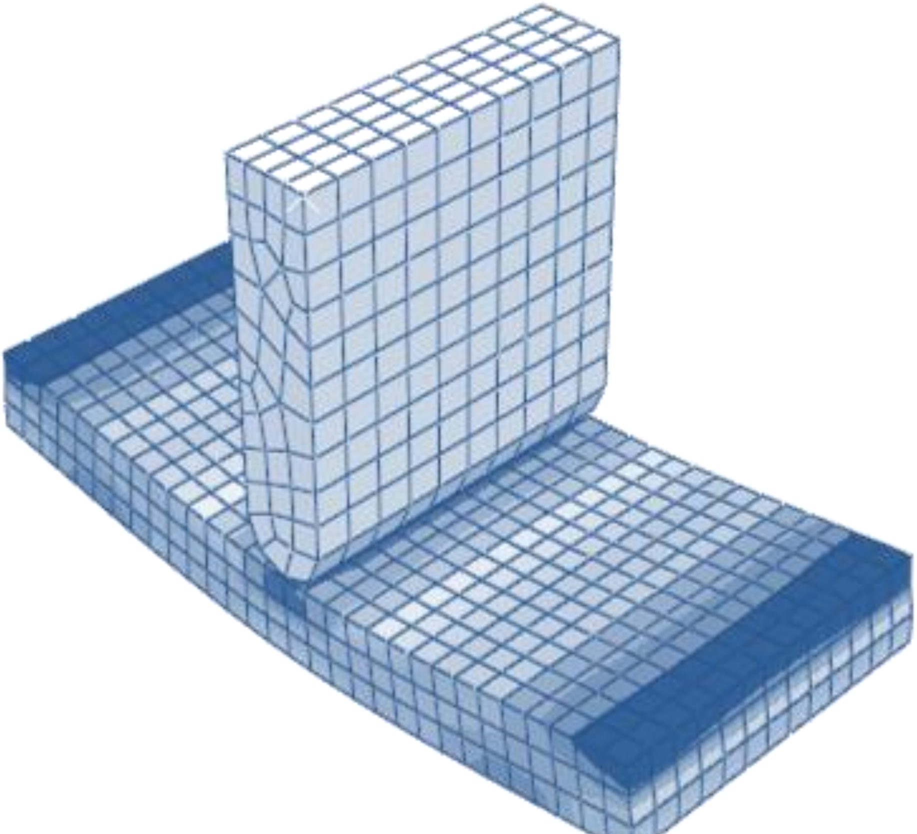
دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی مکانیک

جزوه درس:

مقاومت مصالح

استاد: دکتر مهران مرادی و دکتر صالح اکبرزاده
دانشجو: مهندس علی نصر
نیمسال اول ودوم ۸۹–۱۳۹۰

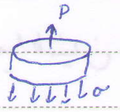


فصل ۱- تنش

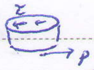
تنش: شدت نیروهای عکس‌العمل داخلی جسم جامد بر واحد سطح $Pa = N/m^2$ $psi = lb/in^2$

تنش عمودی: تنش عمود بر سطح ، نرمال یا محوری σ کششی $+$ فشاری $-$

تنش برشی: تنش مماس بر سطح ، برشی τ



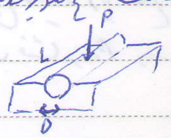
نیرو از مرکز سطح مقطع عبور کند $\sigma = \frac{P}{A}$



$\tau = \frac{P}{A}$

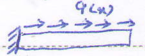
تنش تماسی یا لهیدگی: تنشی که در محل تماس دو سطح به وجود می‌آید σ_b

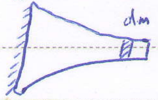
ابتدا سطح تماس دو جسم را بر روی صفحه عمود بر امتداد نیرو تصویر کرده سپس نیرو را بر مساحت سطح تصویر شده تقسیم می‌کنیم



$\sigma_b = \frac{P}{LD}$

تنشی حاصل از نیروی گسترده: نیروی محوری R برابر $\sum_{i=1}^{m}\int q_i(x)dx + \sum_{j=1}^{n} P_j$ که P_j نیروی منفرد و $q_i(x)$ نیروی گسترده وارده به قسمتی از میله واقع در یک طرف مقطع



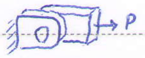


تنش محوری براثر حرکت دورانی $R = \int_{x_c}^{x_D} \rho w^2 x A(x) dx$

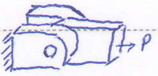
$=$ جرم محور بین $A_{\circ}$ و انتها $\times$ فاصله مرکز جرم قطعه محور $\times w^2$

تنش برشی در پین‌های اتصال

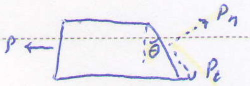
۱- اتصال پین با تنش منفرد: نیروی برشی توسط یک سطح مقطع پین تحمل می‌شود $\tau = \frac{P}{A}$



۲- اتصال پین با تنش دوبل: نیروی برشی توسط دو سطح مقطع پین تحمل می‌شود $\tau = \frac{P/2}{A}$



تنش در صفحات مورب $A_{ab} = \frac{A_0}{\cos\theta}$ $P_n = P\cos\theta$ $P_t = P\sin\theta$ $\sigma_n = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$ $\tau = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta$



تمرکز تنش: در نزدیک نقاط ناپیوستگی مانند وجود سوراخ یا تغییر ناگهانی در سطح مقطع (نقاط بحرانی) تنش افزایش قابل ملاحظه‌ای خواهد داشت

ضریب تمرکز تنش: نسبت تنش ماکزیمم به تنش میانگین (تنش یکنواخت در باریکترین مقطع) ضریب تمرکز تنش نامیده می‌شود

$\sigma_{ave} = \frac{P}{(w-d)t}$ $K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}}$

تنش حرارتی: اگر در سازه‌ای قیودی وجود داشته باشد که از تغییر مکان آزادانه اعضاء سازه براثر حرارت جلوگیری نماید آن‌گاه در اعضاء سازه تنش بوجود خواهد آمد

$\delta_t = \alpha L \Delta T$

تنش پسماند مواد هنگام ساخت تحت اثر فرآیندهای نظیر نورد، اکستروژن، فورجینگ و جوشکاری تحت تنش قرار می‌گیرند و یا پس از ریخته‌گری به طور یکنواخت خنک نمی‌شوند

ضریب اطمینان نسبت بار نهایی P_a به بار مجاز P_{all}

$$F.S = \frac{P_u}{P_{all}}$$

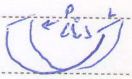
اگر رابطه بین نیرو و تنش خطی باشد

$$F.S = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}}$$

حاشیه اطمینان نسبت بار نهایی P_a به بار طراحی P_d منهای یک

$$M.S = \frac{P_u}{P_d} - 1$$

* اگر سطحی خمیده (یا سطح) تحت فشار ثابت P_0 واقع شود مولفه برآیند نیروهای وارد به سطح در امتداد دلخواه باشد حاصلضرب فشار P_0 و مساحت تصویر سطح بر صفحه عمود بر آن امتداد



$$F=(۲rL)\,P_0$$

ترک در امتداد عمود بر تنش ماکزیمم پدید می‌آید

فصل ۲. کرنش و تغییر مکان محوری

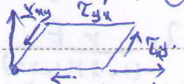
کرنش $\delta = \int_a^b \varepsilon_x \, dx$ تغییر مکان $\delta(x)$ تابعی از کرنش $\varepsilon_0 = \frac{d\delta(x)}{dx}$ $\varepsilon = \frac{L-L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$

کرنش واقعی مجموع کرنش‌ها در هر نقطه $\varepsilon_t = \int_{L_0}^{L} \frac{dl}{l} = \ln \frac{L}{L_0}$

رابطه بین کرنش (کرنش مهندسی) و کرنش واقعی $\varepsilon_t = \ln(1+\varepsilon)$

کرنش برشی در صفحه x-y، زاویه γ_{xy} کرنش برشی در صفحه است. کاهش زاویه اولیه از حالت ۹۰ درجه

به رادیان سنجیده می‌شود. $G = \frac{\tau}{\gamma}$



کرنش حرارتی α ضریب انبساط حرارتی $\sigma = E\alpha\Delta T$ $\varepsilon_T = \frac{\delta}{L} = \frac{\alpha L \Delta T}{L} \rightarrow \varepsilon_T = \alpha \Delta T$

کرنش در حالت سه بعدی: تغییر مکان جسمی در جهت x, y, z به ترتیب به صورت $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

