژی قرار می دهیم:

$$q_x|_x + q_y|_y + q_z|_z - (q_x|_{x+\Delta x} + q_y|_{y+\Delta y} + q_z|_{z+\Delta z}) + \dot{q}\,\Delta x\Delta y\Delta z = \rho\,(\Delta x\Delta y\Delta z)C\frac{\partial T}{\partial t}$$

از بسط تیلور داریم:

$$q_x|_{x+\Delta x} = q_x|_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\Delta x,$$

$$q_y|_{y+\Delta y} = q_y|_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}\Delta y,$$

$$q_z|_{z+\Delta z} = q_z|_z + \frac{\partial q_z}{\partial z}\Delta z$$

با جایگذاری در رابطه فوق:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial q_y}{\partial y}\Delta y - \frac{\partial q_z}{\partial z}\Delta z + \dot{q}(\Delta x\Delta y\Delta z) = \rho\,(\Delta x\Delta y\Delta z)C\frac{\partial T}{\partial t}$$

اما از قانون فوریه($q_n = -k\,A_n\frac{\partial T}{\partial n}$) می دانیم:

$$q_x = -k\,(\Delta z\Delta y)\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -k\,(\Delta x\Delta z)\,\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = -k\,(\Delta x\Delta y)\,\frac{\partial T}{\partial z}$$

در نتیجه:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\Delta z\Delta y\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-k\Delta x\Delta z\,\frac{\partial T}{\partial y}\Delta y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-k\Delta x\Delta y\frac{\partial T}{\partial z}\Delta z\right) + \dot{q}(\Delta x\Delta y\Delta z) = \rho\,(\Delta x\Delta y\Delta z)C\frac{\partial T}{\partial t}$$

با تقسیم طرفین این رابطه بر$\Delta x\Delta y\Delta z$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$

و با فرض ثابت بودن ضریب هدایتی که برای مواد ایزتروپیک صادق است و تقسیم طرفین بر آن خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho C}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$\alpha = \frac{k}{\rho C}$ را ضریب پخش گرمایی (Thermal Diffusivity)می نامند.موادی که ضریب پخش گرمایی بالاتری داشته باشند نسبت به تغییرات دمایی سریعتر پاسخ می دهند. معادله دیفرانسیلی توزیع دما در مختصات دکارتی در نهایت بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

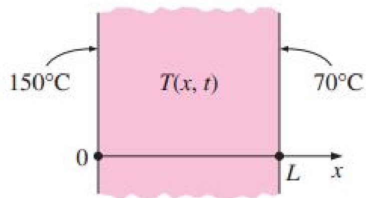
جلسه دوم

شرایط مرزی(Boundary Conditions)

حل معادله دما مستلزم داشتن دو شرط مرزی به ازای هر مختصات مکانی (چون نسبت به مکان از مرتبه دوم است) و یک شرط اولیه است چون نسبت به زمان از مرتبه اول است. البته در مسائل دائمی چون جمله زمان وجود ندارد به هیچ شرط اولیه ای نیاز نیست.از این شرایط برای تعیین ثابتهایی که از حل معادله مشتقات جزیی پخش گرما بدست می آید،استفاده می شود.پنج نوع شرط مرزی که معمولاً در انتقال حرارت وجود دارند بصورت زیر است:

1- شرط مرزی دیریشلت (Dirichlet Boundary Condition)

این وضعیت هنگامی است که سطح در دمای ثابت و معلومی قرار داشته باشد مانند شرایط مرزی شکل زیر:



$T(0, t) = 150°C$
$T(L, t) = 70°C$

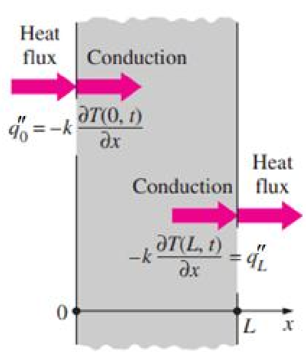
در این شکل،دماهای دو وجه چپ$(x=0)$ و راست$(x=L)$ معلوم است.شکل کلی شرط مرزی نوع اول در انتقال حرارت یک بعدی بصورت زیر است:

$$T(0,t)=T_1$$
$$T(L,t)=T_2$$

که در آن T_1و T_2 دماهایی معلومند.

2- شرط مرزی نیومن(Neumann Boundary Condition)

در این حالت شار گرمایی ثابت و معین q'' در سطح برقرار است.شرایط مرزی شکل زیر را ببینید.



در حالت کلی،شرط مرزی نیومن بصورت زیر است:

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x} = q''_x$$

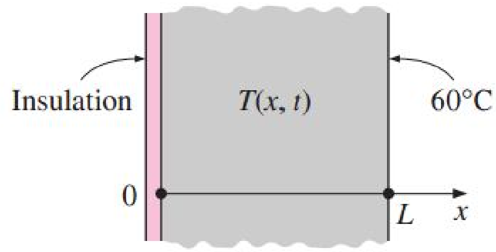
که در آن X مکانی معلوم بوده که شار حرارتی در آنجا وجود دارد.

حالت خاص نیومن زمانی است که سطح، آدیاباتیک یا عایق شده باشد، چون $q''_x = 0$ لذا:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x} = 0$$

که در آن X مکان قرارگرفتن عایق است.

مثلا در شکل زیر وجه چپ(X=0) عایق است و وجه سمت راست(X=L) در دمای ثابتی قرار دارد.



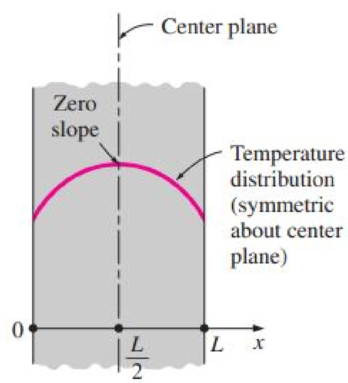
$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$$

$$T(L, t) = 60°C$$

در لایه ای از دیوار که توزیع دما نسبت به آن لایه متقارن باشد(شکل زیر) چون شیب نمودار دما در آن لایه صفر است گرادیان دما برابر صفر خواهد بود.

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x} = 0$$

X مکان لایه ای است که تقارن دمایی نسبت به آن وجود دارد.



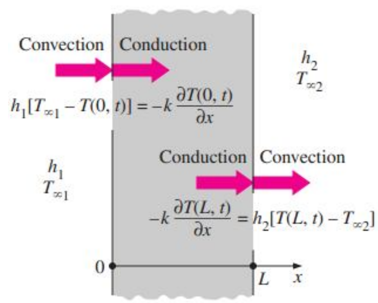
$$\frac{\partial T(L/2, t)}{\partial x} = 0$$

3- شرط مرزی جابجایی(Convection Boundary Condition)

این حالت از موازنه انرژی در سطح ماده که در آن گرمایش یا سرمایش توسط انتقال حرارت جابجایی وجود دارد بدست می آید.شکل کلی آن بترتیب در فرایند گرمایش و سرمایش بصورت زیر است که در آن X مکانی معلوم بوده که تبادل حرارتی در آن صورت می گیرد:

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}=h[T_{\infty}-T(x,t)]$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}=h[T(x,t)-T_{\infty}]$$

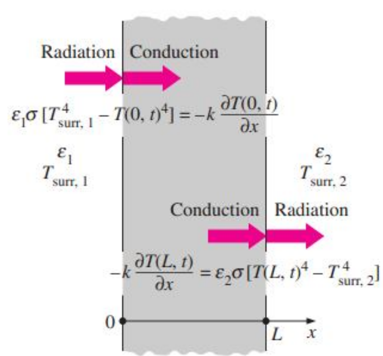


4- شرط مرزی تشعشع(Radiation Boundary Condition)

این حالت از موازنه انرژی در سطح ماده که در آن گرمایش یا سرمایش توسط انتقال حرارت تشعشعی وجود دارد بدست می آید.شکل کلی آن بترتیب در فرایند گرمایش و سرمایش بصورت زیر است که در آن X مکانی معلوم بوده که تبادل حرارتی در آن صورت می گیرد:

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}=\varepsilon\sigma[T_{\infty}^{4}-T(x,t)^{4}]$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}=\varepsilon\sigma[T(x,t)^{4}-T_{\infty}^{4}]$$



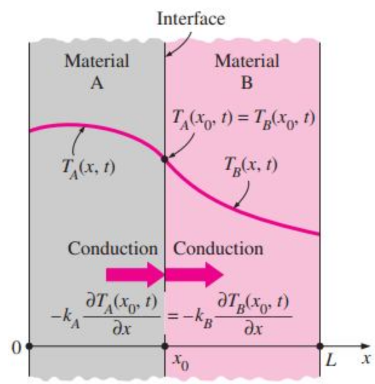
5- شرط مرزی لایه مشترک(Interface Boundary Condition)

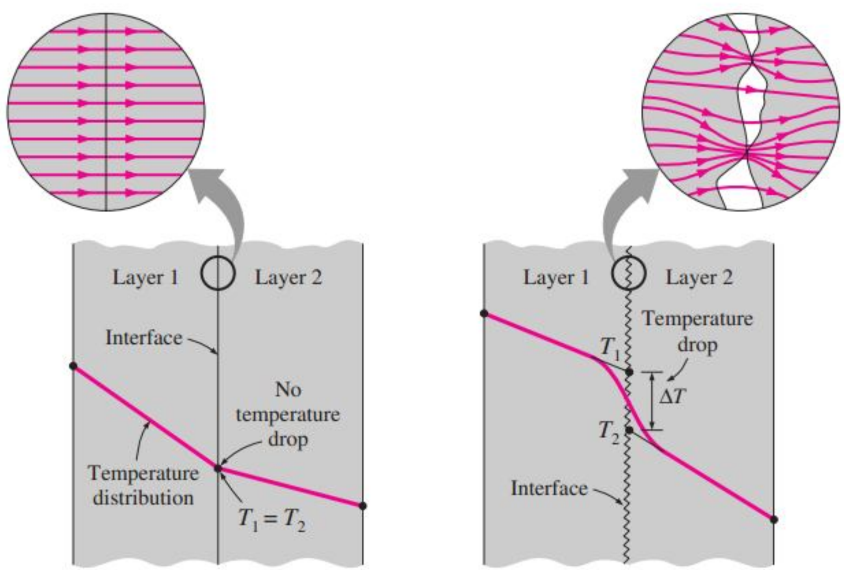
در لایه مشترک دو جسم A وB که بطور کامل در تماس با همند هم دما باید یکسان باشد و هم نرخ انتقال حرارت.بنابراین شرایط مرزی در لایه مشترک بصورت زیر خواهند بود:

$$T_A(x,t) = T_B(x,t)$$

$$-k_A \frac{\partial T_A(x,t)}{\partial x} = -k_B \frac{\partial T_B(x,t)}{\partial x}$$

x مکان لایه مشترک است.





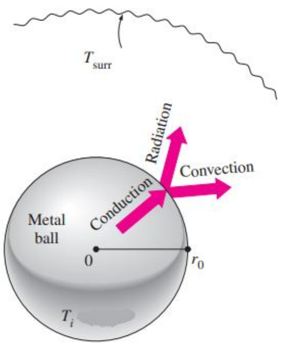
(a) Ideal (perfect) thermal contact (b) Actual (imperfect) thermal contact

6- شرط مرزی کلی (Generalized Boundary Condition)

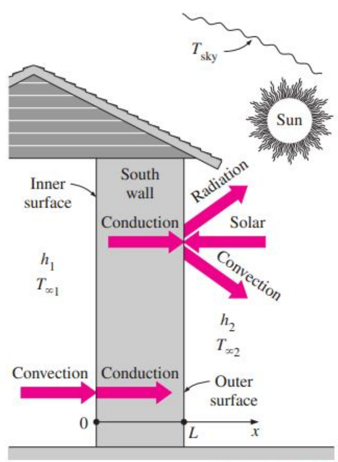
این شرط مرزی بیان می کند مجموع نرخ تمام حالتهای مختلف انتقال گرمایی که به یک سطح وارد می شوند باید برابر مجموع تمام نرخ انتقال حرارتهایی باشد که به صورتهای گوناگون از آن سطح خارج می شوند.شکل کلی آن بصورت زیر است:

$$\sum q_i = \sum q_e$$

بعنوان مثال در شکل زیر نرخ گرمای هدایتی که از درون به سطح کره می رسد باید برابر مجموع انتقال گرمایی باشد که بصورت جابجایی و تشعشع از سطح کره خارج می شود.



و یا در شکل پایین نرخ گرمایی که به شیوه جابجایی به وجه چپ دیوار می رسد باید برابر گرمایی باشد که به روش هدایتی وارد دیوار می شود.همچنین مجموع این گرمای هدایتی هنگامی که به وجه راست دیوار می رسد و گرمایی که از طرف خورشید به همان وجه می تابد باید با کل حرارتی که به روشهای تشعشعی و جابجایی از وجه راست به بیرون انتقال می یابد،برابر باشد.



روش ظرفیت گرمایی فشرده (The Lamped Capacitance Method)

در این روش می توان فرض کرد گرادیان مکانی دما در داخل جسم ناچیز بوده و لذا دما را می توان تنها تابعی از زمان در نظر گرفت.

بطورکلی هرگاه سایز جسم کوچک (مانند ساچمه های تفنگ) و ضریب هدایتی جنس آن بزرگ باشد(مانند فولاد و یا مس) و اگر جسم در محیطی با ضریب جابجایی کوچک قرار گیرد(مانند هوا یا آب نسبتا ساکن) شرایط برای

استفاده از این روش مناسب خواهد بود. بطور خلاصه می توان گفت استفاده از روش ظرفیت گرمایی فشرده هنگامی مجاز است که مقاومت هدایتی جسم در مقایسه با مقاومت جابجایی بسیار کوچک باشد.

$$R_{cond} = \frac{L}{kA} \qquad R_{conv} = \frac{1}{hA}$$

$$R_{cond} \ll R_{conv} \qquad \frac{R_{cond}}{R_{conv}} \ll 1$$

$$\text{Biot number} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{L/_{kA}}{1/_{hA}} = \frac{hL}{k}$$

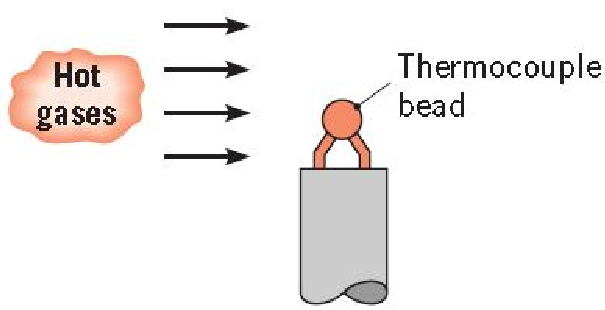
$$Bi = \frac{hL}{k} \qquad L = \frac{V}{A}$$

شرط معتبر بودن ظرفیت گرمای فشرده آن است که عدد بیو کمتر از 0.1 باشد.

مثال

دمای بخار را با استفاده از یک ترموکوپل اندازه گیری می کنند. محل اتصال ترموکوپل با بخار را می توان کره ای به قطر0.75mm، ضریب هدایتی$30 W/mC$، جرم حجمی$8400 kg/m^3$، حرارت مخصوص$0.4 kJ/kgC$ فرض کرد. اگر ضریب انتقال حرارت جابجایی بین بخار و سطح کره$600 W/m^2C$ باشد،

- الف) آیا می توان از روش ظرفیت گرمایی فشرده استفاده کرد؟
- ب)چه مدت طول می کشد تا اختلاف دمای ترموکوپل از دمای اولیه به 99 درصد اختلاف دمای بخار از دمای اولیه ترموکوپل برسد؟



حل

- الف)

$$L = \frac{V}{A} = \frac{4/_3 \pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{1}{3}R = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 0.75 \times 10^{-3} = \frac{1}{8} \times 10^{-3}$$

$\mathrm{Bi} = \frac{hL}{k} \quad \Rightarrow \quad Bi = \frac{600\times\frac{1}{8}\times 10^{-3}}{30} = 2.5 \times 10^{-3} < 0.1$

پس می توان از این روش استفاده کرد.

- ب) معادله بقای انرژی را می نویسیم:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st}$$

با توجه به نبود انرژی خروجی و تولیدی در کره، این معادله بصورت زیر در می آید:

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{st}$$

$$hA\,(T_\infty - T) = \rho CV\,\frac{dT}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T-T_\infty} = \frac{-hA}{\rho CV}dt$$

$$\int_{T_i}^{T}\frac{dT}{T-T_\infty} = \frac{-hA}{\rho CV}\int_0^t dt \Rightarrow \mathrm{Ln}(T - T_\infty)\Big|_{T_i}^{T} = \frac{-hA}{\rho CV}t$$

$$Ln\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \frac{-hA}{\rho CV}t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{\frac{-hA}{\rho CV}t}$$

می دانیم:

$$T_i - T - T_\infty + T = T_i - T_\infty$$

طبق فرض مساله:

$$T_i - T = 0.99(T_i - T_\infty)$$

در رابطه بالا قرار می دهیم:

$$0.99(T_i - T_\infty) - T_\infty + T = T_i - T_\infty$$

$$T_\infty - T = 0.01\,(T_\infty - T_i) \Rightarrow \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = 0.01$$

$$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{\frac{-hA}{\rho CV}t} \qquad \Rightarrow \qquad 0.01 = e^{\frac{-hA}{\rho CV}t} \quad \Rightarrow \frac{-hA}{\rho CV}\,t = Ln\,0.01$$

$$\Rightarrow t = -\frac{\rho CV}{hA}\ln 0.01$$

$$\frac{V}{A} = L \Rightarrow t = -\frac{\rho C}{h}L\ln 0.01$$

$$\Rightarrow t = -\frac{8400\times 0.4\times 10^3}{600}\left(\frac{1}{8}\times 10^{-3}\right)\ln 0.01 \Rightarrow t = 3.22s$$

تبدیل مختصات

در این مبحث می خواهیم معادله دیفرانسیل توزیع دما را که در یک سیستم مختصات داریم به سیستم مختصات دیگری انتقال دهیم. مثلاً در سیستم دکارتی معادله دیفرانسیل توزیع دما معلوم است می خواهیم این معادله را در سیستم استوانه ای بدست آوریم.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

در سیستم استوانه ای دما تابعی از متغیرهای زیر است:

$$T = T\ (r,\theta,z,t)$$

از قاعده زنجیره ای در مشتق می دانیم:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

z, t مستقل از x هستند. بنابراین:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\ \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$x = r\cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{dx}=\frac{\partial r}{\partial x}cos\theta + r\ \frac{\partial cos\theta}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}cos\theta + r\ \frac{\partial cos\theta}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\Rightarrow 1 = \cos\theta\ \frac{\partial r}{\partial x} - r\ sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad i$$

$$y = r\ sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial sin\theta}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial sin\theta}{\partial \theta}\ \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\sin\theta\frac{\partial r}{\partial x}+rcos\theta\ \ \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

x و y مستقل از همند $(\frac{dy}{dx}=0)$

$$\Rightarrow 0 = \sin\theta\frac{\partial r}{\partial x}+rcos\theta\ \ \frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad ii$$

$$\text{i , ii} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -r\ sin\theta\\ 0 & r\ cos\theta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & r\ cos\theta\end{vmatrix}}=\frac{rcos\theta}{r}=cos\theta$$

$$\text{i , ii} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}cos\theta & 1\\ sin\theta & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & r\ cos\theta\end{vmatrix}}=-\frac{sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial T}{\partial \theta}\left(-\frac{sin\theta}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial t}{\partial x}$$

t و z مستقل از x اند بنابراین دو جمله آخر صفر خواهند شد.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial T}{\partial r}\, cos\theta + \frac{\partial T}{\partial \theta}\left(\frac{-sin\theta}{r}\right)\right]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial T}{\partial r}\, cos\theta + \frac{\partial T}{\partial \theta}\left(\frac{-sin\theta}{r}\right)\right]\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\, cos\theta + \frac{\partial^2 T}{\partial r\partial \theta}\left(-\frac{sin\theta}{r}\right) + \frac{sin\theta}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right]\frac{\partial r}{\partial x} +$$

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial \theta}\, cos\theta - sin\theta\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\left(-\frac{sin\theta}{r}\right) - \frac{cos\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\, cos\theta + \frac{\partial^2 T}{\partial r\partial \theta}\left(-\frac{sin\theta}{r}\right) + \frac{sin\theta}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right] cos\theta +$$

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial \theta}\, cos\theta - sin\theta\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\left(-\frac{sin\theta}{r}\right) - \frac{cos\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right]\left(-\frac{sin\theta}{r}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\, cos^2\theta + \frac{\partial^2 T}{\partial r\partial \theta}\left(-\frac{sin\theta\; cos\theta}{r}\right) + \frac{sin\theta\; cos\theta}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$+\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial \theta}\left(-\frac{sin\theta\; cos\theta}{r}\right) + \frac{sin^2\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{sin\theta\; cos\theta}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

با ساده سازی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\, cos^2\theta - \frac{2\, sin\theta cos\theta}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial \theta} + \frac{2 sin\theta\; cos\theta}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{sin^2\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

بهمین ترتیب می توان $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ را بدست آورد.

