دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

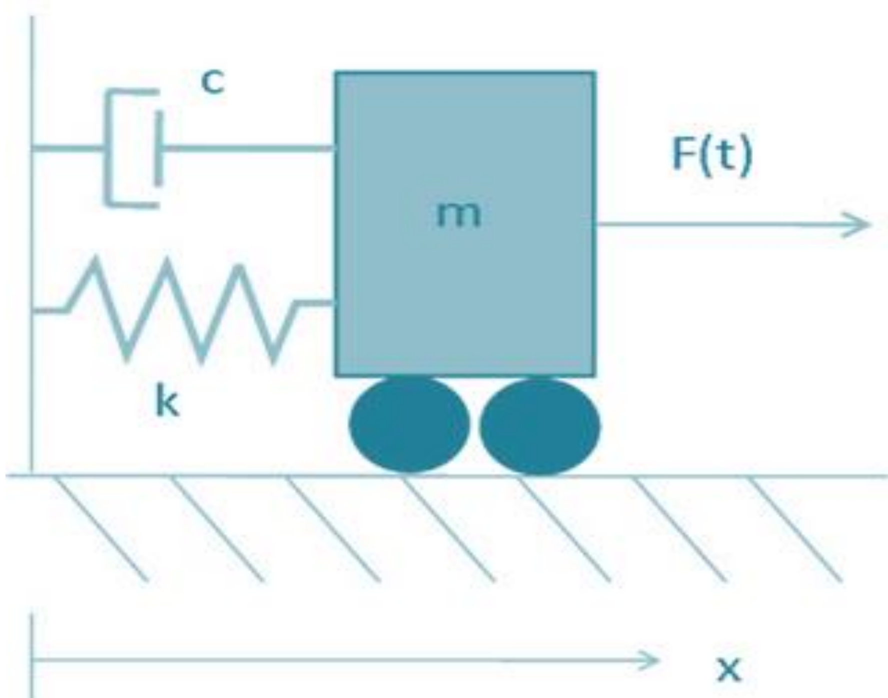
جزوه درس:

ارتعاشات

استاد: دکتر سعید ضیایی‌راد

دانشجو: مهندس علی نصر

نیمسال دوم ۹۰-۱۳۹۱



فصل اول - تعاریف و مفاهیم اولیه در سیستم های ارتعاشی

اجزای یک سیستم نوسانی ۱- ذخیره کننده انرژی پتانسیل ۲- ذخیره کننده انرژی جنبشی ۳- مستهلک کننده انرژی

درجه آزادی: اجسام صلب در فضا دارای شش درجه آزادی و ذرات ۳ درجه آزادی دارند

سیستم های گسسته با تعداد محدودی مختصات بتوان حرکت آن را توصیف کرد

سیستم های پیوسته (ممتد) تعداد درجات آزادی سیستم نامحدود است

سیستم های خطی کلیه اجزای آنها دارای رفتار خطی اند مثل پاندول با دامنه نوسان کوچک

ارتعاشات آزاد سیستمی که بر اثر یک جابجایی و یا سرعت اولیه از حالت تعادل استاتیکی خارج شود و سپس بدون دخالت نیروی خارجی نوسان کند

ارتعاشات اجباری اگر سیستمی تحت تأثیر یک نیروی خارجی نوسان کند مانند لرزش موتور و بدنه اتومبیل

ارتعاشات نامیرا اگر در یک حرکت ارتعاشی انرژی مکانیکی سیستم هدر نرود

حرکت تناوبی حرکتی که در فاصله های زمانی T تکرار شود و زمان لازم برای انجام یک حرکت را دوره تناوب یا پریود T

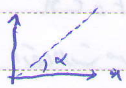
فرکانس به تعداد سیکل های حرکتی انجام شده در یک ثانیه f. واحد هرتز $\frac{1}{s}$ $f=\frac{1}{T}$

فرکانس زاویه ای یا فرکانس دایروی ω میزان زاویه پیموده شده برحسب رادیان در یک ثانیه $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f \ \frac{rad}{s}$

حرکت هارمونیک معادله حرکت هارمونیک $x(t)=A\sin\omega t$ ω سرعت زاویه ای A دامنه نوسان

$\dot{x}=A\omega\cos\omega t=A\omega\sin(\omega t+\underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{\text{اختلاف فاز}})$ $\ddot{x}=-A\omega^2\sin\omega t=A\omega^2\sin(\omega t+\pi)$

فنر $F=Kx$ فنر خطی $K=\tan\alpha=\frac{dF}{dx}$

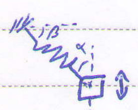


هرچه شیب نمودار نیرو-جابجایی بیشتر باشد فنر سخت تر و در برابر نیرو مقاوم تر است

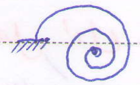
فنرها در حالت موازی تغییر مکان فنرها یکسان $K_{eq}=K_1+K_2+K_3+\dots$

فنرها در حالت سری تغییر طول کل مجموعه برابر مجموع تغییرها است $K_{eq}=\frac{1}{1/K_1+1/K_2+1/K_3+\dots}$

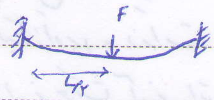
سختی معادل فنر مایل $K_{eq}=K\cos^2\alpha=K\sin^2\beta$

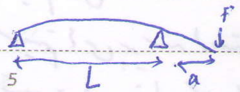


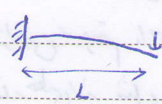
فنرهای پیچشی T گشتاور K_t سختی پیچشی و θ جابجایی زاویه ای $T=K_t\theta$


$k_{eq} = \frac{EI}{L}$ گشتاور اینرسی قطع عرضی — L ← طول پل — E مدول الاستیسیته


$k_e = \frac{48EI}{L^3}$

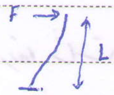

$k_{eq} = \frac{192EI}{L^3}$ اگر گل بر $k_{eq} = \frac{47}{L}$

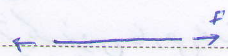

$k_e = \frac{3EI}{(L+a)a^2}$

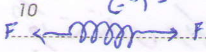

$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3}$


$k_e = \frac{3EIL}{a^2b^2}$

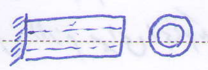

$k_{eq} = \frac{768EI}{L^3}$


$k_e = \frac{12EI}{L^3}$


$k_{eq} = \frac{EA}{L}$ A سطح مقطع


سیم پیچ

$k_e = \frac{Gd^4}{64nR^3}$ n تعداد سیم پیچ، d قطر سیم، R شعاع حلقه


$k_e = \frac{GJ}{L}$ G مدول الاستیسیته پیچشی

J ممان اینرسی قطبی $J = \frac{\pi}{32}(r_o^4 - r_i^4)$

اجزای میرایی (دمپر)

۱- مستهلک کننده کلمب: نیروی استهلاک ثابت در خلاف جهت حرکت

۲- مستهلک کننده های سازه ای: (هیسترزیس) گرم شدن تیری که خم شده

۳- مستهلک کننده ویسکوز: نیرو به صورت $F = c\dot{x}$

- کار انجام شده توسط دمپر منفی است.