قانون هوک تنش متناسب است با کرنش و ضریب تناسب E مدول الاستیسیته یا مدول یانگ $\sigma = E\varepsilon$

رابطه بین کرنش برشی γ و تنش برشی τ ← $\tau = G\gamma$ که G مدول برشی یا مدول صلبیت که برابر شیب نمودار τ-γ است

تغییر مکان محوری $\delta = \frac{P}{A}\frac{L}{E} = \sigma \frac{L}{E}$ تغییر مکان که $K = \frac{AE}{L}$ ← $P = K\delta$

$\delta = \int_0^L \frac{P(x)}{A(x).E} dx = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E} dx$ میله غیر یکنواخت

* برای تعیین تغییر مکان انتهای میله یکنواخت با سختی EA که تحت بار گسترده است مساحت سطح محصور نمودار بار را در فاصله مرکز سطح نمودار تا تکیه‌گاه ضرب کرده و بر EA تقسیم می‌کنیم

$\delta = \frac{\bar{x} S}{EA}$

$\delta = \int_0^L \frac{x q(x)}{EA} dx$ مبدا در انتهای میله $\delta_c = \int_0^L \frac{(L-x) q(x)}{EA} dx$

* به طور کلی در صورتی که تیر تحت نیروی محوری متمرکز و گسترده باشد نیروها را به صورت تابع برابر وارد کرده و گشتاور حاصل از آن‌ها را بر EA تقسیم می‌نماییم

تانسور تنش تنش‌های عمودی σ_x، σ_y، σ_z بوده و تنش برشی τ_{ij} اندیس i محور عمود بر صفحه و اندیس j جهت تنش در آن صفحه و $\tau_{zx} = \tau_{xz}$، $\tau_{yz} = \tau_{zy}$، $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

روابطی که برای کلیه تانسورها برقرار است $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ $I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$

تغییرناپذیرها یا پایاهای اول، دوم و سوم تانسور تنش $I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$

ضریب پواسون برای موادی که خواص مکانیکی آن ها در همه نقاط همانند (هموژن) و در همه جهات یکسان (ایزوتروپیک

قدر مطلق نسبت کرنش جانبی به کرنش طولی (جهت اعمال بار) $\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} \right|$

$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$ $\nu = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$ $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$

قانون عمومی هوک

$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$ $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ $\sigma_x = ۲G\varepsilon_x + \lambda e$

$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$ $\tau_{yz} = G\gamma_{zy}$ $\sigma_y = ۲G\varepsilon_y + \lambda e$ $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$ $\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$ $\sigma_z = ۲G\varepsilon_z + \lambda e$ $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\lambda)(1-۲\nu)}$

λ و G ثوابت لامه $G = \frac{E}{۲(1+\nu)}$ در صورت وجود کرنش حرارتی به تنش های جهت αT در سه ستون ترم $-\frac{\alpha E T}{1-۲\nu}$ اضافه می شود

تنش صفحه ای در صورتی که تنش در جهتی صفر باشد $\sigma_z = 0$

$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^۲}[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y]$ $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^۲}[\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x]$ $\tau_{yz} = 0$

$\sigma_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ $\tau_{xz} = 0$

کرنش صفحه ای کرنش در جهتی صفر شود سدها، لوله های طویل انتقال گاز، مایعات و تونل مترو $\varepsilon_z = 0$

$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]$ $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]$ $\tau_{yz} = 0$

$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ $\tau_{zx} = 0$

کرنش حجمی نسبت تغییر حجم المان به حجم اولیه اگر ابعاد a، b، c باشد

$$\varepsilon_V = \frac{\text{تغییر حجم}}{\text{حجم اولیه}} = \frac{abc(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - abc}{abc} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

کرنش سطحی نسبت تغییر سطح به سطح اولیه

$$\varepsilon_A = \frac{\text{تغییر سطح}}{\text{سطح اولیه}} = \frac{bc(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - bc}{bc} = (1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1 = \varepsilon_z + \varepsilon_y$$

(xy در صفحه): $\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1}{E}[(1-\nu)(\sigma_x + \sigma_y) - ۲\nu\sigma_z]$

(yz در صفحه): $\varepsilon_A = \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}[(1-\nu)(\sigma_y + \sigma_z) - ۲\nu\sigma_x]$

(zx در صفحه): $\varepsilon_A = \varepsilon_z + \varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1-\nu)(\sigma_z + \sigma_x) - ۲\nu\sigma_y]$

مدول حجمی اگر المان تحت فشار هیدرواستاتیک P

$\varepsilon_V = \frac{1-۲\nu}{E}(-۳p) \rightarrow \varepsilon_V = -\frac{p}{K}$

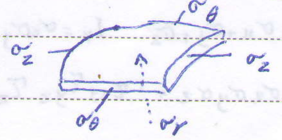
که $K = \frac{E}{۳(1-۲\nu)}$ مدول حجمی یا مدول فشار و یا مدول بالک

تنش در استوانه جدار نازک استوانه جدار نازک به شعاع r و ضخامت t که دو انتهای آن بسته شده و تحت فشار P

$\sigma_z = \frac{Pr}{۲t}$ $\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_z)$ $\Delta r = \varepsilon_\theta r$

$\sigma_\theta = \frac{Pr}{t}$ $\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_\theta)$ $\Delta L = \varepsilon_z L$

$\sigma_r = 0$ $\varepsilon_r = -\frac{\nu}{E}(\sigma_\theta + \sigma_z)$ $\Delta t = \varepsilon_r L$



تنش در کره جدار نازک

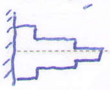
$\sigma_\theta = \sigma_t = \frac{Pr}{۲t}$ $\Delta r = \varepsilon_\theta r$ $\Delta t = \varepsilon_r t$

$\varepsilon_\theta = \frac{(1-\nu)\sigma_\theta}{E} = \frac{(1-\nu)Pr}{۲tE}$ $\varepsilon_r = \frac{-\nu}{E}(۲\sigma_\theta) = -\frac{\nu Pr}{tE}$ $\varepsilon_A = \varepsilon_\theta + \varepsilon_t$

مرکز سختی : میله ای به n میله به سختی k_1، k_2، ...، k_n اگر نیرویی که به آن وارد شود قطعه به صورت افقی تغییر مکان یابد

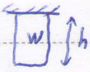
$$x_s = \frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i}$$

* تغییر مکان انتهای میله با سطوح و جنس متفاوت ، ناظری پشت به تکیه گاه روی بخش های مختلف میله مجموع نیروهای که ناظر مشاهده می کند را در $\frac{L}{AE}$ ضرب می کنیم مجموع حاصلضرب ها برابر کرنش

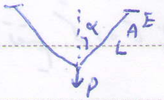


* تغییر مکان انتهای آزاد منشور برابر نیرو نصف وزن منشور به انتهای آن

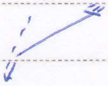
$\frac{Wh}{۲EA}$



* میله های شکل به صورت فنری است که سختی $\frac{EA}{L} \times ۲\cos^۲\alpha$



* میله کج ضریب فنر روبرو را دارد

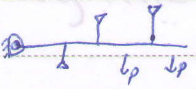


$K = \frac{EA}{L}\cos^۲\alpha$

* اگر به قطعه صلب n میله را کابل وصل باشد و تحت نیرو یا گشتاور و خارجی باشد . نیرو در میله j ام

$F_j = \frac{a_j k_j}{\sum a_i^۲ k_i} M$

a_i فاصله میله i ام از مفصل k_i سختی میله i ام $\frac{A_iE_i}{L_i}$ M مجموع گشتاور نیروهای خارجی حول مفصل



تغییر مکان نقطه دلخواهی از قطعه صلب که به فاصله d از مفصل است

$\delta = \frac{Md}{\sum a_i^۲ k_i}$

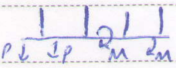
* قطعه صلبی که به n میله متصل و تحت P نیرو و M کوپل باشد نیرو در میله j ام

$+\downarrow P$ $\circlearrowleft M$ سمت راست مرکز سختی +

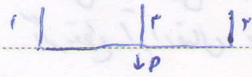
$F_j = \frac{P k_j}{\sum k_i} \mp \frac{k_j a_j}{\sum k_i a_i^۲} M$