با قرار دادن در معادله $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ معادله دیفرانسیلی توزیع دما در مختصات استوانه ای

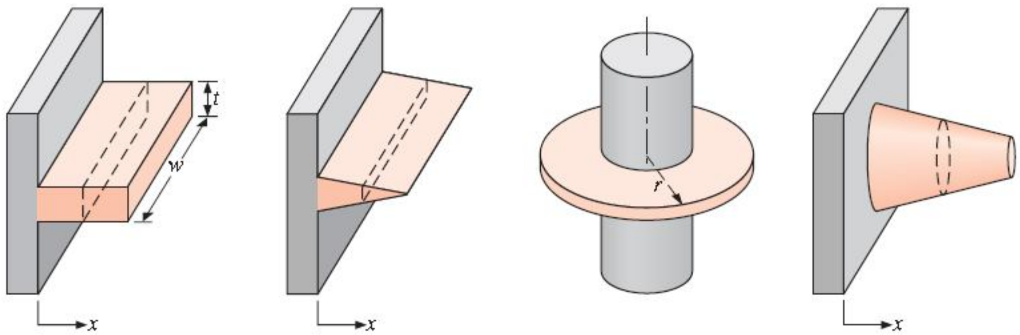
بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

جلسه سوم

پره(Fin)

از پره ها برای افزایش انتقال حرارت با استفاده از افزایش سطح مؤثر استفاده می شود.



هدف از تجزیه و تحلیل پره ها

- تعیین معادله حاکم(Governing Equation)
- حل آن معادله و تعیین توزیع دما(Temperature Distribution)
- محاسبه راندمان پره(Fin Efficiency)

متغیرهای بکار رفته در تجزیه و تحلیل پره ها بصورت زیر تعریف می شوند:

دمای سطح پایه T_0: base temperature

دمای محیط T_∞: ambient temperature

ضریب جابجایی h : convection coefficient

مساحت جانبی A_S: lateral area

مساحت سطح مقطع A_C: cross sectional area

ضریب هدایت k : conductivity

محیط P : circumference

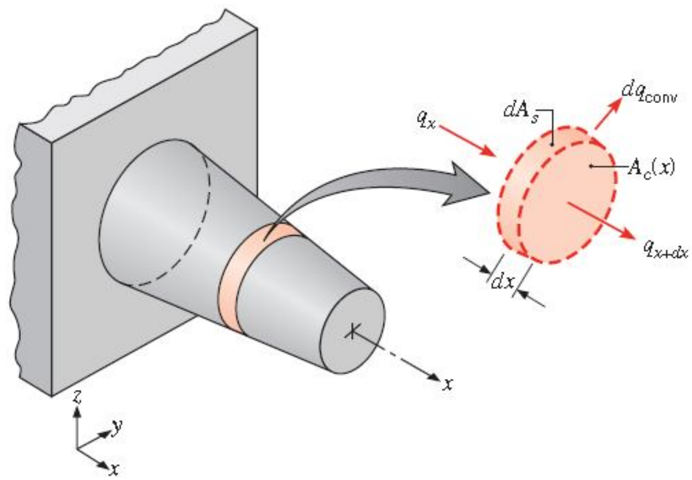
مثال

پره ای را که در یک محیط قرار گرفته و با آن تبادل حرارت انجام می دهد با در نظر گرفتن فرضیات زیر، تجزیه و تحلیل کنید.

- سطح مقطع عرضی پره ثابت است.
- ضریب هدایتی جنس پره ثابت است.
- اثرات تشعشع ناچیز است.
- شرایط دائمی است.

حل

المانی از پره را در نظر گرفته و معادله بقای انرژی را برای آن می نویسیم:



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st}$$

چون در داخل پره گرما تولید نمی شود و همچنین شرایط دائمی است، معادله بقای انرژی بصورت زیر ساده می شود:

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$$

$$\dot{E}_{in} = q_x$$
$$\dot{E}_{out} = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

درنتیجه:

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

از طرفی $dq_{conv} = hdA_s\,(T - T_\infty)$ و از بسط تیلور داریم: $q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx}\,dx$

درون رابطه فوق جایگذاری می کنیم:

$$q_x = q_x + \frac{dq_x}{dx}\,dx + hdA_s\,(T - T_\infty) \Rightarrow \frac{dq_x}{dx}\,dx + hdA_s\,(T - T_\infty) = 0$$

از قانون فوریه به یاد داریم: $q_x = -kA_c\frac{dT}{dx}$ و می دانیم سطح جانبی (dA_s) برابر حاصلضرب محیط مقطع در طول المان است(Pdx) درنتیجه:

$$\frac{d}{dx}\left(-kA_c\frac{dT}{dx}\right)dx + hPdx\,(T - T_\infty) = 0$$

چون بموجب فرض مساله، سطح مقطع و ضریب هدایتی ثابت است:

$$-kA_c\frac{d^2T}{dx^2}\,dx + hPdx\,(T - T_\infty) = 0$$

با تقسیم بر $-kA_c dx$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c}\,(T - T_\infty) = 0$$

فرض می کنیم: $\frac{hP}{kA_c} = m^2$ (چون همواره مثبت است)

در نتیجه معادله دیفرانسیلی حاکم بر پره بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2\,(T - T_\infty) = 0$$

اکنون آن را حل می کنیم:

$$T - T_\infty = \theta \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \Rightarrow \alpha^2 - m^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm m \Rightarrow \theta(x) = c_1e^{mx} + c_2e^{-mx}$$

$$\Rightarrow T - T_\infty = c_1e^{mx} + c_2e^{-mx} \Rightarrow T(x) = T_\infty + c_1e^{mx} + c_2e^{-mx}$$

بدیهی است ثابتهای C_1 و C_2 از شرایط مرزی حاکم بر مساله بدست می آیند.فرض کنیم دما در پایه پره (x=0) معلوم باشد، این دما را T_0 می نامیم:

$$T(0) = T_0 \Rightarrow T_0 = T_\infty + c_1 + c_2$$

شرط دوم در نوک پره $(x = l)$ بیانگر یکی از چهار حالت فیزیکی است که در عمل روی می دهد که عبارتند از:

- دمای نوک معلوم$(T = T_l)$
- نوک آدیاباتیک $\left(\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=l} = 0\right)$

- نوک درتبادل جابجایی با محیط ($h(T(l)-T_\infty)=-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=l}$)
- پره طویل ($ml>2.67$)

حالت دوم را در نظر می گیریم:

$$at\ \ x=l:\frac{dT}{dx}=0\Rightarrow c_1me^{ml}-c_2me^{-ml}=0\Rightarrow c_1=c_2e^{-2ml}$$

قبلا داشتیم: $c_1+c_2=T_0-T_\infty$ بنابراین:

$$c_2e^{-2ml}+c_2=T_0-T_\infty\Rightarrow\ c_2=\frac{T_0-T_\infty}{1+e^{-2ml}}\Rightarrow c_1=\frac{T_0-T_\infty}{1+e^{-2ml}}\ e^{-2ml}$$

با قرار دادن ثابتها، معادله توزیع دما بصورت زیر بدست آمده و ساده می شود:

$$T=T_\infty+\frac{T_0-T_\infty}{1+e^{-2ml}}\ e^{-2ml}\ e^{mx}+\frac{T_0-T_\infty}{1+e^{-2ml}}\ \ e^{-mx}$$

$$\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\frac{e^{mx}\ e^{-2ml}}{1+e^{-2ml}}+\frac{e^{-mx}}{1+e^{-2ml}}=\frac{(e^{-mx}\ +\ e^{m\,(x-2l})e^{ml}}{(1+e^{-2ml})e^{ml}}$$

$$\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\frac{e^{m(l-x)}\ +\ e^{m(x-l)}}{e^{ml}+e^{-ml}}=\frac{\frac{e^{m\,(l-x)}\ +e^{m\,(x-l)}}{2}}{\frac{e^{ml}+e^{-ml}}{2}}\Rightarrow$$

$$\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\frac{coshm\,(l-x)}{cosh\,ml}$$

بدین ترتیب معادله توزیع دما در حالتی که نوک پره، آدیاباتیک باشد، بدست می آید.
راندمان پره طبق تعریف عبارتست از نسبت انتقال حرارت واقعی از پره به انتقال حرارت ایدال از آن پره. انتقال حرارت ایدال هنگامی خواهد بود که تمام پره در دمای T_0 قرار داشته باشد.

راندمان پره را برای حالت دوم بدست می آوریم:

$$\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\frac{coshm\,(l-x)}{cosh\,ml}$$

مقدار گرمایی که از پایه به پره منتقل می شود برابر با گرمایی است که پره به محیط می دهد.

$$q_{act}=-kA_c\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$$

$$T=T_\infty+(T_0-T_\infty)\ \ \frac{coshm\,(l-x)}{cosh\,ml}$$

$$\frac{dT}{dx} = (T_0 - T_\infty)\ \frac{-m sinh m\ (l-x)}{cosh\ ml}$$

$$q_{act} = -kA_c(T_0 - T_\infty)\ \frac{-m sinhml}{cosh\ ml} = kmA_c(T_0 - T_\infty)tanhml$$

$$q_{ideal} = hA_s(T_0 - T_\infty) = hPl\ (T_0 - T_\infty)$$

$$\eta = \frac{kmA_c(T_0 - T_\infty)tanhml}{hPl\ (T_0 - T_\infty)} = \frac{mtanhml}{\frac{hP}{kA_c}l} = \frac{mtanhml}{m^2 l} = \frac{tanh\ ml}{ml}$$

مشاهده می شود با افزایش طول پره، راندمان آن کاهش می یابد.

معادلات دیفرانسیل معمولی بسیار مهم

چون اساس حل معادلات مشتقات جزیی، تبدیل آنها به معادلات دیفرانسیل معمولی است، هنگام حل بسیاری از آنها معادلات دیفرانسیل زیر ظاهر می شوند که لازم است جواب این معادلات را بدانید:

- $y'' = 0 \Rightarrow y = c_1 x + c_2$
- $y'' + \lambda^2 y = 0 \Rightarrow y = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$
- $y'' - \lambda^2 y = 0 \Rightarrow y = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x$

در اینجا y تابعی از x در نظر گرفته شده است. البته ممکن است با معادلات دیفرانسیل معمولی دیگری هم مواجه شوید که در قسمتهای بعدی جزوه به آنها هم اشاره می شود.

حل معادلات مشتقات جزئی همگن

روش کلی حل اینگونه معادلات در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال

معادله مشتقات جزیی زیر را با توجه به شرایط مرزی و اولیه داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = a^2\ \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

$$\theta = \theta\ (x, t)$$

$$B.Cs \begin{cases} \theta(0, t) = 0 \\ \theta(l, t) = 0 \end{cases}$$

$$I.Cs \begin{cases} \theta(x, 0) = f(x) \\ \theta_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

حل

چون معادله و شرایط مرزی همگن است از روش جداسازی متغیرها (Separating of Variables) استفاده می کنیم در این روش تابع جواب را بصورت حاصلضرب دو تابع از متغیرهایش در نظر می گیریم. این کار باعث تبدیل معادله مشتقات جزیی به معادله دیفرانسیل معمولی می شود. با حل معادلات دیفرانسیل، هر کدام از این توابع بطورجداگانه بدست می آید.

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(XT) = T\,\frac{dX}{dx} = T\,X'$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\,(T\,X') = T\frac{dX'}{dx} = TX''$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(XT) = X\,\frac{\partial T}{\partial t} = X\,\frac{dT}{dt} = XT'$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\,(XT') = X\frac{dT'}{dt} = XT''$$

در معادله اصلی، جایگذاری می کنیم:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = a^2\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \Rightarrow X''T = a^2\,XT'' \Rightarrow \frac{X''}{X} = a^2\frac{T''}{T} = \sigma$$

که در آن σ مقدار ثابتی است و باید آن را یک بار برابر صفر، یک بار برابر مقدار مثبت و یک بار برابر مقدار منفی قرار داد و در هر حالت جواب معادله را بدست آورد اما قبل از این کار شرایط مرزی را ساده می کنیم:

$$B.Cs\begin{cases}\theta(0,t) = 0 \;\Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0\\ \theta(l,t) = 0 \;\Rightarrow X(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0\end{cases}$$

$X(x)$ و یا $T(t)$ نمی توانند صفر شوند چون تابع $\theta(x,t)$ طبق رابطه $\theta(x,t) = X(x)T(t)$ صفر خواهد شد که این یک پاسخ بدیهی است، در حالی که ما به دنبال جوابهای غیر صفر هستیم.

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow X(x) = c_1x + c_2$$

$$\begin{cases}X(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \times 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0\\ X(l) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \times l + 0 \Rightarrow c_1 = 0\end{cases}$$

چون هر دو ثابت صفر شدند، تابع $X\,(x)$ برابر صفر می شود و نیازی به بررسی حالت $\sigma = 0$ برای $T(t)$ نیست چون در هر صورت تابع $\theta(x,t)$ برابر صفر می شود که این جواب قابل قبول نیست.

حال فرض می کنیم مقدار ثابت σ یک مقدار مثبت باشد:

$$\sigma = \lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \lambda^2 \Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \times 1 + c_2 \times 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ X(l) = 0 \Rightarrow 0 = c_2 \sinh \lambda l \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

$sinh\lambda l$ تنها در نقطه صفر می تواند صفر شود که در اینجا نه l صفر است و نه λ .

$$\Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow \theta(x,t) = 0$$

در آخرین مرحله فرض می کنیم مقدار ثابت، منفی باشد:

$$\sigma = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \times 1 + c_2 \times 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ X(l) = 0 \Rightarrow 0 = c_2 \sin \lambda l \Rightarrow \sin \lambda l = 0 \end{cases}$$

$sin\lambda l$ می تواند صفر شود بدون آنکه l یا λ صفر شوند.

$$\sin \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1,2,\ldots$$

$$n = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\pi}{l} \Rightarrow X_1(x) = c_1 \sin \lambda_1 x$$

$$n = 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2\pi}{l} \Rightarrow X_2(x) = c_2 \sin \lambda_2 x, \ldots$$

$$n = n \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{l} \Rightarrow X_n(x) = c_n \sin \lambda_n x$$

چون برای تابع $X(x)$ جواب غیرصفر بدست آمد، لازم است حالت $\sigma = -\lambda^2$ برای $T(t)$ بررسی شود.

$$a^2 \frac{T''}{T} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{T''}{T} = -\frac{\lambda^2}{a^2} \Rightarrow T'' + \frac{\lambda^2}{a^2} T = 0 \Rightarrow$$

$$T(t) = c_1 \cos \frac{\lambda}{a} t + c_2 \sin \frac{\lambda}{a} t \Rightarrow T_n(t) = c_{1n} \cos \frac{\lambda_n}{a} t + c_{2n} \sin \frac{\lambda_n}{a} t$$

$$\theta_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) \Rightarrow \theta_n(x,t) = \left(c_{1n} \cos \frac{\lambda_n}{a} t + c_{2n} \sin \frac{\lambda_n}{a} t\right) c_n \sin \lambda_n x$$

$$\theta_n(x,t) = \left(c_{1n} c_n \cos \frac{\lambda_n}{a} t + c_{2n} c_n \sin \frac{\lambda_n}{a} t\right) \sin \lambda_n x \Rightarrow$$

$$\theta_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{\lambda_n}{a} t + B_n \sin \frac{\lambda_n}{a} t\right) \sin \lambda_n x$$

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(x,t)$$

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n cos\frac{\lambda_n}{a}t + B_n sin\frac{\lambda_n}{a}t \right) sin\lambda_n x$$

برای تعیین ثابتهای درون سیگما از شرایط اولیه استفاده می کنیم:

$$\theta(x,0) = f\ (x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\frac{n\pi}{l}x = f(x)$$

و در نهایت با استفاده از بسط نیم دامنه فوریه خواهیم داشت:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$\theta_t(x,0) = g\ (x)$$

$$\theta_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n\frac{\lambda_n}{a}\ sin\frac{\lambda_n}{a}t + B_n\frac{\lambda_n}{a}\ cos\frac{\lambda_n}{a}t) sin\lambda_n x$$

$$\theta_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{\lambda_n}{a} sin\frac{n\pi}{l}x = g(x)$$

مجددا از بسط نیم دامنه فوریه استفاده می کنیم:

$$B_n\frac{\lambda_n}{a} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2a}{\lambda_n l}\int_0^l g(x)sin\frac{n\pi}{l}xdx = \frac{2a}{n\pi}\int_0^l g(x)sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

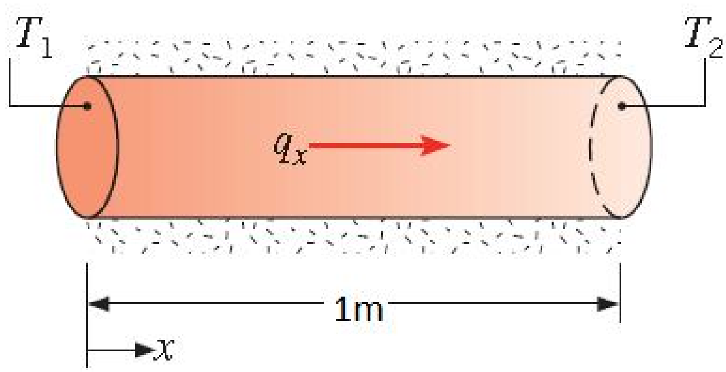
جلسه چهارم

انتقال گرمای یک بعدی (One Dimensional Heat Transfer)

انتقال گرمای یک بعدی هنگامی است که انتقال حرارت تنها در یک بعد از جسم صورت گیرد. مثلا در یک دیوار انتقال حرارت را می توان یک بعدی و در جهت ضخامت در نظر گرفت و یا در یک میله نازک که سطح جانبی آن عایق شده باشد، می توان انتقال گرما را یک بعدی و در جهت محور میله فرض کرد.

