بسمه تعالی

جزوه

انتقال حرارت ۱

دانشگاه

صنعتی امیر کبیر

استاد

دکتر بصیرت

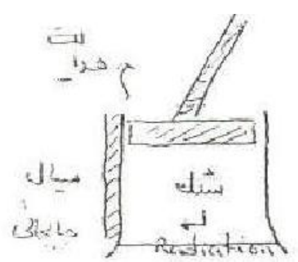
انتقال حرارت-گرما

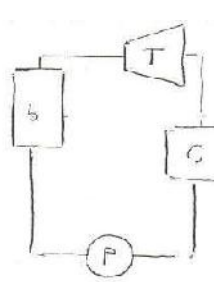
در سه شاخه بررسی می شود.

1. هدایت conduction
2. جابجایی- همرفتی convection
3. تشعشعی radiation

هدایت درس کاملا ریاضی است. در مورد جابجایی نیاز به دانستن **سیالات** و آن هم **مکانیک دینامیک** سیالات هستیم. در مورد تشعشع نیز نیاز به دانستن فیزیک و موج هستیم.

در مورد موتور های احتراق داخلی و حتی کلکتورهای خورشیدی هر سه شاخه بررسی می شود.





در انتقال حرارت ما به rate توجه داریم. در سیستم انتقال حرارت به سیستم میکروسکوپیک توجه باید داشت.

انتقال حرارت از معادلات نیوتن=

$$E_{in} - E_{out} + \underbrace{E_g}_{\text{تولید}} = \underbrace{E_{st}}_{\text{ذخیره}}$$

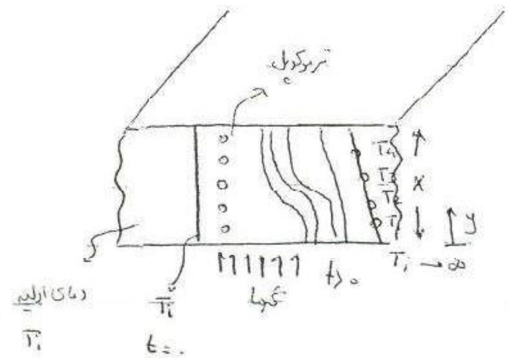
یا flux law استفاده می کنند.

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{ST}$$

انتقال حرارت مسائل را معمولا به صورت خطی نگاه می کند اما این دید باعث به وجود آمدن خطا می شود.

$$\underbrace{\tau}_{F} = -\mu \frac{du}{dy}$$

Biot با آزمایش هایی که انجام داد نشان داد:



شخص دیگری با استفاده از این نتایج و با استفاده

ازقانون نیوتن یا flux law استفاده نمود که نیوتن این رابطه را از قانون هرک گرفته است.

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy} = \frac{F}{A}$$

فوریه از این رابطه استفاده نمود و شار حرارتی را تعریف کرد که برابر است با:

قانون فوریه

$$\text{شار حرارتی} \leftarrow q'' = -\underbrace{k}_{\text{ضریب حرارتی}} \frac{dT}{dy} = \frac{q}{A}$$

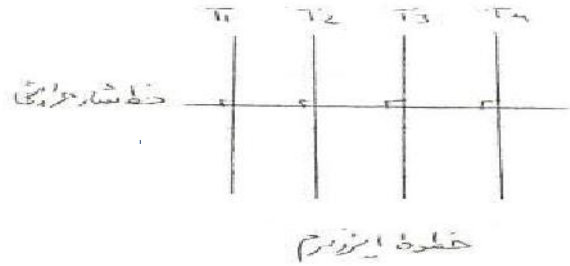
قانون فیک (fick)

$$\text{شار انتقال جرم} \leftarrow J = -\underbrace{D}_{\text{Diffusion}} \frac{dc}{dy}$$

مقدار غلظت

قانون فیک مثلا در مورد خشک کردن انگوری کاربرد دارد با اعمال حرارت باعث انتقال رطوبت و در نهایت انتقال جرم می شود.

در رابطه فوریه مهم است که خطوط شار بر خطوط ایزوترم عمود باشد.



انتقال حرارت ← هدایت ← از مولکولی به مولکول دیگر ماده

$$\underbrace{q_x}_{J/s = W} = -K \underbrace{A}_{m^2} \frac{\overbrace{dT}^{^\circ C}}{\underbrace{dx}_{m}} = KA\frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad \text{یا } q'' = K\frac{\Delta T}{\Delta x} \to flux$$

$$K = \frac{W}{m.^\circ C}$$

ضریب هدایتی خاصیت فیزیکی است که از جدول آخر کتاب به دست می آید.

موادی که دارای خاصیت رسانایی خوبی اند هدایت خوبی هم دارند.

انتقال حرارات در جهت های مختلف صورت می گیرد.ولی برداری نیست چون انرژی است با هم جمع پذیرند.

$K_{Cu} = 386 \quad W/m.^\circ C$

$K_{Al} = 210$

$K_{water} = 0.668$

$K_{\text{سیمان}} = 1.0$

$K_{\text{هوا}} = 0.02$

$K_{\text{عایق پشم شیشه}} = 0.06$

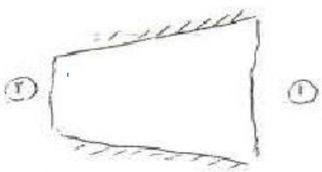
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{\text{تولیدی}} = \dot{E}_{\text{ذخیره}}$$

بدن انسان را با خاصیت فیزیکی آب در نظر می گیریم. پرتقال و سیب زمینی و گوشت به همین صورت است.

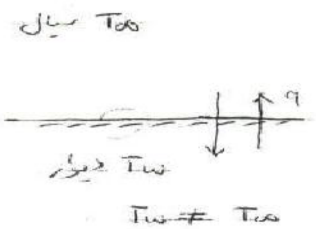
$$q = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{KA}} = \frac{\Delta T}{R} \qquad I = \frac{\Delta E}{R}$$

مقاومت حرارتی

انتقال حرارت تا زمانی که تولیدی و ذخیره نباشد خطی است. Q در دو سمت یکی است چون بقای انرژی موجود است. دور تا دور هم عایق است.



انتقال حرارت← جابجائی همرفتی



$$q = hA(T_w - T_\infty)$$

$$= -hA(T_\infty - T_w)$$

ضریب جابجائی یا همرفتی $h = W/m^2{}^\circ C$

Convection

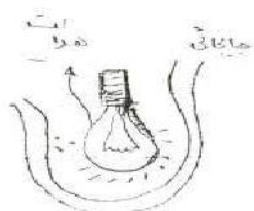
H می تواند از عدد صفر شروع شود و تا حدود ۱۰۰۰ ادامه یابد این اندازه به هندسه، سرعت شکل مسئله و خیلی عوامل دیگر بستگی دارد.

جایی که سیال با نیرو توام است جابجایی از نوع اجباری ست در جایی که سیال با نیرو همراه نیست جابجایی طبیعی ست.

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{\Delta T}{R_h}$$

R_h مقاومت جابجائی

بین دیوار و سیال انتقال حرارت از نوع جابجایی ست. لامپ هر دو نوع جابجایی را دارد.



انتقال حرارت ← تشعشعی radiation

این نوع انتقال به صورت موجی است. امواج نورانی هم جزئی از این نوع انتقال حرارت هستند.

ضریب صدور یا گسیل حرارتی ، ضریب دید ، ضریب ثابت استفان بولتزمن $5.67\times10^{-8}\ W/m^2K^4$

$$q_{1-2} = F_{تشعشعی}\, F_{دید}\, \sigma\, A\, (T_1^4 - T_2^4) \quad K$$

برای یک جسم کوچک در مقابل یک جسم بزرگ (مثل پرتقال در یک مزرعه بزرگ) دما ها بر حسب کلوین است.

$$q_{1-2} = \underbrace{\varepsilon_1}_{فاکتور تشعشعی} A_1\, \sigma\, (T_1^4 - T_2^4)$$

هر جسم کوچکی که توسط جسم بزرگ احاطه شده باشد..

در مورد انرژی تشعشعی مقداری انرژی جذب مقداری منعکس و مقداری رد می شود، در کل حالت زیر برقرار است:

$$\alpha + \rho + \tau = 1.0$$

تا زمانی که درس تشعشع باشد ε را به ما می دهند..

$\varepsilon_{چوب، رنگ} = 0.9$

$\varepsilon_{Al} = 0.04 - 0.1$

$\varepsilon_{رنگ} = 0.9$

$\varepsilon_{جسم سیاه} = 1$

اگر جسم بخواهد انرژی خود را از دست بدهد به صورت $\varepsilon \sigma T^4$ و اگر بخواهد جذب کند به صورت فرمول روبرو است. $\alpha \sigma T^4$

در صورتی که جسم کوچک باشد:

$$q_{1-2} = \varepsilon \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\varepsilon \simeq \alpha$$

جسم سیاه $\varepsilon = 1.0$

$$q_{1-2} = \sigma A (T_1 - T_2) \overbrace{(T_1 + T_2)}^{2T_1} \overbrace{(T_1^2 + T_2^2)}^{2T_1^2} \simeq 4\sigma T_1^3 A \Delta T$$

$$q = 4\sigma T_1^3 A \Delta T \Rightarrow q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{4\sigma T_1^3 A} = \left(\frac{1}{h_r}\right)}$$ ضریب تشعشی

در بی نهایت میل به هم دما شدن دارند اما اختلاف را در نظر نمی گیریم، این ساده سازی برای این است که معادله ی ما خطی شود و این رابطه تنها برای جسم کوچک صادق است.

$$q_{1-2} = F_\varepsilon \; F_G \; \sigma \; (T_1^4 - T_2^4)$$

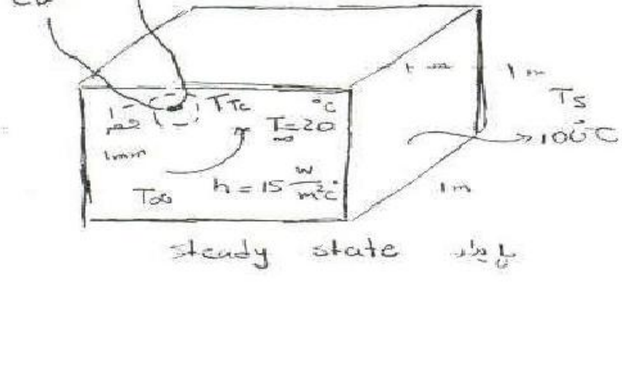
σ: ضریب ثابت استفان برلتزمن $5.67 \times 10^{-8} \; W/m^2K^4$

F_G: ضریب هندسی جسم‌ها

F_ε: ضریب صدور یا گسیل حرارتی

مثال: یک دماسنج ترموکپل سیاه به قطر ۱ میلی متر برای اندازه گیری دمای کوره سیاهی به ابعاد m۱×۱×۱ به کار رفته است. اگر سطح کوره در درجه حرارت c۱۰۰ و هوای مجاور ترموکوپل c۲۰ با ظریب جابجایی $15 \frac{W}{m^2 °C}$ باشد ترموکپل چه درجه حرارتی را نشان می دهد؟

انتظار می رود که دمای ترموکپل ۲۰ درجه باشد ولی چنین نیست چون ترموکپل دمای ۱۰۰ درجه را مشاهده می کند..



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{\text{تولید}} = \dot{E}_{\text{ذخیره}}$$

ترموکوپل

$$\dot{E}_{in} = (5.667\times10^{-8})A\left((100+273)^4 - T_{Tc}^4\right)$$

$$\dot{E}_{out} = hA\left(T_{CA} - (20+273)\right)$$

سطح ترموکوپل

ترموکپل دمایی بالاتر از ۲۰ را نشان می دهد پس مقدار انرژی به دلیل همرفتی بین سیال و ترموکپل است و مقدار ورودی همان تشعشع حاصل از دیواره است.

$$q_{1-2} = \varepsilon\sigma A\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow 5.667\times10^{-8}\left[(100+273)^4 - T_{Tc}^4\right] =$$

$$15\left(T_{Tc} - (20+273)\right) \Rightarrow T_{Tc} = 51\,^\circ C$$

با استفاده از فرض قبل:

$$q = 4\sigma T_1^3 A\Delta T \Rightarrow 4(5.667\times10^{-8})(373)^3(373-T_{Tc}) = 15(T_{Tc}-293)$$

$$T_{Tc} = 55\,^\circ C$$

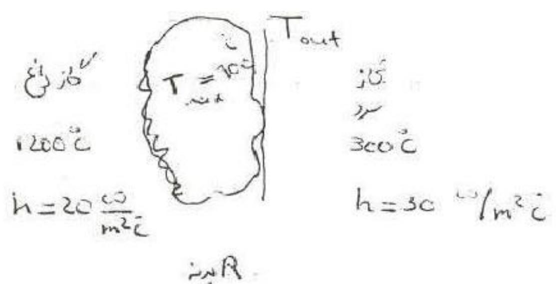
مثال: یک قالب یخ ۱×۱×۱ m را در نظر می گیریم $T_f = 0\,^\circ C$ **(بدون تغییر ابعاد)**

۱. یخ در معرض محیط با $h = 15\ W/m^2\,^\circ C$ با $T_\infty = 10\,^\circ C$ است و بدون تشعشع زمان آب شدن چقدر ؟

۲. با فرض قسمت الف ، $T_{sky} = -10\,^\circ C$ به همراه تشعشع زمان آب شدن را بیابید.

۳. گونی به ضخامت ۱mm به دور یخ پیچیده شده است که در این حالت k=۰,۰۶ و دمای گونی **۱۰ درجه است زمان آب شدن را بیابید، مساله را ۵ وجه در نظر بگیرید**

مثال: برای طراحی یک مبدل ماکزیمم درجه حرارت پیش بینی شده ۱۰۰ درجه است اگر در یک طرف مبدل گاز داغ ۱۲۰۰ درجه با $h = 20\ \frac{W}{m^2\,^\circ C}$ و طرف دیگر گاز ۳۰۰ درجه با $h = 30\ \frac{W}{m^2\,^\circ C}$ باشد ماکزیمم ضریب مقاومتی بدنه را بیابید



$$A = 1\ m^2$$

$$\dot{E}_{in} = q_{in} = 20\,(1200 - 900) \qquad \Longrightarrow \quad T_{out} = 500^{\circ}C$$

$$\dot{E}_{out} = q_{out} = 30\,(T_{out} - 300)$$

حالت پایا ست لذا ورودی با خروجی یکسان است.

$$q = \frac{\Delta T}{R} \Longrightarrow 20\,(1200 - 900) = \frac{(900 - T_{out})}{R} \quad \Longrightarrow R = 0.067$$

انرژی در هر مقطعی ثابت است.

$$q = \frac{\Delta T}{R}$$

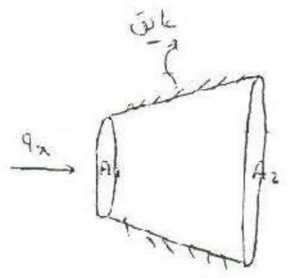
$$R_{\text{هدایتی صفحه}} = \frac{L}{kA} \qquad R_{\text{جابجایی}} = \frac{1}{hA}$$

$$R_{\text{تشعشعی}} = \frac{1}{h_r A}$$

در اینجا تغیرات سطح جسم را داریم

ضریب حرارتی بر حسب دما را هم

داریم.