$c_{eq} = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ اتصالات موازی

$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}$ اتصالات سری

در مقاومت از نیروهای اینرسی که ناشی از شتاب و جرم است صرف نظر می شود و نیروها به صورت استاتیکی اعمال می شود

فصل دوم - ارتعاشات آزاد سیستم های یک درجه آزادی

ارتعاشات آزاد نامیرا

سیستم خطی — قانون دوم $\longrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$ — $\delta_{st} = \frac{mg}{k}$ تغییر مکان استاتیکی فنر

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$ فرکانس طبیعی $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — $x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$ — $x(t)$ پاسخ حقیقی

$A_1 = x_0 \quad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \qquad f = \frac{\omega_n}{2\pi}$ رابطه پریود با فرکانس

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \varphi) \qquad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}}{x\omega_n}\right)$$

سیستم پیچشی — k_t سختی پیچشی — J ممان اینرسی — $J\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$

بدست آوردن معادله حرکت با استفاده از روش انرژی برای سیستم های نسبتاً پیچیده

$T + U =$ ثابت $\qquad \frac{d}{dt}(T+U) = 0 \xrightarrow[T_1 + U_1 = T_2 + U_2]{} \omega \checkmark$

بدست آوردن معادله حرکت با استفاده از روش ریلی برای سیستم دارای چندین جرم و عضو

انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم را برحسب یکی از نقطه های حرکتی نوشته — $T = \frac{1}{2} m_{eff} \dot{x}^2 \qquad U = \frac{1}{2} k_{eff} x^2$

m_{eff} جرم موثر (معادل) ، k_{eff} سختی موثر (معادل) — $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}$

سیستم دورانی : I_{eff} ممان اینرسی موثر (معادل) k_{teff} سختی پیچشی موثر (معادل) — $T = \frac{1}{2} I_{eff} \dot{\theta}^2 \qquad U = \frac{1}{2} k_{teff} \theta^2$

فرض روش ریلی : ۱. سیستم کانزرواتیو ۲ - حرکت هارمونیک ساده — $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{teff}}{I_{eff}}}$

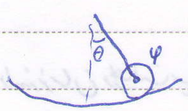
* آیا اثر وزن توسط فنر خنثی می شود یا نه؟ فنر را حذف کرده اگر سیستم از حالت تعادل استاتیکی خارج شود هنوز نیروی وزن را خنثی می کند

* اگر در سیستم چیزه جرمی اثر تعدادی از جرم ها توسط فنر خنثی شده، و تعدادی نه در دیاگرام آزاد و معادلات فقط حالت اثر وزن جرم های دوم منظور می گردد

* چون با دوران کوچک θ ، بازوی گشتاور ______ نیروی وزن حول مفصل تغییر می کند) لذا نیروی وزن در معادلات ظاهر می شود

* کلاً نیروی وزن تنها زمانی در معادلات ظاهر می شود که جسم حول محورها بجای تغییر ارتفاع بدهد و توسط فنر خنثی نشدن یا نیز بایستی تغییر بازوی گشتاور را داشته باشد

* اگر گشتاور نیروی فنر از نیروی وزن بیشتر باشد حرکت سیستم ارتعاشی و پایدار است



انرژی جنبشی سیستم — $U = mg(R-r)(1-\cos\theta) \qquad T = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$

ضریب میرایی — $\zeta = \frac{c_{eff}}{2\sqrt{k_{eff}\, m_{eff}}}$

$T = \frac{1}{2}(m+\frac{1}{3}m')\dot{x}^2$ زمانی که توزیع پیوسته جرم سختی جرم فنر m'

$m_{eff} = m + \frac{1}{3}m'$ به تأثیر وارد شدن جرم فنر در معادلات ارتعاشی و فرکانس طبیعی به میزان $\frac{1}{3}$ جرم فنر است

* تعیین فرکانس طبیعی اول یک سیستم به روش ریلی همیشه از مقدار واقعی بیشتر است

$\omega_n = \sqrt{\frac{mgd}{J_o}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{J_o}{md}}}$ پاندول مرکب: جرم در جایی به غیر از مرکز جرم آویزان شده

$\frac{J_o}{md}$ طول معادل پاندول ساده

اگر A را در امتداد OG انتخاب کنیم که $OA=\frac{J_o}{md}$ باشد آنگاه A را مرکز ضربه گوییم

اگر مفصل دوران بجای O در A باشد فرکانس طبیعی سیستم تغییر نمی‌کند

ارتعاشات آزاد سیستم های با میرایی ویسکوز

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$

$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$ پاسخ کلی $\lambda_{1,2}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$

$\xi=\frac{c}{c_c}=\frac{c}{2\sqrt{km}}=\frac{c}{2m\omega_n}$ نسبت میرایی ξ

$c_c=2\sqrt{km}=2m\omega_n$ $x(t)=(C_1+C_2t)e^{-\omega_n t}$ حالت بحرانی زیر ارتعاش میرا شده

$x(t)=C_1e^{(-\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}+C_2e^{(-\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}$

$x(t)=(C_1+C_2t)e^{-\omega_n t}$ در حالت بحرانی و میرایی بحرانی $\xi=1$

حالت کم میرا $\xi<1$

$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left[C_1e^{-i\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t}+C_2e^{-i(\sqrt{1-\xi^2})\omega_n t}\right]$

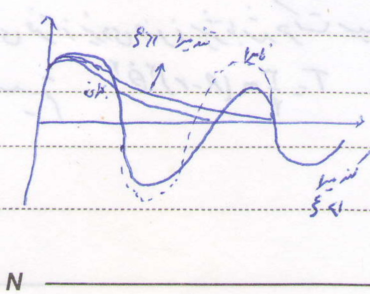
$C_1+C_2=A_1$, $(C_1-C_2)i=A_2 \rightarrow x(t)=A\,e^{-\xi\omega_n t}\cos(\underbrace{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}_{\omega_d \text{ فرکانس}} t-\varphi)$, $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$, $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$

$A_1=x_0$ $A_2=\left[\frac{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}\right]$

در این حالت دامنه نوسان به صورت نمایی کم می‌شود تا در درازمدت دامنه نوسان به سمت صفر رود

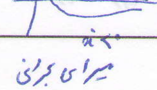
فرکانس نوسان میرا کوچکتر از فرکانس طبیعی و پریود نوسان میرا بزرگتر از پریود طبیعی

$x(t)=C_1e^{(-\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}+C_2e^{(-\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}$ حالت تند میرا $\xi>1$



دامنه نوسان در حالت میرایی بحرانی نسبت به دو حالت دیگر سریع‌تر میرا می‌شود

دامنه نوسان در حالت میرا به صورت نمایی $e^{-\xi\omega_n t}$ کاهش می‌یابد



میرایی بحرانی

کاهش لگاریتمی

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \ln e^{\xi \omega_n T_d} = \xi \omega_n T_d = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\ln \frac{x_1}{x_n} = (n-1) \ln \frac{x_1}{x_2} \qquad \ln \frac{x_m}{x_n} = (n-m) \ln \frac{x_1}{x_2}$$

هنگامی که مقدار ξ کوچک باشد $\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi$

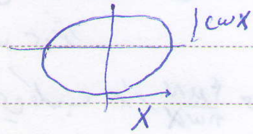
* در یک سیستم که دارای نوسانات میرا باشد هر چه میرایی سیستم بزرگتر نرخ کاهش دامنه آن بیشتر