مثال

سطح جانبی میله نازکی به طول 1 متر بخوبی عایقکاری شده است طوریکه می توان انتقال گرما را کاملا یک بعدی در نظر گرفت. دمای اولیه میله100C است. سمت چپ میله در دمایT_1=50C و سمت راست آن در دمای T_2=100C ثابت نگه داشته شده است. توزیع دما را برای نقاط این میله و در زمانهای مختلف بیابید.



$$B.Cs:\begin{cases} T(0,t) = T_1 = 50C \\ T(1,t) = T_2 = 100C \end{cases}$$

$$I.C : T(x,0) = 100C$$

$$T(x,t) = ?$$

حل

معادله کلی توزیع دما را می نویسیم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

با توجه به یک بعدی بودن انتقال حرارت و عدم تولید انرژی گرمایی معادله فوق بصورت زیر ساده می شود:

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \frac{1}{\alpha} = a^2$

$\begin{cases} T(0,t) = 50 \\ T(1,t) = 100 \end{cases}$

$T(x,0) = 100$

چون شرایط مرزی معادله غیرهمگن است (غیرصفرند) ابتدا تابع دما را بصورت مجموع دو تابع یکی پایدار (تنها تابعی ازx)و دیگری ناپایدار(تابعی ازx وt) در نظر گرفته تا معادله غیرهمگن تبدیل به یک معادله مشتقات جزیی همگن و یک معادله دیفرانسیل معمولی شود. سپس از روش جداسازی متغیرها برای حل معادله مشتقات جزیی همگن استفاده می کنیم.

$T(x,t) = v(x) + w(x,t)$

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = v'' + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}$

حال این مشتقات را در معادله اصلی قرار می دهیم:

$v'' + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial w}{\partial t}$

توابع ناپایدار (که تابعی از زمان و مکان هستند) را با هم و توابع پایدار (که تنها تابعی از مکان هستند)را هم با هم برابر قرار می دهیم تا معادله فوق به دو معادله تفکیک شود.

$v'' = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial w}{\partial t}$

برای شرایط مرزی کاری می کنیم که توابع ناپایدار مرزی صفر شوند:

$T(0,t) = 50 \Rightarrow v(0) + w(0,t) = 50 \Rightarrow v(0) = 50 , w(0,t) = 0$

$T(1,t) = 100 \Rightarrow v(1) + w(1,t) = 100 \Rightarrow v(1) = 100 , w(1,t) = 0$

PDE

$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial w}{\partial t} \\ w(0,t) = 0 \\ w(1,t) = 0 \end{cases}$

ODE

$\begin{cases} v'' = 0 \\ v(0) = 50 \\ v(1) = 100 \end{cases}$

حال PDE را که همگن است به کمک روش جداسازی متغیرها حل می کنیم:

$$w(x,t) = X(x)\theta(t)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = X''\theta \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial t} = X\theta'$$

$$w(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)\theta(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$w(1,t) = 0 \Rightarrow X(1)\theta(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$$

$$X''\theta = a^2 X\theta' \Rightarrow \frac{X''}{X} = a^2\frac{\theta'}{\theta} = \sigma$$

σ را یک بار صفر، یک بار مثبت و یک بار منفی می گیریم حالتی قابل قبول است که جواب غیرصفر بدهد.

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1(0) + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad w(x,t) = 0$$

$$\sigma = \lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \lambda^2 \Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 cosh\lambda\, x + c_2 sinh\lambda x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1(1) + c_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow c_2 sinh\lambda = 0 \quad , \quad \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \Rightarrow w(x,t) = 0$$

$$\sigma = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 cos\lambda\, x + c_2 sin\lambda x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1(1) + c_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow c_2 sin\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad sin\lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = n\pi$$

$$\Rightarrow X_n(x) = c_n\, sinn\pi x$$

$$a^2\frac{\theta'}{\theta} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{\lambda^2}{a^2} \Rightarrow \int\frac{\theta'}{\theta}\,dt = -\frac{\lambda^2}{a^2}\int dt \Rightarrow \quad \mathrm{Ln}\,\theta(t) = -\frac{\lambda^2}{a^2}t + b$$

$$\Rightarrow \theta(t) = e^{\frac{-\lambda^2}{a^2}t+b} = e^b e^{-\frac{\lambda^2}{a^2}t} = Be^{-\frac{\lambda^2}{a^2}t}$$

$$\Rightarrow \theta_n(t) = B_n e^{-\frac{\lambda_n^2}{a^2}t}$$

$$w_n(x,t) = X_n(x)\theta_n(t) \Rightarrow w_n(x,t) = c_n\, B_n e^{-\frac{\lambda_n^2}{a^2}t} sinn\pi x = A_n e^{-\frac{\lambda_n^2}{a^2}t}\, sinn\pi x$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t)$$

$$\Rightarrow w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2}t}\, sinn\pi x$$

معادله دیفرانسیل معمولی به طریق زیر حل می شود:

$$v'' = 0 \Rightarrow v' = c_1 \Rightarrow v(x) = c_1 x + c_2$$

$$v\,(0) = 50 \Rightarrow 50 = c_1(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = 50$$

$$v\,(1) = 100 \Rightarrow 100 = c_1(1) + c_2 \Rightarrow c_1 = 50$$

$$\Rightarrow v(x) = 50x + 50$$

اکنون باید تابع پایدار را با تابع ناپایدار جمع کرد تا جواب نهایی بدست آید:

$$T\,(x,t) = v\,(x) + w(x,t)$$

$$\Rightarrow T\,(x,t) = 50x + 50 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2}t}\, sinn\pi x$$

از شرط اولیه برای یافتن ثابت درون سیگما استفاده می کنیم:

$$T\,(x,0) = 100 \Rightarrow 50x + 50 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n\ sinn\pi x = 100 \Rightarrow$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n\ sinn\pi x = 50 - 50x \Rightarrow A_n = 2\int_0^1 (50 - 50x) sinn\pi x dx$$

$$A_n = 2\left[-\frac{1}{n\pi}(50 - 50x) cosn\pi x - \frac{50}{n^2\pi^2} sinn\pi x\right]_0^1 = 2\left[\frac{50}{n\pi}\right] \Rightarrow A_n = \frac{100}{n\pi}$$

$$\Rightarrow T(x,t) = 50x + 50 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n\pi} e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2}t}\, sinn\pi x$$

$$T(x,t) = 50x + 50 + \frac{100}{\pi} e^{\frac{-\pi^2}{a^2}t}\, sin\pi x + \frac{100}{2\pi} e^{\frac{-4\pi^2}{a^2}t}\, sin2\pi x + \cdots$$

لازم بذکر است در حل معادله ناپایدار اگر در دو حالت از سه حالت σ، جواب قابل قبول بدست آید، جواب نهایی قسمت ناپایدار برابر مجموع جوابهای آن دو حالت خواهد بود.

انتقال گرمای دو بعدی(Two Dimensional Heat Transfer)

انتقال حرارت روی سطوح تخت مانند یک صفحه مستطیلی که ابعاد آن نسبت به هم قابل ملاحظه اند، دوبعدی است. معادله دیفرانسیلی توزیع دمای دوبعدی در حالت کلی بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t} \qquad a^2 = \frac{1}{\alpha}$$

با فرض عدم تولید انرژی گرمایی این معادله بصورت زیر در می آید:

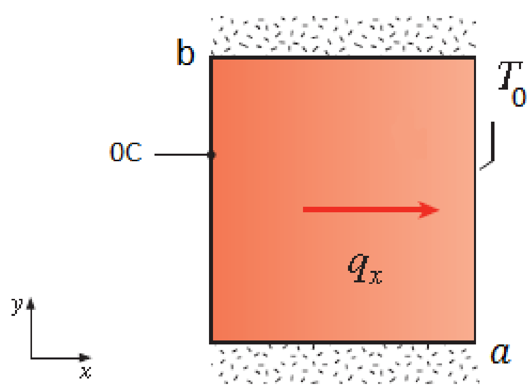
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

با فرض عدم تولید گرما و در شرایط دائمی، این معادله به شکل زیر خواهد بود:

$$\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad or \quad \nabla^2 T = 0\right.$$

مثال

یک صفحه مستطیلی که اضلاع بالا و پایین آن بخوبی عایق شده اند را در نظر بگیرید.دمای ضلع سمت چپ این صفحه در صفر درجه سانتیگراد ثابت نگه داشته شده است در حالیکه دمای ضلع راست آن T_0 می باشد. توزیع دما و شار حرارتی را در این صفحه بیابید.



حل

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$T(0, y) = 0$$

$$T(a, y) = T_0$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{(x,0)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{(x,b)} = 0$$

از چهار شرط مرزی، سه تای آنها صفر است.از شرط مرزی غیرصفر در انتهای حل مساله برای یافتن ثابت درون سیگما استفاده می شود. چون معادله حاکم همگن است و سه تا از شرایط مرزی صفرند روش جداسازی متغیرها را می توان استفاده کرد.

$$T(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = X''Y \quad , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = XY''$$

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma$$

$$T(0,y) = 0 \Rightarrow X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{(x,0)} = 0 \Rightarrow X(x)Y'(0) = 0 \Rightarrow Y'(0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{(x,b)} = 0 \Rightarrow X(x)Y'(b) = 0 \Rightarrow Y'(b) = 0$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow Y'' = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 y + c_2$$

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$Y'(b) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow Y(y) = c_2$$

$$\frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow X(x) = D_1 x + D_2$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow D_1(0) + D_2 = 0 \Rightarrow D_2 = 0 \Rightarrow X(x) = D_1 x$$

$$\sigma = 0 : \quad T(x,y) = c_2 D_1 x = A_0 x$$

$$\sigma = \lambda^2 \Rightarrow -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2 \Rightarrow Y'' + \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 cos\lambda y + c_2\, sin\lambda y$$

$$Y'(y) = -c_1\, \lambda sin\lambda y + c_2\lambda\, cos\lambda y$$

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow -c_1\lambda(0) + c_2\,\lambda(1) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$Y'(b) = 0 \Rightarrow -c_1\lambda sin\lambda b = 0 \Rightarrow sin\,\lambda b = 0 \Rightarrow \lambda b = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$\Rightarrow Y_n(y) = c_n cos\lambda_n y$$

$$\frac{X''}{X} = \lambda^2 \Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = D_1 cosh\lambda x + D_2 sinh\lambda x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow D_1(1) + D_2(0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0 \Rightarrow X_n(x) = D_n sinh\lambda_n x$$

$$T_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) \Rightarrow$$

$$T_n(x,y) = D_n c_n sinh\lambda_n x \cos\lambda_n y = A_n sinh\lambda_n x \cos\lambda_n y \Rightarrow$$

$$\sigma = \lambda^2 : T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sinh\lambda_n x \, cos\lambda_n y \quad , \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$\sigma = -\lambda^2 \Rightarrow -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow Y'' - \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 cosh\lambda y + c_2 \sinh\lambda y$$

$$Y'(y) = c_1 \lambda sinh\lambda y + c_2 \lambda \cosh\lambda y$$

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow c_1\lambda(0) + c_2\lambda(1) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$Y'(b) = 0 \Rightarrow c_1\lambda \, sinh\lambda b = 0 \,, sinh\lambda b \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow Y(y) = 0 \Rightarrow T(x,y) = 0$$

جواب نهایی معادله بصورت مجموع جوابهای دو حالت اول است:

$$T(x,y) = A_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sinh\lambda_n x \, cos\lambda_n y \quad , \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

ثابتها با استفاده از شرط مرزی باقیمانده بدست می آیند.

$$T(a,y) = T_0 \Rightarrow$$

$$A_0 a + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sinh\frac{n\pi a}{b} \, cos\frac{n\pi}{b} y = To$$

از ریاضیات مهندسی می دانیم هرگاه

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx \;, a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l} x dx$$

بنابراین:

$$A_0 a = \frac{1}{b}\int_0^b T_0 \, dy = \frac{1}{b} T_0 b \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{T_0}{a}$$

$$A_n sinh\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b T_0 \, cos\frac{n\pi}{b} y dy \quad \Rightarrow \quad A_n = 0$$

$$\Rightarrow T(x,y) = \frac{To}{a}x$$

چون اضلاع بالا و پایین مستطیل عایق بودند از همان اول می توان حدس زد که انتقال گرما یک بعدی و تابعی از x باشد.

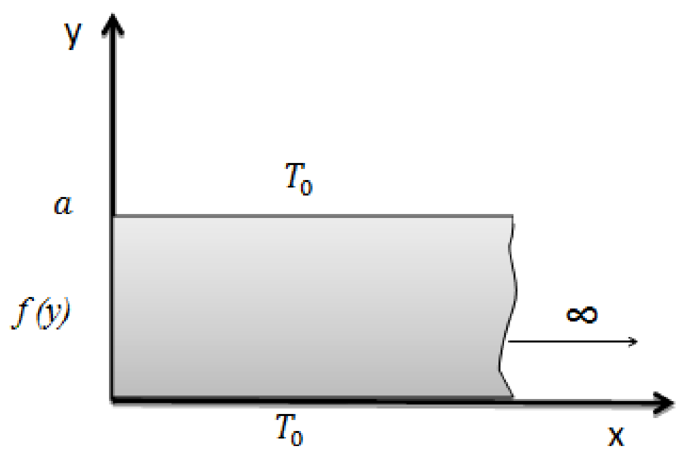
$$q'' = q''_x i + q''_y j$$

$$q''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} = -k\frac{To}{a} \qquad q''_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow q'' = -k\frac{To}{a}i$$

مثال

اضلاع بالا و پایین یک ورق مستطیلی که طول آنها بینهایت است در دمای T_0 قرار دارند، دمای ضلع چپ این ورق به طول a بصورت تابعی از y معلوم است. توزیع دما در این ورق را بیابید.



حل

معادله دیفرانسیل توزیع دما در این حالت بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

شرایط مرزی مساله عبارتند از:

$$T(0,y) = f(y)$$
$$T(x,0) = T_0$$
$$T(x,a) = T_0$$
$$\lim_{x\to\infty} T(x,y) = \text{bounded}$$

معنی شرط مرزی آخر این است که دمای ضلع سمت راست ورق همواره مقداری محدود است و از لحاظ فیزیکی نمی تواند بینهایت باشد.

شرایط مرزی غیرهمگن هستند(بیش از یک شرط مخالف صفراست)بنابراین مساله غیرهمگن است و باید آن را به یک معادله دیفرانسیل مشتقات جزیی همگن و یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد.

$$T(x,y) = v(y) + w(x,y)$$

چون مقدار دما در دو y معلوم داده شده است،v را بصورت تابعی از y نوشته ایم.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = v'' + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

در معادله جایگذاری می کنیم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v'' + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

این معادله به دو معادله زیر تفکیک می شود:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad v'' = 0$$

$$T(x,0) = T_0 \;\Rightarrow\; v(0) + w(x,0) = T_0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} v(0) = T_0 \\ w(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$T(x,a) = T_0 \;\Rightarrow\; v(a) + w(x,a) = T_0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} v(a) = T_0 \\ w(x,a) = 0 \end{cases}$$

PDE $\qquad\qquad$ ODE

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w(x,a) = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} v'' = 0 \\ v(0) = T_0 \\ v(a) = T_0 \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل معمولی بصورت زیر حل می شود:

$$v'' = 0 \Rightarrow v = c_1 y + c_2$$

$$v(0) = T_0 \Rightarrow T_0 = c_1(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = T_0$$

$$v\,(a) = T_0 \Rightarrow T_0 = c_1 a + T_0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow v(y) = T_0$$

و معادله مشتقات جزیی همگن هم بصورت زیر:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$w(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$w(x,0) = 0 \Rightarrow X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$

$$w(x,a) = 0 \Rightarrow X(x)Y(a) = 0 \Rightarrow Y(a) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = X''Y \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = XY''$$

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow Y'' = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 y + c_2$$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow c_1(0) + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$Y(a) = 0 \Rightarrow c_1(a) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow Y(y) = 0 \Rightarrow w\,(x,y) = 0$$

$$\sigma = -\lambda^2 \Rightarrow -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow Y'' - \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 cosh\lambda y + c_2 sinh\lambda y$$

$$Y\,(0) = 0 \Rightarrow c_1(1) + c_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$Y\,(a) = 0 \Rightarrow c_2 sinh\lambda a = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow Y\,(y) = 0 \Rightarrow w\,(x,y) = 0$$

$$\sigma = \lambda^2 \Rightarrow -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2 \Rightarrow Y'' + \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow Y\,(y) = c_1 cos\lambda y + c_2 sin\lambda y$$

$$Y\,(0) = 0 \Rightarrow c_1(1) + c_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$Y\,(a) = 0 \Rightarrow c_2 sin\lambda a = 0 \Rightarrow sin\lambda a = 0 \Rightarrow \lambda a = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\Rightarrow Y_n(y) = c_n sin\frac{n\pi}{a}y$$

$$\frac{X''}{X} = \lambda^2 \Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = D_1 e^{\lambda x} + D_2 e^{-\lambda x}$$

جواب معادله $X'' - \lambda^2 X = 0$ را بصورت توابع نمایی (بجای توابع هایپربولیک) نوشتیم که هر دو با هم معادلند.

چون دما هنگامیکهx به بینهایت میل می کند باید متناهی باشد و از طرفی

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} = \infty$$

بنابراینD_1 باید صفر باشد تا عامل بینهایت ساز از بین برود.

$$\Rightarrow X_n(x) = D_n e^{-\lambda_n x}$$

$$w_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = D_n c_n e^{\frac{-n\pi}{a}x} sin\frac{n\pi}{a}y = A_n e^{\frac{-n\pi}{a}x} sin\frac{n\pi}{a}y$$

$$\Rightarrow w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{-n\pi}{a}x} sin\frac{n\pi}{a}y$$

$$T(x,y) = v(y) + w(x,y) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{-n\pi}{a}x} sin\frac{n\pi}{a}y$$

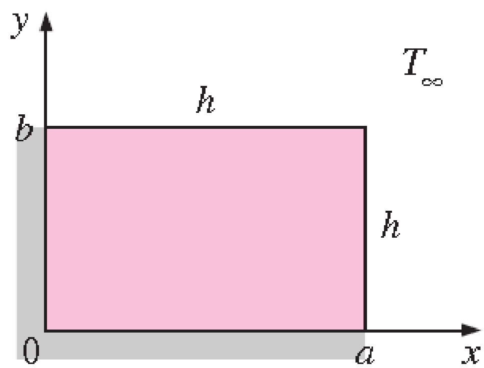
$$T(0,y) = f(y) \quad \Rightarrow \quad T_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sin\frac{n\pi}{a}y = f(y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sin\frac{n\pi}{a}\, y = f(y) - T_o \Rightarrow A_n = \frac{2}{a}\int_0^a [f(y) - T_o] sin\frac{n\pi}{a} y dy$$

جلسه پنجم

مثال

در دیوار شکل زیر بواسطه فعل و انفعالات شیمیایی حرارت با نرخ $\dot{q}$ در واحد حجم تولید می شود. دو ضلع نزدیک به مبدا عایق شده اند در حالیکه دو ضلع دیگر دیوار در تبادل حرارت با محیط اطرافند. دمای محیط را صفر در نظر بگیرید و توزیع دمای حالت پایدار را بدست آورید.