$A = aD^{1/2}$

ثابت ← q ← ثابت

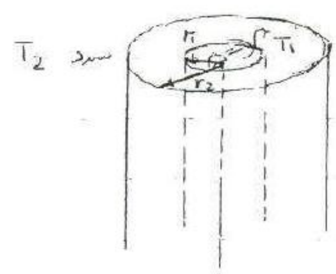
$$q = kA\frac{dT}{dx}$$

$$\int_{A_1}^{A_2} q\,\frac{dx}{A} = -k\int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$k = f(T) = aT^2 + b \quad \Longrightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} q\,\frac{dx}{A} = -\int_{T_1}^{T_2} k\,dT$$

در حالت های مقاومتی فقط مسائل را می توانیم یک بعدی حل کنیم.

می خواهیم فقط دما ها را در راستای r بررسی کنیم.



$$\int_{r_1}^{r_2} q\,\frac{dr}{2\pi r L} = -k\int_{T_1}^{T_2} dT$$

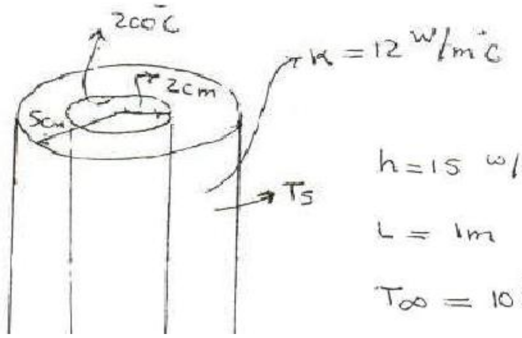
سطحی که شار بر آن عمود است که همان سطح جانبی ست را در

نظر می گیریم.

$$\Longrightarrow \frac{q}{2\pi L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -K\int_{T_1}^{T_2} dT \Longrightarrow \frac{q\,\mathrm{Ln}\frac{r_2}{r_1}}{2\pi L} = K\Delta T$$

$$\Longrightarrow q = \frac{\Delta T}{\frac{\mathrm{Ln}\, r_2/r_1}{2\pi K L}} \qquad R_{\text{هدایتی استوانه}} = \frac{\mathrm{Ln}\, r_2/r_1}{2\pi K L} \qquad R_{\text{هدایتی کره}} = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi K}$$

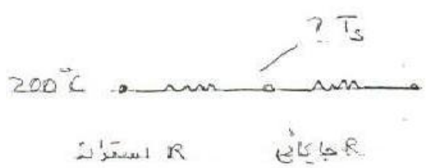
مثال: لوله ای را در نظر می گیریم:



$h = 15\ W/m^2 °C$

$L = 1m$

$T_\infty = 10°C$

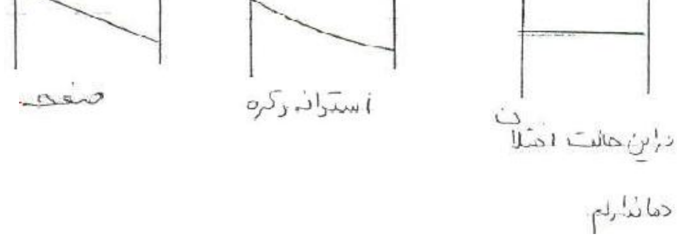


$$q_1 = \frac{\Delta T}{\frac{\mathrm{Ln}\frac{r_2}{r_1}}{2\pi K L}} = \frac{200 - T_S}{\frac{\ln 2.5}{2\pi \times 12 \times 1}}$$

$$q_2 = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{T_S - 10}{\frac{1}{15 \times 2\pi \times 5 \times 10^{-2} \times 1}}$$

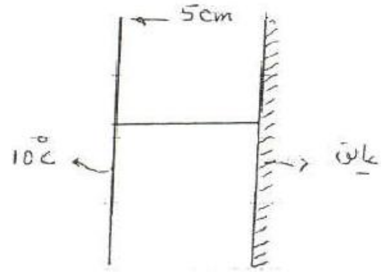
$$q_1 = q_2 \Longrightarrow \frac{200 - T_S}{\frac{\ln 5/2}{2\pi \times 12}} = \frac{T_S - 10}{\frac{1}{15(2\pi)(0.05)}} \Longrightarrow T_S = 189.7\ °C \qquad q = 846.8\ w$$

پروفیل دما در صفحه به صورت خطی و در استوانه و کره یک حالت سهمی گونه دارد.

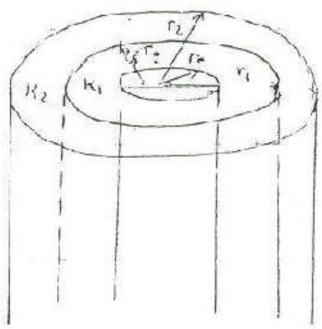


$$q = \frac{\Delta T}{\sum R} \Rightarrow q = \frac{200 - 10}{\frac{1}{15 \times 2\pi \times \frac{5}{100}} + \frac{\ln 5/2}{2\pi \times 12 \times 1}} = 846.8\ W$$

برای عایق $\frac{dt}{dx}$ یا $\frac{dt}{dr}$ صفر است در مس و آهن پس پرفیل دما خطی است.

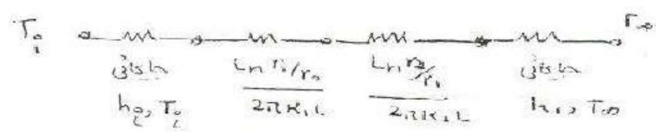


در پایا چون در حالت عایق گرمای خروجی نداریم دمای همه ی نقاط به ۱۰ درجه می رسد و پروفیل دما خطی می شود.



h_∞, T_∞

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R}$$



$$q = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln r_1/r_0}{2\pi K_1 L} + \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi K_2 L} + \frac{1}{h_\infty A_2}}$$

$$q = U_i A_i (T_i - T_\infty) \qquad U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{r_0 \ln r_1/r_0}{K_1} + \frac{r_0 \ln r_2/r_1}{K_2} + \frac{r_0}{r_2} \frac{1}{h_\infty}}$$

به ui ضریب کلی حرارتی که واحد آن $\frac{W}{m^2 °C}$ گویند. ضریب حرارتی کلی از داخل

$$\underbrace{q = U_o A_o (T_i - T_\infty)}_{\text{ضریب حرارتی کلی از خارج}} \quad U_o = \frac{1}{\frac{r_2}{r_0} \frac{1}{h_i} + \frac{r_2 \ln r_1/r_0}{K_1} + \frac{r_2 \ln r_2/r_1}{K_2} + \frac{1}{h_o}}$$

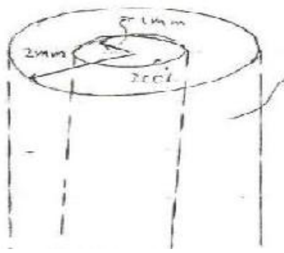
این رابطه ها فقط برای استوانه و لوله ها است.

برای کره هم همین ضرایب را داریم.

T_∞ در سیال همان دمای متوسط در سیال است مانند سرعت در محاسبه ی عدد رینولدز

مساله: عایق چقدر باشد

$$\frac{dq}{dr} = 0 \Rightarrow r_{cr} = \frac{k_2}{h_o} \quad (k_2 \to W/m^\circ C,\ h_o \to W/m^2\,^\circ C)$$



$k = 12\ W/m^\circ C$

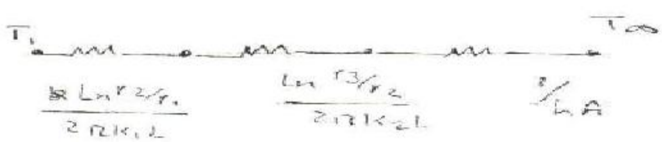
$h = 15\ W/m^2\,^\circ C$

$T_\infty = 10^\circ C$

$L = 1m$

ضخامت عایق

Δr	q	T_2
0.0		
0.01		
⋮		



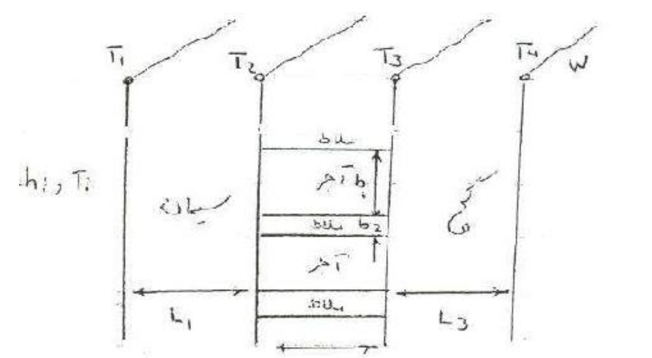
پشم شیشه $k = 0.06$

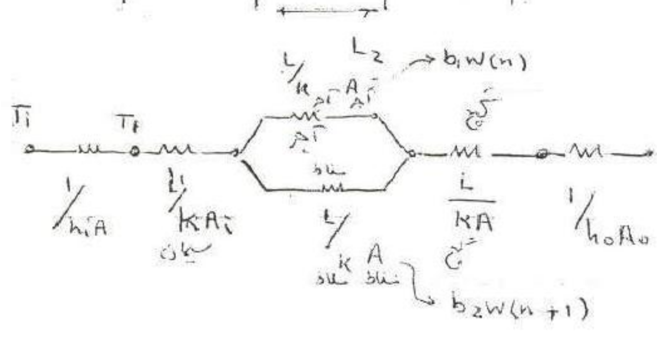
$$q = hA(T_s - T_\infty) \Rightarrow T_s = \frac{q}{hA} + T_\infty$$

شعاع بحرانی برای کره به صورت زیر است:

$$\frac{dq}{dr} = 0 \Rightarrow r_{cr} = \frac{2k}{h}$$

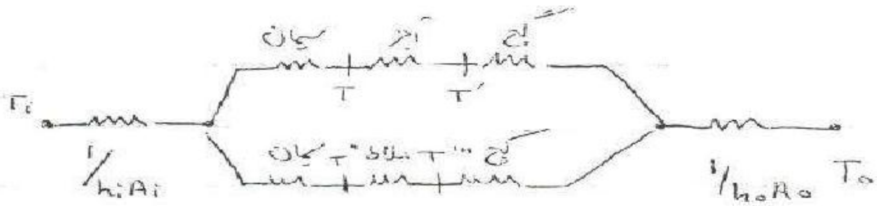
$$\frac{1}{R_{کل}} = \frac{1}{R_{آجر}} + \frac{1}{R_{ملات}}$$





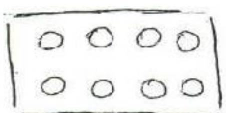
$$q=\frac{\Delta T}{\frac{1}{h_iA}+\sum_j\frac{L}{KA}+R_{\text{معادل}}+R_{\text{تماس}}+\frac{1}{h_oA}}$$

$$q=UA\Delta T \Longrightarrow U=\frac{1}{1/h_i+\sum_j\frac{L}{K}+RA_{\text{معادل}}+RA_{\text{تماس}}+\frac{1}{h_o}}$$



بین ملاط و اجر چون k تقریبا یکسانی دارد از مدار بالایی می توان استفاده کرد ولی اگر به جای اجر یک میله ی فلزی می گذاشتیم باید مدار پایین را در نظر می گرفتیم، هر کدام که مقاومت کمتری دارد حرارت را بیشتر انتقال می دهد.

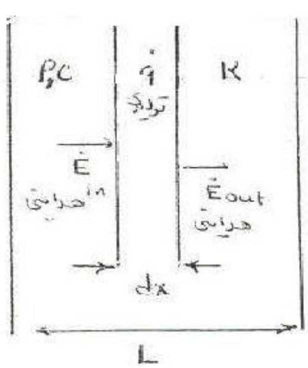
آجر های سوراخ دار با محاسبه ی مساحت های سوراخ و در نظر گرفتن مقاومت های موازی قابل حل است.



حالت دوم مقاومتی که رسم شد جریان شار ثابت و اولی جریان دما ثابت است.

معادله ی کلی حرارت:

فعلا معادلات را یک بعدی در نظر می گیریم.



$$\underset{\text{هدایتی}}{\dot E_{in}}=-KA\frac{dT}{dx}$$

$$\underset{\text{هدایتی}}{\dot E_{out}}=-KA\frac{dT}{dx}+dx\,\frac{d\left(-KA\,dT/dx\right)}{dx}$$

بسط تیلور $f(x+h)=f(x)+h\frac{df}{dx}+\cdots$

$$\dot{E}_{g} = \dot{q}\,\overbrace{A.dx}^{m^3}$$

حجم

$$\dot{E}_{ذخیره} = \frac{mc_p\Delta T}{\Delta t} = \rho A.dx.C.\frac{dT}{dt}$$

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{تولیدی} = \dot{E}_{ST} \qquad \dot{q} = q''' \; W/m^3$$ منبع تولید انرژی

$$\frac{\partial\left(KA\,{}^{dT}/_{dx}\right)}{\partial x} + \dot{q}A = \rho AC\frac{\partial T}{\partial t}$$

اگر A ثابت و همچنین K ثابت نسبت به دما باشد:

$$+KA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q'''A = \rho AC\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{K} = \frac{\rho C}{K}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{K} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad 1\text{-}D \qquad \alpha = \frac{K}{\rho C}$$ ضریب نفوذ حرارتی یا

ضریب پخش حرارتی

حالت سه بعدی $$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{q'''}{K} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \alpha = m^2/s \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 T + \frac{q'''}{K} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad 3\text{-}D$$ معادله کلی انتقال حرارت

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{q'''}{K} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$ معادله

$n = 0$ صفحه Slab $r \longrightarrow x$

$n = 1$ استوانه $r \longrightarrow r$

$n = 2$ کره

بیشتر معادلات را یک بعدی در نظر می گیرند چون در استوانه و کره معمولا یک بعدی و انتقال حرارت در جهت r است. انتقال حرارت چشم متقارن نیست.

در حالت کامل حداقل به ۷ شرط لازم داریم تا معادلاترا حل کنیم.

$\nabla^2 T = 0$ معادله لاپلاس — منبع تولید انرژی ندارد

— پایدار است.

$\nabla^2 T + \frac{q'''}{K} = 0$ معادله پواسون — پایدار

$\nabla^2 T + \frac{q'''}{K} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ معادله فوریه — گذرا

در مورد سیستم های یک بعدی اگر منبع تولید انرژی نداشته باشیم روش مقاومت هاست.

بدون تولید انرژی　　　پایدار

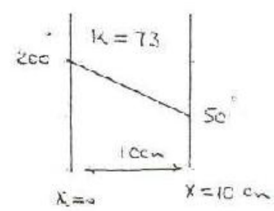
$1\text{-}D\ ,\quad q''' = 0 \qquad S.S.$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\frac{q'''}{k}} = \frac{1}{\alpha}\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T = ax + b$$

بعنوان مثال :

$x = 0 \qquad T = 200$

$x = 10 \qquad T = 50$



$\Rightarrow \quad 200 = 0 + b \Rightarrow b = 200$

$\quad 50 = 10/100 \times a + 200 \Rightarrow a = -1500$

یک مرز می تواند شرایط مختلف داشته باشد:

۱- دما ثابت

۲- شار حرارتی

۳- T_∞ و h جابجایی

۴- عایق　　$0 = \frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dr}$

T دما ثابت

q'' شار حرارتی

T_∞ و h جابجایی

عایق

dT/dx یا $\frac{dT}{dr} = 0$

درمسأله قبل اگر $h = 10\ W/m^2 {}^\circ C$ و $T_\infty = 50^\circ$ باشد.