انرژی اتلافی در میرایی ویسکوز $W = \pi c \omega X^2 \leftarrow$ مربع دامنه

کار انجام شده توسط نیروی فنر در یک سیکل حرکتی برابر صفر زیرا نیروی فنر یک نیروی پایستار است

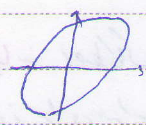
$F = c\dot{x} = c\omega X \cos(\omega t - \varphi)$ نیروی میرا

$$\left(\frac{F}{c\omega X}\right)^2 + \left(\frac{x}{X}\right)^2 = 1$$



مساحت داخل برابر همان انرژی اتلافی در هر سیکل است

$$\left(\frac{F - kx}{c\omega X}\right)^2 + \left(\frac{x}{X}\right)^2 = 1$$



هنگامی که فنر در میرا موازی باشد انرژی همان $\pi c \omega X^2$ زیرا کار فنر صفر است

ظرفیت میرایی ویژه: نسبت انرژی اتلافی در هر سیکل به انرژی جنبشی یا پتانسیل ماکزیمم در هر سیکل $\frac{2\pi c}{m\omega}$

ضریب اتلاف $= \frac{c}{m\omega}$

روش ریلی

$D.E = \frac{1}{2} (c_{eff}) \dot{x}^2$

$c_{eff}\ \dot{\theta}^2$

ارتعاشات آزاد با میرایی کلمب   ناشی از اصطکاک _ جهت نیروی میرایی همیشه برخلاف جهت حرکت است $F_d=\mu N$

$m\ddot{x}+kx=F_d \quad \dot{x}<0$

$m\ddot{x}\mp kx=F_d \quad \dot{x}>0$

* برای حرکت کردن جرم باید $kx_0>\mu N$

معادله حرکت نیم سیکل $x(t)=(x_0-\frac{\mu N}{k})\cos\omega_n t+\frac{\mu N}{k}$

دامنه حرکت در پایان نیم سیکل اول به اندازه $\frac{2\mu N}{k}$ کاهش می یابد

دامنه حرکت در نیم سیکل دوم $x(t)=(\frac{3\mu N}{k}-x_0)\cos\omega_n t-\frac{\mu N}{k}$

* در حرکت میرایی کلمب دامنه ارتعاش در هر سیکل به اندازه $\frac{4\mu N}{k}$ کاهش می یابد

* حرکت تا پایان نیم سیکلی ادامه پیدا می کند که نیروی اصطکاک از فنر بیشتر شود

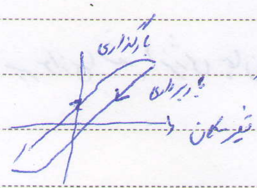
$n\geq\frac{x_0-\frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}}$

* فرکانس ارتعاشی سیستم با میرایی کلمب همان فرکانس طبیعی سیستم است

* در استهلاک ویسکوز چون جرم به حالت اولیه برمی گردد کل انرژی سیستم تلف می شود اما در اصطکاک خشک
لذا انرژی اصطکاک خشک کمتر تلف می شود

* میرایی ویسکوز معادل برابر میرایی کلمب برابر $\frac{4\mu N}{\pi\omega X}$ می باشد

ارتعاش آزاد با میرایی سازه ای   اصطکاک در لایه های داخلی یک جامد



نمودار نیرو - تغییر مکان برای میرایی سازه ای

در میرایی سازه ای انرژی اتلافی به فرکانس بستگی ندارد و فقط با مربع دامنه متناسب است $W=\pi h X^2$

h ضریب میرایی

فصل ۳ - ارتعاشات اجباری سیستم یک درجه آزادی

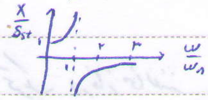
ارتعاشات اجباری یک سیستم نامیرا

پاسخ یک سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

$$m\ddot{x}+Kx=F(t)=F_0\sin\omega t$$

$$x=\underbrace{\left[A_1\cos\omega_n t+A_2\sin\omega_n t\right]}_{\text{حل همگن (پاسخ گذرا)}}+\underbrace{\overbrace{\frac{F_0}{K-m\omega^2}}^{X}\sin\omega t}_{\text{حل خصوصی (پاسخ ماندگار)}}$$

$$\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



$$A_1=x_0 \qquad A_2=\frac{\dot{x}_0-\frac{F_0\omega}{K-m\omega^2}}{\omega_n}$$

اگر x_0 و $\dot{x}_0$ شرایط اولیه حرکت

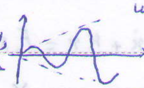
* اگر $1>\frac{\omega}{\omega_n}>0$ باشد، مخرج رابطه (بزرگنمایی X) مثبت بوده و در این حالت پاسخ هارمونیکی سیستم و نیروی تحریک برانگیزش هم علامت و هم فاز می باشند

* اگر $\frac{\omega}{\omega_n}$ را از صفر تا ۱ افزایش دهیم اندازه دامنه X و ضریب بزرگنمایی به صورت پیوسته از ۱ شروع به افزایش می کند

* اگر $\frac{\omega}{\omega_n}=1$ اندازه دامنه X بی نهایت می شود (تشدید) و پاسخ سیستم در این حالت:

$$x(t)=x_0\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+\frac{\delta_{st}}{2}\left[t\,\omega_n\cos\omega_n t+\sin\omega_n t\right]$$

دامنه به صورت خطی افزایش می یابد

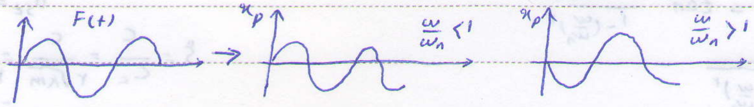


$x_0=0$
$\dot{x}_0=0$

* اگر $\frac{\omega}{\omega_n}>1$، X و ضریب بزرگنمایی منفی اند و پاسخ بخش خصوصی و برانگیزش و پاسخ ۱۸۰° درجه باهم اختلاف فاز دارند

$$x_p=-X\sin\omega t$$

$$X=-\left(\frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)=\frac{\delta_{st}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2-1}$$

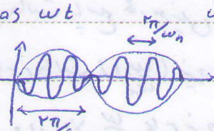


پدیده ضربان

اگر فرکانس نیروی برانگیزش خارجی نزدیک به فرکانس طبیعی سیستم باشد ولی مساوی آن نباشد ممکن است پدیده ضربان روی دهد که دامنه نوسان به صورت منظمی کاهش و افزایش می یابد و خود دامنه نوسان به صورت هارمونیک تغییر می کند

پاسخ سیستم $\quad x(t)=\frac{-F_0}{K-m\omega^2}\cos\omega_n t+\frac{F_0}{K-m\omega^2}\cos\omega t \qquad \omega=\omega_n+\varepsilon$

$$x(t)=\underbrace{\left[\frac{F_0}{\varepsilon m\omega_n}\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)\right]}_{\text{دامنه نوسان خود به صورت هارمونیک}}\sin\omega_n t$$



ناموزونی چرخشی برای یک سیستم نامیرا

جرم کوچک m در داخل سیستم با سرعت زاویه ای ω و خروج از مرکز e دوران می کند و ایجاد ناموزونی می کند

$$M\ddot{x}+Kx=me\omega^2\sin\omega t \qquad x_p=X\sin\omega t \qquad X=\frac{me\omega^2}{K-M\omega^2}=\frac{e\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