حل

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = a^2 \ \frac{\partial T}{\partial t}$$

چون شرایط دائمی و دو بعدی است لذا معادله دیفرانسیلی توزیع دما بصورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

شرایط مرزی حاکم بر مساله عبارتند از:

$$\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{(x,0)} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{(0,y)} = 0$$

$$-k \ \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{(a,y)} = h\left(T|_{(a,y)} - T_\infty\right) = hT|_{(a,y)}$$

$$-k \ \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{(x,b)} = h\left(T|_{(x,b)} - T_\infty\right) = hT|_{(x,b)}$$

معادله دیفرانسیلی توزیع دما بدلیل وجود جمله$\frac{\dot{q}}{k}$ غیرهمگن است، لذا ابتدا معادله را به دو معادله دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزیی همگن تبدیل می کنیم.

$$T(x,y) = v(x) + w(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = v'' + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

در معادله جایگذاری می کنیم:

$$v'' + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

بصورت زیر می توان آن را به یک معادله دیفرانسیل معمولی و یک معادله مشتقات جزیی همگن تبدیل کرد:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ v'' + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}|_{(x,0)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y}|_{(x,0)} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}|_{(0,y)} = 0 \Rightarrow v'(0) + \frac{\partial w}{\partial x}|_{(0,y)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v'(0) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}|_{(0,y)} = 0 \end{cases}$$

$$-k\ \frac{\partial T}{\partial x}|_{(a,y)} = h\ T|_{(a,y)} \Rightarrow -k\ \left[v'(a) + \frac{\partial w}{\partial x}|_{(a,y)}\right] = h\ [v(a) + w\ (a,y)]$$

$$v'(a) + \frac{\partial w}{\partial x}|_{(a,y)} = -\frac{h}{k}[v(a) + w\ (a,y)]$$

$$v'(a) = -\frac{h}{k}\ v(a\ ) \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{(a,y)} = -\frac{h}{k} w\ (a,y)$$

$$-k\ \frac{\partial T}{\partial y}|_{(x,b)} = hT|_{(x,b)} \Rightarrow -k\ \left[\frac{\partial w}{\partial y}|_{(x,b)}\right] = h\ [v(x) + w\ (x,b)]$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}|_{(x,b)} = -\frac{h}{k}\ [v(x) + w\ (x,b)]$$

از این شرط در انتهای حل مساله برای تعیین ثابت یا ثابتهای درون سیگما استفاده می شود.

ابتدا معادله دیفرانسیل معمولی را حل می کنیم:

$$v'' = -\frac{\dot{q}}{k} \Rightarrow v(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + c_1 x + c_2$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$v'(a) = -\frac{h}{k}v(a) \Rightarrow -\frac{\dot{q}a}{k} = -\frac{h}{k}\left(-\frac{\dot{q}}{2k}\ a^2 + c_2\right) \Rightarrow c_2 = \frac{\dot{q}a}{h} + \frac{\dot{q}a^2}{2k}$$

$$\Rightarrow v(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}\ x^2 + \frac{\dot{q}a}{h} + \frac{\dot{q}a^2}{2k}$$

اینک به حل معادله مشتقات جزیی همگن می پردازیم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$w(x,y) = X(x)Y(y)$$

ابتدا شرایط مرزی را ساده می کنیم:

$$\frac{\partial w}{\partial x}|_{(0,y)} = 0 \Rightarrow X'(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}|_{(x,0)} = 0 \Rightarrow X(x)Y'(0) = 0 \Rightarrow Y'(0) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}|_{(a,y)} = -\frac{h}{k}w(a,y) \Rightarrow X'(a)Y(y) = -\frac{h}{k}X(a)Y(y) \Rightarrow X'(a) = -\frac{h}{k}X(a)$$

مشتقات لازم را بدست آورده و در معادله جایگذاری می کنیم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = X''Y \qquad , \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = XY''$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$X'(a) = -\frac{h}{k}X(a) \Rightarrow 0 = -\frac{h}{k}(c_2) \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow X(x) = 0$$

$$\sigma = \lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \lambda^2 \Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 cosh\lambda x + c_2 sinh\lambda x$$

$$X'(x) = c_1\lambda sinh\lambda x + c_2\lambda cosh\lambda x$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow c_1\lambda\,(0) + c_2\lambda(1) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X'(a) = -\frac{h}{k}X(a) \Rightarrow c_1\lambda sinh\lambda a = -\frac{h}{k}c_1 cosh\lambda a$$

$$\Rightarrow c_1\left(\lambda\, sinh\,\lambda a + \frac{h}{k}cosh\lambda a\right) = 0$$

چون توابع سینوس هایپربولیک و کسینوس هایپربولیک به ازای مقادیر مثبت، مثبتند لذا عبارت داخل پرانتز همواره مثبت است و صفر نمی تواند باشد بنابراین$c_1 = 0$ پس در این حالت هم جواب قابل قبولی بدست نمی آید.

$$\sigma = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 cos\lambda x + c_2 sin\lambda x$$

$$X'(x) = -c_1\lambda sin\lambda x + c_2\lambda cos\lambda x$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow c_2\lambda\,(1) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X'(a) = -\frac{h}{k}X(a) \Rightarrow -c_1\,\lambda\, sin\lambda a = -\frac{h}{k}c_1 cos\lambda a \Rightarrow c_1\,(\lambda\, sin\lambda a - \frac{h}{k}cos\lambda a) = 0$$

$$\lambda\, sin\lambda a = \frac{h}{k}cos\lambda a \Rightarrow \frac{cos\lambda a}{sin\lambda a} = \frac{\lambda k}{h} \Rightarrow cotg\lambda a = \frac{\lambda k}{h}$$

فرض می کنیم $\lambda a = z$ در نتیجه:

$$cotgz = \frac{zk}{ah}$$

ادامه حل مساله مستلزم معلوم بودن مقادیرa،h وk است.فرض می کنیم مقادیر این کمیتها بنحوی است که$\frac{k}{ah} = 1$ در نتیجه:

$$cotgz = z$$

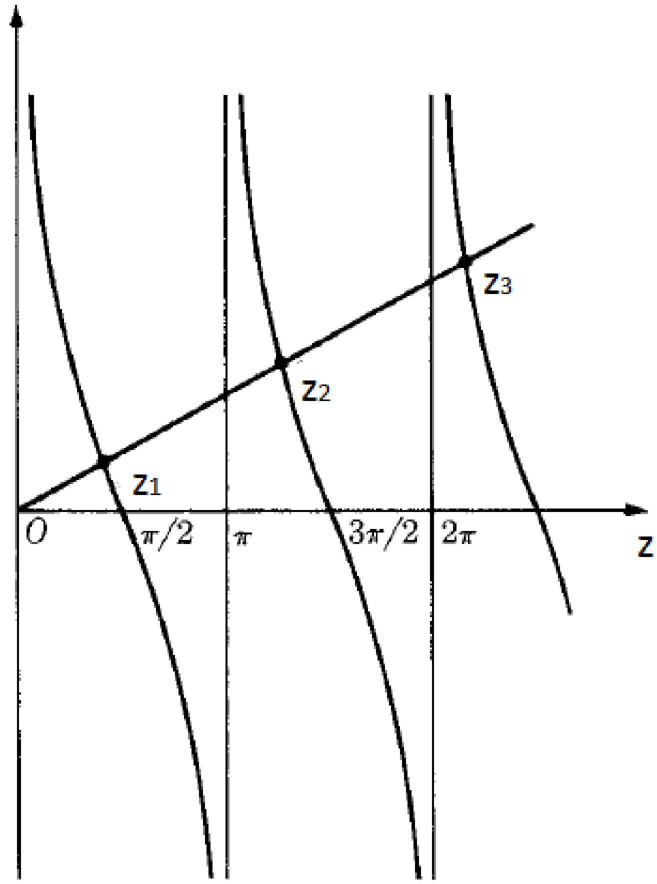
برای حل این معادله از روش ترسیم نمودارهایz و$cotgz$ و یافتن نقاط تلاقی آن دو استفاده می کنیم.چون$\lambda a = z$ با معلوم بودنz، مقادیر مختلفλ بدست می آیند. بنابراین جواب کلی تابعX بصورت زیر خواهد بود:

$$X_n(x) = c_n cos\lambda_n x$$

اکنون تابعY را بدست می آوریم:

$$-\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow Y'' - \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = D_1 cosh\lambda y + D_2 sinh\lambda y$$

$$Y'(y) = D_1\lambda\, sinh\lambda y + D_2\lambda\, cosh\lambda y$$



$$Y'(0) = 0 \Rightarrow D_2\lambda\ (1) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$$

$$\Rightarrow Y(y) = D_1 cosh\lambda y \Rightarrow Y_n(y) = D_{1n}\ cosh\lambda_n y$$

$$w_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = c_n D_{1n} cosh\lambda_n y\ cos\lambda_n x = A_n cosh\lambda_n y\ cos\lambda_n x$$

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\ cosh\lambda_n y\ cos\lambda_n x$$

$$T\ (x,y) = v(x) + w(x,y) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + \frac{\dot{q}a}{h} + \frac{\dot{q}a^2}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\ cosh\lambda_n y\ cos\lambda_n x$$

از تنها شرط مرزی باقیمانده برای تعیین ثابت درون سیگما استفاده می شود:

$$\frac{\partial w}{\partial y}|_{(x,b)} = -\frac{h}{k}\ [v(x) + w\ (x,b)]$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}|_{(x,b)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n sinh\lambda_n b\ cos\lambda_n x$$

در شرط مرزی باقیمانده قرار می دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n sinh\lambda_n b\ cos\lambda_n x = -\frac{h}{k}\left[(-\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + \frac{\dot{q}a}{h} + \frac{\dot{q}a^2}{2k}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cosh\lambda_n b\ cos\lambda_n x\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n cos\lambda_n x\ (\lambda_n sinh\lambda_n b + \frac{h}{k}cosh\lambda_n b) = -\frac{h}{k}\ (-\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + \frac{\dot{q}a}{h} + \frac{\dot{q}a^2}{2k})$$

فرض می کنیم:

$$A_n(\lambda_n sinh\lambda_n b + \frac{h}{k}cosh\lambda_n b) = B_n$$

در نتیجه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n cos\lambda_n x = -\frac{h}{k}\ (-\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + \frac{\dot{q}a}{h} + \frac{\dot{q}a^2}{2k})$$

سمت راست عبارت فوق را برابر $f(x)$ در نظر می گیریم.

$\sum_{n=1}^{\infty} B_n cos\lambda_n x = f(x)$

دو طرف تساوی فوق را در $cos\lambda_m x$ ضرب کرده و در بازه 0 تا a انتگرال می گیریم.(می توان جای سیگما را با انتگرال عوض کرد.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^a cos\lambda_n x\ cos\lambda_m x\ \ dx = \int_0^a f(x) cos\lambda_m x dx$$

از ریاضیات می دانیم(اصل تعامد):

$$\int_0^a cos\lambda_n x\ cos\lambda_m x dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \int_0^a cos^2\lambda_n x\ dx & n = m \end{cases}$$

بنابراین برای تمام $n \neq m$ حاصل انتگرال درون سیگما صفر است و تنها برای $n = m$ انتگرال را باید حساب کرد پس حاصل سیگما برابر $B_n \int_0^a cos^2\lambda_n x\ dx$ خواهد شد.

$$\int_0^a cos^2\lambda_n x\, dx = \int_0^a \frac{1 + cos2\lambda_n x}{2} dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2\lambda_n} sin2\lambda_n x)_0^a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{2\lambda_n} sin2\lambda_n a)$$

$$\Rightarrow B_n \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2\lambda_n} sin2\lambda_n a\right) = \int_0^a f(x) cos\lambda_n x dx \Rightarrow B_n = \frac{2\int_0^a f(x) cos\lambda_n x dx}{a + \frac{1}{2\lambda_n}\, sin2\lambda_n a}$$

بجای $f(x)$ مقدارش را قرار می دهیم:

$$B_n = \frac{2\int_0^a -\frac{h}{k}\ (-\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + \frac{\dot{q}a}{h} + \frac{\dot{q}a^2}{2k}) cos\lambda_n x dx}{a + \frac{1}{2\lambda_n}\, sin2\lambda_n a}$$

چون $A_n(\ \lambda_n sinh\lambda_n b + \frac{h}{k} cosh\lambda_n b) = B_n$ در نتیجه A_n بدست می آید:

$$A_n = \frac{2h}{k} \frac{\int_0^a\ (\frac{\dot{q}}{2k}x^2 - \frac{\dot{q}a}{h} - \frac{\dot{q}a^2}{2k}) cos\lambda_n x dx}{(a + \frac{1}{2\lambda_n}\, sin2\lambda_n a)(\ \lambda_n sinh\lambda_n b + \frac{h}{k} cosh\lambda_n b)}$$

جلسه ششم

شرایط مرزی وابسته به زمان(Time Dependent Boundary Conditions)

اگر دمای روی یک سطح دیوار ثابت نباشد و با گذشت زمان تغییر نماید مساله شرط مرزی تابع زمان مطرح خواهد شد. در این جلسه مسائلی را بررسی می کنیم که یکی از شرایط مرزی وابسته به زمان باشد.

روش کلی برای حل این گونه مسائل استفاده از تئوری دوهامل(Duhamels Theorem) تحت عنوان روش تابع واحد است. البته هر نوع مساله شرط مرزی وابسته به زمان را نمی توان از این روش حل کرد.

بطورکلی مسائلی را می توان با این روش حل کرد که شرایط زیر را داشته باشند:

- معادله دیفرانسیلی حاکم خطی باشد.
- شرط اولیه صفر باشد.
- تنها یکی از شرایط مرزی وابسته به زمان باشد و شرط مرزی دیگر همگن باشد.

روش تابع واحد(Unit Step Function Method)

در این روش یک تابع مجازی تعریف و معادله مشتقات جزیی برای تعیین این تابع نوشته می شود بنحوی که شرط مرزی وابسته به زمان در آن برابر یک در نظر گرفته می شود. معادله مشتقات جزیی تابع مجازی به شیوه تفکیک به دو تابع پایدار و ناپایدار و سپس استفاده از روش جداسازی متغیرها برای حل معادله ناپایدار، حل می شود. نهایتا با استفاده از رابطه زیر تابع توزیع دمای واقعی بدست می آید:

$$T(x,t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau)\frac{\partial T^*(x,t-\tau)}{\partial t}d\tau$$

T^* تابع توزیع دمای مجازی و T تابع توزیع دمای واقعی است.

مثال

یک دیوار مسطح به ضخامت L که ابتدائا در دمای صفر درجه قرار دارد را در نظر بگیرید. دما روی سطح (x=0) دیوار طبق رابطه f(t)=2t تا t=2s افزایش می یابد و سپس بطور ناگهانی به صفر می رسد. دمای وجه دیگر دیوار در دمای صفر درجه ثابت نگهداری می شود. توزیع دما را در این دیوار بیابید.

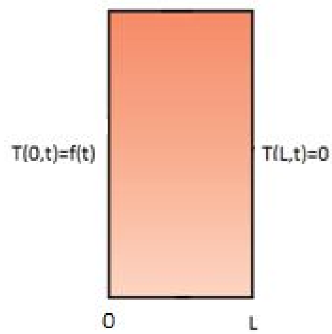
حل

معادله حاکم بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \frac{1}{\alpha} = a^2$$

شرایط مرزی و اولیه مساله عبارتند از:

$$T(0,t) = f(t)$$
$$T(L,t) = 0$$
$$T(x,0) = 0$$



چون مساله شرایط استفاده از تئوری دوهامل را دارد لذا از روش تابع واحد استفاده می کنیم و معادله دیفرانسیل مشتقات جزیی تابع مجازی را با شرایط مرزی و اولیه زیر تشکیل می دهیم:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial T^*}{\partial t}$$

$$\begin{cases} B.Cs \begin{cases} T^*(0,t) = 1 \\ T^*(L,t) = 0 \end{cases} \\ I.C \quad T^*(x,0) = 0 \end{cases}$$

چون یکی از شرایط مرزی این معادله صفر نیست لذا مساله غیرهمگن بوده و باید تابع را به دو تابع پایدار و ناپایدار تفکیک و سپس هر کدام را بطور جداگانه حل کرد.

$$T^*(x,t) = v(x) + w(x,t) \Rightarrow \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = v'' + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ و } \frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$v'' + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$

قسمتهای ناپایدار را با هم و قسمتهای پایدار را هم با هم برابر قرار می دهیم:

$$v'' = 0$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$

حال شرایط مرزی را ساده می کنیم:

$$T^*(0,t) = 1 \quad \Rightarrow \quad v(0) + w\,(0,t) = 1 \qquad \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 1 \\ w(0,t) = 0 \\ v(L) = 0 \\ w(L,t) = 0 \end{cases}$$
$$T^*(L,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(L) + w\,(L,t) = 0$$

تابع $v(x)$ را بدست می آوریم:

$$v'' = 0 \;\Rightarrow v' = c_1 \;\Rightarrow\; v(x) = \; c_1 x + c_2$$

$$v(0) = \; c_1(0) + \; c_2 = 1 \;\Rightarrow c_2 = 1$$

$$v(L) = \;\; 0 \;\;\Rightarrow c_1(L) + 1 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = \frac{-1}{L} \Rightarrow\; v(x) = \frac{-x}{L} + 1$$

تابع ناپایدار و شرایط مرزی بصورت زیر بدست آمد:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$
$$w(0,t) = 0$$
$$w(L,t) = 0$$

برای تعیین تابع $w\,(x,t)$ از روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم:

$$w\,(x,t) = X(x)T\,(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = X''T \text{ و } \frac{\partial w}{\partial t} = XT'$$

با جایگذاری در معادله:

$$X''T = a^2 XT' \;\Rightarrow \frac{X''}{X} = a^2 \frac{T'}{T} = \sigma$$

$$\begin{cases} w(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ w(L,t) = 0 \Rightarrow X(L)T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 \end{cases}$$

اکنون حالتهای مختلف σ را بررسی می کنیم:

$$\sigma = 0 \;\Rightarrow\; \frac{X''}{X} = \; 0 \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow\; X(x) = \; c_1 x + c_2$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$X(L) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; c_1 L = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

$$\sigma = \; \lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \; \lambda^2 \Rightarrow X'' - \; \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = c_1\, cosh\,\lambda x + c_2 sinh \lambda x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1(1) + c_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow c_2 sinh\lambda L = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

$$\sigma = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 cos\lambda\, x + c_2 sin\lambda x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1(1) + c_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow c_2 sin\lambda L = 0 \Rightarrow sin\lambda L = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow X_n(x) = c_n\, sin\lambda_n x$$

$$a^2 \frac{T'}{T} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{-\lambda^2}{a^2} \Rightarrow \int \frac{T'}{T} dt = \int \frac{-\lambda^2}{a^2} dt \Rightarrow LnT(t) = \frac{-\lambda^2}{a^2} t + b \Rightarrow$$

$$T(t) = e^{\frac{-\lambda^2}{a^2}t+b} = e^{\,b} e^{\frac{-\lambda^2}{a^2}t} = Be^{\frac{-\lambda^2}{a^2}t} \Rightarrow T_n(t) = B_n e^{\frac{-\lambda_n^2}{a^2}t}$$

$$w_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n B_n e^{\frac{-\lambda_n^2}{a^2}t} sin\lambda_n x = A_n e^{\frac{-\lambda_n^2}{a^2}t}\, sin\lambda_n x$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}t}\, sin\frac{n\pi}{L} x$$

$$T^*(x,t) = v(x) + w\,(x,t) = \frac{-x}{L} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}t}\, sin\frac{n\pi}{L} x$$

شرط اولیه را برای یافتن ثابت درون سیگما بکار می بریم:

$$T^*(x,0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sin\frac{n\pi}{L} x = \frac{x}{L} - 1 \Rightarrow A_n = \frac{2}{\mathrm{L}} \int_0^{\mathrm{L}} \left(\frac{x}{L} - 1\right) sin\frac{n\pi}{L} x dx$$

پس از محاسبه انتگرال از روش جزء به جزء :

$$A_n = \frac{-2}{n\pi}$$

و پس از جایگذاری در سیگما:

$$T^*(x,t) = \frac{-x}{L} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi}\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}t}\, sin\frac{n\pi}{L} x$$