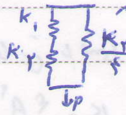
$\theta = \frac{M}{\sum k a^۲}$

$\delta = \frac{P}{\sum k} \mp \frac{Md}{\sum k a^۲}$



* اگر میله صلب به ۳ میله وصل باشد و گشتاور و کوپل حول مرکز صفر باشد

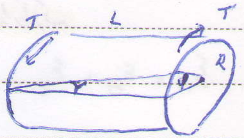




* مرکز سختی بلوکی از n جنس و شکل مختلف است (نه مرکز جرم)

$x_e = \frac{\sum x_i E_i A_i}{\sum E_i A_i}$

فصل ۳ - پیچش



$\tau = \frac{T\rho}{J}$ تنش برشی

$\gamma L = R\phi$

T گشتاور پیچشی

J ممان قطبی

$J = \frac{1}{۲}\pi R^{۴} = \frac{1}{۳۲}\pi D^{۴}$ دایره

$J = \frac{1}{۲}\pi (R_{۱}^{۴} - R_{۲}^{۴}) = \frac{1}{۳۲}\pi (D_{۲}^{۴} - D_{۱}^{۴})$

$\gamma = \frac{\tau}{G}$

G مدول برشی

$\phi = \int \frac{T(x)\,dx}{G\,J(x)}$ T و D متغیر

$\phi = \frac{TL}{GJ}$

$\phi = \int^{x} \frac{t(x)\,dx}{GJ}$ T متغیر

$\phi = \frac{\bar{X} S}{GJ}$

$r\varphi = L\gamma$

* اگر میله تحت گشتاور متمرکز و گسترده باشد میله را به صورتی که گشتاورها برقرار باشد در نظر گرفته و ممان آن را بر GJ تقسیم کرده تا زاویه دوران بدست آید

$\phi = \frac{\Sigma M}{GJ}$

$T = K\phi$

سختی پیچشی $K = \frac{GJ}{L}$

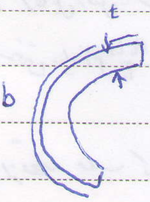
پیچش در مقطع جدار نازک

مقاطع جدار نازک باز

$\tau = \frac{Tt}{J}$

$\phi = \frac{TL}{GJ}$

$J = \frac{1}{۳} t^{۳} b$



$\tau_k = \frac{T t_k}{J} = \frac{T t_k}{\frac{1}{۳}\Sigma b_i t_i^{۳}}$ $\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{TL}{G \times \frac{1}{۳}\Sigma b_i t_i^{۳}}$ اگر مقطع از n مقطع به ضخامت های t_i تشکیل شده باشد

$T = K\phi \rightarrow K = \frac{G \times \frac{1}{۳} b t^{۳}}{L}$ سختی پیچشی

مقاطع جدار نازک بسته

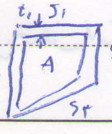
$\tau = \frac{T}{۲At}$ A مساحت محصور بین منحنی بسته ای که از وسط ضخامت می گذرد

$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{TL}{G\,۴A^{۲}} \int \frac{ds}{t}$ $J = \frac{۴A^{۲}}{\int \frac{ds}{t}}$

ds طول بسط منحنی بالا

اگر مقطع از اتصال قطعاتی با ضخامت $t_1, t_2, \dots$ با طول $s_1, s_2, \dots$ باشد

$\phi = \frac{TL}{G \times ۴A^{۲}} \Sigma \frac{s_i}{t_i}$



$T = K\phi \rightarrow K = \frac{۴A^{۲}G}{L\int \frac{ds}{t}}$

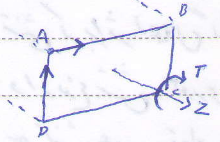
J دایروی $= ۲\pi r^{۳} t$

گشتاور در شفت‌های انتقال قدرت

برای انتقال قدرت اتران P (N.m/s) اگر سرعت زاویه‌ای شفت ω (rad/s) و گشتاور وارد بر آن T باشد (N.m)   f دور بر ثانیه یا هرتز

$$P = T.\omega \rightarrow T=\frac{P}{\omega}=\frac{P}{2\pi f}$$

پیچش مقاطع مستطیل



صفحات افقی و جانبی عمود بر محور x که از نقطه A عبور می‌کنند سطوح آزاد میله می‌باشند

هیچ تنشی بر آنها وارد نمی‌شود $\tau_{yz}=\tau_{yx}=\tau_{xy}=\tau_{xz}=0$

تنش برشی عمود بر محور z صفر می‌باشد. تنش برشی ماکزیمم در وسط اضلاع AB و CD (اضلاع بزرگ مستطیل) رخ می‌دهد

$\tau_{max}=\frac{T}{\alpha ab^2}$ $\alpha \sim \frac{a}{b}$ $\alpha =$ ۰٫۲۰۸ مربع

$\phi=\frac{TL}{\beta Gab^3}$ $\beta \sim \frac{a}{b}$ $\beta =$ ۰٫۱۴۰۶ مربع

پیچش پلاستیک

قسمتی از مقطع ρ_y در مرحله الاستیک و بقیه نقاط $\rho > \rho_y$ در مرحله پلاستیک است

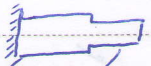
$$T=\frac{4}{3}T_y\left(1-\frac{\rho_y^3}{4R^3}\right)$$

هنگامیکه گشتاور پیچشی افزایش یافته و به T_p ، گشتاور پلاستیک، می‌رسد تنش برشی در کلیه نقاط مقطع برابر تنش تسلیم T_y می‌شد

$$T_p=\frac{4}{3}T_y$$

* زمانی که دو چرخ دنده به یکدیگر متصل باشند $\frac{T_1}{T_2}=\frac{r_1}{r_2}$ $\frac{\phi_1}{\phi_2}=\frac{r_2}{r_1}$

* میله‌ای از دو جنس متفاوت که از ۲ تشکیل شده ← دو فنر موازی فرض شده



* میله با پله در سطح مقطع ← دو فنر موازی فرض شده

* تیری زیر بارگذار با گشتاورهای پیچشی و خمشی را می‌توان تیری با نیروهای عمودی در نظر گرفت و از استاتیک نیروی تکیه‌گاه به دست آید

* مقطعی که تحت گشتاور پیچشی T قرار گرفته است گشتاور پیچشی قسمت BC از مقطع برابر $T_{BC}=\frac{A_s}{A}T$

hp × ۶۶۰۰ = lb in/s

صلبیت پیچشی (سختی پیچشی) مقطع برابر $K=\frac{T}{\phi}$

مقاومت پیچشی برابر $K'=\frac{T}{\tau_{max}}$

* دو دیسک صلب با گشتاور پیچشی T توسط n ردیف پیچ، تنش برشی در پیچ ردیف j ام $\tau_j=\frac{G_j r_j T}{\sum n_i G_i A_i r_i^2}$

G_i مدول برشی پیچ ردیف i ام r_i فاصله پیچ ردیف i ام از مرکز دیسک A_i ساحت مقطع پیچ ردیف i ام و n_i تعداد پیچ ردیف i ام

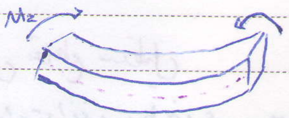
* مجموع جریان برشی در شاخه‌ها برابر صفر است

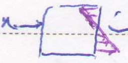
$\sum q_i =$ ۰

فصل ۴ - تنش خمشی در تیرها

براثر اعمال گشتاور خمشی M در قسمت بالای مقطع تیر تنش فشاری و در قسمت پایین آن تنش کششی بوجود می‌آید

نقاطی که تنش صفر است محور خنثی نامیده می‌شود که از مرکز سطح عبور می‌کند





تنشی که براثر اعمال گشتاور خمشی در مقطع تیر بوجود می‌آید تنش خمشی است و از نوع تنش محوری می‌باشد

σ_x تنش عمود بر مقطع در راستای محور x به فاصله y از محور خنثی، M_z گشتاور خمشی و I_z ممان اینرسی مقطع حول z $\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$

فرمول فوق زمانی درست است که مقطع تیر دارای محور تقارن باشد و گشتاور خمشی حول محور اصلی مقطع اعمال شود

c بیشترین فاصله تا محور خنثی دارد و $\frac{I}{c} = S$ مدول مقطع بااساس مقطع است که برابر مقاومت خمشی مقطع است

مقطع نامتقارن

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y + M_y I_{yz})y}{I_y I_z - I_{yz}}$$

در صورتی که رابطه تنش کرنش به صورت $\sigma = K\varepsilon^n$ باشد $I_z = \frac{1}{12}bh^3$ $c = \frac{h}{2}$ $\sigma_x = \frac{n+2}{3c^{n-1}} \frac{M_z y^n}{I_z}$