اگر $\frac{\omega}{\omega_n}<1$ مقدار X مثبت است و پاسخ x_p با ناموزونی هم فاز است و اگر $\frac{\omega}{\omega_n}>1$ و پاسخ x_p و ناموزونی ۱۸۰° اختلاف دارند

حرکت تکیه‌گاه در یک سیستم نامیرا

اگر به پایه y حرکت هارمونیک $y=Y\sin\omega t$ دهیم  معادله دیفرانسیل حرکت $m\ddot{x}+kx=ky=kY\sin\omega t$

$\rightarrow -m\omega^2X\sin\omega t+kX\sin\omega t=kY\sin\omega t$

$x_p(t)=X\sin\omega t$ و $X=\dfrac{kY}{k-m\omega^2}=\dfrac{Y}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$

* اگر $\frac{\omega}{\omega_n}<1$ مقدار X مثبت و لذا پاسخ و تحریک هم فازند و اگر $\frac{\omega}{\omega_n}>1$ مقدار X منفی می‌شود و x_p با تحریک در فاز مخالفند

اگر $z=x-y$ ؛ $Z=\dfrac{mY\omega^2}{k-m\omega^2}=\dfrac{Y(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$ ، $\rightarrow -mZ\omega^2\sin\omega t+kZ\sin\omega t=mY\omega^2\sin\omega t$

اگر $\frac{\omega}{\omega_n}<1$ پاسخ z_p با تحریک هم فازند و اگر $\frac{\omega}{\omega_n}>1$ باشد مقدار Z منفی می‌شود و پاسخ z_p و تحریک پایه در فاز مخالفند

$\omega=\dfrac{2\pi V}{L}$ $\quad \tau=\dfrac{2\pi}{\omega}$

ارتعاشات اجباری یک سیستم میرا

پاسخ یک سیستم میرا به تحریک هارمونیک

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t$

حل خصوصی $x_p(t)=X\sin(\omega t-\varphi)$

دامنه نوسان $X=\dfrac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$ $\qquad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$

اختلاف فاز نسبت به تحریک $\varphi=\tan^{-1}\dfrac{c\omega}{k-m\omega^2}=\tan^{-1}\dfrac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$ $\qquad \delta_{st}=\frac{F_0}{k}$

ضریب بزرگنمایی $\dfrac{X}{\delta_{st}}=\dfrac{1}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$ $\qquad \xi=\dfrac{c}{c_c}=\dfrac{c}{2\sqrt{km}}=\dfrac{c}{2m\omega_n}$

نکات

۱- هنگامی که استهلاک وجود دارد بیشترین دامنه و ضریب بزرگنمایی در $\frac{\omega}{\omega_n}<1$ رخ می‌دهد

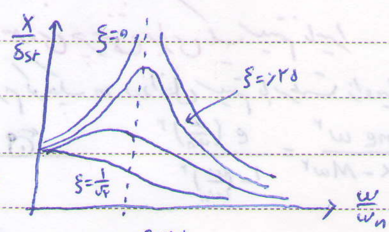
برای $\xi<\frac{1}{\sqrt{2}}$ نسبت فرکانس $\frac{\omega}{\omega_n}$ متناظر با بیشترین دامنه $\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{1-2\xi^2}$ ، $\left.\dfrac{X}{\delta_{st}}\right|_{max}=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ ، $\varphi=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$

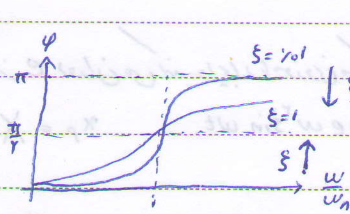
برای $\xi>\frac{1}{\sqrt{2}}$ بیشترین دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n}=0$ رخ می‌دهد

۲- در حالت تشدید $\frac{\omega}{\omega_n}=1$ ضریب بزرگنمایی $\dfrac{X}{\delta_{st}}=\dfrac{1}{2\xi}$ در این حالت پاسخ هارمونیک با نیروی برانگیزش $\varphi=\frac{\pi}{2}$ اختلاف فاز دارد

وی تحریک صرف غلبه بر میرایی می‌شود یعنی $F_0=cX\omega_n$ در این حالت ($\frac{\omega}{\omega_n}=1$) نیروی فنر با نیروی اینرسی برابر است

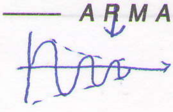
و در حالت $\frac{\omega}{\omega_n}\ll1$ نیروی تحریک صرف غلبه بر نیروی فنر می‌کند و در $\frac{\omega}{\omega_n}\gg1$ تمام نیروی فنر صرف غلبه بر نیروی اینرسی می‌کند





اگر ضریب میرایی از یک کوچکتر باشد جواب کلی معادله ارتعاش $x(t)=Ae^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi)+X\sin(\omega t-\varphi)$

پاسخ گذرا (به شرایط اولیه بستگی دارد) — پاسخ ماندگار (به نیروی تحریک)



یافتن پاسخ یک سیستم میرا به شیوه اعداد مختلط

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0e^{i\omega t}=\overbrace{F_0\cos\omega t}^{\text{حقیقی}}+i\overbrace{F_0\sin\omega t}^{\text{موهومی}}$$

$$x_p=Xe^{i\omega t} \qquad X=\frac{F_0}{(k-m\omega^2)+ic\omega} \qquad \varphi=\tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}$$

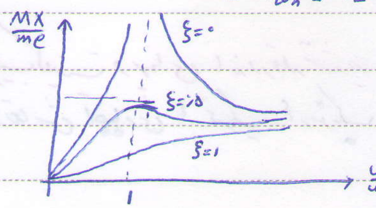
$$x_p(t)=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\begin{cases}\cos(\omega t-\varphi)t & \leftarrow F(t)=F_0\cos\omega t\\ \sin(\omega t-\varphi)t & \leftarrow F(t)=F_0\sin\omega t\end{cases}$$

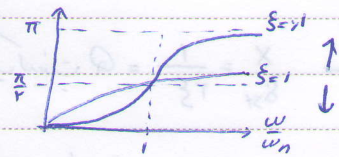
نامیزانی چرخشی در سیستم

$$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin\omega t$$

$$X=\frac{me\omega^2}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \qquad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-M\omega^2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right)$$

ضریب بزرگنمایی $\dfrac{MX}{me}=\dfrac{(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{\sqrt{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2+[2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}}$

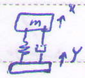




برای $\xi<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ماکزیمم دامنه X و ضریب بزرگنمایی در $\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}>1$ رخ می‌دهد لذا پیک نمودار در راست $\frac{\omega}{\omega_n}$ رخ می‌دهد

$$x(t)=Ae^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi)+X\sin(\omega t-\varphi)$$

پاسخ یک سیستم میرا به حرکت تکیه‌گاهی



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky=\sqrt{(c\omega Y)^2+(kY)^2}\sin(\omega t-\psi)$$

$$\psi=\tan^{-1}\left(-\frac{c\omega Y}{kY}\right)=\tan^{-1}\left(-\frac{c\omega}{k}\right)$$

پاسخ پایدار $x_p=X\sin(\omega t-\psi-\varphi)=\dfrac{Y\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\sin(\omega t-\psi-\varphi) \qquad \varphi=\tan^{-1}\left(\dfrac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)$