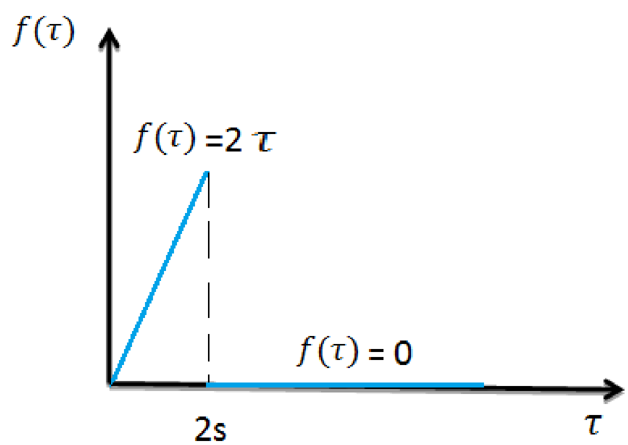
توزیع دمای بدست آمده، توزیع دمای مجازی است که اکنون باید بکمک آن و با استفاده از فرمول ابتدای این جلسه توزیع دمای واقعی را بدست آورد.

$$T^*(x,t-\tau) = \frac{-x}{L} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi}\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}(t-\tau)}\, sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\frac{\partial T^*(x,t-\tau)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi}\left(\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}(t-\tau)}\, sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{a^2L^2}\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}(t-\tau)}\, sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$T(x,t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{f(\tau)\partial T^*(x,t-\tau)}{\partial t}\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{a^2L^2}\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}(t-\tau)}\, sin\frac{n\pi}{L}x\, d\tau$$



$$for\ \ t\ < 2s : f\ (t) = 2t \Rightarrow f\ (\tau) = 2\tau \Rightarrow$$

$$T(x,t) = \int_0^t 2\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{a^2L^2}\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}(t-\tau)}\, sin\frac{n\pi}{L}x d\tau$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n\pi}{a^2L^2}\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}t}\, sin\frac{n\pi}{L}x \int_0^t \tau e^{\frac{n^2\pi^2}{a^2L^2}\tau}\, d\tau$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n\pi}{a^2L^2}\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}t}\, sin\frac{n\pi}{L}x \left[\frac{a^2L^2\tau}{n^2\pi^2}\, e^{\frac{n^2\pi^2}{a^2L^2}\tau} - \frac{a^4L^4}{n^4\pi^4} e^{\frac{n^2\pi^2}{a^2L^2}\tau}\right]_0^t$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n\pi}{a^2L^2}\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}t}\, sin\frac{n\pi}{L}x \left[\frac{a^2L^2t}{n^2\pi^2}\, e^{\frac{n^2\pi^2}{a^2L^2}t} - \frac{a^4L^4}{n^4\pi^4} e^{\frac{n^2\pi^2}{a^2L^2}t} + \frac{a^4L^4}{n^4\pi^4}\right]$$

بعد از فاکتورگیری و ساده کردن:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\left[t - \frac{a^2L^2}{n^2\pi^2}(1 - e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}t})\right] \sin\frac{n\pi}{L}x \quad for \quad t < 2s$$

$$for \ \ t > 2s : f\ (t) = 0 \Rightarrow f\ (\tau) = 0 \Rightarrow$$

$$T(x,t) = \int_0^2 2\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{a^2L^2}\ e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}(t-\tau)} \sin\frac{n\pi}{L}x d\tau + \int_2^{\infty} 0 d\tau$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n\pi}{a^2L^2}\ e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}t} \sin\frac{n\pi}{L}x \int_0^2 \tau e^{\frac{n^2\pi^2}{a^2L^2}\tau}\, d\tau$$

$$\Rightarrow T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n\pi}{a^2L^2}\ e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}t} \sin\frac{n\pi}{L}x \left[\frac{a^2L^2\tau}{n^2\pi^2}\ e^{\frac{n^2\pi^2}{a^2L^2}\tau} - \frac{a^4L^4}{n^4\pi^4} e^{\frac{n^2\pi^2}{a^2L^2}\tau}\right]_0^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n\pi}{a^2L^2}\ e^{\frac{-n^2\pi^2}{a^2L^2}t} \sin\frac{n\pi}{L}x \left[\frac{2a^2L^2}{n^2\pi^2}\ e^{\frac{2n^2\pi^2}{a^2L^2}} - \frac{a^4L^4}{n^4\pi^4} e^{\frac{2n^2\pi^2}{a^2L^2}} + \frac{a^4L^4}{n^4\pi^4}\right]$$

بعد از فاکتورگیری و ساده کردن:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} e^{\frac{n^2\pi^2}{a^2L^2}(2-t)} \left[2 - \frac{a^2L^2}{n^2\pi^2}(1 - e^{-\frac{2n^2\pi^2}{a^2L^2}})\right] \sin\frac{n\pi}{L}x \quad for \ \ t > 2s$$

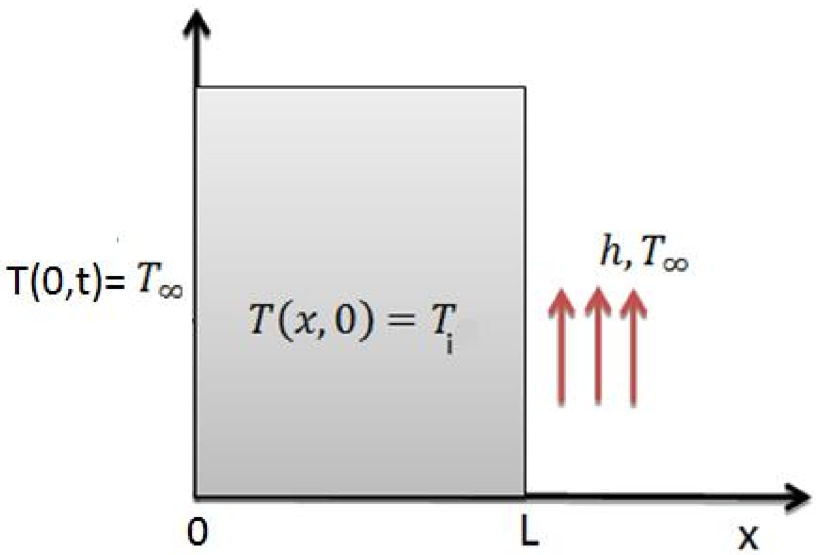
بی بعدسازی(Normalizing)

یکی از مباحثی که در انتقال حرارت هدایت مطرح می شود بی بعدسازی است. بی بعد سازی نوشتن معادله و شرایط مرزی بصورت کمیتهای بدون بعد است. بی بعدسازی باعث ساده شدن مسأله می شود. باید توجه داشت که بی بعدسازی تنها ظاهر مسله را تغییر می دهد و در باطن مسأله هیچ تغییری ایجاد نمی کند. بی بعدسازی گاهی باعث می شود معادله و یا شرایط مرزی آن همگن شود و در نتیجه تا حد امکان آنها را به شکلهای ساده تری در می آورد. لزوماً همه مسائل بی بعد نمی شوند و برای حل یک مسأله لزومی ندارد که حتماً مسأله بی بعد شود در حالی که حتما باید مسأله همگن شود تا بتوان آن را حل کرد.

یک کمیت بی بعد از تقسیم آن کمیت بر بیشترین مقداری که می تواند اختیار کند، بدست می آید و یا گاهی از تقسیم اختلاف یک کمیت همجنس بعنوان مبنا از آن کمیت بر بیشترین اختلاف ممکن از آن کمیت تعریف می شوند.

مثال

مساله با شرایط مرزی و اولیه نشان داده شده در شکل زیر را بی بعد کنید.



حل

ابتدا معادله حاکم و شرایط مرزی و اولیه را می نویسیم.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$B.Cs: \begin{cases} T(0,t) = T_\infty \\ -k\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = h\,[T(L) - T_\infty] \end{cases}$$

$$I.C: T(x,0) = T_i$$

دمای بی بعد(Dimensionless Temperature)، زمان بی بعد(Dimensionless Time) و مکان بی بعد(Dimensionless Spatial) مطابق روابط زیر تعریف می شوند:

$$\bar{T} = \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} \qquad \bar{t} = \frac{t}{a^2L^2} \qquad \bar{x} = \frac{x}{L}$$

$$\bar{T} = \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} \qquad \Rightarrow \quad T = (T_i - T_\infty)\bar{T} + T_\infty$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[(T_i - T_\infty)\bar{T} + T_\infty] = (T_i - T_\infty)\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}\,, \quad x = L\bar{x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_i - T_\infty)\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial (L\bar{x})} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{(T_i - T_\infty)}{L}\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(T_i - T_\infty)}{L}\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}\right], x = L\bar{x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial (L\bar{x})}\left[\frac{(T_i - T_\infty)}{L}\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}\right] = (T_i - T_\infty)\frac{\partial^2 \bar{T}}{L^2 \partial \bar{x}^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (T_i - T_\infty)\frac{\partial^2 \bar{T}}{L^2 \partial \bar{x}^2}$$

$$T = (T_i - T_\infty)\bar{T} + T_\infty \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[(T_i - T_\infty)\bar{T} + T_\infty\right] = (T_i - T_\infty)\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

$$t = \bar{t}a^2L^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = (T_i - T_\infty)\frac{\partial \bar{T}}{\partial (a^2L^2\bar{t})} = (T_i - T_\infty)\frac{\partial \bar{T}}{a^2L^2\partial \bar{t}}$$

در معادله حاکم جایگذاری می کنیم:

$$(T_i - T_\infty)\frac{\partial^2 \bar{T}}{L^2 \partial \bar{x}^2} = a^2(T_i - T_\infty)\frac{\partial \bar{T}}{a^2L^2\partial \bar{t}} \Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}}$$

اکنون شرایط مرزی و اولیه را بی بعد می کنیم:

$$T(0,t) = T_\infty \Rightarrow (T_i - T_\infty)\bar{T}(0,\bar{t}) + T_\infty = T_\infty \Rightarrow (T_i - T_\infty)\bar{T}(0,\bar{t}) = 0 \Rightarrow \bar{T}(0,\bar{t}) = 0$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = h[T(L) - T_\infty]$$

توجه داشته باشید در $x = L$ طبق تعریف مکان بی بعد: $\bar{x} = 1$

$$\Rightarrow -k\frac{(T_i - T_\infty)}{L}\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}|_{\bar{x}=1} = h\left[(T_i - T_\infty)\ \bar{T}|_{\bar{x}=1} + T_\infty - T_\infty\right]$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}|_{\bar{x}=1} = \frac{-hL}{k}\bar{T}|_{\bar{x}=1} \ \Rightarrow\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}|_{\bar{x}=1} = -Bi\ \bar{T}|_{\bar{x}=1}$$

می دانیم $Bi = \frac{hL}{k}$

$$T(x,0) = T_i \ \Rightarrow (T_i - T_\infty)\ \bar{T}(\bar{x},0) + T_\infty = T_i \Rightarrow \bar{T}(\bar{x},0) = 1$$

در اینجا معادله حاکم و شرایط مرزی و اولیه بی بعد شده را با حالتی که بی بعدسازی صورت نگرفته است مقایسه می کنیم.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(0,t) = T_\infty \\ -k\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = h\,[T(L) - T_\infty] \\ T(x,0) = T_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} \\ \bar{T}(0,\bar{t}) = 0 \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}|_{\bar{x}=1} = -Bi\bar{T}|_{\bar{x}=1} \\ \bar{T}(\bar{x},0) = 1 \end{cases}$$

همانطور که مشاهده می شود بی بعدسازی باعث همگن شدن شرایط مرزی و سادگی معادله حاکم و نهایتا راحتی حل مساله می شود.

روش کلی حل مسائل غیر همگن(اصل سوپرپوزیشن)

(General Simplification For Non-Homogeneous Problems)

فرض کنید هم معادله غیرهمگن باشد و هم شرایط مرزی. تابع $u(x,t)$ را بصورت مجموع چهار تابع در نظر گرفته و شرایط مرزی را بگونه ای تعریف می کنیم که هر معادله تنها یک عامل غیرهمگن داشته باشد.دقت داشته باشید تابع $f(x,t)$ در معادله یک عامل غیرهمگنی محسوب می شود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$B.Cs\text{:} \begin{cases} u(0,t) = g(t) \\ u\,(L,t) = h(t) \end{cases}$$

$$I.C:\ u(x,0) = k\,(x)$$

$$u(x,t) = v\,(x,t) + w(x,t) + z(x,t) + s(x,t)$$

مشتقات لازم را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t}$$

با جایگذاری در معادله و شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + f(x,t) = a^2(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t})$$

$$u\,(0,t) = g\,(t) \Rightarrow v(0,t) + w(0,t) + z(0,t) + s(0,t) = g(t)$$

$$u\,(L,t) = h(t) \Rightarrow v(L,t) + w(L,t) + z(L,t) + s(L,t) = h(t)$$

$$u(x,0) = k\,(x) \Rightarrow v(x,0) + w(x,0) + z(x,0) + s(x,0) = k(x)$$

حال چهار معادله بصورت زیر تشکیل می دهیم:

$$1)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) = a^2\dfrac{\partial v}{\partial t}\\ v(0,t) = 0\\ v(L,t) = 0\\ v(x,0) = 0\end{cases} \qquad \Rightarrow \quad v(x,t) = \surd$$

$$2)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2\dfrac{\partial w}{\partial t}\\ w(0,t) = g(t)\\ w(L,t) = 0\\ w(x,0) = 0\end{cases} \qquad \Rightarrow \quad w(x,t) = \surd$$

$$3)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\dfrac{\partial z}{\partial t}\\ z(0,t) = 0\\ z(L,t) = h(t)\\ z(x,0) = 0\end{cases} \qquad \Rightarrow \quad z(x,t) = \surd$$

$$4)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = a^2\dfrac{\partial s}{\partial t}\\ s(0,t) = 0\\ s(L,t) = 0\\ s(x,0) = k(x)\end{cases} \qquad \Rightarrow \quad s(x,t) = \surd$$

هر معادله به کمک شرایط مرزی و اولیه اش بطور جداگانه حل می شود.

جواب کلی معادله برابر مجموع جوابهای چهار معادله خواهد بود.

جلسه هفتم

اجسام نیمه بینهایت(Semi Infinite Solids)

جسم نیمه بینهایت

جسم نیمه بینهایت جسمی است که در یک راستا تا بینهایت گسترش یافته باشد. مانند زمین. بهترین روش برای حل مسائل نیمه بی نهایت روش تبدیل لاپلاس(Laplace Transform) است.

تبدیل لاپلاس یک تابع بصورت زیر تعریف می شود:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

طبق تعریف فوق، تبدیل لاپلاس چند تابع مهم بصورت زیر است:

$$L[c] = \frac{c}{s}$$

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$L[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$L[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$L[\delta_c(t)] = e^{-cs}$$

$$L[u_c(t)] = \frac{1}{s} e^{-cs}$$

در روابط فوق $u_c(t)$ و $\delta_c(t)$ به ترتیب تابع پله وتابع ضربه هستند که بصورت زیر تعریف می شوند:

$$u_c(t) = u(t-c) = \begin{cases} 1 & t \geq c \\ 0 & t < c \end{cases}$$

$$\delta_c(t) = \delta(t-c) = \begin{cases} 0 & t \neq c \\ \infty & t = c \end{cases}$$

دو رابطه زیر به قضایای انتقال معروفند:

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

لاپلاس معکوس یک تابع بصورت زیر تعریف می شود:

$$L[f(t)] = F(s) \quad \Leftrightarrow \quad L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

دو رابطه مهم زیر در تعیین تابع با استفاده از لاپلاس معکوس زیاد بکار می روند:

$$L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^n}\right] = \underbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t}_{\text{بار } n} f(t)\, \underbrace{dt\, dt\, dt\, dt \dots dt}_{\text{بار } n}$$

$$L^{-1}[F(s)\, e^{-sc}] = u_c(t)\, f(t-c)$$

لاپلاس مشتق اول و دوم یک تابع از روابط زیر بدست می آیند:

$$L[y'] = sL[y] - y(0)$$

$$L[y''] = s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)$$

در مورد معادلات با مشتقات جزئی تنها نسبت به t لاپلاس می گیریم و متغیر دیگر ثابت فرض می شود. بنابراین:

$$L[u(x,t)] = U(x,s) = U$$

$$L[u_x] = L\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x} L[u] = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$L[u_{xx}] = L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L[u] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$L[u_t] = sL[u] - u(x,0) = sU(x,s) - u(x,0)$$

$$L[u_{tt}] = s^2 U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$$

مثال

معادله دیفرانسیل مشتقات جزیی زیر را با استفاده از شرایط مرزی و اولیه داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u(0,t) = f(t)$$

$u(\infty, t) = Bounded$

$u(x, 0) = 0$

$u_t(x, 0) = 0$

حل

از دو طرف معادله نسبت به متغیر t لاپلاس می گیریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = L\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}L[u] = \frac{1}{c^2}\, L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

$$L[u] = U(x, s)\ ,\quad L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, U(x, s) = \frac{1}{c^2}[s^2 U(x, s) - su\,(x, 0) - u_t(x, 0)]$$

اما طبق فرض مساله

$u(x, 0) = 0$ و $u_t(x, 0) = 0$

در نتیجه:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{s^2}{c^2}\, U \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2}\, U = 0 \Rightarrow U(x, s) = c_1 e^{\frac{s}{c}x} + c_2 e^{-\frac{s}{c}x}$$

برای تعیین ثابتها از شرایط مرزی استفاده می کنیم:

$$u(\infty, t) = Bounded \Rightarrow L[u(\infty, t)\,] = Bounded$$

چون $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{s}{c}x}$ به بی نهایت میل می کند لذا باید $c_1 = 0$ تا عامل بی نهایت ساز از بین رود. در نتیجه:

$U(x, s) = c_2 e^{\frac{-s}{c}x}$

برای تعیین c_2 از شرط مرزی دوم استفاده می کنیم:

$$u(0, t) = f(t) \Rightarrow L[u(0, t)] = L[f(t)] \Rightarrow U(0, s) = F(s)$$

و چون $U(x, s) = c_2 e^{\frac{-s}{c}x}$ نتیجه می شود $c_2 = F(s)$ و لذا $U(x, s) = F(s)e^{\frac{-s}{c}x}$

با لاپلاس معکوس گرفتن از طرفین رابطه فوق، جواب نهایی حاصل می شود:

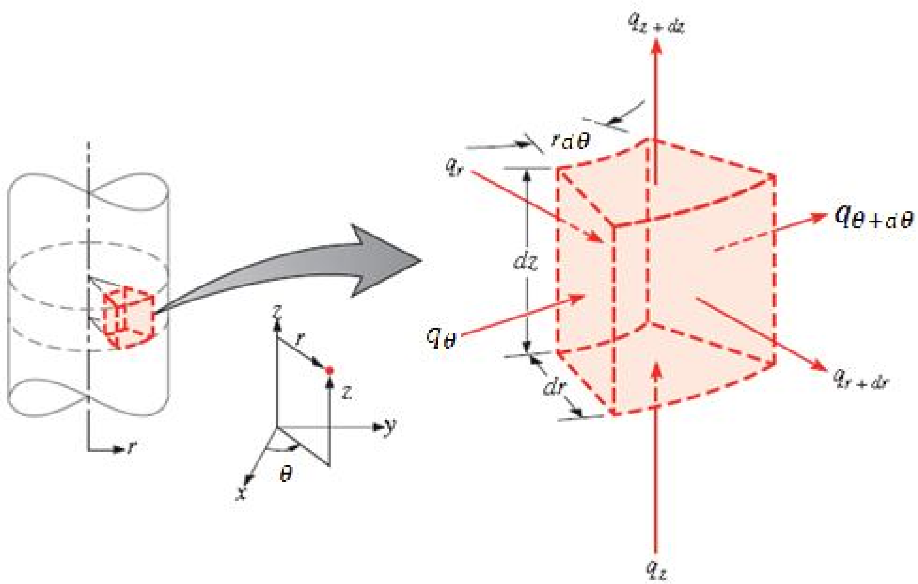
$$u(x, t) = L^{-1}[U(x, s)] = L^{-1}\left[F(s)e^{\frac{-s}{c}x}\right]$$

مختصات استوانه ای(Cylindrical Coordinates)

حال نوبت آن رسیده که معادله دیفرانسیلی توزیع دما را در مختصات استوانه ای بدست آوریم. مسائل زیادی وجود دارد که استفاده از سیستم استوانه ای را اجتناب ناپذیر می نمایند مانند تعیین توزیع دما در یک میله.