$\sigma_{max} = \frac{n+2}{3} \frac{M_z c}{I}$

* در صورتی که M حول یکی از محورهای اصلی باشد نیرویی که به قسمتی از مقطع به مساحت A وارد می‌شود برابر $F = \frac{MQ}{I}$

I ممان اینرسی کل مقطع و Q حاصلضرب A در فاصله مرکز سطح A تا محور خنثی

و قسمتی از گشتاور که توسط بخش A تحمل می‌شود $M_A = M\frac{I_A}{I}$ است I_A ممان اینرسی قطعه A حول محور خنثی

* در مقطع n جنسی گشتاور M_j که توسط جنس j ام تحمل می‌شود برابر $M_j = \frac{E_j I_j}{\sum E_j I_j} M$

کرنش محوری نقطه‌ای به فاصله y از محور خنثی (R شعاع انحنا) $\varepsilon_x = \frac{y}{R}$ $\varepsilon_{max} = \frac{c}{R}$ $\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{max}}{c} y$

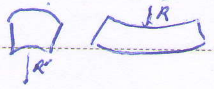
$\varepsilon_z = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{y}{R}$

رابطه بین گشتاور خمشی و شعاع انحنا R_0 شعاع اولیه $\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{M}{EI}$ $\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$

در صورتی که $\sigma = K\varepsilon^n$ باشد و B مقدار ثابتی بر حسب n و K و ابعاد مقطع $\frac{1}{R^n} = \frac{M}{B}$

انحنای آنتی کلاستیک انحنای تیر در جهت z که در طرف مخالف مرکز انحنا و در صورتی که ابعاد طول جسم زیاد نباشد در نظر می‌گیریم

R' شعاع آنتی کلاستیک $R' = \frac{R}{\nu}$



مقطع دو جنسی به مقطع معادل از جنس واحد تبدیل کرد اگر $n = \frac{E_1}{E_2}$ ابعاد جنس 1 را n برابر کرده و تنش نقاط تبدیل شده ($\sigma = \frac{My}{I}$) را در n ضرب می‌کنیم تا تنش جنس 1 به دست آید (I ممان اینرسی مقطع تبدیل شده)

اگر مقطع دارای محور تقارن باشد $I_e = I_2 + nI_1$ می‌شود و $\sigma_2 = \frac{My}{I_e}$ $\sigma_1 = n\frac{My}{I_e}$

* به طور کلی $I_e = \sum n_i I_i$ ممان اینرسی هر یک از جنس i (I_i) حول محور تقارن و $n_i = \frac{E_i}{E_k}$ $\sigma_j = n_j \frac{My}{I_e}$

* در مقطع مرکب ابتدا محل محور خنثی مقطع را بدون تبدیل آن به مقطع معادل بست به بعد از دلخواه $\eta_N = \frac{\sum E_i A_i \eta_i}{\sum E_i A_i}$

A_i مساحت جنس i E_i مدول الاستیسیته جنس i n_i فاصله از مرکز سطح جنس i

$$\sigma_j = E_j \frac{My}{\sum E_i (I_i)_{NA}}$$

σ_j تنش در جنس j ام ، y = فاصله نقطه دلخواه در جنس j ام از محور خنثی

$(I_i)_{NA}$ ممان اینرسی جنس i ام حول محور خنثی E_i مدول الاستیسیته جنس i ام

خمش توأم با نیروی محوری (خمش نامتقارن) گشتاور خمشی حول محورهای اصلی و نیروی محوری در مرکز سطح وجود دارد

$$\sigma_A = \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y} \pm \frac{P}{A}$$

محور خنثی این ۴ سطح ↓: تنش در ربع اول را بدست آورده و برابر صفر قرار داده تا y و z محور خنثی بدست آید

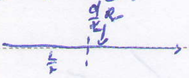
گشتاور خمشی تسلیم و پلاستیک M_y گشتاور خمشی که باعث شود اولین نقطه مقطع وارد ناحیه پلاستیک گردد گشتاور خمشی تسلیم

و گشتاور خمشی پلاستیک باعث می‌شود کلیه نقاط مقطع وارد ناحیه پلاستیک شوند و M_P نمایش می‌دهند

$\frac{M_P}{M_y}$ ضریب شکل

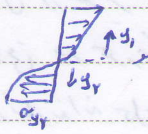
* گشتاور خمشی ماکزیمم زمانی رخ می‌دهد که وسط فاصله بین برآیند نیروها تا نزدیکترین نیرو به آن روی محور تقارن

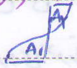
$$M_{max} = \underset{\text{برآیند}}{R}\left(\frac{L}{2} - \frac{d}{4}\right)$$



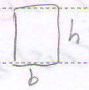
محاسبه گشتاور خمشی با استفاده از نمودار تنش

$$M = \int y_1(\sigma_{y_1})\,dA_1 + \int y_2(\sigma_{y_2})\,dA_2$$



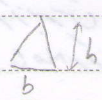


مقطع مستطیل شکل $M = b(A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2)$ $P = b(A_2 - A_1)$ b مقطع

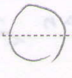


$I = \frac{1}{12} h^3 b$

$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$

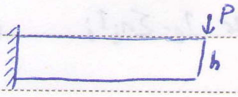


$I = \frac{1}{36} h^3 b$



$I = \frac{1}{4}\pi R^4$

فصل ۵ - تنش برشی در تیر



$\tau_{av} = \frac{P}{th}$

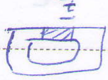
شدت نیروی برشی $= \frac{VQ}{I} = \tau t = q$ جریان برشی

گشتاور اول سطح جدا شده $Q = \int y\,dA = \bar{y}A$ $\tau = \frac{VQ}{It}$

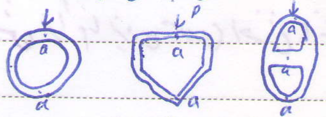
I ممان اینرسی کل مقطع نسبت به محور خنثی t طول برش در مقطع

نیروی برشی در شاخه‌ای به طول b $F = \int_0^b q(x)\,dx$

اگر قطعه تحت برش جدا شده آن را $2t$
۲ برابر کرده و از جهت دیگر هم می‌بریم



* اگر مقطعی دارای محور تقارن باشد و نیروی برشی در راستای این محور به مقطع وارد شود تنش برشی و جریان برشی در نقاطی که توسط محور برش زده صفر است (نقاط a b $\tau = 0$)



اگر مقطعی دارای محور تقارن نباشد

$$\tau = \frac{V_y (I_y Q_z - I_{zy} Q_y)}{t_0 (I_z I_y - I_{zy}^2)}$$

تنش برشی در مقاطع دو جنسی مقطع را به مقطع معادل تبدیل کرده I ممان اینرسی مقطع معادل و t طول برش در مقطع اولیه

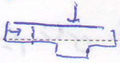
* تیر مرکب از n جنس A_i مساحت جنس بالای برش

$$\tau = \frac{V \sum_{i=k}^{\hat{}} A_i E_i y_i}{t \sum E_i I_i}$$

محل محور خنثی مقطع مرکب

$$y_N = \frac{\sum E_j A_j y_j}{\sum A_j E_j}$$

* **رسم جریان برشی** ابتدا برشی در نقطه دلخواهی زده که مقطع به ۲ قسمت جدا شود داخل هر قسمتی که Q آن مثبت است پیکانی به محل برش رسم می‌کنیم



مرکز برش محلی که اگر نیروی وارد بر تیر از آن عبور کند تیر تحت خمش قرار می‌گیرد و هیچ پیچشی در تیر ما ایجاد نمی‌شود
هر مقطعی که دارای دو محور تقارن باشد محل تلاقی دو محور مرکز برش مقطع می‌باشد.
برای مقاطع جدار نازک که دارای یک محور تقارن هستند محل مرکز برش روی محور تقارن مقطع قرار دارد

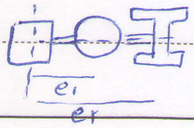
تعیین مرکز برش جریان برشی را رسم کرده، پس گشتاور حاصل از جریان حول یک نقطه (محور) دلخواه گشتاور نیروی برشی حول آن نقطه برابر قرار می‌دهیم

$e = \frac{\sum I_i z_i}{I}$

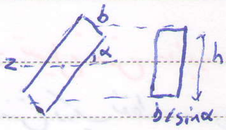
* مرکز برش مقاطع جدار نازکی که یک شاخه قائم و تعدادی شاخه افقی دارند
z_i فاصله مرکز سطح هر شاخه از محور y که بر محور خنثی عمود است