$T = ax + b$

$x = 0 \qquad T = 200 \Rightarrow b = 200$

$x = 10^{cm} \qquad q'' = h(T_s - T_\infty)$

$\qquad = 10\left(a\left(\frac{10}{100}\right) + 200 - 50\right)$

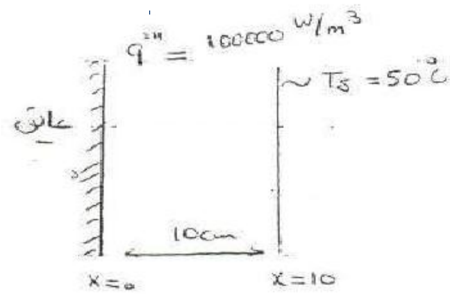
از طرفی : $q'' = -k\frac{dT}{dx} = -ka$

$$-73a = a + 2000 - 500 \Rightarrow a = \frac{-1500}{74} = -20.3$$

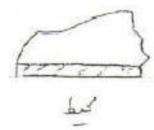
$$\Rightarrow T = -20.3x + 200 \xrightarrow{x = 10^{cm}} T = 198$$

دو طرف دایره را به عنوان شرایط مرزی نمی توان شار حرارتی و یا جابجایی باشد.

مثال: مساله پایدار و دارای منبع تولید انرژی به صورت q''' است. نمودار تغییرات دما به چه صورت است؟



مثال اتو



پایدار S.S.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}^{0} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{q'''}{k}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{-q'''}{k}x + C \Rightarrow T = \frac{-q''' x^2}{2k} + Cx + D$$

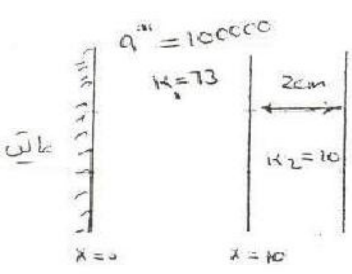
$$\text{عایق} \quad x=0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-q''' x}{k} + C \Rightarrow C = 0$$

$$x = 10\ cm \Rightarrow 50 = \frac{-10^5 \times 10^2}{2 \times 100^2 \times 73} + D \Rightarrow D = 56.8$$

معادله تغییر دما داخل جسم

$$T = \frac{-10^5 x^2}{2 \times 73} + 56.8$$

مثال: مسئله پایدار است، ۴شرط مرزی می خواهد.



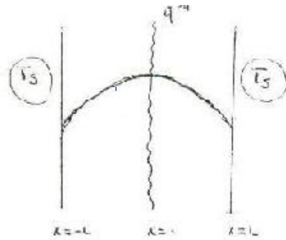
$h = 10\ W/m^2\,°C$

$T_\infty = 20°C$

$$q''' . L = q'' = h(T_S - T_\infty)$$

$$q'' = \frac{\Delta T}{L/k_2} = 10^5 \times \frac{10}{100} = \frac{T_i - T_S}{0.02/10}$$

در مرکز کره و یا محور استوانه $\frac{dt}{dr}$ تقریبا صفر است.



$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{-q'''x}{k} + C$$

$$T = -\frac{q'''x^2}{2k} + Cx + D$$

$x=0$ شرط تقارن $\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow C = 0$

$x=L \quad T = T_s$

$$\Rightarrow T_s = -\frac{q'''L^2}{2k} + D \Rightarrow D = \frac{q'''L^2}{2k} + T_s$$

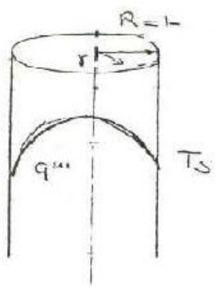
$$\Rightarrow T = \frac{-q'''x^2}{2k} + \frac{q'''L^2}{2k} + T_s$$

با ساده سازی داریم:

$$\overset{C^\circ}{T} - \overset{C^\circ}{T_s} = \frac{q'''L^2}{2k}\left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_s}{\left(\frac{q'''L^2}{2k}\right)} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \Longrightarrow \underset{\text{دمای بی بعد}}{\bar{\theta}} = 1 - \underset{\text{فاصله بی بعد}}{\bar{x}}^2$$

$\frac{q'''L^2}{2k}$ اختلاف دمای max در صفحه است.



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{q'''}{k} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = \frac{-q'''}{k}$$

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{q'''r^2}{2k} + C$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-q'''r}{2k} + \frac{C}{r}$$

$\Rightarrow T = \frac{-q'''r^2}{4k} + C\ln r + D$ شرط تقارن $\frac{dT}{dr} = 0 \Rightarrow C = 0$

$r = R \Longrightarrow T = T_s$

در استوانه $\frac{q''' R^2}{4k}$ اختلاف دمای مرکز است.

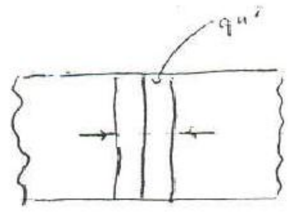
$$\frac{T-T_s}{\frac{q''' R^2}{4k}} = \left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

برای کره داریم:

$$\frac{T-T_s}{\frac{q''' R^2}{6k}} = \left(1-\left(r/R\right)^2\right)$$

کره< استوانه< صفحه

در قطعات جوشکاری مثل مثال عمل می کنیم...



$q'''L = q''$

$$q''' = q_0(x-x_0) \cong q_0\delta(x-x_0)$$

فین: دسته لیوان و یا قاشق را داخل لیوان به دلیل افزایش سطح انتقال حرارت را افزایش می دهد.

همه ی این اشکال با اضافه کردن سطح باعث انتقال حرارت بیشتر می شود.

مسائل فین یک بعدی باید در نظر گرفته شود

در حالت یک بعدی از روش های:

1. مقاومت
2. معادله کلی
3. فین استفاده می شود

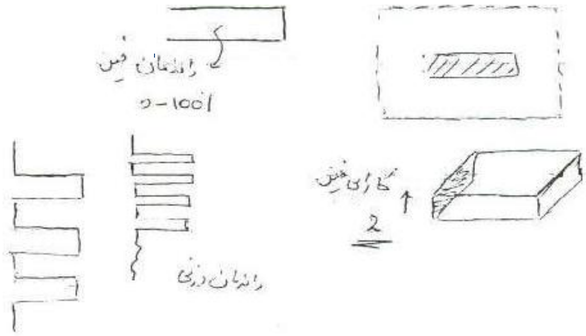
به صورت های استوانه یا دیسک هم وجود دارد

در مورد استفاده از فین ها به موارد زیر باید توجه داشت

۱) جنس

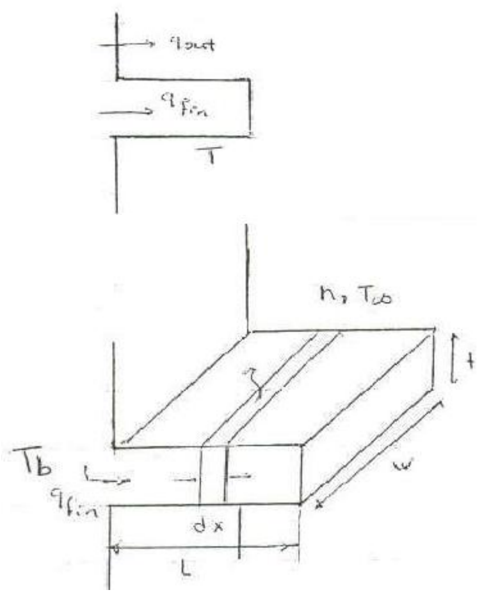
۲) ابعاد

۳) تعداد



در صورتی که پروفیل ها در فین شناخته شود تمامی مسائل حل شده است. چون با قانون بقا می توان راندمان را محاسبه کرد.

$$\underset{\text{انرژی}}{q_{fin}} = -kA\frac{\partial T}{\partial x}$$



از تشعشع صرف نظر می شود و خواص ثابت است

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \cancel{\dot{E}_{gen}} = \cancel{\dot{E}_{st}}$$

$$\dot{E}_{in} = -kA\frac{dT}{dx}$$

$$\dot{E}_{out} = \underbrace{-kA\frac{dT}{dx} + \left(\frac{d\left(-kA\,{}^{dT}/_{dx}\right)}{dx}\right)dx}_{\text{هدایت}} \overbrace{+\,h\underbrace{P}_{2w+2t \text{ سطوح جانبی}}dx\,(T - T_\infty)}^{\text{جابجایی خروجی}}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{KA}(T - T_\infty) = 0 \qquad m^2 = \frac{hP}{KA} = \frac{W/m^2 C \cdot m}{W/m \cdot C\, m^2} = m^{-2}$$

m^2 به ، NTU یا مقدار شارش انتقال حرارت

Number of Transport Unit : است

$$(mL)^2 = \frac{hPL^2}{KA} = \frac{\frac{L}{KA}}{\frac{1}{hPL}}$$

$$= \frac{\text{ضریب مقاومت هدایت}}{\text{ضریب مقاومت جابجایی - همرفتی}}$$

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\theta'' - m^2\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$$

$$X = 0 \qquad \theta_b = T_b - T_\infty$$

$$X = L \qquad \theta_{\infty_L} -$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$L \longrightarrow \infty \qquad \theta_\infty = 0$$

$$h_L, T_{\infty_L}$$

اگر میله به اندازه ی نی بلند باشد (چوب-شیشه) ، اگر طول را ندهند و یا طول بلند بگویند اگر مسی یا آهنی باشد از این شرط نمی شود.

شرط عایق به این صورت است که دما در نقطه نزدیک به هم در انتها تقریبا یکی است. بستگی به جنس مواد دارد.

$$X = L \longrightarrow \infty \qquad \theta_b = T_b - T_\infty$$

$$\theta = 0$$

$$X = 0$$

$$\theta = C_1 \underset{L \to \infty}{\underbrace{e^{+mx}}} + C_2 e^{-mx} \Rightarrow x = 0 \quad C_1 + C_2 = \theta_b$$

$$x = L_{\to \infty} \quad C_1 = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_b e^{-mx} \qquad m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}$$

$$q_{fin} = kAm\theta_b$$ مقدار انرژی که وارد فین می شود

$$x = L \qquad \frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_b = T_b - T_\infty$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = \theta_b$$

$$x = L \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx} \Big/_{x=L} \Rightarrow mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL} = 0 \quad 2)$$

$$\theta = \theta_b \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad \Rightarrow \quad q_{fin} = kAm\theta_b \tanh mL$$

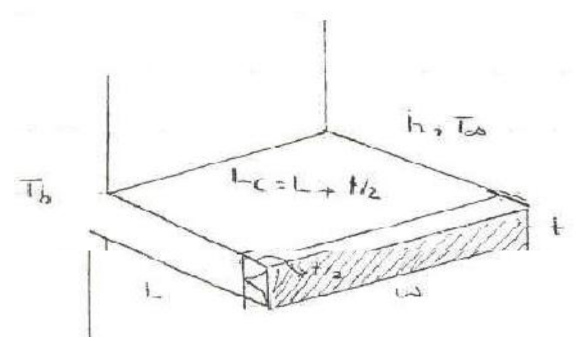
$x = L$, $h_L, T_{\infty L}$ 3) جابجائی

$x = L$, $\theta = \theta_L$ 4)

با این چهار حالت بررسی می شود ولی واقعیت حالت سوم است. ولی شرط عایق مهم ترین است.

در حالت عایق L را تصحیح کرده و به جای آن $L_C = L + \frac{t}{2}$ **قرار می دهند.**

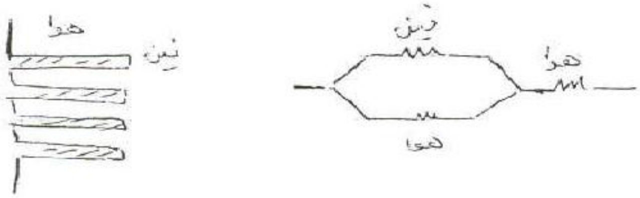
$$\theta = \theta_b \frac{\cosh m(L_C - x)}{\cosh mL_C}$$



سرزنی $= L_C = L + t/2$

حال می خواهیم مساله را به روش مقاومتی حل کنیم:

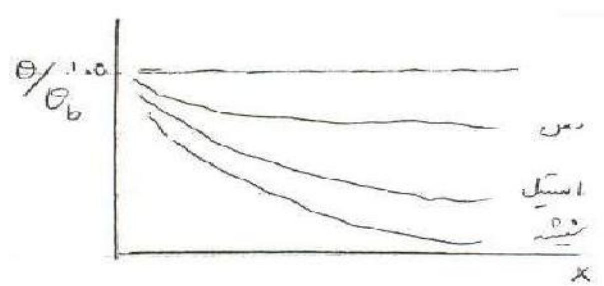
$$q_{fin} = \frac{\Delta T}{R} \Rightarrow R_{fin} = \frac{\theta_b}{KAm\theta_b \tanh mL_c} = \frac{1}{KAm \tanh mL_c}$$



راندمان فین به این صورت تعریف می شود:

$$\eta = \frac{q}{q_{max}} = \frac{KAm\theta_b}{hpL_c\theta_b} = \frac{1}{mL} = \sqrt{\frac{KA}{hpL^2}}$$

فین را با حالتی مقایسه می کنند که تمامی سطوح جانبی با دمای base حالت جابجایی دارد.



$$\underset{\text{راندمان فین}}{\eta} = \frac{\tanh mL}{mL} \qquad m = \sqrt{\frac{hp}{KA}}$$

کارایی فین:

$$\varepsilon = \frac{q_{fin}}{q_{base}} = \frac{KAm\theta_b}{hA\theta_b} = \frac{Km}{h} = \frac{K}{h}\sqrt{\frac{hP}{KA}} = \sqrt{\frac{KP}{hA}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{KP}{hA}} \cdot \tanh mL$$

می خواهیم ببینیم در صورت بودن یا نبودن فین چقدر گرما منتقل می شود.

$$m = \sqrt{\frac{hP}{KA}} = \sqrt{\frac{h(2w+\cancel{2t})}{Kwt}} = \sqrt{\frac{2h}{Kt}}$$

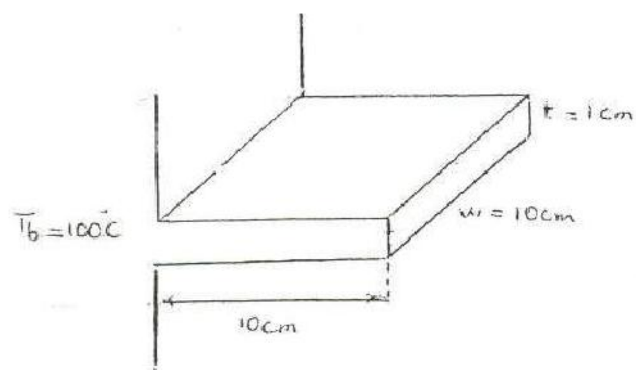
$$\eta = \sqrt{\frac{Kwt}{h(2w+2t)L^2}} = \sqrt{\frac{Kt}{2hL^2}} \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{2K}{ht}}\tanh mL \quad (۲)$$

برای انتخاب فین مناسب با کارایی و راندمان بالا کافی است K را بالا بگیریم ولی این حالت حدی دارد.