در انتهای جلسه دوم با استفاده از روش تبدیل مختصات، معادله دیفرانسیلی توزیع دما را در سیستم استوانه ای از روی مختصات دکارتی بدست آوردیم. در اینجا می خواهیم به روش مستقیم(المان گیری) این معادله را مجددا بدست آوریم.

المانی از یک استوانه را در نظر می گیریم.انرژی های ورودی به المان و خروجی از آن را در شکل نشان می دهیم. در حالت کلی شرایط را غیردائمی در نظر گرفته و فرض می کنیم درون استوانه حرارت تولید می شود.



معادله بقای انرژی را می نویسیم:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st}$$

$$\dot{E}_{in} = q_r + q_\theta + q_z$$

$$\dot{E}_{out} = q_{r+dr} + q_{\theta+d\theta} + q_{z+dz}$$

$$\dot{E}_g = \dot{q}dV$$

$$\dot{E}_{st} = mC\frac{\partial T}{\partial t} = \rho dVC\frac{\partial T}{\partial t}$$

عبارات فوق را درون معادله بقای انرژی قرار می دهیم:

$$(q_r + q_\theta + q_z) - (q_{r+dr} + q_{\theta+d\theta} + q_{z+dz}) + \dot{q}dV = \rho dVC\frac{\partial T}{\partial t}$$

از بسط تیلور می توان نوشت:

$$\begin{cases} q_{r+dr} = q_r + \dfrac{\partial q_r}{\partial r}dr \\ q_{\theta+d\theta} = q_\theta + \dfrac{\partial q_\theta}{\partial \theta}d\theta \\ q_{z+dz} = q_z + \dfrac{\partial q_z}{\partial z}dz \end{cases}$$

در نتیجه:

$$(q_r + q_\theta + q_z) - (q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r}dr + q_\theta + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta}d\theta + q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z}dz) + \dot{q}dV = (\rho dV)C\frac{\partial T}{\partial t}$$

پس ازساده کردن بدست می آوریم:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial r}dr - \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta}d\theta - \frac{\partial q_z}{\partial z}dz + +\dot{q}dV = (\rho dV)C\frac{\partial T}{\partial t}$$

از قانون فوریه می دانیم:

$$\begin{cases} q_r = -k(rd\theta dz)\dfrac{\partial T}{\partial r} \\ q_\theta = -k(drdz)\dfrac{\partial T}{r\partial \theta} \\ q_z = -k(rdrd\theta)\dfrac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

با جایگذاری در رابطه فوق داریم:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(-krd\theta dz\frac{\partial T}{\partial r}\right)dr - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-kdrdz\,\frac{\partial T}{r\partial \theta}\right)d\theta$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(-krdrd\theta\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz + \dot{q}(rdrd\theta dz) = \rho rdrd\theta dz\,C\frac{\partial T}{\partial t}$$

طرفین رابطه را بر$krdrd\theta dz$ تقسیم می کنیم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho C}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r}\left[r\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

در حل اکثر مسائل استوانه علاوه بر معادلات دیفرانسیلی که قبلا اشاره شد، با سه معادله دیفرانسیل دیگر مواجه می شوید که در اینجا در مورد آنها بحث می شود.

معادله کوشی اویلر(Euler Caushy)

معادله زیر به معادله کشی اویلر معروف است:

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \qquad y = y(x)$$

با تغییر متغیر $z = \ln x$ می توان آن را به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت و همگن بصورت زیر تبدیل کرد و سپس به روش تشکیل معادله مشخصه آن را حل کرد.در نهایت بجای z، $\ln x$ قرار داد.

$$y'' + (a-1)y' + by = 0 \qquad y = y(z)$$

$$z = \ln x$$

مثال

معادله کشی اویلر زیر را حل کنید.

$$x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0$$

حل

$$a = 3, b = 2$$

تشکیل معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت و همگن:

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

تشکیل معادله مشخصه:

$$m^2 + 2m + 2 = 0$$

بدست آوردن ریشه ها و تعیین جواب:

$$m = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i \Rightarrow \beta = -1, \gamma = 1 \Rightarrow y = e^{-z}(c_1 \cos z + c_2 \sin z)$$

جایگذاری $\ln x$ بجای z:

$$y = e^{-\ln x}[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)] = \frac{1}{x}[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)]$$

معادله بسل (Bessel's Equation)

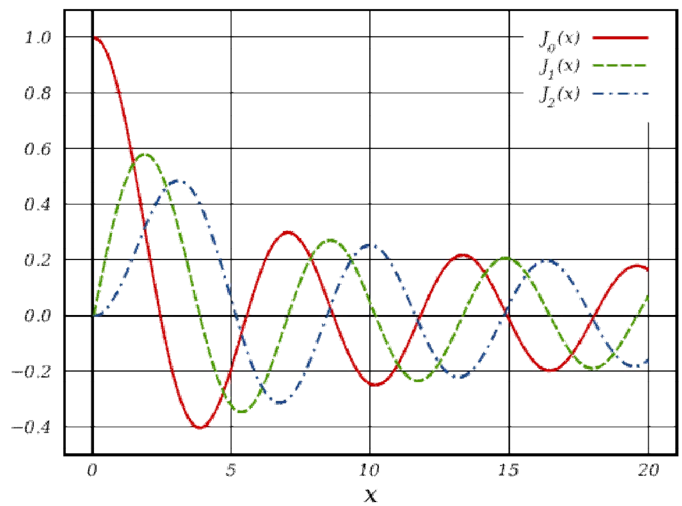
فرم کلی این معادله عبارت است از:

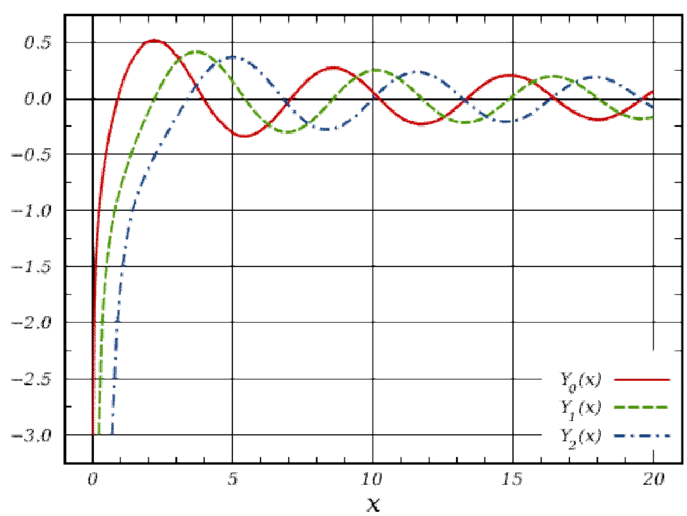
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - P^2)y = 0$$

که در آن P مرتبه (Order) معادله است. پاسخ معادله بسل به صورت زیر است:

$$y(x) = c_1J_P(x) + c_2Y_P(x)$$

$J_P(x)$ تابع بسل مرتبه اول و $Y_P(x)$ تابع بسل مرتبه دوم است.نمودار این توابع به صورت زیر می باشد.





معادله پیراسته بسل(Modified Bessel's Equation)

معادله پیراسته بسل به شکل کلی زیر است:

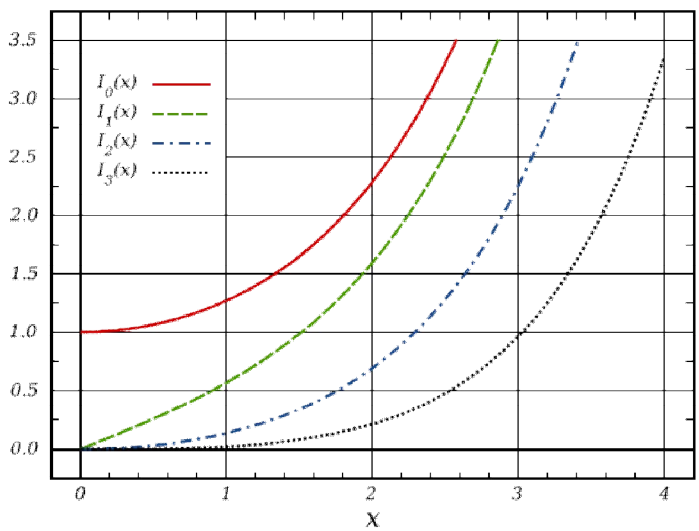
$$x^2y'' + xy' - (x^2 + P^2)y = 0$$

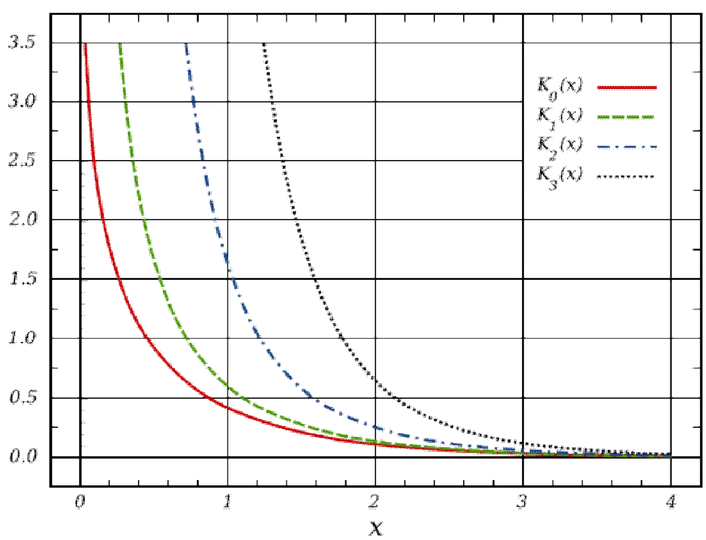
که در آن P مرتبه (Order) معادله است. فرم کلی پاسخ معادله پیراسته بسل به صورت زیر است:

$$y(x) = c_1 I_P(x) + c_2 K_P(x)$$

$I_P(x)$ تابع پیراسته بسل مرتبه اول و $K_P(x)$ تابع پیراسته بسل مرتبه دوم است.

شکلهای زیر نمودار این توابع را نشان می دهند.





همانطورکه از شکل مشخص است توابع $K_P(x)$ محور افقی یا عمودی را هرگز قطع نمی کنند و با این محورها مجانب می شوند. از طرفی توابع $I_P(x)$ به ازای تمام مقادیر P محور عمودی را قطع می کنند ولی تنها به ازای $P = 0$ محور عمودی در نقطه ای غیر از مبدا قطع می شود.

مثال

پاسخ عمومی معادله زیر را بدست آورید.

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

حل

معادله فوق یک معادله بسل است.

$$P^2 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = c_1J_P(x) + c_2Y_P(x) \quad \Longrightarrow \quad y(x) = c_1J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2Y_{\frac{1}{2}}(x)$$

جلسه هشتم

مثال

یک جسم توپر از یک نیم استوانه به شعاعb و ارتفاعh و دو صفحه تخت عمودی در طرفین آن تشکیل شده است.قاعده پایینی، سطح جانبی استوانه و دو صفحه تخت عمودی در دمای صفر درجه سانتیگراد ثابت نگه داشته شده اند. دمای قاعده بالایی بصورت تابع معلوم $f(r\,,\theta)$ داده شده است. توزیع دما در این جسم را در حالت دائمی پیدا کنید.

حل

معادله دیفرانسیلی توزیع دما در سیستم استوانه ای بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\,\frac{\dot{q}}{k}=\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

چون طول استوانه محدود است بنابراین دما تابعی ازz است از طرفی با توجه به اینکه این جسم نسبت به θ متقارن نیست بنابراین تابعی از آن است. حالت دائمی باعث می شود سمت راست معادله صفر شود همچنین عدم تولید حرارت در جسم باعث حذف شدن آخرین جمله از سمت چپ معادله می شود پس برای این مساله، معادله دیفرانسیلی توزیع دما به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0$$

شرایط مرزی حاکم بر مساله به صورت زیر نوشته می شوند (مبدا مختصات را مرکز قاعده پایینی فرض می کنیم):

قاعده پایینی : $T\,(r\,,\theta,0)\;=\;0$

سطح جانبی : $T(b\,,\theta,z)\;=\;0$

صفحه سمت راست : $T\,(r,0\,,z)\;=\;0$

صفحه سمت چپ : $T\,(r\,,\pi,z)\;=\;0$

قاعده بالایی : $T\,(r\,,\theta,h\,)\;=\;f\,(r\,,\theta)$

چون معادله و شرایط مرزی حاکم بر آن همگن است بنابراین از روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم:

$$T\,(r,\theta,z)\;=\;R(r)\vartheta(\theta)Z(z)$$

مشتقات لازم را بدست آورده و در معادله قرار می دهیم:

$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = R''\vartheta Z \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial r} = R'\vartheta Z \ , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = R\,\vartheta'' Z \quad , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = R\,\vartheta Z''$

$R''\vartheta Z + \frac{1}{r}R'\vartheta Z + \frac{1}{r^2}R\,\vartheta'' Z + R\,\vartheta Z'' = 0$

با تقسیم بر $R\vartheta Z$ داریم:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

طرفین را در r^2 ضرب کرده و $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ را به طرف دیگر تساوی انتقال می دهیم و سپس هر دو طرف را برابر مقدار ثابت σ قرار می دهیم:

$$\frac{r^2R''}{R} + \frac{rR'}{R} + \frac{\vartheta''}{\vartheta} + r^2\frac{Z''}{Z} = 0 \Rightarrow \frac{r^2R'' + rR'}{R} + r^2\frac{Z''}{Z} = -\frac{\vartheta''}{\vartheta} = \sigma$$

شرایط مرزی را ساده می کنیم:

$T(r,\theta,0) = 0 \implies R(r)\vartheta(\theta)Z(0) = 0 \Rightarrow Z(0) = 0$

$T(b,\theta,z) = 0 \implies R(b)\vartheta(\theta)Z(z) = 0 \Rightarrow R(b) = 0$

$T(r,0,z) = 0 \Rightarrow R(r)\vartheta(0)Z(z) = 0 \Rightarrow \vartheta(0) = 0$

$T(r,\pi,z) = 0 \implies R(r)\vartheta(\pi)Z(z) = 0 \Rightarrow \vartheta(\pi) = 0$

$\sigma = 0 \implies -\frac{\vartheta''}{\vartheta} = 0 \Rightarrow \vartheta'' = 0 \implies \vartheta(\theta) = c_1\theta + c_2$

$\vartheta(0) = 0 \implies c_1(0) + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$\vartheta(\pi) = 0 \implies c_1\pi = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \vartheta(\theta) = 0$

$\sigma = -\lambda^2 \Rightarrow -\frac{\vartheta''}{\vartheta} = -\lambda^2 \implies \vartheta'' - \lambda^2\vartheta = 0 \implies \vartheta(\theta) = c_1\cosh\lambda\theta + c_2\sinh\lambda\theta$

$\vartheta(0) = 0 \Rightarrow c_1(1) + c_2(0) = 0 \implies c_1 = 0$

$\vartheta(\pi) = 0 \implies c_2\sinh\lambda\pi = 0 \implies c_2 = 0 \Rightarrow \vartheta(\theta) = 0$

$\sigma = \lambda^2 \Rightarrow -\frac{\vartheta''}{\vartheta} = \lambda^2 \implies \vartheta'' + \lambda^2\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta(\theta) = c_1\cos\lambda\theta + c_2\sin\lambda\theta$

$\vartheta(0) = 0 \Rightarrow c_1(1) + c_2(0) = 0 \implies c_1 = 0$

$\vartheta(\pi) = 0 \implies c_2 sin\lambda\pi = 0 \Rightarrow sin\lambda\pi = 0 \Rightarrow \lambda\pi = n\pi \Rightarrow \lambda_n = n$

$\Rightarrow \vartheta_n(\theta) = c_n sin\lambda_n\theta$

در این مرحله چون برای $\vartheta(\theta)$ جواب قابل قبول بدست آمد، در ادامه سراغ سمت چپ تساوی می رویم:

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} + r^2\frac{Z''}{Z} = \lambda^2$$

طرفین رابطه را بر r^2 تقسیم می کنیم:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = \frac{\lambda^2}{r^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{\lambda^2}{r^2} = -\frac{Z''}{Z} = \gamma$$

چون سمت چپ تابعی از r و سمت راست تابعی از z است دو طرف را برابر مقدار ثابت γ در نظر گرفته ایم.

$$\gamma = 0 \Longrightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{\lambda^2}{r^2} = 0 \Longrightarrow r^2R'' + rR' - \lambda^2R = 0$$

معادله بدست آمده از نوع کوشی اویلر($x^2y'' + axy' + by = 0$) با $a = 1$ و $b = -\lambda^2$ است که باید آن را به یک معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت($y = y(z)$ $\quad y'' + (a-1)y' + by = 0$) تبدیل و سپس حل کرد.

$$R''_z - \lambda^2R_z = 0$$

$$R(z) = c_1e^{\lambda z} + c_2e^{-\lambda z}$$

$$z = Lnr \implies e^z = r \Longrightarrow R(r) = c_1r^{\lambda} + c_2r^{-\lambda}$$

چون دما در مرکز استوانه نمی تواند نامتناهی باشد و از طرفی $\lim_{r\to 0} r^{-\lambda}$ به بی نهایت میل می کند لذا باید c_2 صفر شود تا عامل بینهایت ساز از بین برود در نتیجه $R\ (r) = c_1r^{\lambda}$

$$R\ (b) = 0 \implies c_1b^{\lambda} = 0 \Longrightarrow c_1 = 0 \Longrightarrow R(r) = 0$$

$$\gamma = \mu^2 \Longrightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{\lambda^2}{r^2} = \mu^2 \Longrightarrow r^2R'' + rR' - \lambda^2\ R = \mu^2r^2R \Longrightarrow$$

$$r^2R'' + rR' - (\mu^2r^2 + \lambda^2)R = 0$$

معادله اخیر، معادله پیراسته بسل $(x^2y'' + xy' - (x^2 + P^2)y = 0)$ است که جواب آن بصورت $y(x) = c_1I_P(x) + c_2K_P(x)$ است. بنابراین جواب معادله فوق بصورت زیر خواهد بود:

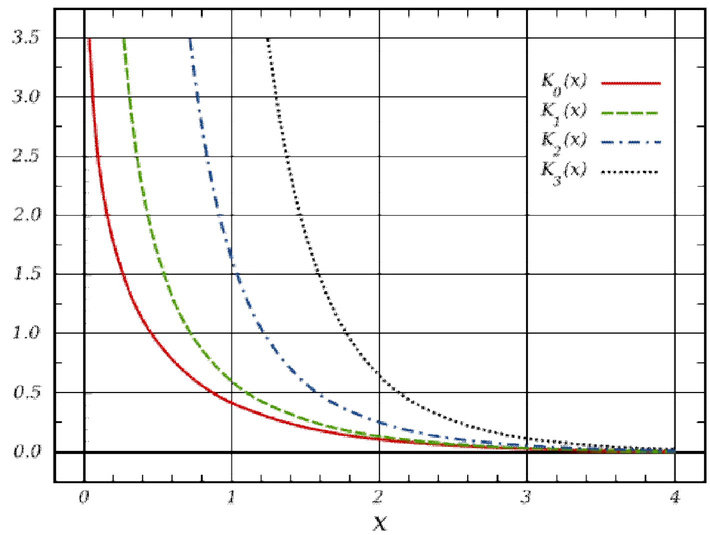
$$R(r) = c_1I_{\lambda}(\mu r) + c_2K_{\lambda}(\mu r)$$