* تیر n جنسی

$$e = \frac{\sum E_i I_i e_i}{\sum E_i I_i}$$



ممان اینرسی مقطع مایل



$I_z = \frac{1}{12} h^3 b/_{\sin\alpha}$

* درصورتی که در مقطعی مقدار t تغییرات ناگهانی نداشته یا به طور تدریجی تغییر نکند تنش برشی عموماً در روی محور خنثی ماکزیمم است

علاوه بر نقاط روی محور خنثی، نقاطی که در گلوگاه واقع شده اند ماکزیمم یا به کلیکرد

مقاومت برشی = نسبت نیروی برشی به تنش ماکزیمم در آن مقطع $\frac{V}{\tau_{max}}$

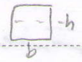
مقطع مستطیل شکل $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$

مقطع دایره‌ای $\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$

مقطع مثلثی $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$

مقطع لوزی $\tau_{max} = \frac{9}{8}\frac{V}{A}$

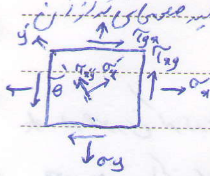
$\frac{1}{64}\pi D^4$



$\frac{1}{12} b h^3$

$I = \frac{1}{48}\frac{a\sqrt{3}}{2} \times a^3$

فصل ۶- تبدیل تنش - دایره موهر



درصورتی که تنش در یک نقطه بر روی دو صفحه که از آن نقطه می گذرند معلوم باشد می توان تنش بر روی کلیه صفحاتی که از آن نقطه عبور می کنند را بدست آورد

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_{x'}-\sigma_{y'}}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - \tau_{xy} \quad 2\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

* تنش نرمال σ_x و σ_y در حالت کششی مثبت می باشد و درصورتی که جهت τ_{xy} بر محور x عمود است حول یک نقطه دلخواه داخل المان پادساعتگرد باشد علامت آن مثبت در نظر گرفته می شود

برای تعیین علامت θ از محور x به طرف خط عمود بر صفحه حرکت می کنیم اگر حرکت در جهت مثلثاتی (پادساعتگرد) باشد علامت θ مثبت می باشد

جهتی که در آن تنش $\sigma_{x'}$ ماکزیمم یا مینیمم گردد جهات اصلی و مقادیر تنش در آن جهات را تنش های اصلی می نامند

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)/2} \qquad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \longrightarrow \tau_{x'y'} = 0$$

در صفحه تنش اصلی تنش برشی صفر است

* تانسور تنش

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \longrightarrow \det\begin{bmatrix} \sigma_x-\sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \sigma_{1,2} \checkmark$$

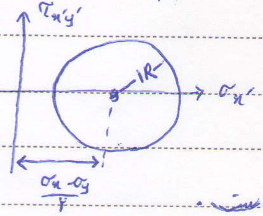
تنش برشی ماکزیمم بر روی دو صفحه عمود بر هم با زوایای θ_s و $\theta_s + \frac{\pi}{2}$ رخ می دهد

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \tau_{max}$$

تنش برشی ماکزیمم برای المان سه بعدی

$$\tau_{max} = \max\left(\frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2-\sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3-\sigma_1|}{2}\right)$$



دایره موهر

مرکز $\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right)$

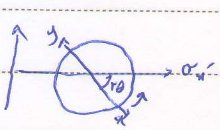
شعاع $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

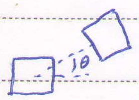
* هر نقطه روی دایره نشان دهنده یک صفحه است که بردار مرکز و آن نقطه عمود بر آن صفحه است.

τ_{xy} زمانی مثبت است که جهت گشتاور آن حول یک نقطه داخل المان ساعتگرد باشد.

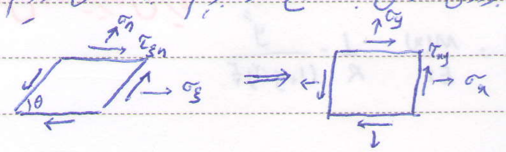
اگر تنش را بر صفحه ای از المان بخواهیم بردار عمود بر آن صفحه را رسم کرده و زاویه آن را با محور x به اندازه θ مشخص کرده و در دایره موهر به اندازه زاویه 2θ جدا می کنیم

اگر بخواهیم نقطه ای در دایره موهر با زاویه 2θ از x و y مشخص کنیم کافی است المان را در جهت آن به اندازه θ بچرخانیم





المان با اضلاع مورب ابتدا با استفاده از المان داده شده تنش بر روی المان با اضلاع عمود بر هم را بدست می آوریم

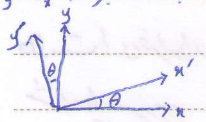


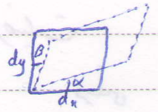
$$\sigma_y = \sigma_\eta \sin\theta$$

$$\tau_{xy} = \sigma_\eta \cos\theta + \tau_{\xi\eta}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sin\theta}(\sigma_\xi + \sigma_\eta \cos 2\theta + 2\tau_{\xi\eta}\cos\theta)$$

تبدیل کرنش مولفه های کرنش در سیستم مختصات $x'y'$ که با x-y زاویه θ می سازد (پادساعتگرد مثبت) برحسب ε_x و ε_y و γ_{xy}





$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos 2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_y \sin^2\theta + \varepsilon_y \cos^2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

علامت ε_x و ε_y مثبت می باشند اگر باعث ازدیاد طول در جهت x و y شوند. علامت γ_{xy} هنگامی مثبت است که زاویه پس از تغییر شکل از $\frac{\pi}{2}$ کمتر شود

کرنش اصلی

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{\gamma_{xy}^2}{4}}$$

زاویه جهات اصلی $\theta_p \rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$

$\gamma_{max} = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$ کرنش برشی ماکزیمم $\gamma_{max} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$

تانسور کرنش

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$I_1' = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

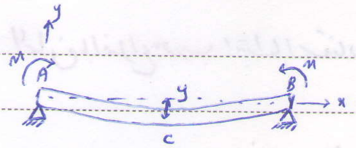
$$I_2' = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

$$I_3' = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \varepsilon_x\gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z\gamma_{xy}^2)$$

نکته اگر سطر و ستون درایه ای از تانسور تنش صفر بود تنش نرمال مربوط به آن سطر و ستون یکی از تنش های اصلی است

دیگر تنش های اصلی برابر مقادیر ویژه تانسور تنش می باشند که از حذف سطر و ستون با درایه های صفر باقی می ماند $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$ $\overset{e}{\text{اصلی}}$

فصل ۷- تغییرمکان تیرها



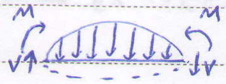
تغییرمکان تیرها $\frac{1}{R}=\frac{M(x)}{EI}$ $\frac{1}{R}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$EIy''=M(x)$ ممان

$EIy'''=V(x)$ نیروی برشی

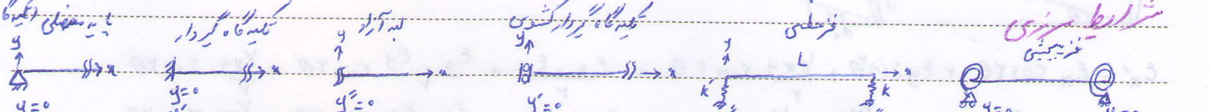
$EIy''''=-w(x)$ بارگسترده

محورهای گشتاور خمشی و بارگسترده مثبت →



علامت‌های قراردادی و فرضیات

شرایط مرزی



با پین مفصلی (تکیه‌گاه ساده): $y=0$ ، $y''=0$

تکیه‌گاه گیردار: $y=0$ ، $y'=0$

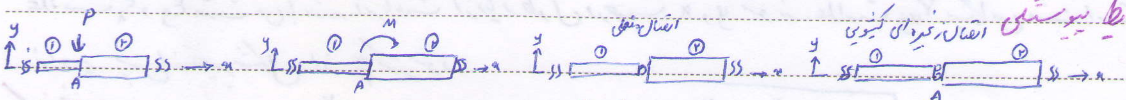
لبه آزاد: $y''=0$ ، $y'''=0$

تکیه‌گاه گیردار کشویی: $y'=0$ ، $y'''=0$

فنر خطی: $y''=0$ ، $EIy'''=-ky$ | $y''=0$ ، $EIy'''=ky$

فنر پیچشی: $y=0$ ، $EIy''=ky'$ | $y=0$ ، $EIy''=-ky'$

شرایط پیوستگی



$y_1=y_2$
$y_1'=y_2'$
$EI_2y_1''=E_2I_2y_2''$
$E_1I_1y_1'''-E_2I_2y_2'''=P$

$y_1=y_2$
$y_1'=y_2'$
$E_2I_2y_2''-E_1I_1y_1''=M$
$E_1I_1y_1'''=E_2I_2y_2'''$

$y_1=y_2$
$y_1''=y_2''=0$
$E_1Iy_1'''=EI_2y_2'''$

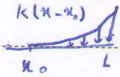
$y_2'=y_2'$
$E_1I_1y_1''=E_2I_2y_2''$
$y_1'''=y_2'''=0$