یکی دیگر از راه ها کم کردن h است که با تغییر سیال یا هندسه جسم تغییر می دهند. روی ضخامت بتنی نمی توان کرد.

در نهایت k را باید زیاد و h را کاهش داد t,L,w با هم حجم را تشکیل می دهند و برای طراحی مهم است.

راندمان وزنی:



$K = 210\ W/m\cdot s$

$h = 25\ W/m^2\cdot°C$

$T_\infty = 20°C$

جنس آلومینیوم

$A = 1m^2$

$n = 20$ fins

فین از نوع حالت کوتاه است چون طول محدود است لذا تنها از فین در حالت عایق می توان استفاده نمود.

$$q_{fin} = KAm\,\theta_b \,\mathrm{Tanh}\, mL_c$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{q_{fin}}{q_{max}} = \frac{\mathrm{Tanh}\, mL_c}{mL_c}$$

$$q_{max} = hPL_c\theta_b$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{KA}} = \sqrt{\frac{h(2w+2t)}{Kwt}} = \sqrt{\frac{2h}{Kt}} = \sqrt{\frac{2(25)}{210(1/100)}} = 4.88$$

$$L_c = L + t/2 = 10 + 1/2 = 10.5 \text{ cm}$$

$$q_{fin} = (210)\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right)(4.88)(100-20)\,\mathrm{Tanh}\left[4.88 \times \frac{10.5}{100}\right] = 38.7 \text{ W}$$

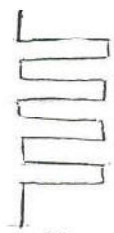
$$q_{max} = 25\left(2\left(\frac{10}{100}\right) + 2\left(\frac{1}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right)(100-20) = 44 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{38.7}{44} = 88\%$$

$$\varepsilon = \frac{q_{fin}}{q_{base}} = \frac{38.7}{hA\theta_b} = \frac{38.7}{(25)\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right)(80)} = 19.35 \gg 2.0$$

حال تعداد فین ها را به ۲۰ افزایش می دهیم درصد افزایش در انتقال حرارت بیابید:

$$q_{Total} = n\, q_{fins} + q_{unfins}$$



$$q = hA\theta_b = 25(1)(100-20) = 2000\ W = 2\,KW$$ بدون پین

$$q_{total} = 20 \times 38.7 + hA_{unfin}\theta_b = 20 \times (38.7) + 25\left[1 - \overset{20}{n}\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right)\right](100-20)$$

$$q_{total} = 2.7\ \ KW$$ با افزودن پین

$$\% \Delta q = \frac{2.7-2}{2} = 35\%$$

$$\eta = \frac{q_{total}}{q_{max}} = \frac{2.7 \times 10^3}{44 \times 20} = 3.07 \simeq 300\%$$ اندازه زنی

fin efficiancy η_f

overal surface efficiancy $\Rightarrow \eta_o = \dfrac{q_T}{q_{max}} = \dfrac{q_T}{hA_t\theta_b}$

راندمان درنی پین‌ها A_f

$q_{max} = hA_f\theta_b$

$\eta_f = \dfrac{q_{fin}}{q_{max}}$

$$A_t = A_f + A_b$$

$$q_t = \underbrace{hA_b\theta_b}_{q_{base}} + \underbrace{hA_f\eta_f\theta_b}_{q_{fin}}$$

$$= h\left[(A_t - A_f) + \eta_f A_f\right]\theta_b$$

$$= hA_t\left[1 - A_f/A_t\,(1-\eta_f)\right]\theta_b$$

$$\eta_o = \frac{hA_t\left[1 - A_f/A_t\,(1-\eta_f)\right]\theta_b}{hA_t\theta_b} = \left[1 - \frac{A_f}{A_t}(1-\eta_f)\right]$$

$$\eta_o = \left[1 - \frac{\overbrace{20\left(2\left(\tfrac{10}{100}\right) + 2\left(\tfrac{1}{100}\right)\right)\left(\tfrac{10}{100}\right) + 20\left(\tfrac{10}{100} \times \tfrac{1}{100}\right)}^{A_F}}{A_f + \left[1 - 20\left(\tfrac{10}{100}\right)\left(\tfrac{1}{100}\right)\right]} (1 - 0.88) \right]$$

$$= 0.96 = 96\%$$

1-D , Unsteady state

دمای بدن انسان ۳۶ درجه است و برای سوختن نوع اول تا دمای ۶۰ درجه می توان تحمل کند.

$$K\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}\right] + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \alpha = \frac{K}{\rho c} = \frac{W/m.°C}{kg/m^3 . J/kg°C} = \frac{m^2}{s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad T^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

از q''' صرف نظر می کنیم

$$\Downarrow$$

$$T^* = \frac{T}{T_i}$$

T^* بی بعد است

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad t^* = \frac{t}{t_o}$$

t زمان اولیه است.

$$\frac{\partial T^* T_i}{\partial t^* t_o} = \alpha \frac{\partial^2 (T^* T_i)}{\partial (x^* L)^2} \Rightarrow \frac{T_i}{t_o}\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \alpha \frac{T_i}{L^2}\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \underbrace{\frac{t_o . \alpha}{L^2}}_{\text{عدد بی بعد}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

تغییرات * ها بین صفر تا ۱ است

به $F_o = \frac{\alpha . t_o}{L^2}$ عدد فوریه گویند که سرعت پخش حرارتی را نشان می دهد. که این پخش در واحد طول است.

$$\frac{\overset{\text{نفوذ حرارتی}}{\alpha}}{\underset{\text{سرعت}}{\frac{L}{t}} . \underset{\text{طول}}{L}}$$

$$q_{cond} = q_{conv} \Rightarrow -KA\frac{dT}{dx} = hA(T-T_\infty) \qquad \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T-T_\infty} = \frac{hA \cdot \Delta x}{KA} \quad \text{با} \quad \frac{hL}{K} = \frac{\frac{L}{KA}}{\frac{1}{hA}} = Bi$$

عدد بی‌بعد

Biot num

حال به معادله اولیه بر می گردیم و داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

روش‌های حل سیستم‌های ناپایدار

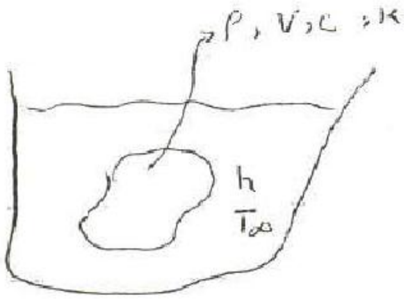
۱- جسم تک دما یا جسم فشرده — lumped method

۲- روش نمودارهای هیسلر — Heissler chart

۳- روش جسم نیمه محدود

۴- روش عددی

جسم تک ما می توان مسائل یک ناحیه بعدی را بررسی کند



T_i دمای اولیه

T_∞, h

$T_\infty > T$

در جسم تک باید از قانون دما انرژی و شروع و استفاده نمود.

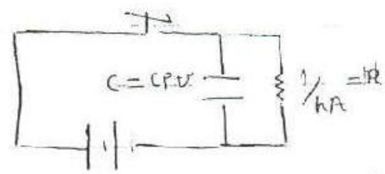
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gn} = \dot{E}_{st} \Rightarrow hA(T_\infty - T) = \rho c V \frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow hA(T - T_\infty) = -\rho c V \frac{dT}{dt} \Rightarrow \int_{T_i}^{T} \frac{dT}{T - T_\infty} = \int_{0}^{t} \frac{-hA}{\rho c V}\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{\frac{-hA}{\rho c V} t} = e^{(-B_i F_o)}$$

دمای بی بعد

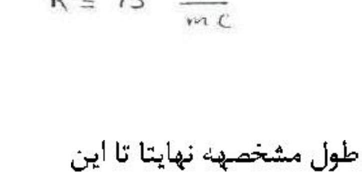
$$= e^{-t/RC} = e^{-t/\tau}$$



طول مشخصه $\frac{V}{A} = L \qquad \frac{h t}{\rho c L} \times \frac{L}{L} \times \frac{K}{K}$

در مثال تک دما باید جسم از لحاظ فیزیکی کوچک باشد یعنی $B_i < 0.1$

اگر در مثال قبل فرض کنیم که $T_i = 200\,^\circ C$ و جسم ما کروی شکل با قطر ۱۲۰ سانتی متر و از جنس آلومینیوم $K = 210\ \frac{W}{m^2\,^\circ C}$ با باشد و در محیطی با $T_\infty = 20\,^\circ C$ و $h = 10\ W/m^2\,^\circ C$ قرار داشته باشد، بعد از ۲ دقیقه می خواهیم دما را بیابیم:



$h = 10\ W/m^2\,^\circ C$

$K = 75\ \frac{W}{m\,C}$

$$B_i = \frac{hL}{K}$$

$$L = \frac{V}{A_s} = \frac{10 \times 10 \times 100}{2(10 \times 10) + 4(10 \times 100)} = 2.38\ cm$$

$$B_i = \frac{10 \times 2.38 \times 10^{-2}}{75} = 3 \times 17 \times 10^{-3} < 0.1$$

Max طول مشخص ۲,۵ است چون اگر طول ما نیز تا بی نهایت ادامه پیدا کند طول مشخصه نهایتا تا این مقدار پیش می رود لذا فرض جسم تک دما برای ریل راه آهن مناسب است.

در مساله گذرا باید اول bi چک شود اگر کوچکتر از ۰,۱ نشد باید از روش های دیگر به دست آورد.

$$B_i = \frac{hL}{K} \qquad L = \frac{V}{A_s} = \frac{4/3\,\pi r^3}{4 \pi r^2} = \frac{r}{3}$$

$$Bi = \frac{10 \times 60 \times 10^{-2}}{3 \times 210} = 9.52 \times 10^{-2} < 0.1$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-Bi\,F_o} \Longrightarrow \frac{T - 20}{200 - 20} = e^{-(9.52 \times 10^{-2})(F_o, 253)} \Rightarrow T = 199.6\,^\circ C$$

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{8.418 \times 10^{-5} \times 2 \times 60}{\left(\frac{60}{100 \times 2}\right)^2} = 0.253$$

ما در زمان صفر تا ده دقیقه می خواهیم بدانیم چقدر انرژی از دست داده است:

$$q = hA(T - T_\infty) = hA(199.6 - 20)$$

$$Q = \int_0^t q\,dt = \int_0^t hA(T - T_\infty)\,dt = \int_0^t hA(T_i - T_\infty)\, e^{-\frac{hA_s}{\rho c V}}\,dt$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{\frac{-hA_s}{\rho c V} t}$$

$$\Longrightarrow Q = \frac{-hA_s}{\left(\frac{hA_s}{\rho c V}\right)} (T_i - T_\infty)\, e^{-\frac{hA_s}{\rho c V} t} \Big]_0^t = -\rho c V (T_i - T_\infty)\left(e^{-\frac{hA_s}{\rho c V} t} - 1\right)$$

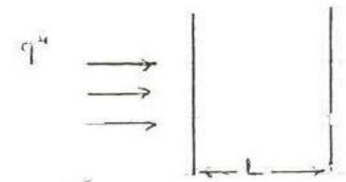
$$Q_{max} = mc\Delta T$$

if $t \longrightarrow \infty$

$$Q = \frac{4}{3}\pi (60 \times 10^{-2})^3 \times (2707)(896)\left(1 - e^{-(9.52 \times 10^{-2})(0.253)}\right)(180)$$

$$= 877.8 \text{ KJ}$$

اتو برقی



$A = 1 m^2$

h, T_∞

$T_i = \checkmark$

$t \quad T$

$Bi < 0.1$

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{ST}$$

$$q''A - hA(T - T_\infty) = \rho c V \frac{dT}{dt} \Rightarrow t = 0 \quad T = T_i$$

$$\theta = T - T_\infty \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} + m^2\theta = Q$$

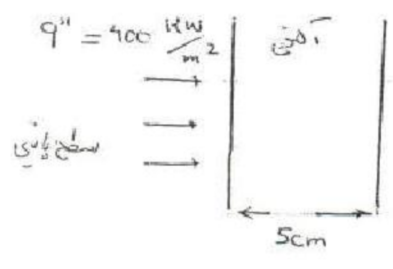
$$m^2 = \frac{h}{\rho c L} \qquad Q = \frac{q}{\rho c L} \longrightarrow \theta = Ce^{-mt} + \theta_p \nearrow \frac{Q}{m}$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_i e^{-mt} + (1 - e^{-mt})\frac{q''}{h}$$

بعد از گذشت زمان زیاد سیستم پایدار می شود در نتیجه: $\theta = \frac{q''}{h}$

$$q'' = h(T - T_\infty) \Rightarrow q = hA(T - T_\infty)$$

مثال: **تیغه آهنی به ضخامت ۵ cm در دمای محیط بوده است ناگهان سطح پایین تیغه مذبور را در معرض** شار حرارتی به میزان $q'' = 400 \frac{KW}{m^2}$ قرار می دهیم و اگر ضریب جابجایی سطح بالای تیغه $h = 50 \frac{W}{m^2 c}$ باشد زمان رسیدن تیغه به دمای ۱۰۰ درجه را معلوم نمائید.



$T_i = 20^\circ c$

$h = 50 \ W/m^2 {}^\circ c$

$T_\infty = 20^\circ c$

$Bi = \frac{hL}{K} = 0.034$

$m = \frac{h}{\rho c L} = 2.8 \times 10^4$

$\rho = 7849 \qquad C = 452 \qquad K = 73$

$$\theta = (1 - e^{-mt})\frac{q''}{h} \Rightarrow 100 - 20 = \frac{400 \times 10^3}{50}(1 - e^{-2.8 \times 10^{-4} t})$$

$$\Rightarrow t = 35.65 \ s$$

روش نمودار های هیسلر

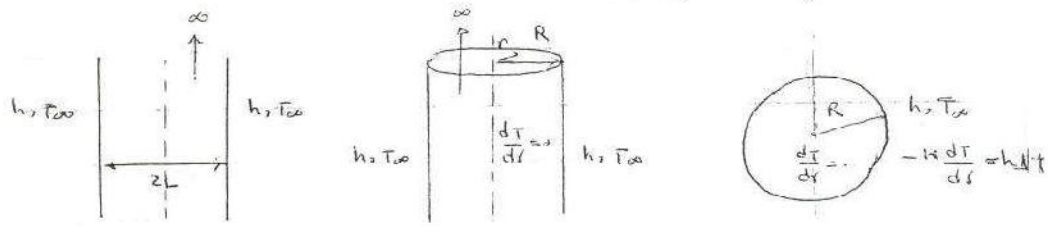
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{\rho c}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$r = 0$ صفحه

$r = 1$ استوانه

$r = 2$ کره

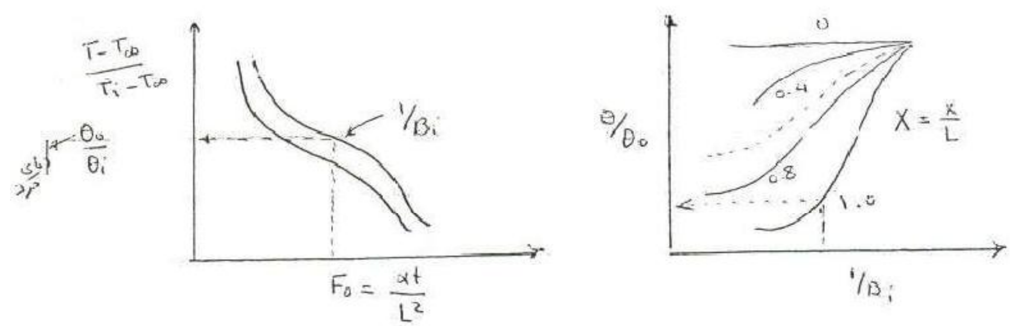


$x = -L , L$

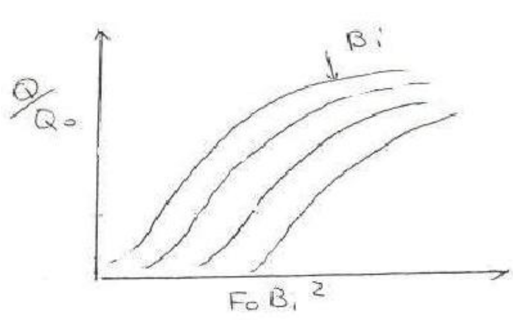
$x = 0 \longrightarrow \frac{dT}{dx} = 0$ شرط تقارن

$-k\frac{dT}{dx} = h\Delta T$

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2 , R^2} \qquad \boxed{B_i = \frac{hL}{k} , \frac{hR}{k}}$$



در این روش تا مرحله نهایی نباید از حالت بی بعدی خارج شد.