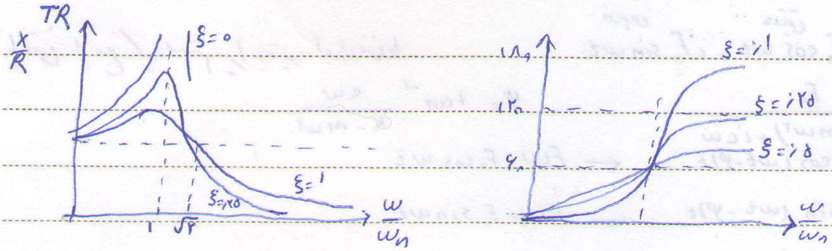
نسبت انتقال‌پذیری TR $=\dfrac{X}{Y}=\dfrac{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}=\sqrt{\dfrac{1+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$

اختلاف فاز بین x و y $\alpha=\psi+\varphi=\tan^{-1}\left(-\dfrac{c\omega}{k}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)=\tan^{-1}\left(\dfrac{2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right)-\tan^{-1}\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

$z=x-y$ جابجایی نسبی $\rightarrow m\ddot{z}+c\dot{z}+kz=-m\ddot{y}=m\omega^2Y\sin\omega t$

$$z(t)=Z\sin(\omega t-\varphi) \qquad Z=\frac{mY\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}=\frac{Y(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi(\frac{\omega}{\omega_n}))^2}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}=\tan^{-1}\frac{2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$



$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ برای هر ξ ← $TR=1$

$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2}$ برای هر ξ ← $TR=1$ و دامنه $Y = X$

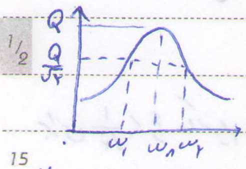
$\frac{\omega}{\omega_n} \to 1$ برای $\xi=0$ ← $TR=\infty$ سیستم ناپایدار

$\frac{\omega}{\omega_n} < \sqrt{2}$ برای هر ξ ← $TR>1$ دامنه $Y<X$ — با افزایش ξ ← کاهش TR

$\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ برای هر ξ ← $TR<1$ دامنه $Y>X$ — با افزایش ξ ← افزایش TR

ضریب کیفیت و پهنای باند در نقطه تشدید در ارتعاش اجباری با تحریک هارمونیک

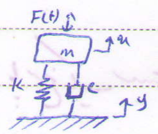
$\frac{\omega}{\omega_n}=1$ تشدید ⟵ ضریب کیفیت $Q = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{2\xi}$



$$\frac{\omega_n}{\omega_2-\omega_1} = \frac{1}{2\xi} = Q$$

پهنای باند = اختلاف دو فرکانس ω_1 و ω_2

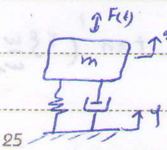
$$\omega_2-\omega_1 = 2\xi\omega_n$$



نیروی وارد بر پایه در ارتعاش اجباری با نیروی تحریک خارجی هارمونیک

نیروی منتقل شده (دامنه) $F_{t_0} = \frac{\sqrt{K^2+(c\omega)^2}\,F_0}{\sqrt{(K-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$

قابلیت انتقال پذیری $T_R = \frac{F_{t_0}}{F_0} = \sqrt{\frac{K^2+(c\omega)^2}{(K-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$

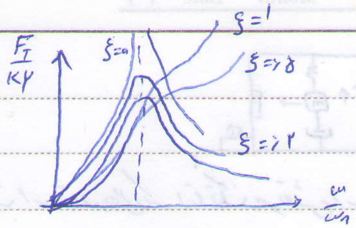


اگر $\frac{\omega}{\omega_n}>\sqrt{2}$ و $\xi\downarrow$ ← TR کم می‌شود

نیروی وارده بر پایه در ارتعاش اجباری با حرکت تکیه‌گاهی

$$F_t = K(x-y)+C(\dot{x}+\dot{y}) = -m\ddot{x} = m\omega^2 X = m\omega^2 Y\sqrt{\frac{1+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

انتقال پذیری $\frac{F_T}{KY} = (\frac{\omega}{\omega_n})^2 \sqrt{\frac{1+(2\xi(\frac{\omega}{\omega_n}))^2}{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$



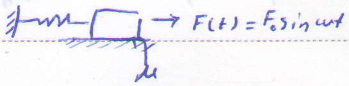
جداسازی ارتعاشات

تا حد امکان از انتقال نیروهای حرکتی و ارتعاشاتی مضر به سیستم ارتعاشاتی و یا سازه و تکیه‌گاه جلوگیری کرد

برای $T_R<1$ باید $\frac{\omega}{\omega_n}>\sqrt{2}$ (فرکانس سختی پایین) ⟵ جداسازی ارتعاشات

ناحیه $\frac{\omega}{\omega_n}>\sqrt{2}$ را ناحیه جداسازی ارتعاشات گویند $\xi\downarrow \rightarrow T_R\downarrow \rightarrow$ افزایش جداسازی

اگر $\frac{\omega}{\omega_n}\gg\sqrt{2}$ نسبت انتقال پذیری T_R به سمت صفر میل می کند



پاسخ هارمونیک یک سیستم با میرایی کلمب

$m\ddot{x}+Kx=\pm\mu N+F(t)$

$C_{eq}=\frac{4\mu N}{\pi\omega X}$ ضریب میرایی ویسکوز معادل برای سیستم با نیروی اصطکاک خشک μN را مشخص می‌کند

$\xi_{eq}=\frac{C_{eq}}{C}=\frac{4\mu N}{\pi\omega X(2m\omega_n)}=\frac{2\mu N}{\pi\sqrt{km}\,\omega X}$ $x_p(t)=X\sin(\omega t-\varphi)$

$$X=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(C_{eq}\omega)^2}}=\frac{(\frac{F_0}{k})}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi_{eq}\frac{\omega}{\omega_n})^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\frac{4\mu N}{\pi k X})^2}}=\frac{F_0}{k}\sqrt{\frac{1-(\frac{4\mu N}{\pi F_0})^2}{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2}}$$

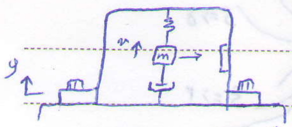
با نیروی اصطکاک به نیروی محرک کمتر از $\frac{\pi}{4}$ برای $\frac{\mu N}{F_0}<\frac{\pi}{4}$ پاسخ X بدست آمده حقیقی می باشد

زاویه فاز $\varphi=\tan^{-1}\frac{C_{eq}\omega}{K-m\omega^2}=\tan^{-1}\frac{4\mu N/\pi kX}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}=\tan^{-1}\left[\frac{4\mu N}{\pi F_0\sqrt{1-(\frac{4\mu N}{\pi F_0})^2}}\cdot\frac{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right]=\pm$

$$\varphi=\tan^{-1}\left[\frac{\pm\frac{4}{\pi}(\frac{\mu N}{F_0})}{\sqrt{1-(\frac{4\mu N}{\pi F_0})^2}}\right]$$

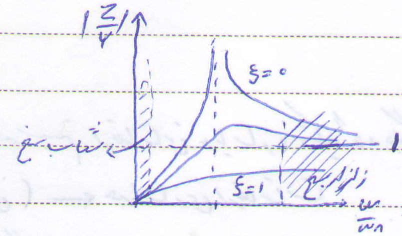
برای $\frac{\omega}{\omega_n}=1$ زاویه فاز φ معنی ندارد