* مرتبه y در شرایط مرزی و روابط پیوستگی که از آن‌ها برای تعیین ثوابت انتگرال استفاده می‌شود باید از مرتبه معادله دیفرانسیل به کار گرفته شده کمتر باشد مثلاً زمانی که از $EIy''''=-w(x)$ استفاده شده باید از شرایط مرزی و روابط پیوستگی y ، y' ، y'' و y''' استفاده شود

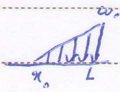
توابع استثنایی (تکین)

$\langle x-x_0\rangle^n=\begin{cases}(x-x_0)^n & x\geq x_0\\ 0 & x<x_0\end{cases}$ $\int\langle x-x_0\rangle^n dx=\frac{1}{n+1}\langle x-x_0\rangle^{n+1}$ $\frac{d}{dx}\langle x-x_0\rangle^n=n\langle x-x_0\rangle^{n-1}$ $n>0$

$\langle x-x_0\rangle^n=\begin{cases}\infty & x_0=x\\ 0 & x\neq x_0\end{cases}$ $\int\langle x-x_0\rangle^n dx=\langle x-x_0\rangle^{n+1}$ $\frac{d}{dx}\langle x-x_0\rangle^n=\langle x-x_0\rangle^{n-1}$ $n<0$

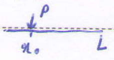


$w(x)=K\langle x-x_0\rangle^n$

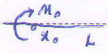


$w(x)=\frac{w_0}{L-x_0}\langle x-x_0\rangle^1$

$w(x)=w_0\langle x-x_0\rangle^0$



$w(x)=P\langle x-x_0\rangle^{-1}$

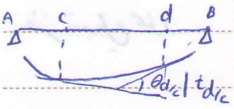


$w(x)=-M_0\langle x-x_0\rangle^{-2}$

$w(x)=\alpha\langle x-x_0\rangle^{-3}$ α ضریب مجهول

* در صورتی که بخواهیم بار w(x) را که به صورت چندجمله‌ای را در فاصله x_0 و x_1 به تیر وارد می‌شود به صورت توابع منفرد نمایش دهیم ابتدا w(x) را یک بار برحسب توان‌های $x-x_0$ و بار دیگر برحسب توان‌های $x-x_1$ مرتب کرده سپس عباراتی که برحسب $x-x_1$ مرتب شده را از عباراتی که برحسب $x-x_0$ مرتب شده را کم می‌کنیم و پرانتزها را ⟨⟩ کرده و فرایش ثابت را در $\langle x-x_0\rangle^0$ و $\langle x-x_1\rangle^0$ ضرب می‌کنیم

روش لنگر مساحت سطح)



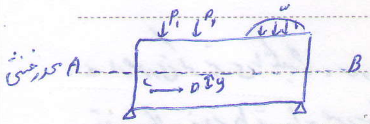
قضیه ۱: تغییر شیب بین مماس‌ها در دو نقطه c و d برابر با سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ بین c و d

$$\theta_{d/c} = \theta_d - \theta_c = A = \int \frac{M(x)}{EI} dx$$

درصورتی که مساحت زیر دیاگرام مثبت باشد تغییر شیب بین c و d مخالف عقربه ساعت

قضیه ۲: فاصله قائم نقطه d نسبت به خط مماس در c ($t_{d/c}$) برابر گشتاور اول سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ بین c و d به نقطه d

درصورتی که سطح زیر منحنی گشتاور خمشی مثبت باشد $t_{d/c}$ بالای خط مماس بر c قرار می‌گیرد $t_{d/c} = \bar{x}A = \int x_1 \frac{M(x)}{EI} dx$



تغییر طول تارهای تحت خمش

تغییر طول تار CD به فاصله y از محور خنثی

$$\delta_{CD} = y \times (\text{سطح زیر منحنی } \frac{M}{EI} \text{ بین } x_D \text{ و } x_c) = y \int_{x_c}^{x_D} \frac{M(x)}{EI} dx = y(\theta_D - \theta_C) = y\theta_{D/C}$$

روش جمع آثار (سوپرپوزیشن) تغییر مکان تیر برابر است با مجموع تغییر مکان‌هایی که هر یک از بارها به تنهایی در تیر ایجاد می‌کنند

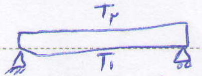
استفاده از فنرهای معادل

تیری تحت بار متمرکز P است $P = K\delta$ و تیر را می‌توان معادل فنری با سختی $K = \frac{EI}{nL^3}$ درنظر گرفت

تیری تحت گشتاور M در نقطه‌ای از آن باشد $M = K\theta$ و تیر معادل فنری پیچشی با سختی $\frac{EI}{nL}$ است

تعیین منحنی تغییر مکان تیر با استفاده از سری مک‌لورن

$$y(x) = y(0) + y'(0) + \frac{M(0)}{2!EI}x^2 + \frac{V(0)}{3!EI}x^3 - \frac{w(0)}{4!EI}x^4 - \frac{w'(0)}{5!EI}x^5 + \dots$$



$$y'' = \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h}$$

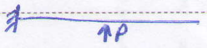
تغییر مکان تیر بر اثر تغییر دمای تیر در راستای عمق است

درصورتی که دمای بالا و پایین تیر به ترتیب T_2 و T_1 باشد انحنای تیر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y = \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{2h}x^2 + C_1x + C_2$$

اگر تیر قرینه بود حتماً نصف تیر را به جای کل آن مدنظر قرار داده و محاسبه می‌کنیم

$$\delta_p = \frac{PL^3}{3EI}$$



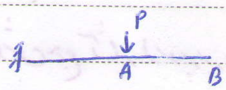
$$\delta_p = \frac{P(\frac{L}{2})^3}{3EI} + \frac{P(\frac{L}{2})^3}{2EI}$$

اگر در نقطه ای از تیر فنری وجود داشت می توان به صورت تیری تحت نیروی متمرکز P در محل اتصال فنر تبدیل نمود

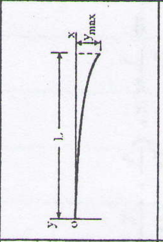
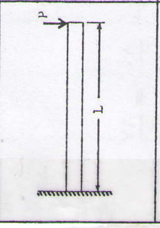
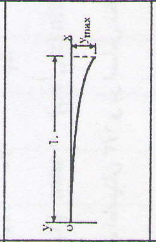
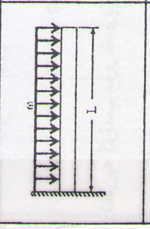
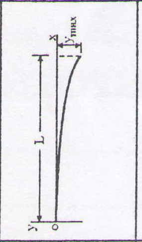
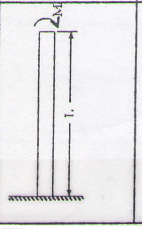
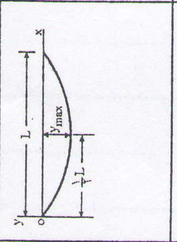
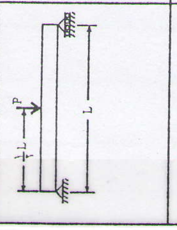
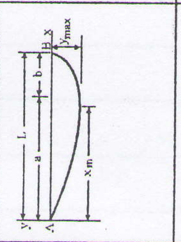
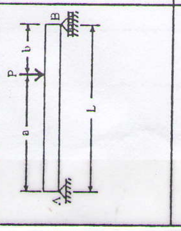
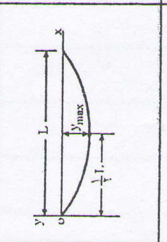
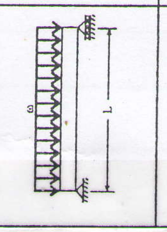
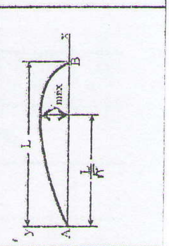
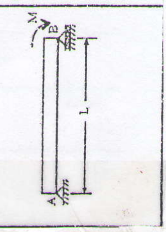
$$\delta_B = \frac{P}{\Sigma k} = \frac{\text{سختی تیر} \times \text{تغییرمکان تیر بدون فنر}}{\text{سختی فنر} + \text{سختی تیر}}$$