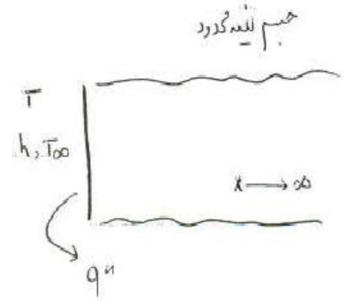


$$Q_o = \rho c V (T_i - T_\infty)$$

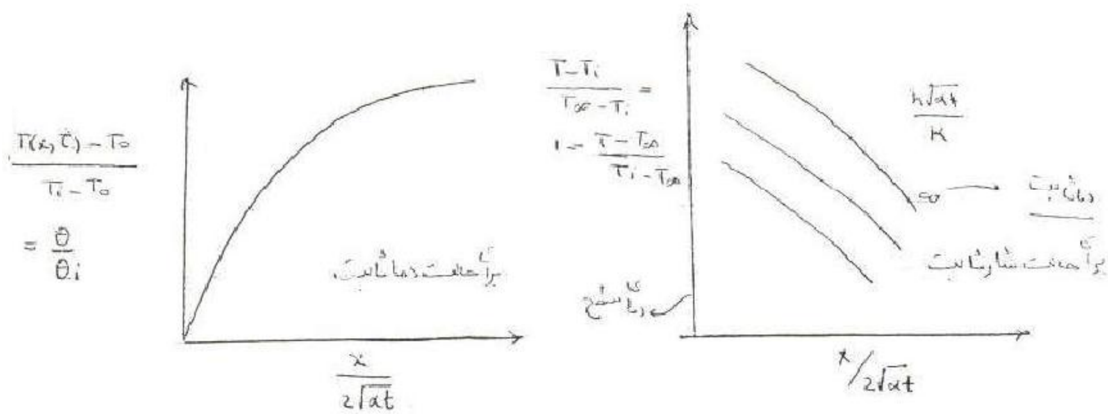
با استفاده از این نمونه ها دو شرط قابل حل است. یکی شرط جابجایی است و دیگری دمای ثابت

جسم نیمه محدود:

در حالتی که صفحه ما بزرگ بود مثل دیوار اتاق یا کره ی ما شعاع بزرگی داشته باشد:

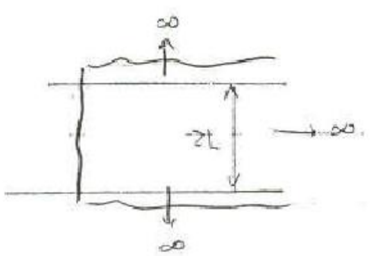


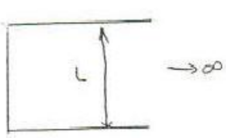
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \longrightarrow \text{روش لاپلاس}$$



برای حالت سه بعدی کافی است از صفحات گذرنده از هم استفاده کنیم.

با یک صفحه قطع می دهیم.

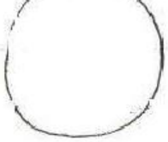


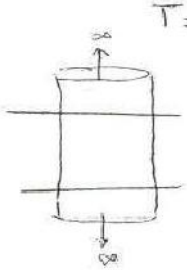


$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

مثلاً T تابع X و Y است $\qquad T = X \cdot Y$

برای کره داریم:





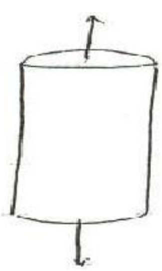
نیمه محدود یا یک طرف محدود

T ثابت $\qquad \dfrac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \int \underbrace{\dfrac{x}{2\sqrt{\alpha t}}}_{\text{جدول}}$

$$q_0 = \frac{KA(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

شار ثابت $\qquad T - T_i = \dfrac{2 q_0 \sqrt{\alpha t / \pi}}{KA} \exp\left(\dfrac{-x^2}{4\alpha t}\right) - \dfrac{q_0 x}{KA}\left(1 - \operatorname{erf} \dfrac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$

مثال: میله نا محدودی به قطر ۵ سانتی متر از جنس چوب در دمای اولیه ۱۰ درجه در معرض محیطی با شرایط جابجایی $100\ \frac{W}{m^2 \,^\circ C}$ و $T_\infty = 40^\circ C$ قرار گرفته، معلوم نمایید بعد از چند ساعت دمای سطح آن به دمای ۳۰ درجه می رسد.



$\alpha = 0.96 \times 10^{-7} \qquad K = 0.11$

$L = \dfrac{V}{A} = \dfrac{\pi r^2 L}{2\pi r L} = \dfrac{r}{2}$

$Bi = \dfrac{hL}{K} = \dfrac{100 \times 2.5 \times 10^{-2}}{2 \times 0.11} = 11.36 > 0.1$

جسم [illegible]

$Bi = \dfrac{hR}{K} = \dfrac{100\left(\frac{2.5}{100}\right)}{0.11} = 22.72$

$\dfrac{1}{Bi} = 0.044$

$\dfrac{\theta_s}{\theta_i} = \dfrac{\theta_s}{\theta_0} \cdot \dfrac{\theta_0}{\theta_i} \Rightarrow \dfrac{30 - 40}{10 - 40} = \underbrace{0.05}_{\substack{4.17 \\ \text{جدول}}} \times \dfrac{\theta_0}{\theta_i}$

$R = \dfrac{r}{R} = 1$ در سطح

$\dfrac{1}{Bi} = 0.044$

$\dfrac{\theta_0}{\theta_i} = \dfrac{30 - 40}{10 - 40} = \dfrac{1}{3} = 0.33$

$F_0 = 0.5 \longrightarrow \dfrac{\alpha t}{R^2} \Rightarrow$

$\dfrac{0.96 \times 10^{-7} \times t}{\left(\frac{2.5}{100}\right)^2} = 0.5$

$\Rightarrow t \simeq 0.9h$

$\alpha = 0.96 \times 10^{-7} \qquad K = 0.11$

$$L = \frac{V}{A} = \frac{r}{2} = \frac{50}{4} = 12.5 \Rightarrow Bi = \frac{hL}{K} = \frac{12.5 \times 10^{-2} \times 100}{0.11} = 113.63 > 0.1$$

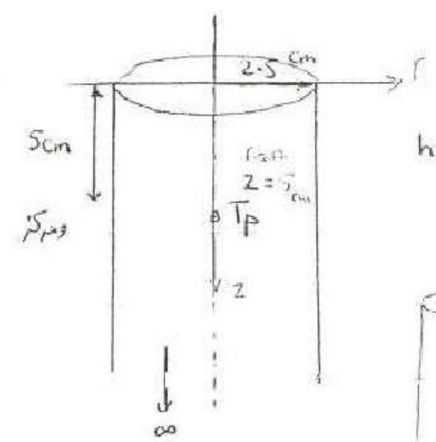
جسم تکه ماسیت.

$$Bi = \frac{hR}{K} = \frac{100 \times 25 \times 10^{-2}}{0.11} = 227.3 \Rightarrow \frac{1}{Bi} = 4.4 \times 10^{-3} \simeq 0$$

$$\frac{\theta_s}{\theta_i} = \frac{\theta_s}{\theta_o} \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Rightarrow \frac{30-40}{10-40} = \frac{\theta_o}{\theta_i} \times$$

دما سطح $\quad R = \frac{R}{R} = 1.0 \quad$ دمای سطح $\quad \Rightarrow \frac{\theta_o}{\theta_i} =$

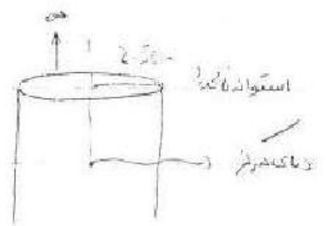
مثال: یک استوانه نیمه محدود را در نظر بگیرید از جنس گوشت (خواص فیزیکی آب)



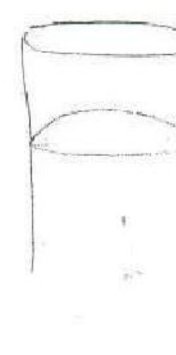
دمای اولیه $30^\circ C$

دمای T_p

بعد از یک ساعت در یک محیط جابجایی $T_\infty = 100^\circ$ و $h = 5 \frac{W}{m^2 C}$



حالت ما دو بعدی است.



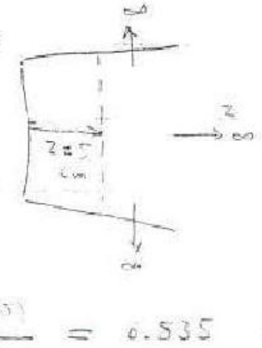
$$\alpha = \frac{K}{\rho C} = \frac{0.604}{997(4179)}$$

جسم نیمه محدود

$\alpha = 1.45 \times 10^{-7}$

$$Bi = \frac{hR}{K} = \frac{5(2.5/100)}{0.604} = 0.207$$

$$\frac{1}{Bi} = 4.83$$



$$F_o = \frac{\alpha t}{R^2} = \frac{1.45 \times 10^{-7}(3600)}{(2.5/100)^2} = 0.535 \Rightarrow \left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right) = 0.7 = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{5\times10^{-2}}{2\sqrt{1.45\times10^{-7}\times3600}} = 1.11$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{5\times\sqrt{1.45\times10^{-7}\times3600}}{0.609} = 0.19 \qquad \Longrightarrow \quad \frac{\theta}{\theta_i} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\theta_o}{\theta_i} = \left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right)_{\text{استوانه}} \times \left.\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{جسم نیمه بی‌نهایت}} = 0.7\times1 = 0.7 \qquad \Longrightarrow \quad T_p = 17^{\circ}C$$

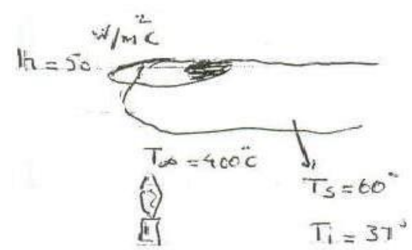
با تغییر z=۵ به z=۱ سانتی متر داریم:

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0.22$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = 0.19$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\theta}{\theta_i} = 0.85 \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{T_p} = 0.7\times0.85 = 0.595$$

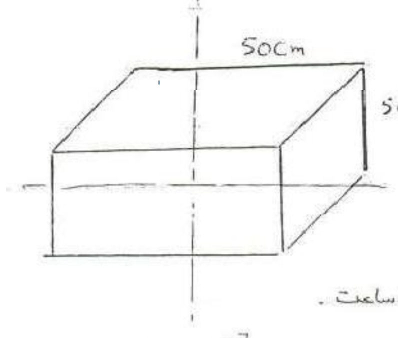
$$\frac{T_p - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.595 = \frac{T_p - 10}{20 - 10} \Longrightarrow T_p = 15.95$$



$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.0}{2\sqrt{1.45\times10^{-7}(t)}} = 0.0$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{60-400}{37-400} = 0.94$$

$$\Rightarrow \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{50\sqrt{1.45\times10^{-7}(t)}}{0.609} = 0.05$$



$t = 2.52$

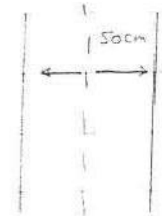
50 cm

دمای سطح $400^\circ C$

$T_i = 10^\circ C$

مکعب از جنس سیمان

دمای مرکز جسم پس از ۴ ساعت.



$\alpha = 6.8 \times 10^{-7}$

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{6.8\times10^{-7}(4\times3600)}{\left(\frac{25}{100}\right)^2} = 0.157 \qquad \frac{1}{B_i} \overset{h=0}{=} 0$$

$$\left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right|_x = 0.7 \qquad \left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right|_y = \left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right|_z = 0.7 \quad \Rightarrow \left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right|_{T_p(x,y,z)} = 0.7^3 = 0.343$$ 36

$$\frac{T_p - 400}{10 - 400} = 0.343 \quad \Longrightarrow \quad T_p = 266.23^\circ C$$

$$\left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right|_{T_p(x,y,z)} = \underbrace{\left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right|_x}_{\frac{\theta_s}{\theta_o}\cdot\frac{\theta_m}{\theta_i}} \cdot \left.\frac{\theta}{\theta_i}\right|_y \cdot \left.\frac{\theta}{\theta_i}\right|_z$$

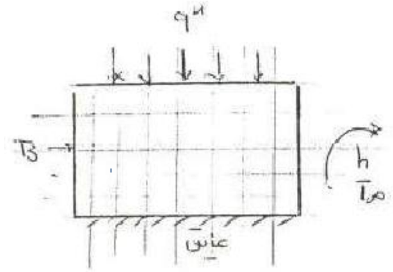
جسم گذرا:

- حل تحلیلی ← جداسازی توابع

جسم تکدما ← bi < ۰,۱

- نمودار های هیسلر- نمودار جسم نیمه محدود

با استفاده از نمودار ها نمی توان منبع تولید انرژی به کاربرد برای این کار باید از انرژی های محاسباتی استفاده کرد.