+ برای $\frac{\omega}{\omega_n}<1$ − برای $\frac{\omega}{\omega_n}>1$



زلزله سنج (دستگاهی با فرکانس طبیعی پایین)

$\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \rightarrow \frac{Z}{Y} \rightarrow 1$ و $X \rightarrow 0 \rightarrow$ جرم m ثابت است درحالی که اتاقک مرتعش است



شتاب سنج (دستگاهی با فرکانس طبیعی بالا)

$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \rightarrow |\frac{Z}{Y}| \simeq (\frac{\omega}{\omega_n})^2$ و مستقل از ξ

$Z \simeq \frac{\omega^2 Y}{\omega_n^2} = \frac{\text{شتاب اتاقک}}{\omega_n^2}$

فصل ۴- ارتعاشات گذرای سیستم یک درجه آزادی

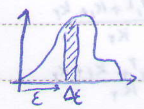
تحریک ضربه‌ای (ضربه: نیرو با دامنه زیاد و مدت اثر کم) ضربه $\hat{F} = \int \overset{\text{نیرو}}{F(t)}\, dt$

$$\begin{cases} F(t)\,\delta(t-\varepsilon) = 0 & t \neq \varepsilon \\ F(t)\,\delta(t-\varepsilon) = F(\varepsilon)\,\delta(\varepsilon-\varepsilon) = \infty & t = \varepsilon \end{cases}$$

پاسخ به ضربه: جرم و فنر نامیرا $x(t) = \dfrac{\hat{F}}{m\omega_n} \sin \omega_n t = \hat{F}\, h(t)$

$h(t)$ پاسخ به ضربه واحد — جرم و فنر - میرا $x(t) = \dfrac{\hat{F}}{m\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t) = \hat{F}\, h(t)$

پاسخ به برانگیزش کلی



برای یک نیروی کلی

سهم تمام ضربه‌هایی را که قبل از زمان t وارد می‌شود جمع $x(t) = \int_0^t F(\varepsilon)\, h(t-\varepsilon)\, d\varepsilon$

* انتگرال بالا را انتگرال کانولوشن (بر هم نهش) فقط برای سیستم خطی قابل استفاده است

پاسخ سیستم در حرکت تکیه‌گاهی

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y}(t) + ky(t)$$

پاسخ $x(t)$ مطلق
پاسخ $z(t)$

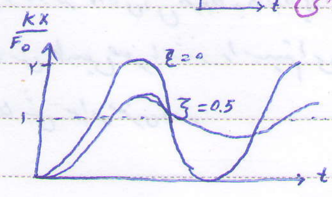
سیستم نامیرا $x(t) = y(t) + z(t) = y(t) - \dfrac{1}{\omega_n}\int_0^t \ddot{y}(\varepsilon) \sin(t-\varepsilon)\, d\varepsilon$

سیستم میرا $x(t) = y(t) + z(t) = y(t) - \dfrac{1}{\omega_n}\int_0^t \ddot{y}(\varepsilon) e^{-\xi\omega_n(t-\varepsilon)} \sin(t-\varepsilon)\, d\varepsilon$

پاسخ سیستم به برانگیزش پله‌ای

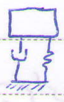
$$x(t) = A e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi) + \underbrace{\frac{F_0}{m\omega_n^2}}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

$$A = \frac{F_0}{m\omega_n^2\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right)$$



پاسخ سیستم با شرایط اولیه صفر به برانگیزش پله

پاسخ سیستم به برانگیزش شیب



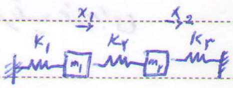
$$x(t) = A e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi) + \frac{F_0}{k t_1}\left[t - \frac{c}{k}\right]$$

طیف پاسخ: نمودار x_{max} با برانگیزش خارجی بر حسب فرکانس طبیعی سیستم

شوک (پالس) اگر مدت برانگیزش خارجی کوچک باشد به آن شوک یا پالس گویند

فصل ۵- ارتعاشات سیستم‌های با بیش از یک درجه آزادی

ارتعاشات آزاد سیستم‌های دو درجه آزادی



- سیستم‌های دو درجه آزادی خطی نامیرا

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2+(k_2+k_3)x_2-k_2x_1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-m_1\omega^2+k_1+k_2)X_1-k_2X_2=0 \\ (-m_2\omega^2+k_2+k_3)X_2-k_2X_1=0 \end{cases} \rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} -m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2+k_3 \end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=$$

$\det A=0$ معادله مشخصه یا معادله فرکانس است که فرکانس طبیعی از صفر قرار دادن دترمینال روبرو بدست می‌آید

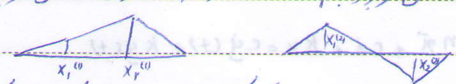
$$\omega_1^2,\ \omega_2^2=\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1\mp\sqrt{[(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1]^2-4m_1m_2[(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2]}}{2m_1m_2}$$

نسبت دامنه‌ها
$$\begin{cases} r_1=\frac{X_2}{X_1}\Big|_{\omega_1}=\frac{-m_1\omega_1^2+k_1+k_2}{k_2} \\ r_2=\frac{X_2}{X_1}\Big|_{\omega_2}=\frac{-m_1\omega_2^2+k_1+k_2}{k_2} \end{cases}$$

برای سیستم‌های دو درجه آزادی که مقدار r_1 همواره بزرگتر از صفر می‌باشد و مقدار r_2 همواره کوچکتر از صفر می‌باشد (اگر سیستم مد صلب داشته باشد $r_1=0$ می‌گردد) $r_1>0$ و $r_2<0$

دامنه‌های مربوط به ω_1 ← $X_1^{(1)}$ و $X_2^{(1)}$ و دامنه‌های مربوط به ω_2 ← $X_1^{(2)}$ و $X_2^{(2)}$

$$\vec{X}^{(1)}=\begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1X_1^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad \vec{X}^{(2)}=\begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2X_1^{(2)} \end{Bmatrix}$$



شکل مد مربوط به فرکانس طبیعی ω_1

مد اول (در یک جهت حرکت کنند) مد دوم (در خلاف جهت هم حرکت کنند)

$$X(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}=\vec{X}^{(1)}(t)+\vec{X}^{(2)}(t)=\begin{cases} X_1^{(1)}\sin(\omega_1t-\varphi_1)+X_1^{(2)}\sin(\omega_2t-\varphi_2) \rightarrow \text{مربوط به جرم } m_1 \\ r_1X_1^{(1)}\sin(\omega_1t-\varphi_1)+r_2X_1^{(2)}\sin(\omega_2t-\varphi_2) \rightarrow \text{مربوط به جرم } m_2 \end{cases}$$

و ۴ شرط اولیه داریم $\begin{pmatrix} x_1(0),\ \dot{x}_1(0) \\ x_2(0),\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix}$

* هر سیستم N درجه آزادی دارای $2N$ شرط اولیه حرکت می‌باشد که N تای آن مربوط به جابجایی‌های اولیه و N تای آن مربوط به سرعت‌ها

سیستم‌های ارتعاشی را که دارای حداقل یک مد صلب و فرکانس طبیعی صفر باشند را سیستم‌های نیمه معین، غیر مقید و یا سیستم‌های آزاد می‌نامند