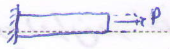
* برای بدست آوردن تغییر مکان یک نقطه از تیر یکسر گیردار که بین نیرو و تکیه گاه است ← نیرو و گشتاور حاصل را به آن نقطه منتقل می کنیم سپس تغییر مکان را با فرمول مربوطه بدست می آوریم

* در صورتی که تیری با تکیه گاه ساده تحت بار متقارن نسبت به وسط تیر قرار داشته باشد  برای بدست آوردن تغییر مکان وسط تیر را به صورت تیر یکسر گیردار فرض می کنیم که تکیه گاه آن در وسط تیر واقع شده باشد تغییر مکان لبه آزاد تیر یکسر گیردار  برابر با تغییر مکان وسط تیر با تکیه گاه ساده است



$\delta_B = \delta_A + AB , \theta_A$

شیب انتهای تیر	خیز ماکزیمم	خیز الاستیک	بارگذاری
$-\frac{PL^2}{2EI}$	$-\frac{PL^3}{3EI}$		
$-\frac{wL^3}{6EI}$	$-\frac{wL^4}{8EI}$		
$-\frac{ML}{EI}$	$-\frac{ML^2}{2EI}$		
$\pm\frac{PL^2}{16EI}$	$-\frac{PL^3}{48EI}$		
$\theta_A = -\frac{Pb(L^2-b^2)}{6EIL}$ $\theta_B = +\frac{Pa(L^2-a^2)}{6EIL}$	For $a > b$: $-\frac{Pb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ at $x_m = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$		
$\pm\frac{wL^3}{24EI}$	$-\frac{5wL^4}{384EI}$		
$\theta_A = +\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ML}{3EI}$	$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$		



فصل ۸ - روش انرژی

کار انجام شده توسط نیروی P (انرژی ذخیره شده در میله) $W=\int_0^{\delta_1}P\,d\delta$ کار متمم $W_c=\int_0^{P_1}\delta\,dP$

$W=\int_0^{\varphi_1}M\,d\varphi$

$W=\int_0^{\theta_1}T\,d\theta$

چگالی انرژی کرنشی انرژی ذخیره شده بر واحد حجم چگالی انرژی کرنشی است $U_0=\int_0^{\varepsilon_1}\sigma\,d\varepsilon$ چگالی انرژی کرنشی متمم $(U_0)_c=\int_0^{\sigma_1}\varepsilon\,d\sigma$

* در حالتی که رابطه تنش و کرنش خطی باشد انرژی کرنشی بر واحد حجم برابر است $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ و اگر میله از قانون هوک $\sigma=E\varepsilon$ پیروی کند ← چگالی انرژی کرنشی $U_0=\frac{1}{2}E\varepsilon^2=\frac{\sigma^2}{2E}$

مقدار انرژی کرنشی برای جسمی که در جهت x تحت تنش تک محوری σ_x قرار گرفته باشد $U=\int_V U_0\,dV=\int_V\frac{\sigma_x^2}{2E}dv=\int_V\frac{E}{2}\varepsilon_x^2dv$

انرژی کرنشی میله تحت نیروی تک محوری $U=\int_0^L\frac{P^2(x)}{2EA(x)}dx$ $U=\frac{P^2L}{2AE}$ میله ثابت

انرژی کرنشی تیر تحت گشاور خمشی $U=\int_0^L\frac{M^2(x)}{2EI}dx=\int\frac{EI}{2}y''^2dx$

انرژی کرنشی ذخیره شده بر اثر تنش برشی

$U_0=\int_0^{\gamma}\tau_{xy}\,d\gamma_{xy}\xrightarrow[\tau_{xy}=G\gamma_{xy}]{\text{از قانون هوک}}U_0=\frac{\tau_{xy}^2}{2G}$ چگالی انرژی ذخیره شده $U=\int_V U_0\,dV=\int_V\frac{\tau_{xy}^2}{2G}dV$

انرژی کرنشی در میله بر اثر گشاور پیچشی $U=\int_0^L\frac{T^2}{2GJ}dx\xrightarrow{\text{ثابت}}U=\frac{T^2L}{2GJ}$

انرژی کرنشی در تیر بر اثر نیروی برشی $U=\int\frac{KV^2}{2GA}dA$ K برای دایره $\frac{10}{9}$ برای مستطیل $\frac{6}{5}$

قضیه کاستیگلیانو در سازه‌های خطی مشتق جزئی انرژی کرنشی نسبت به نیروی دلخواه P_i برابر است با تغییر مکان سازه در نقطه اعمال نیروی P_i $\delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}$ و در صورتی که δ_i مثبت باشد تغییر مکان در جهت نیروی P_i است

سازه‌های خطی: سازه‌ای که رابطه بین نیرو و تغییر مکان (یا تنش و کرنش) به صورت خطی (از درجه اول) باشد

مقدار دوران سازه در نقطه اعمال گشاور M_i و در جهت آن $\theta_i=\frac{\partial U}{\partial M_i}$ است

تغییر مکان خرپاها اگر خرپایی از n میله تشکیل شده باشد انرژی کرنشی خرپا برابر است با مجموع انرژی میله‌ها $U=\sum_{j=1}^{n}\frac{F_j^2L}{2A_jE_j}$

بنا بر قضیه کاستیگلیانو تغییر مکان در نقطه اعمال بار P_i برابر است با $\delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{F_iL_j}{A_jE_j}\frac{\partial P_j}{\partial P_i}$

تغییر مکان در تیرها $\delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}=\int_0^L\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_i}dx$ و شیب تیر در نقطه اعمال گشاور M_i $\theta_i=\frac{\partial U}{\partial M_i}=\int_0^L\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_i}dx$

در صورتی که سازه‌ای از اتصال n تیر (یا قطعه) تشکیل شده باشد برای هر تیر به طور جداگانه روابط زیر را به کار می‌بریم

$$\delta_i=\sum_{j=1}^{n}\int_0^{L_j}\frac{M_j}{E_jI_j}\frac{\partial M_j}{\partial P_i}dx$$

$$\theta_i=\sum_{j=1}^{n}\int_0^{L_j}\frac{M_j}{E_jI_j}\frac{\partial M_j}{\partial M_i}dx$$

زاویه دوران در اعضای پیچشی

$$\varphi_i = \frac{\delta U}{\delta T_i} = \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\delta T}{\delta T_i} d_x$$

* برای تعیین تغییرمکان (یا دوران) نقطه i از سازه در صورتی که در این نقطه نیروی P_i یا گشتاور M_i اعمال شده باشد یک نیروی مجازی P_i (یا گشتاور مجازی M_i) به آن نقطه اعمال می کنیم پس از انجام عملیات مربوطه و بدست آوردن مشتقات جزئی نسبت به نیروی مجازی P_i (یا گشتاور مجازی M_i) اینجا ما با جایگزینی در فرمول مربوطه به تعیین δ_i یا θ_i مقدار نیروی مجازی P_i یا گشتاور مجازی M_i را برابر صفر قرار می دهیم

* هنگامی که یک سازه از اتصال چند عضو تشکیل شده باشد ممکن است با اعمال گشتاور پیچشی T_i به یک عضو سازه در تعدادی از عضوهای دیگر سازه گشتاور خمشی بوجود آید، در این حالت برای عضوهایی که تحت گشتاور خمشی قرار گرفته اند از فرمول $\theta_i = \sum \int_0^{L_j} \frac{M_j}{E_jI_j} \frac{\delta M_j}{\delta M_i}$ و برای عضوهایی که تحت گشتاور پیچشی قرار گرفته اند از فرمول $\varphi_i = \frac{\delta U}{\delta T_i} = \int_0^L \frac{T\delta T}{GJ\delta T}$ باید استفاده کرد و از مجموع آن ها زاویه دوران در محل اعمال گشتاور T_i تعیین می گردد