- تفاضل جزئی ← معادله دیفرانسیل
- المان محدود ← معادله انتگرالی
- حجم محدود
- ⋮

از معادله اصلی داریم :
$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Longrightarrow f(x+h)=f(x)+h\frac{df}{dx}+\frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}+\cdots$$

$$\Rightarrow df/dx=\frac{f(x+h)-f(x)}{\Delta x}$$ تفاضل پیشرو $O(h)$

$$f(x-h)=f(x)-h\frac{df}{dx}+\frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\frac{df}{dx}=\frac{-f(x-h)+f(x)}{\Delta x}$$ تفاضل پسرو $O(h)$

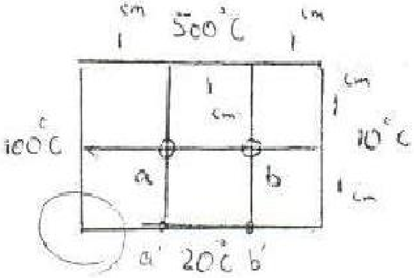
$$f(x+h)-f(x-h)=2h\frac{df}{dx} \Longrightarrow \frac{df}{dx}=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\Delta x}$$ تفاضل مرکزی $O(h^2)$

حال از رابطه اصلی داریم :
$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T(x+t)-T(x)}{\Delta t}$$

برای زمان فقط از تفاضل پیشرو استفاده می‌شود.

$$f(x+h)+f(x-h)=\cdots\frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$ تفاضل مرکزی برای مشتق دوم

مثال:

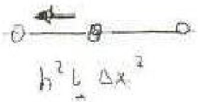


حالت پایدار

بدون منبع انرژی

$T_a, T_b = ?$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=0 \longrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T(x+h)-2T(x)+T(x-h)}{\Delta x^2}$$

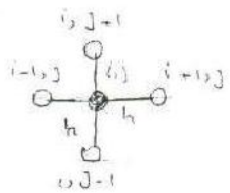


$$\left(T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}\right)\frac{1}{h^2}+\frac{T_{i,j+1}-2T_{i,j}+T_{i,j-1}}{k^2}$$

اگر h=k باشد در بیشتر مواقع این گونه است.

اگر منبع انرژی داشتیم

$$T_{i+1,j}+T_{i-1,j}+T_{i,j-1}+T_{i,j+1}-4T_{i,j}=0 \quad \left(\frac{-q'''}{k}\right)$$



a) $T_b+100+500+20-4T_a=0$

b) $T_a+10+500+20-4T_b=0$

حال این دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_a\\T_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} \quad \begin{cases}T_b-4T_a=-620\\T_a-4T_b=-520\end{cases} \Longrightarrow T_a=200.66^{\circ}C \quad T_b=182.66^{\circ}C$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-4 & 1\\1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_a\\T_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-620\\-520\end{bmatrix}$$

حال اگر به جای دمای ۲۰ ما t∞ را ۲۰ و ۱۰ =h و در این حالت k جسم نیز موجود باشد، داریم:

$$a)\quad T_b + 100 + 500 + T_a' - 4T_a = 0$$

$$b)\quad T_a + 10 + 500 + T_b' - 4T_b = 0$$

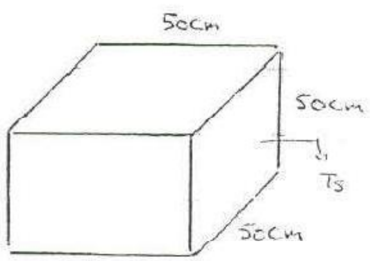
$$a')\quad -k\left(\frac{dT}{dx}\right) = h(T - T_\infty) \Rightarrow -12\,\frac{T_a - T_a'}{0.01} = 10\,(T_a' - 20)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$b')\quad -12\,\frac{T_b - T_b'}{0.01} = 10\,(T_b' - 20)$$

در مرز ما دیگر منبع ذخیره انرژی و تولید وجود ندارد و فقط کافی است که از ارزش بالا استفاده کنیم.

پروژه: مکعب ۵۰ سانتی متر از سیمان با دمای اولیه ۱۰ درجه و دمای سطح ۴۰۰ درجه موجود است.



$T_i = 10^\circ C$

$T_s = 400^\circ C$

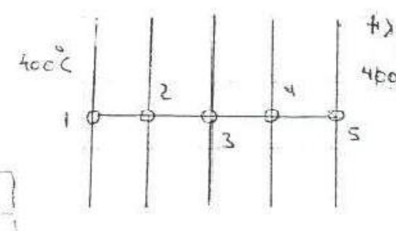
دمای مرکز ؟ $\longrightarrow$ S.S

حال مثال قبل را در حالت ناپایا حل می‌کنیم :

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = \rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t}$$

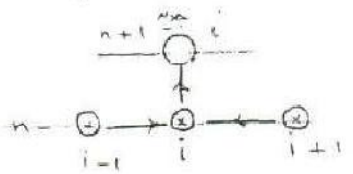
$\boxed{t = \Delta t \times n}$



می توان دمای همه را به صورت دمای اولیه در نظر گرفت:

روش صریح
explicit

$$\frac{T_{i+1}^{n} - 2T_i^{n} + T_{i-1}^{n}}{h^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t}$$



$$\frac{\alpha \Delta t}{h^2} = r \longrightarrow \text{فوریه}$$

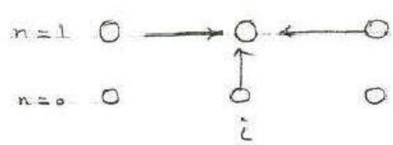
$$r\left(T_{i+1}^{n} + T_{i-1}^{n}\right) + (1-2r)\,T_i^{n} = T_i^{n+1}$$

$$\begin{bmatrix} r & 1-2r & r & 0 & \\ & r & 1-2r & r & 0 \\ & & & 1-2r & r \\ & & & & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{i-1} \\ T_i \\ T_{i+1} \\ T_{i+2} \\ \vdots \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} T_{i-1} \\ T_i \\ T_{i+1} \\ T_{i+2} \\ \vdots \end{bmatrix}^{n+1}$$

برای سیستم یک بعدی باید حتما $1-2r > 0$ باشد لذا $r < \frac{1}{2}$ باشد در غیر این صورت مساله واگرا می شود.

روش ضمنی

$$\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t}$$

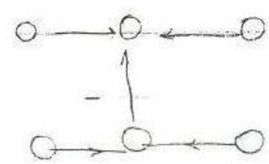


$$r\left(T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}\right) + (1+2r)\,T_i^{n+1} = T_i^{n}$$

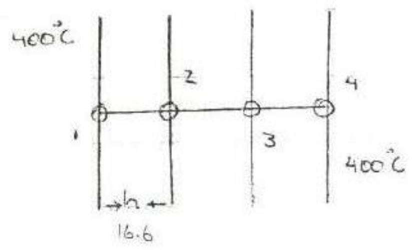
$$\begin{bmatrix} 1+2r & & & \\ & 1+2r & & \\ & & 1+2r & \\ & & & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix}^{n}$$

روش کرانک نیکلسون

$$(1-\omega)\,\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{h^2}+\omega\,\frac{T_{i+1}^{n}-2T_i^{n}+T_{i-1}^{n}}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{T_i^{n+1}-T_i^{n}}{\Delta t}$$



$$\omega = 1/2$$



(2) $$\frac{T_1^{(0)}-2T_2^{(0)}+T_3^{(0)}}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{T_2^{(1)}-T_2^{(0)}}{\Delta t}$$

(3) $$\frac{T_2^{(0)}-2T_3^{(0)}+T_4^{(0)}}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{T_3^{(1)}-T_3^{(0)}}{\Delta t}$$

$$F_o < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha\Delta t}{h^2} < 1/2 \Rightarrow \frac{6.8\times10^{-7}\,\Delta t}{\left(\frac{16.6}{100}\right)^2} < 1/2 \Rightarrow \Delta t < 20000 \text{ sec}$$

(2) $$\frac{400-2T_2^{(0)}+T_3^{(0)}}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{T_2^{(1)}-T_2^{(0)}}{\Delta t}$$

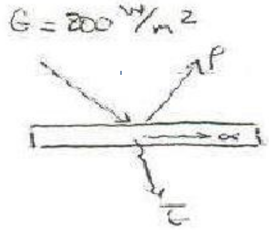
(3) $$\frac{T_2^{(0)}-2T_3^{(0)}+400}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{T_3^{(1)}-T_3^{(0)}}{\Delta t}$$

انتقال حرارت تشعشعی:

$$q_{1-2}=\underbrace{F_G}_{\text{هندسه}}\cdot\underbrace{F_\varepsilon}_{\text{صدور و کش تشعشی}}\;\underbrace{\sigma}_{5.667\times10^{-8}\ \frac{W}{m^2.K^4}}\left(\underbrace{T_1^4}_{K}-T_2^4\right)$$

هر جسم ضریب صدوری دارد که با دما و طول موج تغییر می کند که ما ثابت فرض می کنیم.

با ساده سازی داریم:



$$q_{1-2} = \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4)$$
$$= 4 \sigma A T_1^3 \Delta T$$

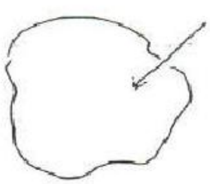
امواج نوری را نیز می توان از این نوع به حساب آورد. امواج تشعشعی طول موجی بین ۰,۱mm تا ۱۰۰mm را دارند. امواج نوری جزئیاز ان هاست. این امواج با سرعت نور حرکت می کنند.

جسم سیاه جسمی است که هر مقدار انرژی جذب می کند همان مقدار پخش می کند.

توان پخش جسم سیاه $\underbrace{E_b}_{black} = \sigma T^4 \longrightarrow W/m^2$

σ ضریب استفان بولتزمن

یک جسم با روزنه یک جسم سیاه حساب می شود.



هر جسم یک ضریب صدور یا پخش تشعشعی

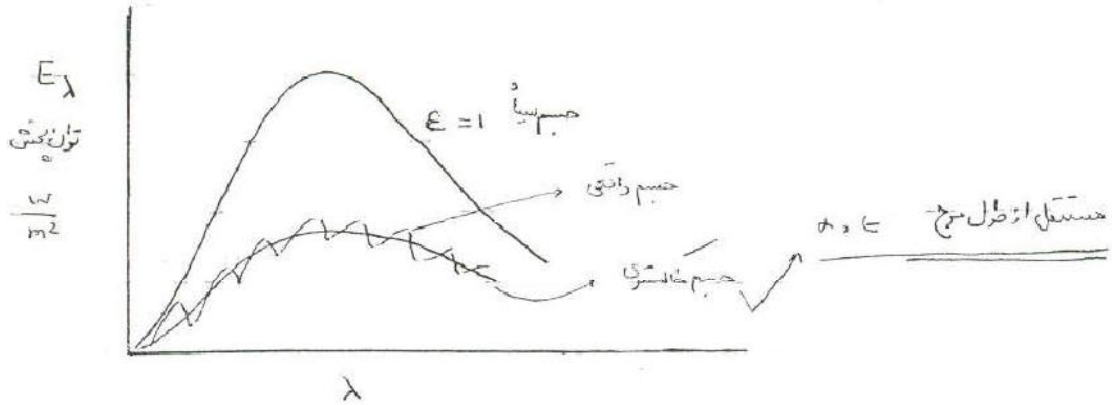
$\epsilon(\lambda, T)$

$\alpha(\lambda, T)$ جذب جسم
$\tau(\lambda, T)$ عبوری نماید
$\rho(\lambda, T)$ انعکاس

$$\alpha + \tau + \rho = 1$$

فرض بر این است که این ضرایب مستقل از x است این ضرایب به نوع سطح ما بستگی دارد.

در انتقال ۱ فرضیات ما بر مبنای پخش آینه ای است.



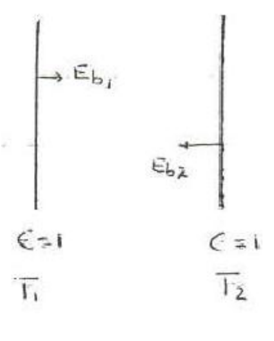
برای جس هایی که جسم سیاه محسوب نمی شود داریم:

$$E_{Al} = \epsilon \sigma T^4 = \epsilon E_b$$

$$\epsilon = 0.09$$

$$\longrightarrow E_{Al} = 0.09\,(5.669\times 10^{-8})\,(273+23)^4$$

مثال: دو صفحه سیاه موازی به سمت بی نهایت میل می کند طول در این حالت مهم نیست



$$q_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2})A$$

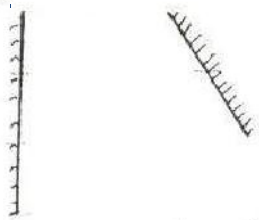
$$A = A_1 = A_2$$

$$q_{1-2} = E_{b1}A - E_{b2}A$$

$$\frac{q_{1-2}}{A} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

جسم ها هر دو بزرگ و موازی هم و هر دو سیاه هستند بنابراین نیاز به داشتن ضریب صدور و هندسه نیستیم.

در این حالت سطح ملایل تمامی سطح صفحه ی راست را نمی بیند بنابراین فاکتور دید مطرح می شود.



$E_{b1} = \sigma T_1^4$, T_1, $\epsilon = 1$, A_1

$E_{b2} = \sigma T_2^4$, T_2, $\epsilon = 1$, A_2

F_{i-j} که درصد انرژی خارج شده از (i) به (j) منتقل می‌شود

$$q_{1-2} = E_{b1} F_{1-2} A_1 - E_{b2} A_2 F_{2-1}$$

چون سطح ۱ می تواند تمام سطح ۲ را ببیند ولی لزومی ندارد که سطح ۲ تمام سطح ۱ را ببیند

$$q_{1-2} = \sigma A_1 \underline{\underline{F_{1-2}}} T_1^4 - \sigma A_2 \underline{\underline{F_{2-1}}} T_2^4$$

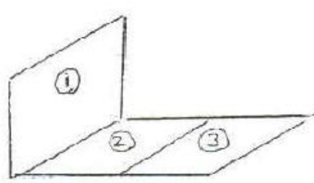
در بی نهایت دمای t_2و t_1به هم می رسد. فرضی است که برای فاکتور هندسی مطرح می شود چون در نهایت به تعادل ترمودینامیکی می رسد. در نهایت داریم:

انتقال حرارت صفر می‌شود $\Longrightarrow$ $A_1 F_{1-2} \overset{\text{خاصیت تقابل}}{=} A_2 F_{2-1}$ (1)

$$\longrightarrow \quad q_{1-2} = A_1 F_{1-2} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

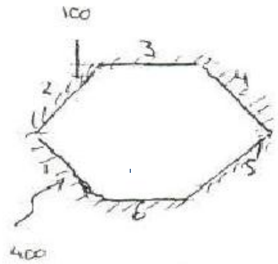
خاصیت جمع‌پذیری $\quad A_1 F_{1-2,3} = A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-3}$ (2)

سطوح منحنی مقعر که خودشان را می بینند.

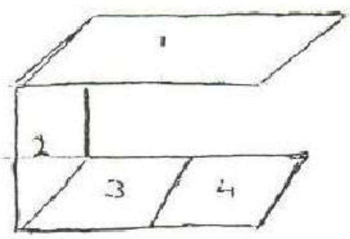


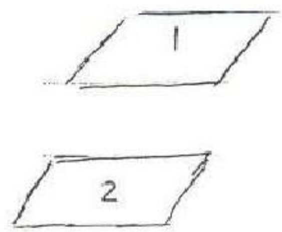
$$\sum_{j=1}^{n} F_{i,j} = 1.0 \qquad (3)$$

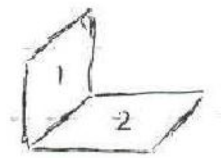
اجسامی که خودشان را نمی بینند.



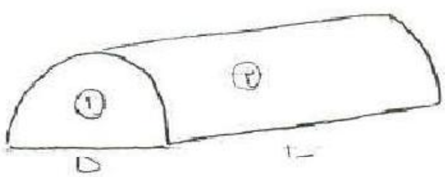
$$F_{1-1} = F_{2-2} = F_{3-3} = 0$$







در این مدار برای محاسبه فاکتور دید باید از جدول های کتاب استفاده کرد.