* فرکانس طبیعی مربوط به حرکت مدهای صلب سیستم‌های ارتعاشی برابر صفر می‌باشد

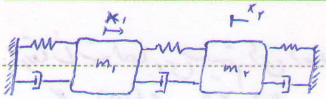
- سیستم‌های دو درجه آزادی پیچشی نامیرا

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1+(k_{t_1}+k_{t_2})\theta_1-k_{t_2}\theta_2=0 \\ J_2\ddot{\theta}_2+(k_{t_2}+k_{t_3})\theta_2-k_{t_2}\theta_1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} -J_1\omega^2+k_{t_1}+k_{t_2} & -k_{t_2} \\ -k_{t_2} & -J_2\omega^2+k_{t_2}+k_{t_3} \end{vmatrix}=0$$

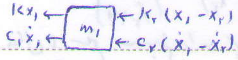
- سیستم‌های دو درجه آزادی متقارن

- مُد اول ($\theta_1=\theta_2$) هر دو جرم با هم حرکت می‌کنند که می‌توان فنر میانی آن را برداشت به جای آن اتصال صلب گذاشت

- مُد دوم ($\theta_1=-\theta_2$) حرکت دو جرم دارای تقارن است و می‌توان در وسط فنر وسطی یک گره ثابت تشکیل داد و سیستم به ۲ سیستم یک درجه آزادی تبدیل می‌شود



ارتعاشات آزاد سیستم های دو درجه آزادی میرا



$$\xrightarrow[\text{جرم } m_1]{\text{معادله دیفرانسیل حرکت}} \quad m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

ماتریس اینرسی، میرایی، سختی و انعطاف‌پذیری

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = 0$$
$$[J]\ddot{\vec{\theta}} + [c_t]\dot{\vec{\theta}} + [k_t]\vec{\theta} = 0$$

$[m]$ ماتریس ضرائب بردار شتاب $\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ (ماتریس اینرسی)

$[c]$ ماتریس ضرائب بردار سرعت $\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}$ (ماتریس میرایی)

$[k]$ ماتریس ضرائب بردار جابه‌جایی $\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$ (ماتریس سختی)

$[a]$ ماتریس انعطاف‌پذیری $[a] = [k]^{-1}$

اگر $c=0$ دستگاه: $\left[[k]-\omega^2[m]\right]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega t-\varphi) = 0 \longrightarrow \det\left([k]-\omega^2[m]\right) = 0$

می‌توان فرکانس طبیعی یک سیستم N درجه آزادی را با حل معادله فوق برحسب ω بدست آورد و با جایگذاری ω های دستگاه می‌توان شکل مدها را بدست

ارتعاشات آزاد سیستم های با بیش از دو درجه آزادی

در یک سیستم N درجه آزادی با رسم دیاگرام های آزاد N معادله دیفرانسیل حرکت را بدست آورده که آن ها را در دستگاه ماتریسی با استفاده از ماتریس های اینرسی، میرایی و سختی بیان کرد $[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}(t)$

$F(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix}$ بردار نیروهای خارجی

* ماتریس های اینرسی، سختی، میرایی و انعطاف‌پذیری، ماتریس های متقارن می‌باشند

فرکانس های طبیعی و شکل مدهای سیستم نامیرا

اگر شکل مدها در قالب برداری و به صورت $\begin{Bmatrix} \frac{X_1}{X_i} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{X_n}{X_i} \end{Bmatrix} = \frac{1}{X_i}\begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \varphi$ نمایش دهیم بردار φ را بردار مدی می‌نامیم. برای هر فرکانس طبیعی یک بردار مدی داریم. سیستم N درجه آزادی $\leftarrow$ N بردار مدی

اگر این بردار را در قالب یک ماتریس $N\times N$ به صورت $[\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_N]$ نمایش دهیم این ماتریس مودال می‌نامیم

* بردارهای مدی φ_i متعامد می‌باشند $\varphi_i^T\varphi_j = \begin{cases} \neq 0 & i=j \\ =0 & i\neq j \end{cases}$

مد اول و دوم در سیستم های سه درجه آزادی

سیستم متقارن

در مد اول فنرهای k_2 هیچ تغییر طول نمی‌دهد $\varphi = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $\quad \omega_1 = \sqrt{\dfrac{2k_1}{2m_1+m_2}}$

در مد دوم جرم m_2 ساکن و جرم‌های m_1 به صورت متقارن حرکت می‌کنند $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1}}$ $\quad \varphi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

ارتعاشات اجباری سیستم های دو درجه آزادی

در دستگاه $\begin{bmatrix} m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot x_1\\ \ddot x_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1+c_2 & -c_2\\ -c_2 & c_2+c_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2+k_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{Bmatrix}$ فرض می کنیم سیستم نامیرا باشد $[c]=0$

حال پاسخ سیستم را به هر کدام از نیروهای $\begin{Bmatrix}F_0\sin\omega t\\ 0\end{Bmatrix}$ و $\begin{Bmatrix}0\\ F_0\sin\bar\omega t\end{Bmatrix}$ را جداگانه بدست می آوریم

برای نیروی ورودی اول

$$\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1+k_2-\omega^2m_1 & -k_2\\ -k_2 & k_2+k_3-\omega^2m_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}F_0\\ 0\end{Bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}X_1=\dfrac{(k_2+k_3-\omega^2m_2)F_0}{(k_1+k_2-\omega^2m_1)(k_2+k_3-\omega^2m_2)-k_2^2}\\[2mm] X_2=\dfrac{k_2F_0}{''}\end{cases}$$

و برای نیروی ورودی دوم

$$\begin{cases}\bar X_1=\dfrac{k_2\bar F_0}{''}\\[2mm] \bar X_2=\dfrac{(k_1+k_2-\bar\omega^2m_1)\bar F_0}{''}\end{cases}$$

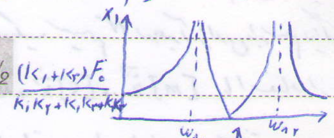
و پاسخ کلی سیستم به نیروی ورودی $\begin{Bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{Bmatrix}$ از ترکیب پاسخ ها

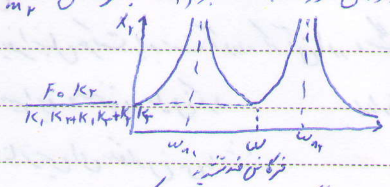
$$X_p(t)=\begin{Bmatrix}X_{1p}(t)\\ X_{2p}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t+\begin{Bmatrix}\bar X_1\\ \bar X_2\end{Bmatrix}\sin\bar\omega t$$

جاذب ارتعاشی

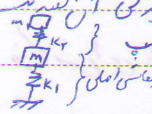
اگر در قسمت قبل فقط $F_1(t)=F_0\sin\omega t$ را داشته باشیم و فرض کنیم برای c_1, c_2, c_3 را صفر بگیریم پاسخ به صورت $x_p=\begin{Bmatrix}x_{1p}(t)\\ x_{2p}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t$

و جرم m_1 اگر نیرو بیاوریم وارد می شود ثابت و جرم m_2 با فرکانس $\omega=\sqrt{\frac{k_2+k_3}{m_2}}$ که فرکانس تشدید است و سیستم جاذب ارتعاشات حرکت می کند