تغییرمکان تیر به روش بار واحد

۱- گشتاور خمشی تیر را بر اثر بارهای وارده به آن بدست آورده و M می نامیم ۲- کلیه بارهای وارده به تیر را حذف کرده سپس نیروی معادل به نقطه i اعمال کرده ۳- گشتاور خمشی تیر را بر اثر این نیروی واحد بدست آورده و آن را m می نامیم تغییرمکان نقطه i از تیر برابر

$$\delta_i = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$$

تعیین شیب تیر در نقطه i در مرحله دوم به جای بار واحد یک گشتاور واحد به نقطه i اعمال کرده و گشتاور در تیر را بر اثر این گشتاور واحد بدست می آوریم و آن را m می نامیم ، دوران نقطه i برابر

$$\theta_i = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$$

تغییرمکان خرپا با استفاده از بار واحد

ابتدا نیروی عضوهای خرپا را اثر نیروهای وارد بر خرپا بدست می آوریم و نیروی عضو j ام را با F_j نمایش می دهیم سپس کلیه نیروهای وارد بر خرپا را حذف کرده و نیرویی برابر واحد به مفصل i در جهتی که تغییرمکان مفصل i خواسته شده اعمال می کنیم نیروی عضوهای خرپا بر اثر بار واحد بدست می آوریم. نیروی عضو j ام را بر اثر بار واحد به f_j نمایش می دهیم

تغییرمکان مفصل i برابر است با

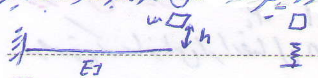
$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_jf_jL_j}{A_jE_j}$$

تغییرمکان خرپا بر اثر دما خرپایی که دارای n عضو می باشد دمای m عضو آن تغییر کند $n>m$ ، تغییرمکان مفصل i برابر

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j L_j \Delta T_j f_j$$

(f_j نیروی عضو j ام بر اثر نیروی واحد به مفصل i در جهتی که تغییرمکان آن خواسته شده است)

تغییرمکان سازه بر اثر ضربه در صورتی که بار به طور ناگهانی یا ضربه ای به سازه وارد شود تغییرمکان سازه به مراتب بیشتر از حالت استاتیکی می باشد که تغییرمکان دینامیکی نامیده می شود

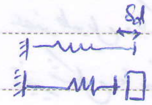


$$\delta_s = \frac{W}{K}$$

$$\delta_d = \delta_s \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}}\right)$$ حداکثر تغییرمکان دینامیکی

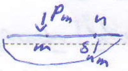
$$F_d = W \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Kh}{W}}\right)$$ حداکثر بار دینامیکی

* برای تعیین k دربارهای ضربه‌ای ابتدا تغییرمکان استاتیکی نقطه‌ای که بار ضربه‌ای به سازه اصابت می‌کند را به ازاء بار واحد بدست می‌آوریم. عکس این تغییرمکان برابر k است



$\delta_d = V\sqrt{\frac{m}{k}}$ حداکثر جمع‌شدگی فنر $F_d = k\,\delta_d = V\sqrt{km}$

قضیه بتی ماکسول نقاط m و n بر روی تیر اند و نیروی P_m به نقطه m اعمال می‌شود و تغییرمکان نقطه n برابر δ_{nm} و بار P_m برداشته و بار P_n را به n وارد کرده و تغییرمکان نقطه m برابر δ_{mn} طبق قضیه بتی ماکسول $P_m\,\delta_{mn} = P_n\,\delta_{nm}$



تغییرمکان سازه‌های غیرخطی درصورتی که تغییرمکان با نیرو رابطه غیرخطی داشته باشند باید از انرژی کرنش متمم U_c استفاده بشود

$\delta_i = \frac{\partial U_c}{\partial P_i}$ $\theta_i = \frac{\partial U_c}{\partial M_i}$ قضیه دوم کاستگلیانو

روابط روبرو برای انرژی کرنشی برقرارند $P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$ $M_i = \frac{\partial U}{\partial \theta_i}$ قضیه اول کاستگلیانو

* درصورتی که رابطه نیرو و تغییرمکان (تنش کرنش) خطی باشد $U_c = U$ است

انرژی کرنشی درحالت کلی

$$U_0 = \frac{1}{۲}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{1}{۲}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{1}{۲}\sigma_z\varepsilon_z + \frac{1}{۲}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{۲}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{۲}\tau_{zx}\gamma_{zx}$$

$$U_0 = \frac{1}{۲E}\left[\sigma_x^۲ + \sigma_y^۲ + \sigma_z^۲ - ۲\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + ۲(1+\nu)(\tau_{xy}^۲ + \tau_{yz} + \tau_{zx}^۲)\right] + \underbrace{\frac{۳}{۲}\alpha T(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{\text{تنش ناشی از حرارت}}$$

$$U_0 = \frac{1}{۲}\lambda\left[(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^۲ + G(\varepsilon_x^۲+\varepsilon_y^۲+\varepsilon_z^۲) + \frac{1}{۲}G(\gamma_{xy}^۲ + \gamma_{yz}^۲ + \gamma_{zx}^۲)\right] - \frac{۳\alpha ET}{۲(1-۲\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-۲\nu)}$$

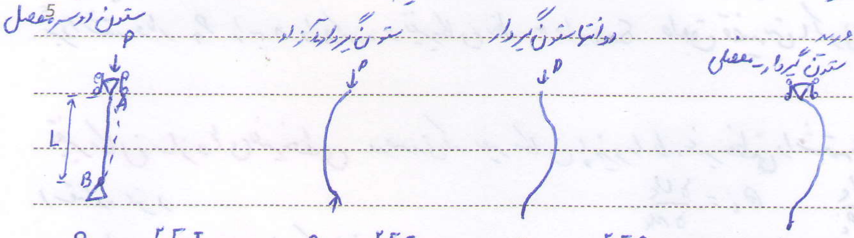
* در سازه‌های نامعین از درجه n درصورتیکه انرژی کل سازه برحسب نیروهای مجهول برابر U باشد مشتق U نسبت به هریک از نیروهای مجهول برابر صفر است

فصل ۹ـ کمانش ستون‌ها

عضو طویل و باریکی که تحت بار محوری فشاری قرار گرفته باشد را ستون می‌نامند

تغییر شکل جانبی آن تحت این بار، کمانش ستون نامیده می‌شود

نیروی بحرانی برای سازه‌ای شامل یک میله صلب و فنرها: ابتدا فرض کرده که میله به اندازه زاویه θ منحرف شده سپس نیروهایی که فنرها بر اثر این انحراف به میله وارد می‌کنند را به دست می‌آوریم. با نوشتن معادلات تعادل برای کل میله نیروی بحرانی را بدست آورید



$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{L^2}$ فرمول اویلر $P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{4L^2}$ $P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{\frac{1}{4}L^2}$ $P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{0.49L^2}$

به طور کلی نیروی کمانش برای ستون‌های انعطاف‌پذیر را می‌توان به صورت $P_{cr}=\pi^2\frac{EI}{L_e^2}$ نمایش داد

L_e طول موثر

تنش بحرانی تنش بحرانی در ستون‌ها برابر $\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2EI}{AL_e^2}=\frac{\pi^2E}{(\frac{L_e}{r})^2}$

$r=\sqrt{\frac{I}{A}}$ شعاع ژیراسیون $\frac{L_e}{r}$ ضریب لاغری یا ضریب باریکی

تعیین بار بحرانی با استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم $y=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x+C_3x+C_4$

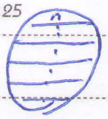
با اعمال شرایط مرزی بار بحرانی ستون تعیین می‌گردد

تیر-ستون ستونی که علاوه بر بار محوری P تحت بارهای جانبی نیز قرار گرفته باشد تیر-ستون نامیده می‌شود

تغییر مکان تیر-ستون از معادله $EIy''''+Py''=-w(x)$ یا $EIy''=M$ که $w(x)$ بار گسترده جانبی بر روی تیر-ستون می‌باشد

در صورتی از $EIy''''+Py''=-w(x)$ می‌توان استفاده کرد که رابطه نیروی برشی و تغییر مکان به صورت $EIy'''+Py'=V$ بیان شود

ـ ابتدا تغییر مکان را از معادله فوق پیدا کرده سپس تغییر مکان را به سمت بی‌نهایت می‌رسانیم تا بار بحرانی تعیین گردد



کمانش ستون‌های مرکب برای ستون‌هایی که با مقطع مرکب که مطابق شکل از n ماده تشکیل شده

$$P_{cr}=\frac{\pi^2\sum_{i=1}^{n}E_iI_i}{L_e^2}$$

I_i ممان اینرسی ماده iام حول محور کمانش (محور تقارن مقطع)