$F_{1-1} = 0.0$

$F_{2-2} = ?$ یا $F_{1-2} = ?$

یا $F_{2-1} = ?$

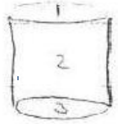
$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1}$$

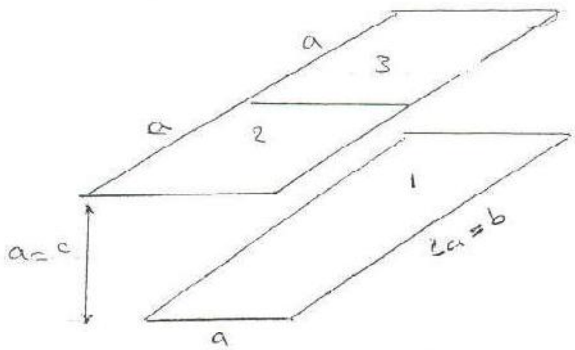
$$\sum_{j=1}^{n} F_{1,j} = 1.0 \Rightarrow \cancel{F_{1,1}} + F_{1,2} = 1.0 \Rightarrow F_{1,2} = 1.0$$

$$DL\,(1.0) = \frac{\pi DL}{2} F_{2-1} \Rightarrow F_{2-1} = \frac{2}{\pi}$$

$$F_{2-1} + F_{2-2} = 1.0 \Rightarrow \frac{2}{\pi} + F_{2-2} = 1.0 \Rightarrow F_{2-2} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

مثال:





$F_{1-2} = ?$

$A_2 = A_3 = \frac{1}{2} A_1$

با استفاده از شکل

$\beta = \frac{b}{c} = \frac{2a}{a} = 2 = \frac{Y}{D}$

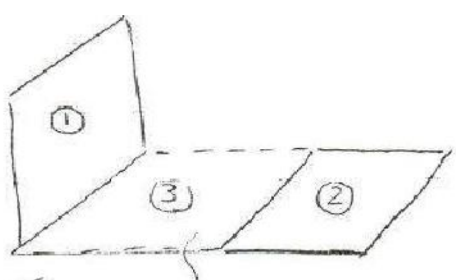
$\gamma = \frac{a}{c} = \frac{a}{a} = 1 = \frac{X}{D}$

$F_{1-2,3} = 0.128 = F_{1-2} + F_{1-3}$

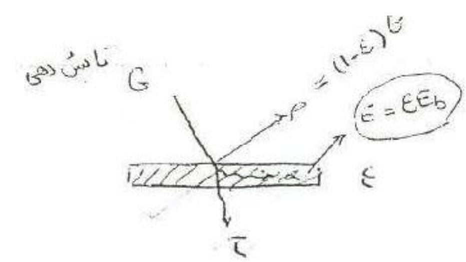
$F_{1-2,3} = 2F_{1-2} \longrightarrow F_{1-2} = \frac{0.128}{2} = 0.64$

$A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2} \longrightarrow \frac{1}{2} A_1 F_{2-1} = A_1 F_{1-2} \Longrightarrow F_{2-1} =$

$F_{1-2,3} = F_{1-2} + F_{1-3}$



دریافت حرارت می‌کنیم

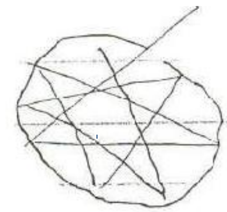


$\alpha + \rho + \tau = 1.0$

$\alpha \approx \varepsilon$

$\tau = 0.0$ با شرایط در نظر می‌گیریم.

$\alpha + \rho = 1.0 \Rightarrow \rho \approx 1 - \varepsilon$



$\varepsilon = \alpha$ ثابت می شود

رادیوسیتی : J radiosity

کل تشعشعی که یک سطح را ترک می کند اگر $\tau = 0.0$

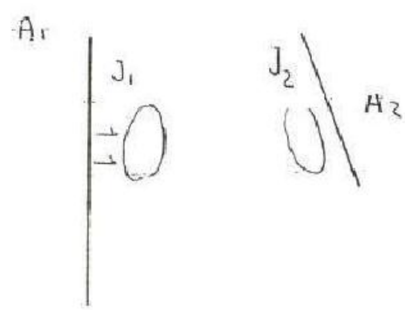
$$J = \epsilon E_b + (1-\epsilon) G$$

و کل انرژی که سطح مزبور را ترک می کند (فقط ناشی از تابش نیست)

$$\frac{q}{A} = J - G = \epsilon E_b + (1-\epsilon) G - G = \frac{\varepsilon A}{1-\epsilon}(E_b - J)$$

$$= \frac{\overbrace{E_b - J}^{\text{توان پتانسیل}}}{\underbrace{\frac{1-\epsilon}{\epsilon A}}_{\text{ماتریس مقاومت}}} \longrightarrow$$

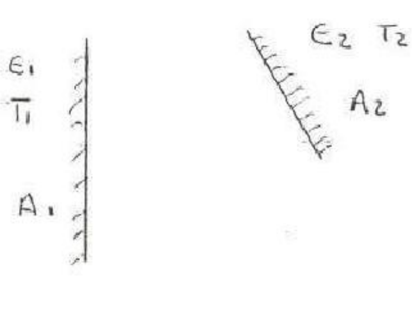
مقاومت بین سطح تشعشعی و فضا است.

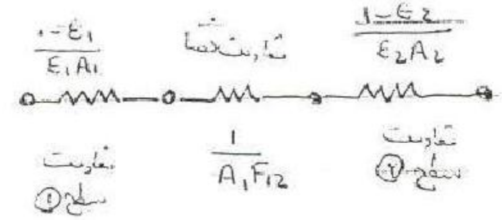


$$q_{1-2} = J_1 A_1 F_{1-2} - J_2 A_2 F_{2-1}$$

$$q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}}$$ مقاومت فضا

برای یک شبکه کلی بین دو سطح :





$$① \quad q = \frac{\Delta E}{\sum R} = \frac{E_{b1} - E_{b2} = \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1-2}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}} = \frac{q_{1-2}}{A}$$

اگر دو سطح موازی باشند و تماما هم را ببینند:

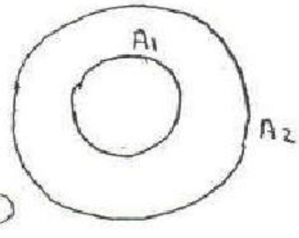
$A_1 = A_2 = A$

$\Rightarrow F_{1-2} = \underline{\underline{1}} ①$

$$q = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A}\underbrace{\left[\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} + \frac{1}{F_{1-2}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2}\right]}_{\frac{1}{\epsilon_1} - 1 + 1 + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}} = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

دو صفحه ی موازی

برای لوله هم صادق است ولی رابطه ی قبل در دو صفحه ی موازی اگر یکی از اجسام ما سیاه باشد در نتیجه:

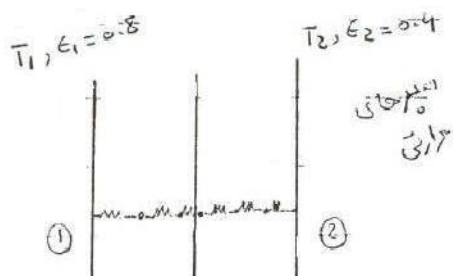


از رابطه ی ① استفاده می شود.

$$\epsilon_2 = 1 \longrightarrow q = \epsilon_1 A \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\text{if} \quad A_2 \to \infty \longrightarrow q = \epsilon_1 A \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\Rightarrow F_{1-2} = 1.0$$



اسپرهای موازی

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.4} - 1}$$

$$= 0.3636 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

حال یک صفحه الومینیومی بین این دو صفحه قرار می دهیم:

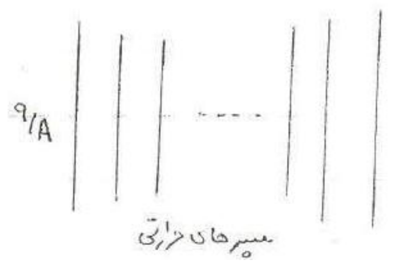
$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_{Al_1}} - 1\right) + \left(1/\epsilon_{Al_2} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.05} - 1 + \frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.4} - 1}$$

$$= 0.0239\, \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

از تشعشع این مقدار کاسته می شود.

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{0.3636 - 0.0239}{0.3636} = 93.4\%$$

از تشعشع این مقدار کاسته می شود



$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{با سپر}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بدون سپر}}$$

مثال: یک جسم خاکستری A_1= ۴cm^2 و E_1= ۰٫۳۵ و T_1= S۰۰ C این جسم با یک جسمی محصور شده است با A_2=۳۶m^2 و T_2= ۱۰۰C و E_2=۰٫۷۵ در آن صورت Q_{1-2}=?

$$\frac{1}{\tilde{F}_{1-2}} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right) \qquad q_{1-2} = A_1 \hat{F}_{1-2}\, \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{1-3} = \left(\frac{q}{A}\right)_{3-2} = \frac{q}{A} \Rightarrow \frac{\sigma (T_1^4 - T_3^4)}{1/\epsilon_1 + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} = \frac{\sigma (T_3^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{q}{A}$$

$$\text{if } \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow \frac{q}{A} = \frac{1/2\, \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} = \frac{1/2\, \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

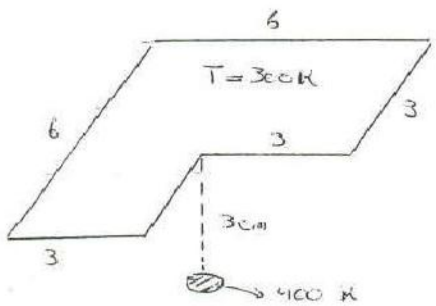
$$\Rightarrow \left.\frac{q}{A}\right)_{\text{با سپر}} = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بدون سپر}} \Rightarrow \left.\frac{q}{A}\right)_{\text{بدون سپر}} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \Rightarrow \left.\frac{q}{A}\right)_{\text{با سپر}} = \frac{1}{n+1} \cdot \left.\frac{q}{A}\right)_{\text{بدون سپر}}$$

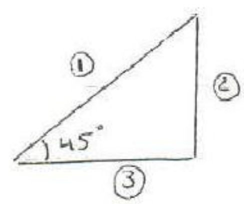
حال به حل مثال قبل می پردازیم:

$$\frac{1}{\tilde{F}_{1-2}} = \frac{1}{0.25} + \frac{4}{3.6}\left(\frac{1}{0.75} - 1\right) \Rightarrow \tilde{E} = 0.3455$$

$$\Rightarrow q_{1-2} = 4(0.3455)(5.667\times10^{-8})(773^4 - 373^4) = 26.4 \text{ KW}$$

مثال: هر دو جسم را سیاه در نظر بگیرید:





$F_{2-1} = ?$

$$\sum F_{1j} = 0 \Rightarrow F_{1-1} + F_{1-2} + F_{1-3} = 1.0 \Rightarrow F_{1-2} + F_{1-3} = 1.0$$

$$F_{2-1} + F_{2-2} + F_{2-3} = 0 \Rightarrow F_{2-1}\checkmark \Rightarrow A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2}$$

$$\Rightarrow F_{1-2}\checkmark \Rightarrow F_{1-3}\checkmark$$

$$\Rightarrow F_{3-1}\checkmark$$

انتقال حرارت جابجایی: convection

جابجایی ← طبیعی- آزاد free convection (نیروی شناور)

← اجباری forced convection (اینرسی)

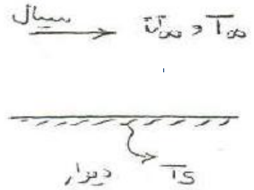
اجباری مانند کولر یا فن ها. انتقال حرارت در این جا بین سیال و دیواره است.

$$q = \underset{\text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}}{\underline{h}} A (T_s - T_\infty)$$

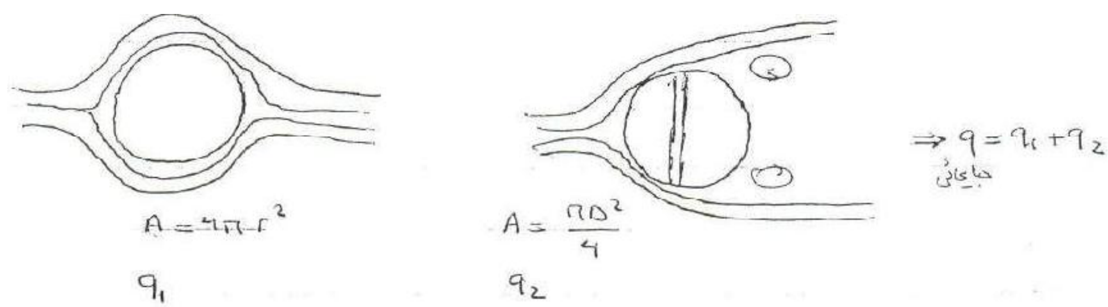
$h \longrightarrow 5 - 20$ آزاد

$h \longrightarrow 20 - 100000$ اجباری

برای لامپ هر دو نوع جابجایی وجود دارد برای بدن انسان در حالت نشستن یا راه رفتن مقاومت و قسمتی جابجایی اجباری و قسمتی طبیعی است.

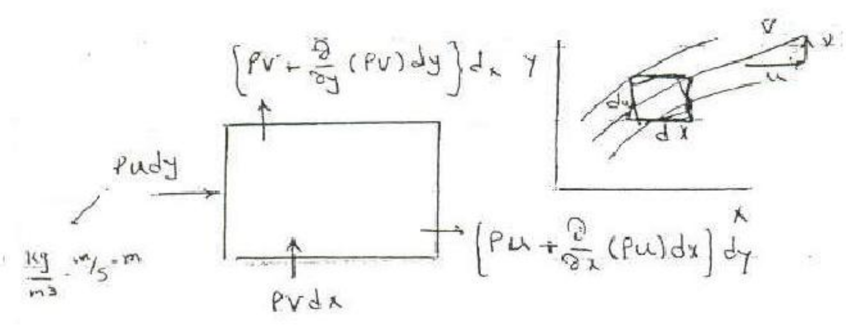


جمع زدن h ها غیر قابل قبول است.



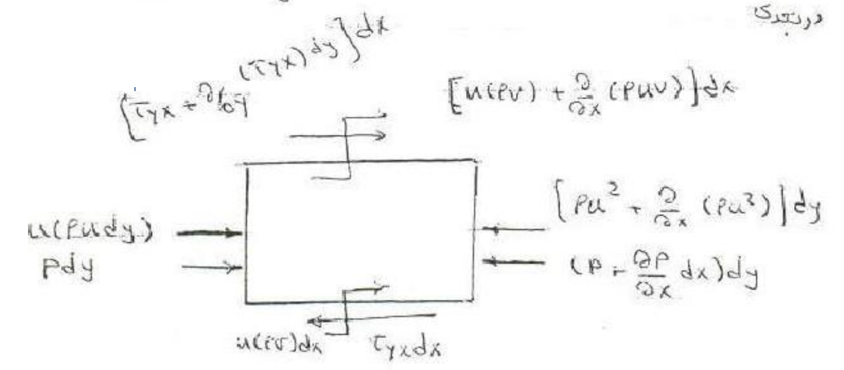
در لوله ها با وجود جریان اجباری یک جدایش رخ می دهد که باز هم نمی توان h ها را جمع کرد.در این جا h ها و هم مساحت ها تغییر کرده است. در h هندسه و اختلاف دما مهم است.