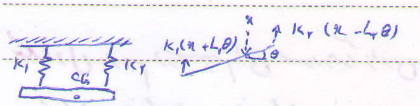


* در طراحی جاذب های ارتعاشی اگر در صورت سوال شکلی از سیستم ارتعاشی و جاذب کشیده نشده باشد و یا ویژگی آن گفته نشده باشد سیستم ارتعاشی اصلی و جاذب ارتعاشی را مانند شکل روبرو در نظر می گیریم



* در سیستم های جاذب ارتعاشی منظور از ω_{11} فرکانس طبیعی سیستم ارتعاشی اصلی بدون جاذب می باشد و برابر $\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ و منظور از ω_{22} فرکانس جاذب ارتعاشی می باشد که برابر $\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ می باشد
* در جاذب های ارتعاشی فرکانس جذب کننده ارتعاشات یعنی $\omega_{22}=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ باید برابر با فرکانس عامل خارجی ω باشد
* جاذب ارتعاشی معمولاً هنگامی مورد استفاده قرار می گیرد که در سیستم اصلی حالت تشدید یا نزدیک به آن باشد و فرکانس تحریک خارجی ω برابر $\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ باشد
* تا حد امکان جاذب ارتعاشی را کوچک انتخاب می کنند تا وزن سیستم اصلی تغییر نکند

جفت شدگی مختصات



$$\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & J\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot x\\ \ddot\theta\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2L_2+k_1L_1\\ -k_2L_2+k_1L_1 & k_1L_1^2+k_2L_2^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ \theta\end{Bmatrix}=0$$

اگر $k_2L_2=k_1L_1$ آنگاه ماتریس سختی قطری می شود و دو معادله از هم جدا می گردند یعنی معادله حرکت انتقالی فقط برحسب x و دورانی فقط برحسب θ می شود

* درحالتی که ماتریس سختی قطری نمی باشند، معادلات حرکت سیستم به هم کوپل می شوند که این نوع کوپل شدگی را کوپلینگ استاتیکی گویند

* اگر در بیان معادلات دیفرانسیل حرکت یک سیستم فقط ماتریس سختی غیرقطری گردد آنگاه معادلات سیستم فقط دارای کوپلینگ استاتیکی می باشند و اگر فقط ماتریس اینرسی غیرقطری گردد آنگاه معادلات سیستم فقط دارای کوپلینگ دینامیکی می باشند و اگر هر دو ماتریس سختی و اینرسی غیرقطری باشند آنگاه معادلات سیستم هم دارای کوپلینگ استاتیکی می باشند هم کوپلینگ دینامیکی

مختصات اصلی (نرمال)

اگر در دستگاه مختصاتی معادلات حرکت سیستم کاملاً دی کوپله باشند آنگاه مختصات مورد نظر را مختصات اصلی (نرمال) گویند. یک سیستم جرم و فنر با دو درجه آزادی را در نظر بگیرید (q_1 و q_2) معادلات سیستم در قالب این دستگاه مختصات و به فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0$$ ← معادلات حرکت سیستم

$$m_1\ddot{q}_1 + K_1 q_1 = 0 \rightarrow q_1 = A_1\cos\left(\sqrt{\frac{K_1}{m_1}}\,t\right) + B_1\sin\left(\sqrt{\frac{K_1}{m_1}}\,t\right)$$

$$m_2\ddot{q}_2 + K_2 q_2 = 0 \rightarrow q_2 = A_2\cos\left(\sqrt{\frac{K_2}{m_2}}\,t\right) + B_2\sin\left(\sqrt{\frac{K_2}{m_2}}\,t\right)$$

* رابطه بین مختصات عمومی x_i و مختصات اصلی q_i برای یک سیستم N درجه آزادی به صورت زیر می باشند

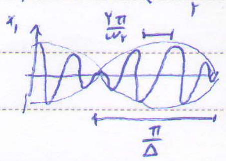
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_N \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix}$$

پدیده ضربان در سیستم های دو درجه آزادی متقارن

در یک سیستم دو درجه آزادی متقارن برای ایجاد پدیده ضربان یک شرط لازم آن است که دو فرکانس طبیعی سیستم نزدیک به یکدیگر و تقریباً با هم برابر باشند

$$\Delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \qquad x_2(t) = \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$$



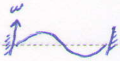
* پریود یا دوره تناوب تکرار عمل ضربان $\frac{\pi}{\Delta}$ می باشند

پدیده ضربان فقط در سیستم های دو درجه آزادی متقارن رخ می دهد

سیستم های پیوسته

ارتعاشات آزاد سیم یا کابل

معادله حاکم بر حرکت سیم (کابل) $c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$ ، $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$



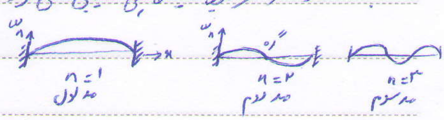
P نیروی کششی ρ چگالی

$$w(x,t) = W(x)\,T(t) \qquad W(x) = A\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) + B\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) \qquad T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

ω با استفاده از شرایط تکیه گاهی تعیین می شود و به عنوان مثال شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار

$$\omega = \frac{n\pi c}{L}$$

$$w_n(x,t) = W_n(x)\,T_n(t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\left[C_n\cos\frac{n\pi c t}{L} + D_n\sin\frac{n\pi c t}{L}\right]$$



در مد Nام، $N-1$ گره در طول سیم تشکیل می شود

ارتعاشات آزاد تیر

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ $c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ارتعاش طولی

E مدول الاستیسیته و ρ چگالی

$c^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$ $c=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ I ممان اینرسی A سطح مقطع تیر

$W(t) = A_1 e^{+\sqrt{\frac{\omega}{c}}x} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{c}}x} + A_3\cos\sqrt{\frac{\omega}{c}}x + A_4\sin\sqrt{\frac{\omega}{c}}x$

$T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$

مثال برای تیر دو سر گیردار $\sqrt{\frac{\omega}{c}}L = n\pi \rightarrow \omega_n = \frac{n^2\pi^2 c}{L^2}$

$W_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\left[C_n\cos\left(\frac{n^2\pi^2 ct}{L^2}\right) + D_n\sin\left(\frac{n^2\pi^2 ct}{L}\right)\right]$

* در یک تیر که در یک انتهای آن حتماً مقدار [illegible] برابر صفر می‌باشد در مد nام، n-1 گره در طول سیم (بند انتها) دارد شکل مدها فقط تابع خصوصیات هندسی و شرایط مرزی سازه می‌باشد. مقادیر فرکانس‌های طبیعی به خصوصیات سیم بستگی دارد

فصل ۶ ـ روش کار مجازی و معادلات لاگرانژ

$\delta W = \sum_i (F_i - m\ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0$ کار مجازی انجام شده

نیروهای اینرسی

معادلات لاگرانژ

یک سیستم N درجه آزادی دارای N مختصه عمومی مستقل $q_1, q_2, \dots, q_N$ می‌باشد که T انرژی جنبشی سیستم و U انرژی پتانسیل سیستم و D انرژی تلف شده، Q_i نیروها و گشتاورهای خارجی عمل کننده بر سیستم و مربوط به مختصه عمومی q_i

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

برای یک سیستم کانزرواتیو و بدون استهلاک معادله لاگرانژ به صورت

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

اگر $L = T - U \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

* فرم دیگر معادله لاگرانژ به صورت روبرو است که Q_i معرف نیروها/گشتاورهای خارجی و استهلاکی است

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$$