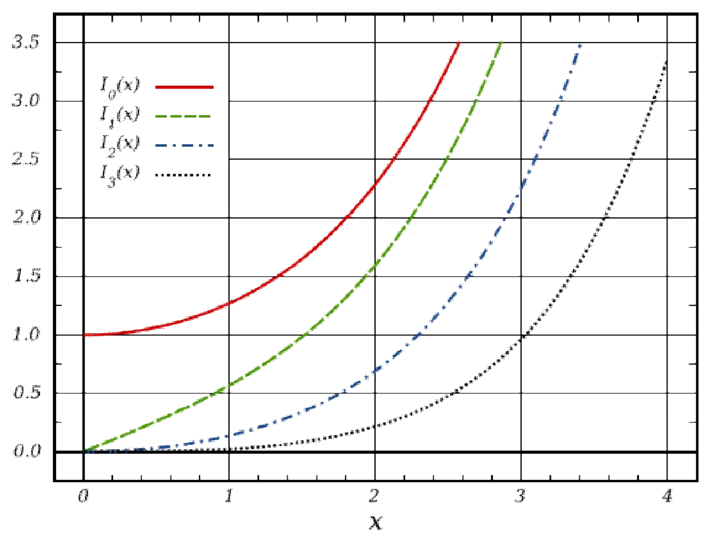
مطابق با نمودار، توابع پیراسته بسل مرتبه دوم (K) هنگامیکه متغیر مستقل به صفر میل کند به بینهایت میل خواهند کرد. بنابراین باید c_2 برابر صفر شود تا عامل بینهایت ساز حذف شود تا دما در مرکز استوانه نامحدود نشود.

$$R(r) = c_1I_{\lambda}(\mu r)$$

$$R(b) = 0 \implies c_1I_{\lambda}(\mu b) = 0$$

با مشاهده نمودارهای توابع پیراسته بسل مرتبه اول(I) دیده می شود توابع I تنها در نقطه صفر می توانند صفر شوند. با توجه به اینکه μb هرگز صفر نیست لذا $I_\lambda(\mu b)$ هیچگاه صفر نمی شود و باید $c_1 = 0$.
پس در این حالت هم جواب قابل قبولی بدست نمی آید.





$$\gamma = -\mu^2 \Longrightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{\lambda^2}{r^2} = -\mu^2 \Longrightarrow r^2R'' + rR' - \lambda^2 R = -\mu^2 r^2 R$$

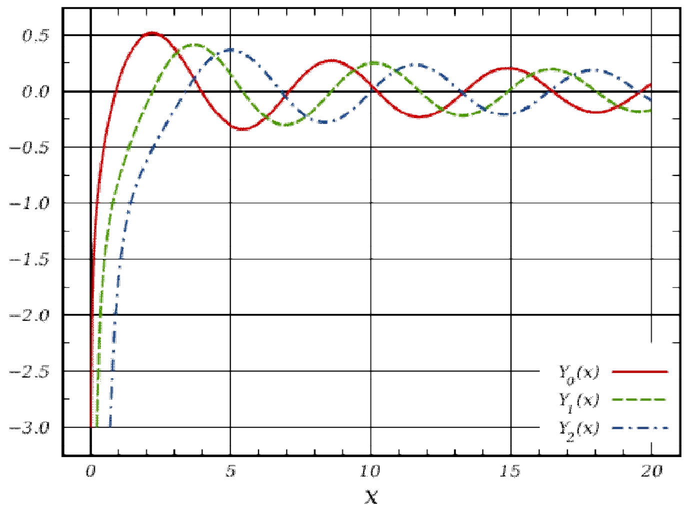
$$\Longrightarrow r^2R'' + rR' + (\mu^2 r^2 - \lambda^2)R = 0$$

که این یک معادله بسل$(x^2y'' + xy' + (x^2 - P^2)y = 0)$ است و همانطورکه می دانیم جواب آن به شکل

$y(x) = c_1 J_P(x) + c_2 Y_P(x)$ است. پس پاسخ معادله فوق می شود:

$$R(r) = C_1 J_\lambda(\mu r) + C_2 Y_\lambda(\mu r)$$

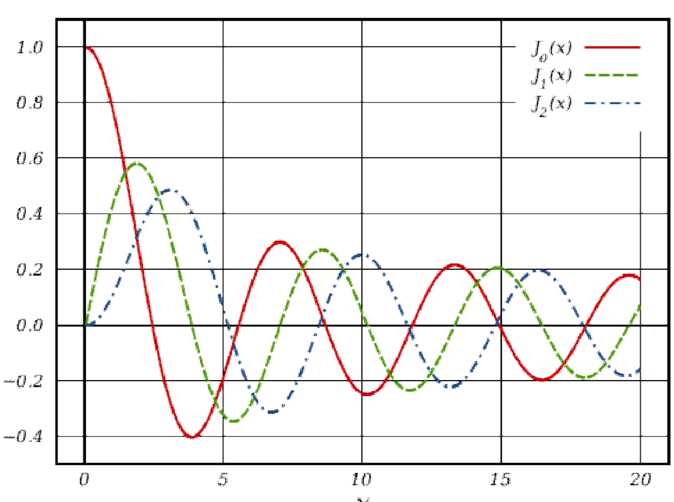
اگر به نمودارهای توابع Y نگاه کنید، می بینید همگی این توابع در مبدا مختصات $(r = 0)$ به بینهایت میل می کنند.شرط فیزیکی محدود بودن دما در مرکز استوانه ایجاب می کند که C_2 برابر صفر شود تا عامل بینهایت ساز از بین برود.



$$R(r) = C_1 J_\lambda(\mu r)$$

$$R(b) = 0 \Longrightarrow C_1 J_\lambda(\mu b) = 0 \Longrightarrow J_\lambda(\mu b) = 0$$

همانطور که دیده می شود توابع بسل مرتبه اول (J) می توانند در نقاط معینی صفر شوند. این نقاط به صفرها یا ریشه های تابع بسل معروفند که در کتابهای ریاضی چند صفر اول توابع بسل از مراتب صفر تا پنج داده شده است.



$$J_{\lambda_n}(\mu b) = 0 \Longrightarrow \mu b = q_{nm} \Longrightarrow \mu_{nm} = \frac{q_{nm}}{b}$$

q_{nm} را ریشه(صفر)m ام تابع بسل J با مرتبه n می نامند.

$$R_{nm}(r) = C_{nm}J_{\lambda_n}(\mu_{nm}r)$$

اکنون باید تابع Z را بدست آوریم:

$$-\frac{Z''}{Z} = -\mu^2 \Longrightarrow Z'' - \mu^2 Z = 0 \Longrightarrow Z(z) = D_1 cosh\mu z + D_2 sinh\, \mu z$$

$$Z(0) = 0 \Longrightarrow D_1(1) + D_2(0) = 0 \Longrightarrow D_1 = 0 \Longrightarrow Z(z) = D_2 sinh\, \mu z$$

$$\Longrightarrow Z_{nm}(z) = D_{nm} sinh(\mu_{nm} z)$$

$$T\,(r,\theta,z) = R(r)\vartheta(\theta)Z(z) \Longrightarrow T_{nm}(r,\theta,z) = R_{nm}(r)\vartheta_n(\theta)Z_{nm}(z)$$

$$\Longrightarrow T_{nm}(r,\theta,z) = c_n C_{nm} D_{nm} J_{\lambda_n}(\mu_{nm} r) sin\lambda_n\theta \sinh\,(\mu_{nm}z)$$

$$T_{nm}(r,\theta,z) = G_{nm}J_{\lambda_n}(\mu_{nm} r) sin\lambda_n\theta \sinh\,(\mu_{nm}z)$$

$$T(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}J_{\lambda_n}(\mu_{nm} r)\sin(\lambda_n\theta)\sinh\,(\mu_{nm}z)$$

چون دو اندیس وجود دارد، از دو سیگما استفاده شده است.برای تعیین G_{nm} که برابر $c_n C_{nm} D_{nm}$ است از آخرین شرط مرزی استفاده می کنیم و بجای λ_n مقدارش n را که قبلا بدست آوردیم، قرار می دهیم:

$$T(r,\theta,h) = f(r,\theta) \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}J_n(\mu_{nm} r)\sin(n\theta)\sinh\,(\mu_{nm}h) = f(r,\theta)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} sinn\theta \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}J_n(\mu_{nm} r)\sinh\,(\mu_{nm}h) = f(r,\theta)$$

فرض می کنیم:

$$\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}\, J_n(\mu_{nm} r)\sinh(\mu_{nm}h) = A_n(r)$$

در نتیجه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\,(r) sinn\theta = f(r,\theta)$$

از بسط نیم دامنه فوریه رابطه زیر را داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x) \Rightarrow b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

درنتیجه:

$$A_n(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(r,\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

اکنون باید G_{nm} را بدست آوریم.

$$\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} J_n(\mu_{nm} r) sinh(\mu_{nm} h) = A_n(r)$$

هرگاه درون سیگما تابع بسل قرار داشته باشد بمنظور استفاده از اصل تعامد، طرفین را در $rJ_n(\mu_{nm'}r)$ ضرب نموده و در بازه تغییرات r انتگرال می گیریم:

$$\sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} J_n(\mu_{nm} r) rJ_n(\mu_{nm'} r) sinh(\mu_{nm} h) = A_n(r) rJ_n(\mu_{nm'} r)$$

$$\int_0^b \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} J_n(\mu_{nm} r) rJ_n(\mu_{nm'} r)\, sinh(\mu_{nm} h)\, dr = \int_0^b A_n(r) rJ_n(\mu_{nm'} r) dr$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} sinh(\mu_{nm} h) G_{nm} \int_0^b rJ_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm'} r) dr = \int_0^b A_n(r) rJ_n(\mu_{nm'} r) dr$$

از قواعد توابع بسل می دانیم:

$$if \quad m \neq m' \quad : \quad \int_0^b rJ_n(\mu_{nm} r) J_n(\mu_{nm'} r) dr = 0$$

بنابراین سیگما تنها برای $m = m'$ جواب خواهد داشت.

$$sinh(\mu_{nm} h) G_{nm} \int_0^b r J_n^2(\mu_{nm} r) dr = \int_0^b A_n(r) rJ_n(\mu_{nm} r) dr$$

از قواعد توابع بسل داریم:

$$\int_0^b r\,J_n^2(\mu_{nm} r)dr = \frac{1}{2} b^2 J_{n+1}^2(\mu_{nm} b)$$

$$\Rightarrow sinh(\mu_{nm} h) G_{nm} \frac{b^2}{2} J_{n+1}^2(\mu_{nm} b) = \int_0^b A_n\,(r) r J_n(\mu_{nm} r) dr$$

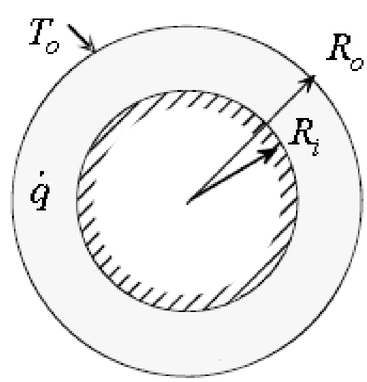
$$\Rightarrow G_{nm} = \frac{\int_0^b r A_n\,(r) J_n(\mu_{nm} r) dr}{\frac{b^2}{2} J_{n+1}^2(\mu_{nm} b) sinh\,(\mu_{nm} h)} = \frac{2\int_0^b r A_n\,(r) J_n(\mu_{nm} r) dr}{b^2 J_{n+1}^2(\mu_{nm} b) sinh\,(\mu_{nm} h)}$$

روند کلی حل معادله دیفرانسیلی توزیع دما در سیستم استوانه ای برای مسائل مختلف یکسان است و تنها معادله حاکم و شرایط مرزی فرق می کنند. بنابراین اگر بتوانید شرایط مرزی حاکم بر مساله را تشخیص دهید و معادله دیفرانسیلی توزیع دما را به درستی ساده کنید، حل معادله و تعیین توزیع دما کار چندان مشکلی نخواهد بود. در مثال زیر برای چند حالت مختلف، معادله دیفرانسیلی حاکم وشرایط مرزی نوشته شده است.

مثال

معادله دیفرانسیلی توزیع دما وشرایط مرزی حاکم بر سیستمهای استوانه ای زیر را بنویسید.

- **الف)**



(استوانه طویل و شرایط دائمی است.)

حل

معادله دیفرانسیلی توزیع دما در سیستم استوانه ای عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

چون استوانه طویل است بنابراین دما تابع z نخواهد بود از طرفی با توجه به هندسه و شرایط مرزی پیرامون استوانه مشاهده می شود تقارن وجود دارد و لذا توزیع دما مستقل از θ است.چون شرایط دائمی است سمت راست معادله هم حذف می شود و در نتیجه معادله دیفرانسیلی توزیع دما بصورت زیر ساده می شود:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

چون دما صرفا تابعی از r است، ∂ به d تبدیل شده است.حال شرایط مرزی را بدست می آوریم.

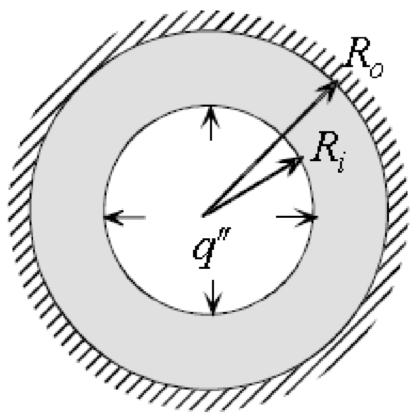
دمای سطح بیرونی استوانه ثابت است(شرط مرزی دیریشلت):

$$T(R_o) = T_o$$

سطح داخلی استوانه عایق است(شرط مرزی نیومن):

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R_i} = 0$$

- **ب)**



(استوانه طویل، شرایط غیردائمی و دمای اولیه T_i است.)

حل

معادله دیفرانسیلی توزیع دما در سیستم استوانه ای عبارت است از:

$$\frac{\partial^2T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

استوانه طویل است بنابراین دما تابع z نیست، با توجه به هندسه و شرایط مرزی پیرامون استوانه تقارن وجود دارد و لذا توزیع دما مستقل از θ است. تولید گرما در داخل استوانه وجود ندارد پس آخرین ترم سمت چپ معادله

نوشته نمی شود، چون شرایط غیردائمی است سمت راست معادله حذف نمی شود و در نتیجه معادله دیفرانسیلی بصورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

شرایط مرزی و اولیه بصورت زیر بدست می آیند:

سطح داخلی استوانه در معرض شار ثابت قرار دارد(شرط مرزی نیومن):

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_i} = -q''$$

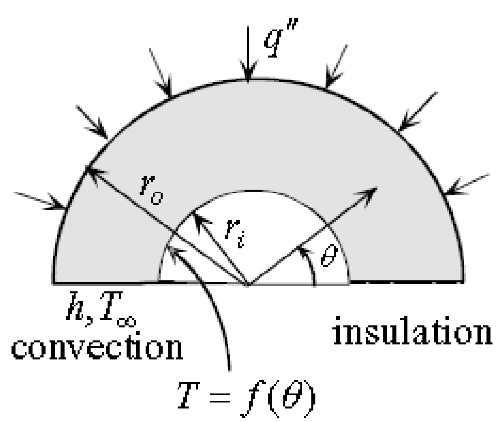
سطح خارجی استوانه عایق است(شرط مرزی نیومن):

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_o} = 0$$

شرط اولیه عبارتست از:

$$T(r,0) = T_i$$

- **ج)**



(استوانه طویل و شرایط دائمی است.)

حل

معادله دیفرانسیلی توزیع دما در سیستم استوانه ای عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

چون استوانه طویل است بنابراین دما تابع z نمی باشد. بدلیل عدم تقارن توزیع دما به θ وابسته است. شرایط دائمی است سمت راست معادله حذف می شود و بالاخره چون در داخل استوانه حرارتی تولید نمی شود $\dot{q}$ هم صفر خواهد شد. در نتیجه معادله دیفرانسیلی بصورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$$

حال شرایط مرزی را بدست می آوریم.

سطح خارجی استوانه در معرض شار ثابت قرار دارد(شرط مرزی نیومن):

$$-k\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_o} = -q'' \qquad 0 < \theta < \pi$$

دمای سطح داخلی استوانه بصورت تابعی معلوم داده شده است(شرط مرزی دیریشلت):

$$T(r_i, \theta) = f(\theta) \qquad 0 < \theta < \pi$$

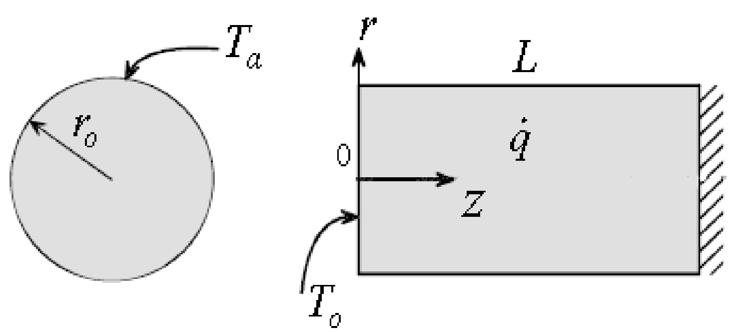
وجه تخت سمت چپ استوانه در تبادل حرارت با محیط است(شرط مرزی جابجایی):

$$-k\frac{\partial T}{r\partial \theta}\bigg|_{(r,\pi)} = h[T(r,\pi) - T_\infty]$$

وجه تخت سمت راست استوانه عایق است(شرط مرزی نیومن):

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}\bigg|_{(r,0)} = 0$$

- **د)**



(شرایط دائمی است.)

حل

معادله دیفرانسیلی توزیع دما در سیستم استوانه ای عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

بدلیل محدود بودن طول استوانه، دما تابعی از z می باشد و بدلیل تقارن، توزیع دما به θ وابسته نیست. شرایط دائمی است پس سمت راست معادله حذف می شود و بالاخره چون در داخل استوانه حرارت تولید می شود $\dot{q}$ در معادله حضور خواهد داشت. در نتیجه معادله دیفرانسیلی بصورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

سطح خارجی استوانه در دمای ثابت قرار دارد (شرط مرزی دیریشلت):

$$T(r_0, z) = T_a$$

وجه چپ استوانه در دمای ثابتی نگه داشته شده است(شرط مرزی دیریشلت):

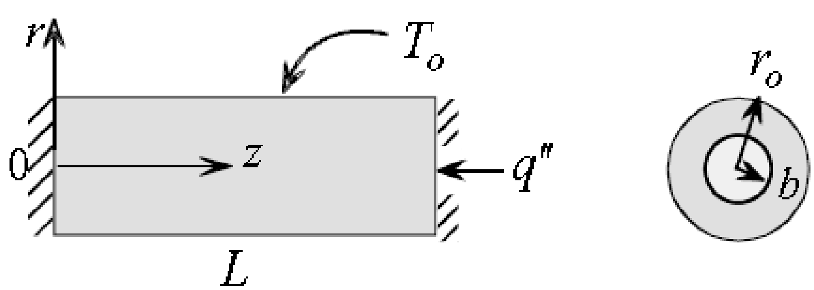
$$T(r, 0) = T_0$$

قاعده راست استوانه عایق است(شرط مرزی نیومن):

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{(r,L)} = 0$$

توجه داشته باشید چون شرایط مرزی در اینجا برای حل معادله کافی نمی باشد از شرط فیزیکی محدود بودن دما در مرکز استوانه هم باید استفاده کرد.