پیوستگی جرم- مومنتوم- انرژی



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$ با فرض پایدار - غیرقابل تراکم - آرام

دوبعدی



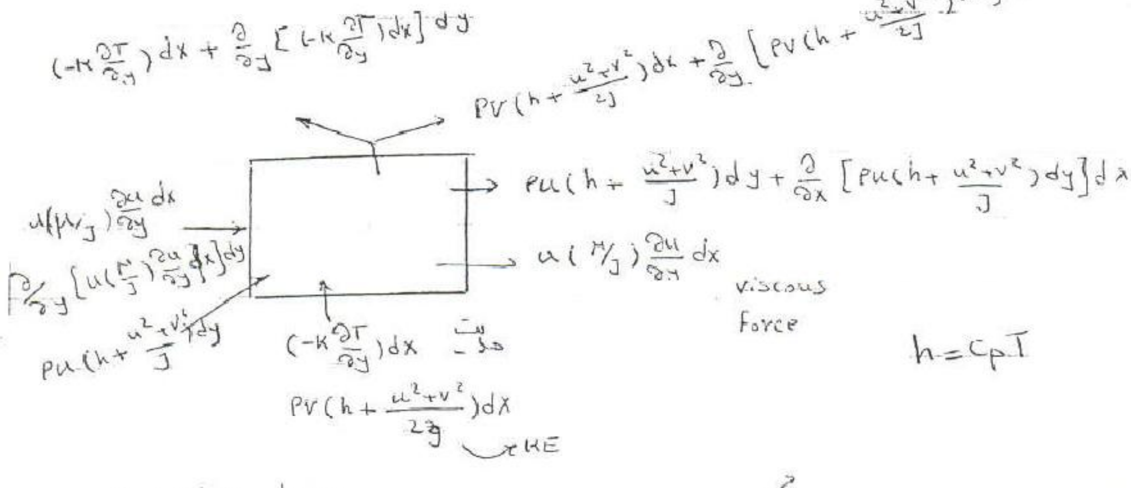
$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

قانون نیوتن

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)dxdy + \frac{\partial}{\partial y}(u\rho v)dydx = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



$$h = C_p T$$

Convective term

$$\rho C_p u\frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p v\frac{\partial T}{\partial y} = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

جمله‌های انرژی که دما را با خود می‌برد

هدایتی

Viscous dissipation

انرژی از دست رفته

حال می خواهیم معادلات را بی بعد کنیم:

$$u^* = \frac{u}{u_0} \; , \; v^* = \frac{v}{u_0} \; , \; x^* = \frac{x}{L}$$

$$y^* = \frac{y}{L}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\rho\left(u^* u_0 \frac{\partial u^* u_0}{\partial x^* L} + v^* u_0 \frac{\partial u^* u_0}{\partial y^* L}\right) = \mu \frac{\partial^2 u^* u_0}{\partial (y^* L)^2} \qquad \frac{\partial p}{\partial x} \simeq 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \left(\frac{\mu}{\rho u_0 L}\right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \longrightarrow \frac{1}{Re}$$

$$u \sim u_\infty$$

$$y \sim \delta$$

از پیوستگی $\quad \dfrac{u_\infty}{x} + \dfrac{v}{\delta} \Rightarrow v \sim \dfrac{u_\infty \delta}{x}$

$$\text{now} \quad \text{mom. Eq} \Rightarrow u_\infty \frac{u_\infty}{x} + \frac{u_\infty \delta}{x} \cdot \frac{u_\infty}{\delta} \simeq \nu \frac{u_\infty}{\delta^2}$$

$$\Rightarrow \delta^2 \sim \frac{\nu x}{u_\infty} \Rightarrow \delta \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\tau_\mu = \mu \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = C_x \rho \frac{u_\infty^2}{2} \Rightarrow \underbrace{C_x}_{\text{friction coefficient}} = \frac{2\nu}{u_\infty} \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$\Rightarrow C_m \; , \; F = \underbrace{B}_{\text{عرض صفحه}}\underbrace{L}_{\text{طول صفحه}} C_m \frac{\rho u_\infty^2}{2}$$

$$C_m = \frac{1}{L}\int_0^L C_x \, dx$$

حال می خواهیم برای انتقال حرارت این رابطه را به دست آوریم.

حرارت در سیال

$$-\underbrace{k_f}_{\text{مربوط به سیال است}} A \frac{dT}{dy}\bigg|_{y=0} = hA\,(T_w - T_\infty) \Rightarrow h = \frac{-k_f\, \partial T/\partial y\,|_{y=0}}{T_w - T_\infty}$$

$$\rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p v \frac{\partial T}{\partial y} = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

فعلاً صرف نظر شود

انرژی S.S , incompressible , 2-D

جرم: $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

حرکت $\rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

انرژی $\rho C_p\left(u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y}\right) = k\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

$\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

اگر برای گاز باشد می توان از آن صرف نظر کرد

نیروی درگ سطحی ، تنش سطحی ، ضریب اصطکاک

آنالیز ابعادی $\delta \sim Re^{1/2}$ ، $\tau = \mu\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ، $C_f \Rightarrow \overline{C_f}$, F

بی بعد سازی

از بی بعد سازی معادله داریم:

$$T^* = \frac{T}{T_\infty}$$

$$\rho C_p \left(u^* u_\infty \frac{\partial T^* T_\infty}{\partial x^* L} + v u_\infty \frac{\partial T^* T}{\partial y^* L} \right) = k \frac{\partial^2 T^* T_\infty}{\partial (y^* L)^2}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \overbrace{\frac{k}{\rho C u_\infty L}}^{\frac{1}{Re \cdot Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\frac{k}{\rho C} = \alpha \qquad \frac{k \nu}{\rho C u_\infty L \nu} = \frac{\alpha}{\nu} \cdot \frac{1}{Re} \qquad \frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr}$$

جدول

پرانتل

پرانتل برای مایعات بالاست و برای گازها تقریبا ۱ یا ۰٫۶ است برای مایعات فلزی کوچک است.

چون سرعت سیال ندارد بنابراین نقطه هدایت دارد

$$h = \frac{-k_f \left.\partial T / \partial y\right|_{y=0}}{\Delta T} = Nu = \frac{hL}{k_f} \quad \text{nusselt}$$

ناسلت

اختلاف دمای سیال و دیواره

$$h = \frac{-k_s \left.\partial T / \partial x\right|_{x=0}}{\Delta T} = Bi = \frac{hL}{k_s} \quad \text{solid}$$

برای

$$T = f(Re, Pr) \qquad h = f(Re, Pr) \Rightarrow Nu = f(Re, Pr)$$

این فرض برای جریان اجباری است.

در جابجایی های اجباری عدد nu معمولا به این شکل است.

$$Nu = C Re^m Pr^n$$

در همه حالات می توان h را به F, $C_F = C_F$ ضرایب به دست اورد.

$$h \longrightarrow \delta, C_f, F$$

می توان ضخامت لایه مرزی حرارتی S_T را از روی معادله ی انرژی به دست اورد.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \sim \frac{\delta}{\delta_t} \quad \longrightarrow \quad Pr \simeq 1 \Rightarrow \delta \simeq \delta_T$$

دو پروفیل مثل هم حرکت می کنند.

- مشتق جزئی زمان partial Time derivative $\frac{\partial c}{\partial t} \rightarrow \frac{\Delta c}{\Delta t}$ ناظر ثابت

- مشتق تمامی زمان Total Time derivative $\frac{dc}{dt}$ ناظر متحرک

- مشتق ذاتی زمان Substatial Time derivative $\frac{Dc}{Dt}$ ناظر همراه جریان آب

$$\boxed{\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}}$$

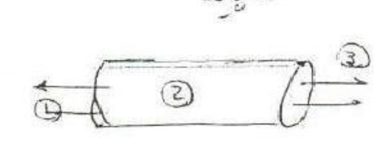
$$\frac{Dc}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial c}{\partial t} + u_x\frac{\partial c}{\partial x} + u_y\frac{\partial c}{\partial y} + u_z\frac{\partial c}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i\frac{\partial c}{\partial x_i} \doteq \frac{\partial c}{\partial t} + u.\nabla c$$

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \eta\rho\, dV + \int_{c.s} \eta\rho V.dA$$

$$\eta = 1 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho\, dv + \int_{c.s} \rho v dA = 0 \Rightarrow \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$$



$$-\rho u_1 A_1 + 0 + \rho u_2 A_2 = 0$$

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla.\psi V = S \rightarrow \text{Sourse Term}$$

$$\psi = \rho \; , \; S = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\rho V = 0$$

2-D , incomprisible , S.S , newtonnian

$$\nabla \cdot \rho V = 0 \longrightarrow \rho \cdot \nabla V + V \cdot \cancel{\nabla \rho} = 0 \Rightarrow \nabla V = 0$$

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

S برای حالت پایداری است.

S ← زایش

تغییرناز

حال در مورد سرعت داریم:

$$\psi = \rho \bar{v}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u V = S \longrightarrow P , \tau , F_B , F_\gamma$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v V = S$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \nabla \rho w V = S$$

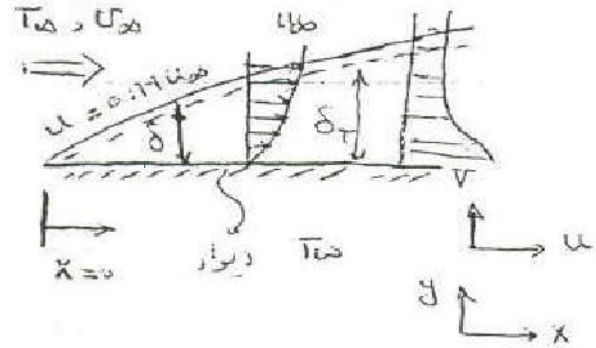
$\rho = const$, S.S , $\mu = Const$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot u V\right) = \underbrace{-\nabla p}_{\text{فشار}} + \underbrace{\mu \nabla^2 V}_{\text{نیروی لزجت}} + \underbrace{\rho g}_{\text{شتاب ثقلی}}$$

از روی واحد این عبارات اعمال می شود.

2-D , incompressible , newtonian , S.S.

no pressure gradianT $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$



$\downarrow$ no-slip condition

$\downarrow u_w = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{1}{Re} \Rightarrow \delta \qquad Nu = \frac{hL}{k_f} \quad Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{1}{Re \cdot Pr} \Rightarrow \delta_t \qquad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

اگر $\nu = \alpha \Rightarrow \delta = \delta_t$ $\qquad \delta \simeq \frac{5x}{Re^{1/2}}$

$$\rho C_p\left(u_\infty \frac{T_\infty}{x} + \frac{U_\infty \delta_t}{x}\frac{T_\infty}{\delta_t}\right) = \frac{k\, T_\infty}{\delta_t^2} \Rightarrow \delta_t^2 = \frac{k\ \nu}{\rho c\, U_\infty x\, \nu} =$$

$Pr \simeq 1.0 - 0.7$ گازها $\qquad \delta_t \simeq \frac{5x}{Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}$

$Pr \gg 1.0$ مایعات روغن-آب

$Pr \ll 1.0$ مایعات فلزی $\qquad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \simeq \frac{\delta}{\delta_t}$

کشش دیواره

$$\Rightarrow \delta \longrightarrow \tau_w = \mu\frac{du}{dy} = C_f\frac{\rho V^2}{2} \Rightarrow \frac{0.664}{Re^{1/2}} = C_f \Rightarrow \bar{C}_f = \frac{1.332}{Re^{1/2}} \quad 5.6$$

$$\delta_t = \frac{5x}{Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}$$

مقاومت هدایتی سیال به مقاومت جابجایی سیال

نسبت بین ضخامت‌ها است

$T = f(Re, Pr)$

$h = f(Re, Pr)$ $\Longrightarrow Nu = 0.332\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}$

$Nu = f(Re, Pr)$

$$h_x = \frac{k}{x}(0.332)\, Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

این روابط برای ۵۰۰۰۰۰ عدد رینولرز درست است.

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\,dx \Rightarrow Nu = 0.664\, Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

خواص فیزیکی ما در دمای FILM محاسبه می شود.

$$\frac{T_w + T_\infty}{2} = T_f$$

H باید حساب شود چون معمولا نقطه ای نمی توان استفاده کرد. در جدول کتاب فشار اتمسفر است ولی اگر بخواهیم فشار عوض شود باید P را قانون گازهای کامل استفاده کرد فقط P هست که عوض می شود و بقیه عوض نمی شود.

اعدادNU و IRE و PR را داریم:

رابطه ، ارتباط اصطحکاک با ضریب جابجایی ←

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

$$\tau = C_x \frac{\rho u_\infty^2}{2} \Rightarrow \frac{C_x}{2} = 0.332\, Re_x^{-1/2}$$

عدد استانتون

$$\Rightarrow St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}$$

$$Nu_x = 0.332\, Re_x^{1/2}\, Pr^{1/3}$$

نسبت همرفتی به جذب و ذخیره انرژی

$$St = \frac{hL/k}{\frac{\rho V L}{\mu} \cdot \frac{\nu}{\alpha}} = \frac{h A \Delta T}{\underbrace{\rho c u_\infty}_{\dot{m}} A \Delta T}$$

$$\begin{cases} \alpha = k/\rho c \\ \nu = \mu/\rho \end{cases}$$

$$St_x \cdot Pr^{2/3} = \frac{C_x}{2}$$

این معادله به نام رینولدز کولبورن معروف است که با اندازه گیری کشش سطحی می توان ضریب جابجایی را مشخص کرد.

$$Nu = \frac{hL}{K_f} \qquad Re = \frac{\rho V L}{\mu} \qquad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \qquad St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}$$

پکلت

$$Pe = Re \cdot Pr$$

تمامی روابط بالا در جابجایی اجباری است.

حال می خواهیم در مورد جریان مغشوش بحث کنیم.

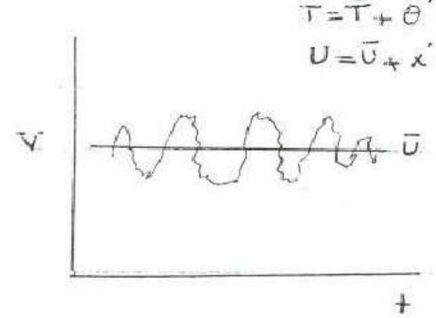
$$Re > 5\times10^5$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$T = \bar{T} + \theta'$$
$$U = \bar{U} + u'$$



با تغییر در حالت توربولانس داریم :

Pr مولکولی   Pr مغشوش

$$\nu + \nu_t$$
$$\alpha + \alpha_t$$

که از خواص هندسی بدست می آید.

$$Nu_x = 0.0296\, Re_x^{4/5}\, Pr^{1/3} \qquad \overline{Nu} \simeq Nu_x$$

مغشوش   توربولانس

Turb

در سیستم برج های خنک کن قطرات آب پایین می ریزد و جریان هوا داریم که با هم انتقال حرارت دارند.

$$St = \frac{C_f/2}{1 + 2.1\, Re^{-0.1}(Pr - 1)}$$

$$St\, Pr^{2/3} = \frac{C_f}{8} \qquad \text{برای جریان مغشوش دیوار}$$