- ه)



(شرایط غیردائمی و دمای اولیه T_i است.)

حل

معادله دیفرانسیلی توزیع دما در سیستم استوانه ای عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

چون طول استوانه بینهایت نیست دما تابعی است از z و بدلیل تقارن توزیع دما مستقل از θ است. شرایط غیردائمی است لذا دما تابعی از زمان است. در داخل استوانه حرارت تولید نمی شود پس $\dot{q}$ در معادله حضور ندارد. در نتیجه معادله دیفرانسیلی توزیع دما بصورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

حال شرایط مرزی و اولیه را می نویسیم.سطح خارجی استوانه در دمای ثابت قرار دارد (شرط مرزی دیریشلت):

$$T(r_0, z, t) = T_0$$

وجه چپ استوانه عایق است(شرط مرزی نیومن):

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{(r,0,t)} = 0$$

روی بخشی از قاعده راست استوانه شار حرارتی وجود دارد در حالیکه بقیه آن عایق است(شرط مرزی نیومن):

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{(r,L,t)} = -q'' \quad 0 < r < b$$

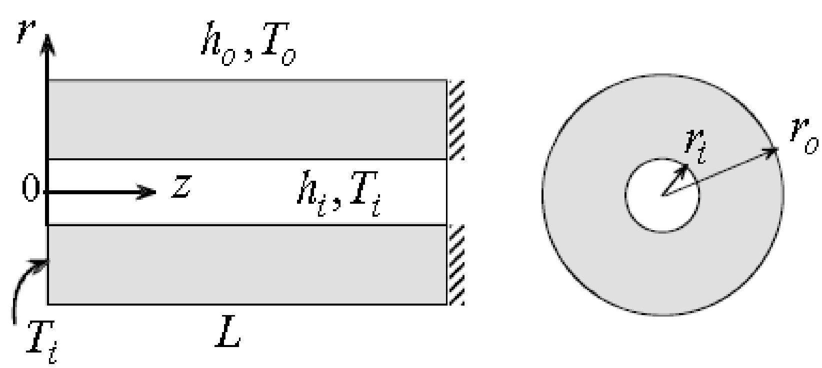
$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{(r,L,t)} = 0 \qquad b < r < r_0$$

ممکن است لازم باشد از شرط فیزیکی محدود بودن دما در مرکز استوانه هم استفاده کنید.

شرط اولیه عبارتست از:

$$T(r, z, 0) = T_i$$

- **و)**



(شرایط دائمی است.)

حل

معادله دیفرانسیلی توزیع دما در سیستم استوانه ای عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

طول استوانه محدود است پس جمله چهارم وجود دارد. تقارن برقرار است بنابراین جمله سوم حذف می شود. شرایط دائمی است لذا سمت راست صفر است. در داخل استوانه حرارت تولید نمی شود پس پنجمین جمله نوشته نمی شود. در نتیجه معادله دیفرانسیلی بصورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

حال شرایط مرزی حاکم بر مساله را می نویسیم.

سطح بیرونی استوانه در تبادل حرارت با محیط است(شرط مرزی جابجایی):

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{(r_o,z)} = h_0[T(r_o,z) - T_0]$$

سطح درونی استوانه هم در تبادل حرارت با محیط است(شرط مرزی جابجایی):

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{(r_i,z)} = h_i[T(r_i,z) - T_i]$$

قاعده چپ استوانه در دمای ثابت قرار دارد (شرط مرزی دیریشلت):

$$T(r,0) = T_i \qquad r_i < r < r_o$$

قاعده راست استوانه عایق است(شرط مرزی نیومن):

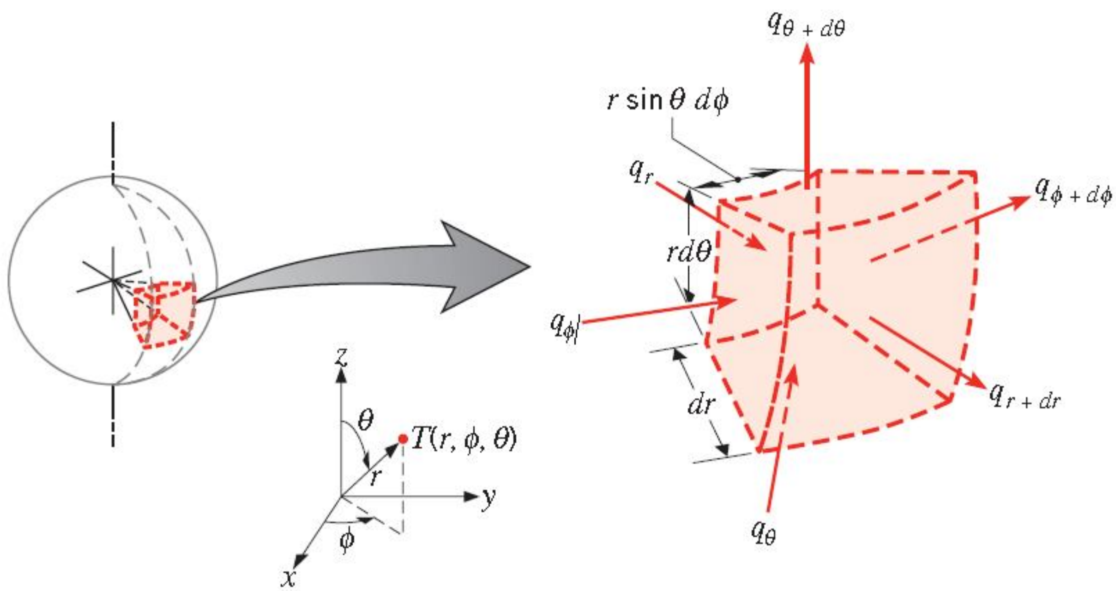
$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{(r,L)} = 0 \qquad r_i < r < r_o$$

جلسه نهم

مختصات کروی(Spherical Coordinates)

در انتهای این جزوه معادله دیفرانسیلی توزیع دما را در مختصات کروی اثبات و حل می کنیم. علاوه بر روش تبدیل مختصات که در جلسه دوم با آن آشنا شدید می توان به روش المان گیری این معادله را بدست آورد.

المانی از یک کره را در نظر گرفته، انرژی های ورودی به المان و خروجی از آن را در شکل نشان می دهیم. بدلیل کلیت بخشیدن به معادله فرض می کنیم شرایط غیردائمی بوده و درون کره گرما تولید می شود.



معادله بقای انرژی را می نویسیم:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st}$$

$$\dot{E}_{in} = q_r + q_\theta + q_\varphi$$

$$\dot{E}_{out} = q_{r+dr} + q_{\theta+d\theta} + q_{\varphi+d\varphi}$$

$$\dot{E}_g = \dot{q}dV = \dot{q}(dr)(rd\theta)(rsin\theta d\varphi)$$

$$\dot{E}_{st} = mC\frac{\partial T}{\partial t} = \rho dVC\frac{\partial T}{\partial t} = \rho(dr)(rd\theta)(rsin\theta d\varphi)C\frac{\partial T}{\partial t}$$

این عبارات را در معادله بقای انرژی جایگذاری می کنیم:

$$q_r + q_\theta + q_\varphi - (q_{r+dr} + q_{\theta+d\theta} + q_{\varphi+d\varphi}) + \dot{q}(r^2sin\theta drd\theta d\varphi)$$
$$= \rho(r^2sin\theta drd\theta d\varphi)C\frac{\partial T}{\partial t}$$

از بسط تیلور می توان نوشت:

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr$$

$$q_{\theta+d\theta} = q_\theta + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta$$

$$q_{\varphi+d\varphi} = q_\varphi + \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi$$

در نتیجه با جایگذاری و ساده کردن بدست می آوریم:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial r} dr - \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta - \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi + \dot{q}(r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi) = \rho(r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi) C \frac{\partial T}{\partial t}$$

از قانون فوریه($q_n = -kA_n \frac{\partial T}{\partial n}$) می دانیم:

$$q_r = -k(rd\theta)(rsin\theta d\varphi)\frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q_\theta = -k(dr)(rsin\theta d\varphi)\frac{\partial T}{r\partial \theta} \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

$$q_\varphi = -k(dr)(rd\theta)\frac{\partial T}{rsin\theta \partial \varphi} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

با جایگذاری در معادله فوق:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left[-kr^2 sin\theta d\theta d\varphi \frac{\partial T}{\partial r}\right] dr - \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-krsin\theta dr d\varphi \frac{\partial T}{r\partial \theta}\right] d\theta$$
$$-\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[-kr dr d\theta \frac{\partial T}{rsin\theta \partial \varphi}\right] d\varphi + \dot{q}(r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi) = \rho(r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi) C \frac{\partial T}{\partial t}$$

با تقسیم بر $kr^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad , \alpha = \frac{k}{\rho C}$$

معادله لژاندر(Legendre's Equation)

هنگام استفاده از مختصات کروی علاوه بر معادلات دیفرانسیلی که در سیستم دکارتی با آنها برخورد نمودید با معادله دیفرانسیل جدیدی بنام معادله لژاندر مواجه خواهید شد. فرم کلی این معادله به صورت زیر است:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

برای حل این معادله از رابطه رودریگس (Rodrigues Formula) که بصورت زیر است استفاده می کنیم:

$$y = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

مثال

معادله لژاندر زیر را حل کنید.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

حل

در این مثال n=2 است. پاسخ طبق رابطه رودریگس به فرم زیر می باشد:

$$y = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

که طبق این رابطه خواهیم داشت:

$$y = P_2(x) = \frac{1}{2^2(2)}\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2]$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2] = 12x^2 - 4 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

اصل تعامد توابع لژاندر

چند جمله ایهای لژاندار خواص مخصوص به خود دارند. از جمله خواص چند جمله ای های لژاندر به موارد زیر می توان اشاره کرد:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \qquad n \neq m$$
$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \qquad n = m$$

این خاصیت توابع لژاندر بیانگر متعامد بودن آنها نسبت به هم در بازه $[-1\ ,\ 1]$ می باشد.

شکل مثلثاتی معادله لژاندر

شکل مثلثاتی معادله لژاندر در مختصات کروی کاربرد بیشتری دارد که با یک تغییر متغیر بدست می آید.

معادله لژاندر زیر را در نظر می گیریم:

$$(1-x^2)\frac{d^2M}{dx^2}-2x\ \frac{dM}{dx}+n\ (n+1)M\ =0 \qquad *$$

قرار می دهیم:

$$M\ =\ \vartheta$$

$$x\ =cos\theta$$

از قاعده زنجیره ای داریم:

$$\frac{dM}{dx}=\frac{d\vartheta}{dx}=\frac{d\vartheta}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}$$

$$x\ =cos\theta\Longrightarrow\frac{dx}{d\theta}=-sin\theta\Longrightarrow\frac{d\theta}{dx}=-\frac{1}{sin\theta}$$

$$\Longrightarrow\frac{dM}{dx}=\frac{d\vartheta}{d\theta}\frac{-1}{sin\theta}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dM}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$

$$\Longrightarrow\frac{d^2M}{dx^2}=\ \frac{d}{d\theta}\left(\frac{-1}{sin\theta}\frac{d\vartheta}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dx}=\left[-\frac{1}{sin\theta}\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}+\frac{cos\theta}{sin^2\theta}\frac{d\vartheta}{d\theta}\right]\left(-\ \frac{1}{sin\theta}\right)$$

حال در * قرار می دهیم:

$$(1-cos^2\theta)\left[-\frac{1}{sin\theta}\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}+\frac{cos\theta}{sin^2\theta}\frac{d\vartheta}{d\theta}\right]\left(-\ \frac{1}{sin\theta}\right)-2cos\theta\left[-\frac{1}{sin\theta}\frac{d\vartheta}{d\theta}\right]+n\ (n+1)\vartheta\ =0$$

چون $(1-cos^2\theta)\left(-\ \frac{1}{sin\theta}\right)=-sin\theta$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}-\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{d\vartheta}{d\theta}+\frac{2cos\theta}{sin\theta}\frac{d\vartheta}{d\theta}+n(n+1)\vartheta\ =0\Longrightarrow\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}+\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{d\vartheta}{d\theta}+n(n+1)\vartheta\ =0$$

دو طرف رابطه فوق را در $sin^2\theta$ ضرب می کنیم:

$$sin^2\theta\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}+sin\theta cos\theta\ \frac{d\vartheta}{d\theta}+n(n+1)\vartheta sin^2\theta\ =0$$

معادله فوق را شکل مثلثاتی معادله لژاندر یا معادله لژاندر مثلثاتی می نامند که جواب آن بصورت زیر است:

$$\vartheta = AP_n(cos\theta)$$

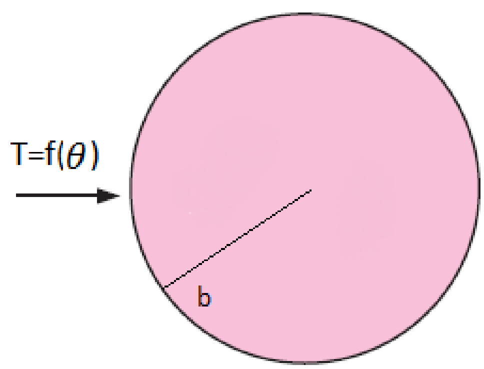
$$P_n(cos\theta) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\theta^n}[(cos^2\theta - 1)^n]$$

اصل تعامد در مورد توابع لژاندر مثلثاتی مطابق با رابطه زیر است:

$$\int_0^{\pi} P_n(cos\theta)\, P_m(cos\theta)\, sin\theta d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

مثال

دما روی سطح خارجی یک کره به شعاع b بصورت تابعی از θ داده شده است. رابطه ای برای توزیع دمای دائمی این کره بدست آورید.



حل

معادله دیفرانسیلی توزیع دما در مختصات کروی در حالت کلی بصورت زیر است:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

چون شرایط دائمی است سمت راست معادله صفر می شود.درون کره گرما تولید نمی شود بنابراین آخرین ترم سمت چپ معادله هم صفر می شود. با توجه به تقارن هندسه و شرایط فیزیکی اطراف کره، دما تابعی از φ نیست و بنابراین ترم سوم هم حذف می شود و معادله بصورت زیر در می آید:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)=0$$

تنها شرط مرزی عبارتست از:

$$T(b,\theta)=f(\theta)$$

دو طرف معادله را در r^2 ضرب می کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)=0$$

از پرانتزها مشتق می گیریم:

$$r^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+2r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{sin\theta}\left(sin\theta\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+cos\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)=0$$
$$\Longrightarrow r^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+2r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \theta}=0$$

چون معادله همگن است از روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم:

$$T(r,\theta)=R(r)\vartheta(\theta)$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}=R''\vartheta \quad \frac{\partial T}{\partial r}=R'\vartheta \quad \frac{\partial T}{\partial \theta}=R\vartheta' \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}=R\vartheta''$$

درون معادله قرار می دهیم:

$$r^2R''\vartheta+2rR'\vartheta+R\vartheta''+\frac{cos\theta}{sin\theta}R\vartheta'=0$$

طرفین را بر $R\vartheta$ تقسیم می کنیم:

$$\frac{r^2R''}{R}+\frac{2rR'}{R}+\frac{\vartheta''}{\vartheta}+\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{\vartheta'}{\vartheta}=0$$
$$\frac{r^2R''+2rR'}{R}=-\frac{\vartheta''}{\vartheta}-\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{\vartheta'}{\vartheta}=\sigma=n(n+1)$$

در مسائل مختصات کروی مقدار ثابت را بصورت $n(n+1)$ در نظر می گیریم.

$$\frac{r^2R''+2rR'}{R}=n(n+1)$$
$$\Longrightarrow r^2R''+2rR'-n\,(n+1)R=0$$

معادله بدست آمده از نوع کوشی اویلر$(x^2y''+axy'+by=0)$ با $a = 2$ و$b = -n\,(n + 1)$ است که همانطورکه می دانید برای حل این معادله ابتدا باید آن را به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت$(y = y(z) \qquad y''+(a-1)y'+by=0)$ تبدیل نمود.

$$R''_z + R'_z - n(n + 1)R_z = 0$$

معادله مشخصه آن را تشکیل می دهیم:

$$m^2 + m - n(n + 1) = 0 \implies m_1 = n\,,\ m_2 = -1 - n = -(1 + n)$$

$$R_z = c_1e^{nz} + c_2e^{-(1+n)z} \qquad ,z = Lnr$$

$$\implies R(r) = c_1e^{nLnr} + c_2e^{-(1+n)Lnr} = c_1r^n + c_2r^{-(1+n)}$$

مشابه استوانه در مرکز کره مانند دیگر نقاط آن دما نمی تواند بینهایت شود و چون$\lim_{r\to 0} r^{-(1+n)}$ بینهایت می شود بنابراین باید $c_2 = 0$. در نتیجه:

$$R_n(r) = c_nr^n$$

$$-\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{\vartheta'}{\vartheta} = n\,(n + 1) \implies \frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{\vartheta'}{\vartheta} + n\,(n + 1) = 0$$

دو طرف رابطه فوق را در$\vartheta sin^2\theta$ ضرب می کنیم:

$$sin^2\theta\vartheta'' + sin\theta\, cos\theta\vartheta' + n(n + 1)\vartheta sin^2\theta = 0$$

معادله بدست آمده معادله لژاندر مثلثاتی است که پاسخ آن بصورت زیر است:

$$\vartheta_n(\theta) = A_nP_n(cos\theta)$$

$$T_n(r,\theta) = R_n(r)\vartheta_n(\theta) = c_nA_nr^nP_n(cos\theta) = D_nr^nP_n(cos\theta)$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n\,(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_nr^nP_n(cos\theta)$$

ثابت درون سیگما از شرط مرزی بدست می آید:

$$T(b,\theta) = f(\theta) \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} D_nb^nP_n(cos\theta) = f(\theta)$$

برای استفاده از اصل تعامد طرفین رابطه را در $P_m(cos\theta)sin\theta$ ضرب کرده و در بازه0 تاπ انتگرال می گیریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_nb^nP_n(cos\theta)P_m(cos\theta)sin\theta = f(\theta)P_m(cos\theta)sin\theta$$

$$\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} D_n b^n P_n(cos\theta)P_m(cos\theta)sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} f\,(\theta)P_m(cos\theta)sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b^n\, D_n \int_0^{\pi} P_n(cos\theta)P_m(cos\theta)sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} f\,(\theta)P_m(cos\theta)sin\theta d\theta$$

از اصل تعامد توابع لژاندر مثلثاتی می دانیم:

$$n \neq m: \quad \int_0^{\pi} P_n(cos\theta)P_m(cos\theta)sin\theta d\theta = 0$$

$$n = m: \quad \int P_n(cos\theta)P_m(cos\theta)sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} P_n^2(cos\theta)sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1}$$

بنابراین برای $n \neq m$ انتگرال صفر شده و در نتیجه تمام جمله های سیگما صفر می شوند و تنها برای $n = m$ حاصل انتگرال برابر $\frac{2}{2n+1}$ و حاصل سیگما برابر $b^n D_n \frac{2}{2n+1}$ می شود.

$$b^n D_n \frac{2}{2n+1} = \int_0^{\pi} f\,(\theta)P_n(cos\theta)\, sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \; D_n = \frac{2n+1}{2b^n}\int_0^{\pi} f\,(\theta)P_n(cos\theta)\, sin\theta d\theta$$